

## **Transitionen zwischen Vektorobjekten in Schulbüchern**

Vektoren werden im deutschen Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II eingeführt, um anschließend als Werkzeug für das Betreiben der analytischen Geometrie zu dienen. Dafür thematisieren die Schulbücher üblicherweise die Konzepte der 2-Tupel bzw. 3-Tupel, Verschiebungen und Pfeilklassen, jedoch in unterschiedlicher mathematischer Präzision. Eine zentrale Herausforderung für Schüler\*innen ist der situationsbezogenen adäquate Umgang mit den genannten Konzepten, je nach Anforderung der Aufgabe. Dabei stellt sich die Frage, wie Schulbücher im Einzelnen den Umgang mit den Übergängen zwischen den Konzepten einführen, welche Praxis dazu in den Aufgaben aus dem jeweiligen Schulbuch etabliert wird und wie diese beiden Komponenten sich aufeinander beziehen. Das im Folgenden Vorgestellte ist Teil einer Studie zur Analyse des Vektorkonzepts in mehreren deutschen Schulbüchern.

### **Theoretischer Rahmen**

Vektoren in der Schule lassen sich auf verschiedene Arten einführen, als Verschiebungen (genauer Parallelverschiebungen), als Pfeilklassen oder als  $n$ -Tupel. Wichtig für den Schulunterricht ist auch das Zusammenspiel zwischen den verschiedenen Vektormodellen (Henn & Filler, 2015, S. 113). Für die Verwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie müssen Schüler\*innen mit Vektoren in Form von Tupeln rechnen, mit einem geometrischen Vektorbegriff umgehen und beides je nach Bedarf in die andere Form übertragen können.

Die Anthropologische Theorie der Didaktik, im Folgenden als ATD bezeichnet, ist ein von Yves Chevallard begründetes theoretisches Framework, das sich aus diversen Bestandteilen zusammensetzt und zum Beispiel von Rasmussen (2016) zusammengefasst wird. Für den Teil der hier vorgestellten Studie sind davon Institutionen, Referenzmodelle und Praxeologien relevant. Als Institutionen im Sinne der ATD können u. a. verschiedene Personenkreise verstanden werden, zum Beispiel konkrete Schulklassen oder auch Schüler\*innen im Allgemeinen. Referenzmodelle sollen dabei helfen, die Perspektiven forschender Personen zu einem Thema explizit darzustellen, um zu vermeiden, dass diese Perspektiven implizit eine große Rolle im Verborgenen spielen. Das hilft zum Beispiel dabei, eine mathematische Kritik am Lernmaterial entsprechend einzuordnen, während dessen Umsetzung aus der institutionellen Perspektive, für die es erstellt wurde, ganz andere Anforderungen, nicht zuletzt die Einhaltung von Lehrplänen, erfüllen soll.

Zuletzt sind Praxeologien ein Werkzeug zur strukturierten Betrachtung von Lerngegenständen. Auf der obersten Ebene wird hier zwischen der Praxis und dem Logos unterschieden (vgl. Peters et al., 2018). Die Schulbücher werden unter dieser dualen Perspektive analysiert.

### **Forschungsfrage**

Wir fokussieren in diesem Beitrag die folgende Forschungsfrage: Wie gehen Schulbücher mit den Übergängen zwischen den verschiedenen Vektorkonzepten in den gestellten Aufgaben um?

