7.2 Identifikation der Materialparameter und der Geometrie aus dem Deformationsverhalten der Struktur

7.2.1 Problemstellung

Das Deformationsverhalten einer Struktur ist von den gewählten Materialparametern des betrachteten Materialgesetzes und von der Geometrie abhängig. Die Lösung der Randwertaufgabe, d.h. die Bestimmung des Verschiebungszustandes, kann nach Diskretisierung der Struktur z.B. mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode berechnet werden.

Eine wichtige Problemstellung ist mit der Umkehrung der üblichen Aufgabenstellung der Strukturanalyse gegeben. Hierbei ist das Deformationsverhalten aus Versuchen bzw. aus den Zielvorstellungen des Ingenieurs im Konstruktionsprozeß bekannt und es sind die Materialparameter bzw. die geometrische Form der Struktur gesucht, die ein solches gewünschtes Deformationsverhalten erzeugen. Man spricht in diesem Fall vom *inversen Problem*, das insbesondere aus mathematischer Sicht bezüglich der Existenz und Regularität von Lösungen nicht trivial zu lösen ist. Auf diese mathematischen Aspekte soll hier nicht eingegangen werden.

Ein algorithmisches Lösungskonzept zur Behandlung inverser Probleme, d.h. zur Bestimmung der unbekannten Materialparameter und der unbekannten geometrischen Form, soll im weiteren erläutert werden. Hierzu sind in Abbildung 7.16 die Verschiebung eines signifikanten Punktes der Struktur über der Zeit t aufgetragen. Bei quasistatischen Prozessen wird durch den Parameter t der inkrementelle Belastungsvorgang beschrieben.

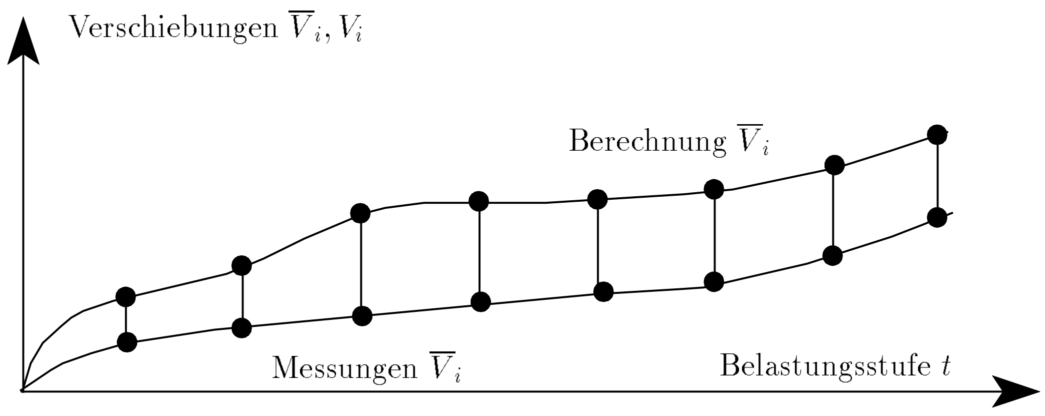

Abbildung 7.16: Lastverschiebungskurve für Messung und Berechnung

Die Kurve $\overline{V}$ mit den diskreten Verschiebungen $\overline{V}_i$ zu den Zeiten (bzw. Lastinkrementen) t_i stellt den vorgegebenen (Messung oder Zielvorstellung des Ingenieurs) Verschiebungszustand dar, während dagegen die Kurve V mit den diskreten Werten V_i die numerisch mit Hilfe der Finite Elemente Methode erzielten Ergebnisse für einen Schätzwert der Materialparameter bzw. der Geometrie angibt.

Das Ziel eines algorithmischen Optimierungsprozesses ist es, die Unterschiede zwischen den vorgegebenen Werten der Messung $\overline{V}_i$ und den Ergebnissen der numerischen Berechnung V_i durch systematische Veränderung der Materialparameter bzw. der Geometrie zu verringern. Dies führt dazu, daß das Fehlerquadrat zwischen $\overline{V}_i$ und V_i als Zielfunktion gewählt wird, d.h.

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{nlast} (V_i - \overline{V}_i)^2 \rightarrow min.} \tag{7.6}$$

Dabei bezeichnet *nlast* die Anzahl der betrachteten Werte bei unterschiedlichen Meßpunkten und unterschiedlichen Laststufen.

