

Veränderungen in Argumentationsstrukturen durch das Aufschreiben eines Beweises

Argumentationen und Beweise können auf vielfältige Arten und Weisen auftreten, z. B. mündlich erarbeitet oder schriftlich vorgelegt werden. Das Beweisen einer mathematischen Aussage ist häufig mehrschrittig sowie komplex. Die mündliche und die schriftliche Version eines Beweises können sich daher sehr voneinander unterscheiden. Die mündliche Version zeigt den Prozess der Beweisfindung mit allen Irrwegen, die schriftliche Version ist das Endergebnis, das im Bestfall formalen Kriterien entspricht (Wittmann, 2014).

In diesem Beitrag wird näher auf die Unterschiede zwischen der mündlichen und schriftlichen Version ein und desselben Beweises eingegangen und dargestellt, wie sich die globalen Argumentationsstrukturen von der mündlichen zur schriftlichen Version verändern. Des Weiteren wird der Einfluss konzeptioneller Mündlichkeit und Schriftlichkeit (Koch & Oesterreicher, 1985) auf die Argumentationsstrukturen betrachtet.

Theorie

Um Argumentationen strukturiert nachvollziehen und rekonstruieren zu können, entwickelte Toulmin (1975) ein Schema, um die Funktion von Aussagen in einer Argumentation darstellen zu können (vgl. Abbildung 1a). Bezogen auf seine mathematikdidaktische Forschung im Grundschulbereich verkürzte Krummheuer (1995) das Schema auf seinen Kern: Datum, Konklusion, Garant und Stützung (vgl. Abbildung 1b).

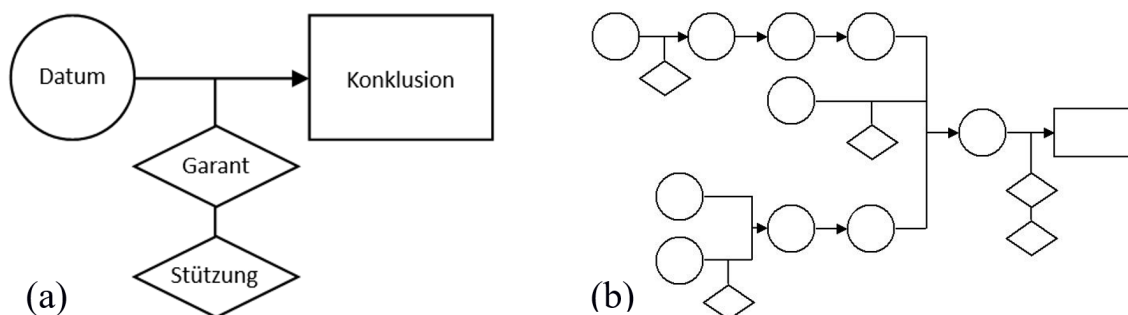


Abbildung 1: (a) verkürztes Toulminschema nach Krummheuer (1995),
(b) Beispiel einer globalen Argumentationsstruktur

Zur Untersuchung größerer Argumentationen können die einzelnen lokalen Argumentationsschritte zu einer globalen Argumentationsstruktur verbunden werden (Knipping & Reid, 2019). Durch Betrachtung der verschiedenen expliziten Argumentationsstränge, ihren Verknüpfungen und ihrer Wirkung aufeinander können zudem die globalen Strukturen in ihrer Komplexität unterschieden werden (Abels, im Druck)

Nicht nur der strukturelle Aufbau von Argumentationen und Beweisen ist wichtig, auch der mathematische Inhalt sowie die sprachliche Darstellung sind von Bedeutung. Argumentationen können durch konzeptionelle Mündlichkeit bzw. Schriftlichkeit geprägt sein (vgl. Koch & Oesterreicher, 1985). *Konzeptionell mündliche* Argumentationen sind durch direkte Interaktionen zwischen erstellender und rezipierender Person geprägt, es gibt wenig Planung, Elaboriertheit und Komplexität. Sie zeichnen sich durch Prozesshaftigkeit und Vorläufigkeit aus. Bei *konzeptionell schriftlichen* Argumentationen gibt es eine Trennung zwischen erstellender und rezipierender Person. Sie sind geplant, endgültig und reflektiert. Bei konzeptioneller Mündlichkeit und Schriftlichkeit handelt es sich nicht um zwei klar voneinander trennbare Konzepte, zwischen ihnen besteht stattdessen ein Kontinuum. Auch ist nicht jede mündliche Argumentation konzeptionell mündlich, nicht jede schriftliche Argumentation konzeptionell schriftlich.

Methode

Im Rahmen einer Interviewstudie wurden die Beweise von vier Studierendenpaaren untersucht. Die Studierenden befanden sich im letzten Masterstudienjahr des Grundschullehramts und hatten zuvor an einer Vorlesung zur Elementargeometrie teilgenommen. Aufgabe der Studierenden war es, zwei elementargeometrische Aussagen schriftlich zu beweisen. In den meisten Fällen diskutierten die Studierenden zunächst ihre Idee und arbeiteten den Beweis mündlich aus, bevor sie ihn aufschrieben. Nur bei einem Beweis fanden die mündliche Beweisfindung und die Verschriftlichung zeitgleich statt.