### **Methodisches Vorgehen**

Im Rahmen der Studie wurde zunächst ein Referenzmodell erarbeitet, welches basierend auf Filler (2011), aber in deutlich erweiterter Form Vektoren als Pfeilklassen, als Tupel und als Verschiebungen aufschlüsselt sowie die isometrisch-isomorphen Beziehungen zwischen diesen Arten von Vektoren. Das Modell ist dabei ein Referenzrahmen für die zu Grunde liegende Mathematik zur Einführung von Vektoren und ausdrücklich kein Vorschlag für die Auswahl von zu unterrichtendem Wissen über Vektoren in der Schule. Aus der Perspektive der ATD werden dann zunächst die Erklärungen aus den Schulbüchern u. a. im Abgleich mit dem Referenzmodell analysiert, wodurch das explizite zur Verfügung gestellte Logos (know why) zusammen mit den angegebenen Techniken (know how) für die praktische Anwendung in den Aufgaben der Schulbücher rekonstruiert wird. Anschließend wird die etablierte Praxis in den Schulbüchern durch eine ausführliche Analyse der Aufgaben rekonstruiert. In der Studie werden insgesamt 3 gängige Schulbücher aus Deutschland und ein Schulbuch aus Österreich untersucht. Mit dieser Analyse gelingt es, subtile Unterschiede in den Schulbüchern herauszuarbeiten, die für Verständnisschwierigkeiten auf Seiten der Schüler\*innen verantwortlich sein könnten. Nachfolgend werden einige Ergebnisse aus der Analyse bezogen auf die Einführung von Vektoren im Schulbuch „Elemente der Mathematik“ (Griesel et al., 2014) vorgestellt.

### **Ergebnisse**

Grundsätzlich ist es für Schulbücher wichtig im Zusammenhang mit Vektoren Pfeile, Tupel und Verschiebungen in den Blick zu nehmen und wie die Verbindungen zwischen ihnen eingeführt werden. Im Schulbuch „Elemente der Mathematik“ werden Vektoren als Verschiebungen im Raum motiviert und anschließend als 3-Tupel definiert, die Verschiebungen darstellen. Verschiebungen werden nach dieser Definition durch Vektoren beschrieben bzw. gehören zu einem Vektor, so der Sprachgebrauch im Schulbuch. *Übergänge zwischen 3-Tupeln und Verschiebungen* sind im Kontext des Schulbuches also naheliegend, zu einer geometrisch gegebenen Verschiebung

muss definitionsgemäß das passende 3-Tupel gefunden werden und umgekehrt.

Pfeile werden in dem Schulbuch als Objekte in einem Koordinatensystem eingeführt, die insbesondere einen Anfangs- und Endpunkt haben. Die Charakterisierung von Pfeilen als Paar von Anfangs- und Endpunkt wurde auch im Referenzmodell verwendet und eignet sich sogar zu einer koordinatenfreien Etablierung von Pfeilklassen. *Der Übergang zwischen Pfeilen und Tupeln* verbindet Geometrie und Arithmetik durch die Betrachtung von Punktkoordinaten. Für Pfeile wird erläutert, wie aus einem Paar von Anfangs- und Endpunkt das zugehörige 3-Tupel, also der Vektor, berechnet werden kann. Die Rückrichtung der Zuordnung wird nicht explizit erklärt, nur, dass es mehr als einen Pfeil gibt, der zu einem 3-Tupel gehört. Auf die Eigenschaft, dass die Pfeile zu einem Tupel parallel zueinander, gleich gerichtet und gleich lang sein müssen, wird beispielhaft eingegangen, ohne explizit zu sagen, dass dies für alle Pfeile, die zu dem Tupel gehören, gilt. Nur in einer Aufgabe werden die Schüler\*innen anschließend aufgefordert, mehrere Pfeile zu zeichnen, die zu einem vorgegebenen Tupel gehören. Andererseits müssen in den Aufgaben auch keine Pfeildarstellungen einem konkreten Tupel zugeordnet werden. Der bekannten Identifikation von Vektoren und Pfeilen auf Seiten der Schüler\*innen wird damit wenig vorgebeugt. Die Möglichkeit, einem Vektor klar eine Menge von Pfeilen zuzuordnen, wird nicht elaboriert, obwohl die Voraussetzungen für die Einführung dieses „naiven“ Pfeilklassenkonzepts (ohne Thematisierung von Äquivalenzrelationen) gegeben wären und für Aufgabenlösungen nützlich (problemorientierte Wahl eines geeigneten Pfeilrepräsentanten für den Vektor).