Wie bereits erwähnt, ist die Behandlung inverser Probleme sowohl aus theoretischer als auch aus algorithmischer Sicht keineswegs trivial zu behandeln, so daß an dieser Stelle eine sinnvolle Einschränkung der Problematik vorgenommen wird. Um die Anwendungsmöglichkeiten und die Leistungsfähigkeit des entwickelten Programmsystems darzustellen, ist es erlaubt und sinnvoll, den mit der Finite Elemente Methode verbundenen Diskretisierungsfehler aus der Betrachtung auszuschließen. Zu diesem Zweck wird der vorgegebene Verschiebungszustand $\overline{V}_i$ ebenfalls mit der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung der gleichen Diskretisierungsstufe wie bei der späteren Berechnung der Verschiebungen V_i erzeugt. Damit reduziert sich in diesem Fall die Problemstellung der Materialparameter- und Geometrieidentifikation auf ein Wiedererkennen von Materialparametern und Geometrie nach einer Störung. In diesem Fall ist somit auch die Lösbarkeit des inversen Problems gesichert.

Die effiziente algorithmische Behandlung dieser Aufgabe ist notwendige Voraussetzung für die weitere Anwendung auf praxisrelevante Beispiele.

7.2.2 Wiedererkennung der Materialparameter

Als erstes Beispiel wird die Scheibe mit Loch in ihrem Ausgangsdesign gemäß Abbildung 7.1 und der Diskretisierung nach Abbildung 7.9 betrachtet, die unter der angegebenen Streckenlast bis auf die dreifache Ausgangslänge gedehnt wird.

Die Struktur wird im ebenen Spannungszustand als inkompressibles Material mit Hilfe der Verschiebungsmethode, siehe die Abschnitte 2.5, 2.6, 4.1, in einer Darstellung bezüglich der Größen der Momentankonfiguration gerechnet. Die Berechnung ist in diesem Fall mit der reinen Verschiebungsmethode sinnvoll möglich, da die Inkompressibilitätsbedingung zwängungsfrei erfüllt werden kann.

Für das betrachtete Ogden Materialgesetz nach Gleichung (2.75) seien die Materialparameter (Materialdatensatz A)

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1,3000 & \alpha_2 = -2.0000 & \alpha_3 = 5,0000 \\ \mu_1 = 0,6300 & \mu_2 = -0.0100 & \mu_3 = 0,0012 \end{array}}$$

vorgegeben. Damit können die Verschiebungen $\overline{V}_i$ für 5 signifikanter Strukturpunkte (horizontale Verschiebungen der Punkte 1, 2, 5 sowie vertikale Verschiebungen der Punkte 3, 4 und 5 (siehe Abbildung 7.3)) über 10 Laststufen (mit je 20% Dehnung) bis zur Gesamtdehnung von 200 % protokolliert werden. Damit sind insgesamt $nlast = 60$ Informationen über den Deformationszustand vorhanden.

Die Wiedererkennung der ursprünglichen Materialparameter (Materialparameterdatensatz A) aus dem Deformationsverhalten wird durch die Minimierung der Zielfunktion nach Gleichung (7.6), ausgehend von einem um 20% gestörten Datensatz B

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1,5000 & \alpha_2 = -1.6000 & \alpha_3 = 4,0000 \\ \mu_1 = 0,5540 & \mu_2 = -0.0125 & \mu_3 = 0,0015\ , \end{array}$$

untersucht. Da die Werte $\overline{V}_i$ mit dem gleichen FE–Modell in einer Strukturanalyse ermittelt wurden, ist das Minimum $f = 0$ bekannt und kann mit dem Optimierungsmodell erreicht werden.

Zunächst wurde die Wiederermittlung jeweils zweier in Beziehung stehender Materialparameter, d.h. von α_p und μ_p, durchgeführt. Dabei waren die restlichen Materialparameter mit dem exakten Wert aus dem Materialparameterdatensatz A angegeben und nicht als Designvariablen definiert worden. Die Leistungsdaten des Algorithmus sind in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

1. Designvariable α_1, μ_1: siehe Abbildung 7.17
2. Designvariable α_2, μ_2: siehe Abbildung 7.18
3. Designvariable α_3, μ_3: siehe Abbildung 7.19

Die ersten beiden Problemstellungen wurden bei Skalierung der Zielfunktion, Nebenbedingungen und Designvariablen durch den Startwert bearbeitet. Diese Problemformulierung war in der dritten Aufgabenstellung nicht erfolgreich, sondern eine unskalierte Problembehandlung lieferte die besten Resultate. In allen drei Problemstellungen wurden die Materialparameter mit einer hohen Genauigkeit wiedererkannt.