Um die Komplexität der Argumentationsstrukturen der mündlichen und schriftlichen Version untersuchen und vergleichen zu können, wurde zunächst die Argumentation der Beweise mit Hilfe des Toulminschemas (Toulmin, 1975) rekonstruiert, als globale Argumentationsstrukturen dargestellt (vgl. Reid & Knipping, 2010) und die Struktur analysiert. Im Anschluss wurden die globalen Strukturen in ihrer Komplexität verglichen sowie eingeschränkt auch inhaltlich betrachtet und in Bezug auf konzeptionelle Mündlichkeit und Schriftlichkeit untersucht, um Änderungen in den Strukturen von der mündlichen und schriftlichen Version zu klären.

Ergebnisse

Bei allen sieben betrachteten Beweisen zeigen sich Änderungen in den globalen Argumentationsstrukturen zwischen der mündlichen und der schriftlichen Version, in denen sich auch eine Veränderung in der Komplexität der Argumentation widerspiegelt (vgl. Abels, im Druck).

In sechs Fällen ist die schriftliche Version komplexer als die mündliche. Die Untersuchung der Argumentationen zeigt mögliche Gründe für diese Veränderung. In der mündlichen Version wird in der Regel noch nach einer Beweisidee gesucht, mehrere Zugänge werden angerissen und dann wieder verworfen. Dies führt vermehrt zu weniger komplexen Strukturen. In der schriftlichen Version hingegen wird nur eine Idee verwendet. Zudem werden Aussagen in der Regel durch Aufschreiben explizit. In der mündlichen Argumentation wird viel "vergessen", was zuvor schon genannt worden ist. Einige Aussagen werden von weiteren Personen anders verstanden als die sprechende Person sie gemeint hat. Andere Inhalte werden nicht versprachlicht, wenn sie z. B. aus Skizzen für alle ersichtlich sind. Das explizite Aufschreiben führt in der schriftlichen Version zu weniger Missverständnissen und einer weniger löchrigen bzw. impliziten Argumentation. Dies führt so zu einer umfassenderen Argumentationsstruktur als in der vorherigen mündlichen Version des Beweises.

Das Aufschreiben einer Argumentation kann aber auch das Gegenteil bewirken, wie einer der untersuchten Beweise zeigt. Hier war die mündliche Version des Beweises komplexer als die schriftliche Version. Im Vergleich zu den anderen Beweisen könnte ein Grund dafür sein, dass die Studierenden schnell die "richtige" Idee für den Beweis finden und ihn mündlich sehr detailliert ausarbeiten. Das mündlich bereits explizite und geteilte Wissen wird von ihnen dann als gegeben angenommen und in der schriftlichen Version ihres Beweises nicht erneut genannt. Dadurch verringert sich die Komplexität der Struktur.

Hier zeigt sich der Einfluss konzeptioneller Mündlichkeit und Schriftlichkeit auf die Argumentationen. Bei den Beweisen, deren schriftliche Version komplexer als die mündliche Version ist, zeigt sich eine Verschiebung des Konzepts von der Mündlichkeit in Richtung Schriftlichkeit, auch wenn keine der schriftlichen Versionen als rein konzeptionell schriftlich bezeichnet werden kann. Bei dem Beweis, dessen mündliche Version komplexer als die schriftliche Version ist, zeigt sich hingegen, dass die mündliche Version bereits weniger konzeptionell mündlich und mehr konzeptionell schriftlich ist. Hier kann durch die Veränderung des Konzepts nicht an Komplexität in der Argumentation gewonnen werden.

Ausblick

Diese Untersuchung zeigt, dass die Unterschiede zwischen der mündlichen und schriftlichen Version eines Beweises groß sein können. Für die Veränderung in der Komplexität der globalen Argumentationsstrukturen ergeben sich vielfältige Gründe. Einen großen Einfluss haben die Beschränkung auf einen Beweisansatz sowie das Explizieren von Aussagen in schriftlichen Beweisen. In diesem Zusammenhang scheint die genauere Analyse konzeptioneller Mündlichkeit und Schriftlichkeit in Beweisen interessant, die dem Ideal konzeptionell schriftlicher aufgeschriebener Beweise und konzeptionell mündlicher gesprochener Argumentationen in der Regel nicht entsprechen, da das Konzept einen Einfluss auf die Komplexität zu haben scheint.

Literatur

- Abels, N. (im Druck). *Argumentation und Metakognition bei geometrischen Beweisen und Beweisprozessen - Eine Untersuchung von Studierenden des Grundschullehramts*. Springer.
- Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Hrsg.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (S. 3–31). Springer International Publishing.
- Koch, P., & Oesterreicher, W. (1985). Sprache der Nähe—Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. In O. Deutschmann, H. Flasche, B. König, M. Kruse, W. Pabst, & W.-D. Stempel (Hrsg.), *Romanistisches Jahrbuch* (Bd. 36, S. 15–43). de Gruyter.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education—Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.
- Toulmin, S. E. (1975). *Der Gebrauch von Argumenten* (U. Berk, Übers.; 2. Aufl.). Beltz Athenäum.
- Wittmann, G. (2014). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 35–54). Springer.