Zuletzt ist *der Übergang zwischen Pfeilen und Verschiebungen* zu betrachten. Wird zu einer Verschiebung ein Punkt und sein Bildpunkt geometrisch betrachtet, lässt sich ein entsprechender Pfeil zwischen beiden Punkten zeichnen, dessen Spitze am Bildpunkt anliegt. Im Schulbuch helfen Pfeile so dabei, Verschiebungen geometrisch darzustellen. Umgekehrt können Pfeile als Verschiebungspfeile gedeutet werden, woraus sich eine Verschiebung ergibt. Im Schulbuch wird der Übergang nicht in Form von Aufgaben geübt. Es wird also keine Praxis dazu etabliert.

### **Fazit und Diskussion**

Es zeigt sich zusammenfassend, dass im analysierten Schulbuch „Elemente der Mathematik“ Verschiebungen sowohl eng mit Pfeilen als auch mit Tupeln verbunden sind. Mit Pfeilen ist die Verbindung in beiden Richtungen geometrisch anhand von Punktepaaren gegeben und für Schüler\*innen entsprechend naheliegend. Tupel werden mit Verschiebungen ebenso über Punktepaare verbunden, wobei dafür die Koordinaten der Punkte betrachtet

werden müssen. Selbiges gilt für die Verbindung von Tupeln und Pfeilen. Bei der Verbindung von Tupeln mit der Geometrie bleibt es eine Schwierigkeit für Schüler\*innen, dass sich bei der Betrachtung eines Tupels als Vektor das Tupel aus allen zugehörigen Punktepaaren eindeutig berechnen lässt, aber in der umgekehrten Richtung Punktepaare nur exemplarisch und nicht eindeutig bestimmt werden können (solange nicht mindestens ein Punkt vorgegeben ist). Eine systematische Praxis zu den Übergängen zwischen den Objekten wird nicht etabliert, was zu Problemen führen kann, da diese später im Sinne des flexiblen Umgehens mit den Objekten verwendet werden, als wäre eine isometrisch-isomorphe Beziehung etabliert worden, die dies rechtfertigt.

Einerseits ist der rekonstruierte Umgang mit den Übergängen von Vektoren nicht das unterrichtete Wissen, da Schulbücher für den Einsatz im Unterricht gedacht sind und somit die wichtige Rolle der Lehrperson hinzukommt, die sich mehr oder weniger stark am Schulbuch orientiert. Aus der vorliegenden Analyse kann also noch nicht auf realen Unterricht geschlossen werden. Andererseits sind Schulbücher wichtige Artefakte im Unterricht, auf die Schüler\*innen zum Nachschlagen und Lernen zurückgreifen, und auch Lehrpersonen können sich für die Gestaltung ihres Unterrichts daran orientieren. Im weiteren Verlauf der Studie wurden u. a. zusätzliche Schulbücher analysiert, sodass verschiedene Zugänge mit dem fachdidaktischen Problem der Verbindung der verschiedenen Konzepte verglichen und kontrastiert werden konnten. In den Analysen zu den weiteren Schulbüchern zeigt sich u. a., dass vor allem der Umgang der Schulbücher mit Pfeilklassen bzw. Pfeilen im Zusammenhang von Vektoren von besonderer Bedeutung ist.

#### Literatur

- Griesel, H., Gundlach, A., Postel, H., & Suhr, F. (Hrsg.). (2014). *Elemente der Mathematik: Nordrhein-Westfalen, Einführungsphase*. Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH.
- Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer-Verlag.
- Peters, J., Khellaf, S., & Hochmuth, R. (2018). Anthropologische Theorie der Didaktik in der fachdidaktischen Lehre – Potentiale durch Kontrastierung zum Kompetenzmodell. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 2095–2096). WTM-Verlag.
- Rasmussen, K. (2016). *Praxeologies and Institutional Interactions in the Advanced Science Teacher Education*. University of Copenhagen.