Problem 1: Designvariable α_1, μ_1, Problemformulierung mit Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	60.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	$1.7 \cdot 10^{-6}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	14
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	22
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	14
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.1 \cdot 10^{-1}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.17: Problem 1: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Problem 2: Designvariable α_2, μ_2, Problemformulierung mit Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	60.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	$1.1 \cdot 10^{-5}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	21
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	21
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	21
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$5.5 \cdot 10^{-2}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.18: Problem 2: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Problem 3: Designvariable α_3, μ_3, Problemformulierung ohne Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	11
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	12
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	11
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$5.0 \cdot 10^{-3}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.19: Problem 3: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Für die gleichzeitige Definition aller sechs Materialparameter ergab sich das Iterationsergebnis nach Abbildung 7.20.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	30.6
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	$3.3 \cdot 10^{-4}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	32
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	65
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	32
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$2.3 \cdot 10^{+4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$6.3 \cdot 10^{-5}$

Abbildung 7.20: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus für die Definition aller Materialparameter als Designvariable

In diesem Fall wurde ebenfalls nicht skaliert. Weiterhin wurden für den Strukturpunkt 4, der in der Berechnung zur Ermittlung der Sollwerte die Verschiebung gesteuert hat, Nebenbedingungen eingeführt, d.h. die vertikalen Verschiebungen dürfen nicht wesentlich (Schranke 10^{-5}) von den vorgegebenen Verschiebungen abweichen. Die Einführung dieser Nebenbedingungen wirkte sich positiv auf den Iterationsverlauf aus. Der große Wert für die Norm der Lagrangefunktion ist durch die großen Werte der Penaltyparameter (10^7) für die nicht eingehaltenen Nebenbedingungen zu erklären, der sich dadurch ergibt, daß der gesamte Iterationsverlauf im unzulässigen Bereich verlief.

Nach Beendigung der Iteration ergeben sich die Materialparameter zu

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1,3020 & \alpha_2 = -2.00676 & \alpha_3 = 5,06070 \\ \mu_1 = 0,6323 & \mu_2 = -0.0075 & \mu_3 = 0,00108 \end{array}$$

und sind damit (bis auf μ_2) hinreichend genau wiedergefunden. Für diese Materialparameter ergab sich eine Abweichung von 50 %, die mit der geringen Änderung der Deformation bei Änderung dieser Variablen zu erklären ist. An dieser Stelle tritt der große Unterschied in den nichtskalierten Designvariablen nachteilig in Erscheinung. Zur Behebung dieser Problematik ist eine problemgerechtere Definition des Optimierungsproblems anzugeben, d.h. insbesondere die Vorgabe der Zielwerte der Verformung mit einer höheren Genauigkeit, Vorgabe der Verformungen weiterer Strukturpunkte und eine effektivere Formulierung für den mathematischen Optimierungsalgorithmus. Die Bedeutung und richtige Angabe der Sensitivitäten der Deformation eines hyperelastischen Materialgasetzes unter großen Deformationen bei Veränderung der Materialparameter bleibt von der Problematik hiervon jedoch unberührt.

Damit ist der erfolgreiche Einsatz des Optimierungsalgorithmus und insbesondere die Leistungsfähigkeit der hierfür notwendigen Sensitivitätsanalyse gezeigt worden.

7.2.3 Wiedererkennung der Geometrie

An diesem Beispiel soll die Anwendung des Algorithmus auf die Wiedererkennung der Geometrie aus dem Deformationsverhalten der Struktur dargestellt werden. Zu diesem Zweck wurde für eine beliebig gewählte geometrische Form der Scheibe mit Loch (im weiteren mit „Lösungsgeometrie“ benannt) mit der angegebenen Diskretisierungsstufe (siehe Abbildung 7.21) das Deformationsverhalten für mehrere Strukturpunkte (horizontale Verschiebungen der Punkte 1, 2, 5 und vertikale Verschiebungen der Punkte 3, 4, 5 (siehe Abbildung 7.3) und 4 Laststufen ($50\%, 100\%, 150\%$ und 200% Dehnung) protokolliert. Damit stehen insgesamt $nlast = 24$ Informationen aus dem Deformationszustand der Struktur zur Verfügung.

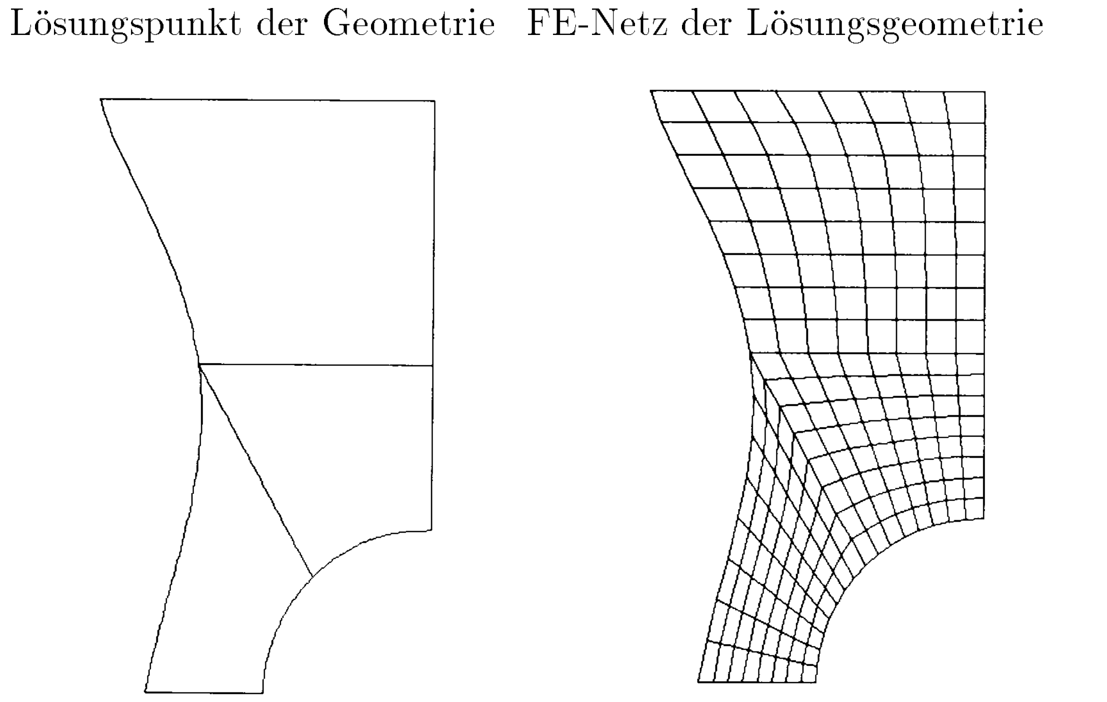

Abbildung 7.21: Lösungspunkt bei der Wiedererkennung der Geometrie und zugehörige Diskretisierungsstufe

Die Optimierungsaufgabe besteht damit in diesem Fall in der Wiedererkennung der geometrischen Form durch die Minimierung der Zielfunktion nach (7.6), d.h. von

$$f = \sum_{i=1}^{nlast} (V_i - \overline{V}_i)^2 \rightarrow min.$$

Als Designvariablen sind die horizontalen Koordinaten der Kontrollpunkte mit den Nummern $1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24$ nach Abbildung 7.7 gewählt worden.

Als Startwert für die Optimierungsberechnung (im weiteren mit „Startgeometrie" benannt) wurde die Geometrie nach Abbildung 7.1 gewählt. Für die numerischen Berechnungen wurde sowohl für die Startgeometrie als auch für die Lösungsgeometrie die identische Verfeinerungsstufe, d.h. eine dreimalige gleichmäßige Verfeinerung ausgewählt (siehe Abbildung 7.22).

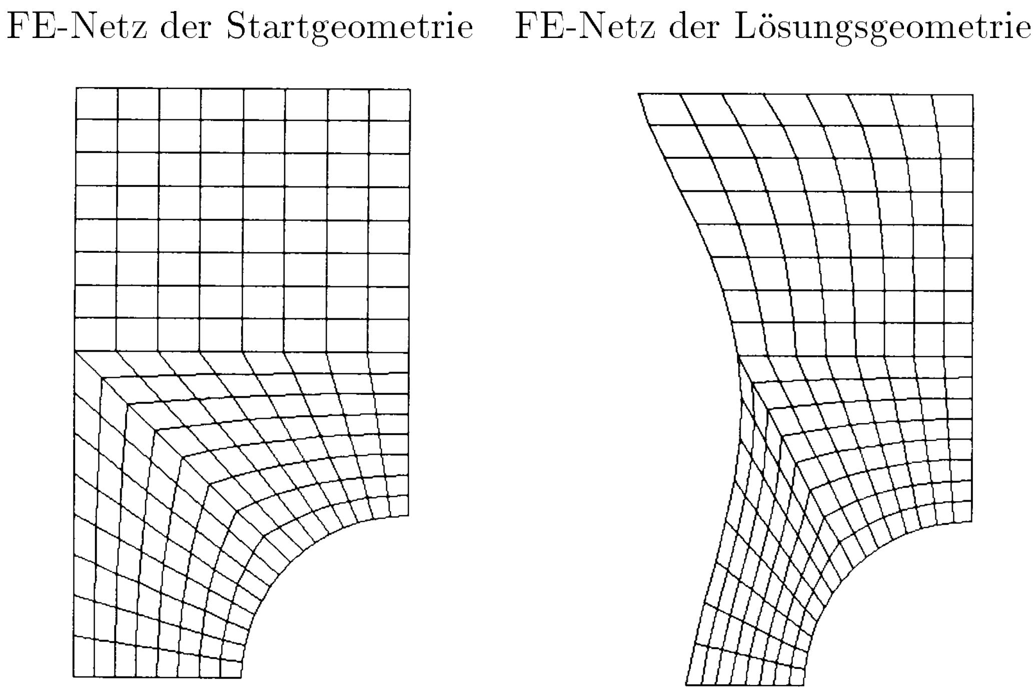

Abbildung 7.22: FE-Netze für die Start- und Lösungsgeometrie

Die wesentlichen Leistungsdaten des Iterationsalgorithmus zur Identifikation sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	24.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	$8.0 \cdot 10^{-7}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	21
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	21
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	21
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.9 \cdot 10^{-4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$9.0 \cdot 10^{-16}$

Abbildung 7.23: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Auf zwei wichtige Aspekte für den Einsatz adaptiver FE-Verfahren für die Formoptimierung soll an dieser Stelle eingegangen werden. Zunächst sei die Veränderung des Tragverhaltens einer Struktur bei Optimierung erwähnt, die sich beim Einsatz adaptiver FE-Verfahren durch die Ausbildung weiterer oder gänzlich anderer Adaptionszonen bemerkbar macht. Zur Verdeutlichung wurde auf die Ausgangsgeometrie und die Lösungsgeometrie die gleichen Adaptionskriterien angewandt, die unterschiedliche adaptive Netze liefert. Der effektive Einsatz der Adaptionsverfahren innerhalb der Formoptimierung ist von großer Bedeutung für den algorithmischen Verlauf.

Adaption für Startgeometrie Adaption für Lösungsgeometrie

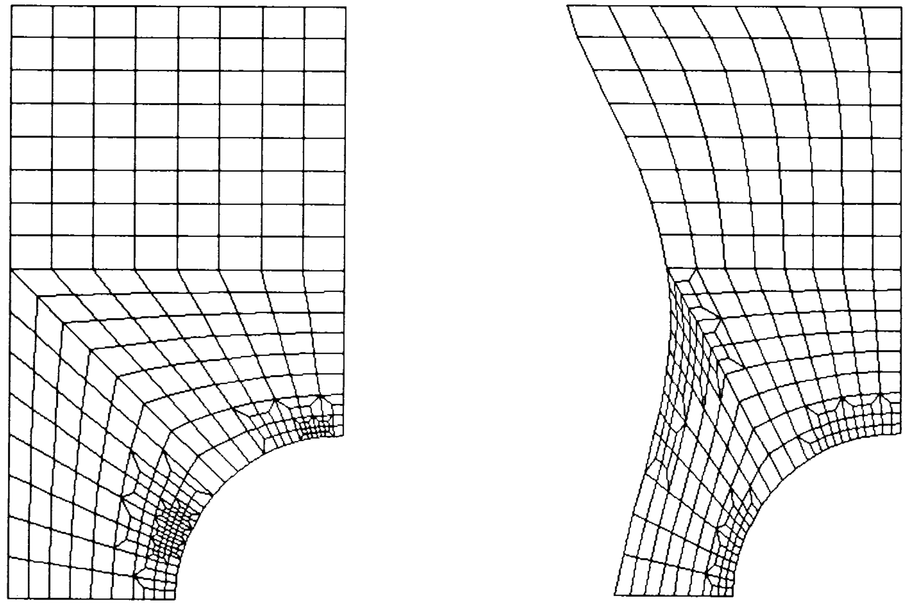

Abbildung 7.24: FE-Netze für die Start- und Lösungsgeometrie

Weiterhin ist die sinnvolle Definition der Netzveränderung bei Geometrieänderung zu erwähnen, die in der vorgenommenen Implementation von der Wahl der CAGD-Flächenbeschreibung abhängt.

Bei der Verwendung einer Bézier-Flächen-Beschreibung, wobei die inneren Kontrollpunkte der Fläche 3 bei Veränderung der äußeren Linie konstant bleiben, ergibt sich das Netz nach Abbildung 7.25. Man erkennt, daß sich im Extremfall großer Lageänderungen der Kontrollpunkte der Randlinie sehr stark verzerrte Elemente ausbilden. Die in der optimalen Form unbefriedigende Form der Elemente im Grenzbereich der Geometrieflächen wird durch die Wahl einer COONS-Beschreibung deutlich verbessert.

Sind die Geometrieänderungen jedoch sehr groß, so sind die in Abschnitt 6.4 genannten Maßnahmen (Neuvernetzung, Anwendung geometrischer Adaptionskriterien, Netzvergröberungsstrategien) anzuwenden.

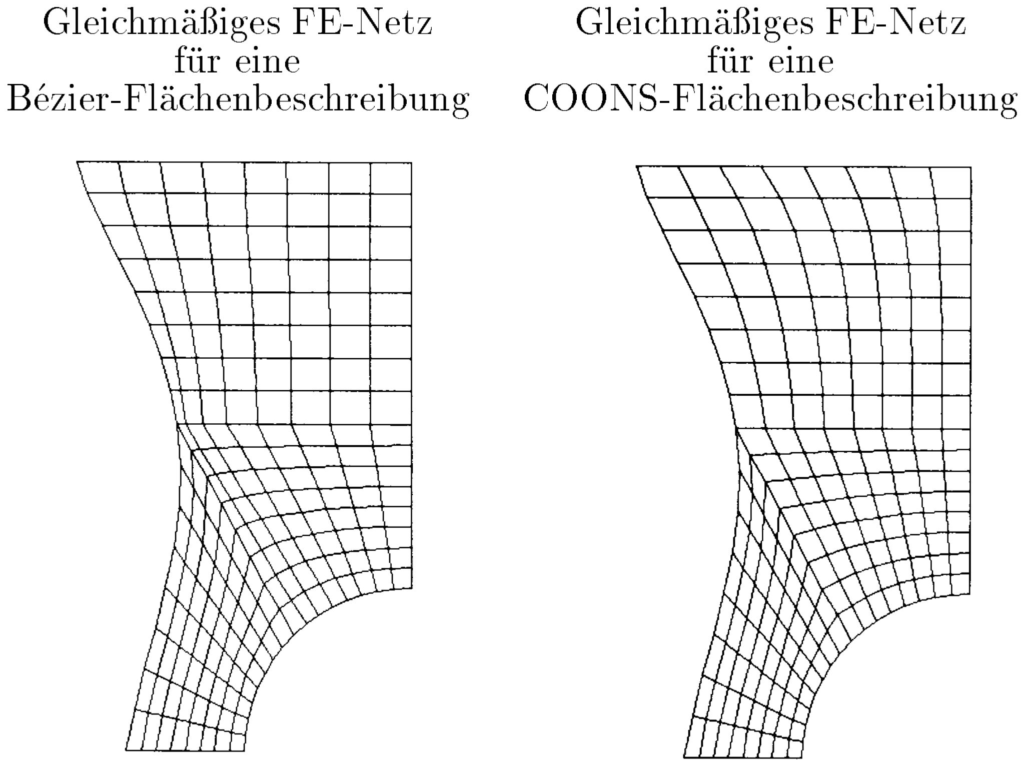

Abbildung 7.25: FE-Netze der Lösungsgeometrie für eine Bézier- bzw. COONS-Flächenbeschreibung

Der Spannungs- und Deformationszustand der Lösungsgeometrie nach Abbildung 7.21 wird an dieser Stelle nicht dokumentiert, da er sich wegen der ähnlichen geometrischen Form zur Struktur nach Abbildung 7.21 nicht wesentlich von den in den Abbildungen 7.13 und 7.14 angebenenen Deformations- und Spannungszuständen unterscheidet.