

Kathrin AKINWUNMI, Dortmund

Mathematische Muster verallgemeinern in der Grundschule

1. Über mathematische Muster kommunizieren

Die Ansicht, dass das Entdecken, Beschreiben und Begründen (sowie auch das Entwickeln, Weiterentwickeln und Nutzen) mathematischer Muster und Strukturen ein fester Bestandteil eines jeden Mathematikunterrichts sein sollte, hat sich in der Mathematikdidaktik bereits fest etabliert und in zunehmendem Maße auch Einzug in die Praxis des Mathematikunterrichts gehalten. Auf der Grundlage eines Verständnisses der Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern (Devlin 2003) ist die aktive Auseinandersetzung mit Mustern ein zentrales Element des Unterrichts für alle Stufen und Gebiete vom Kindergarten bis zur Hochschule geworden (Wittmann & Müller 2008).

Wenn Lernende im Unterricht über ihre entdeckten oder auch selbst entwickelten Muster sprechen möchten, so stehen sie vor der Anforderung, über etwas sehr mathematikspezifisches zu kommunizieren – über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen, die einen allgemeinen Charakter besitzen, der über die gegebenen oder sichtbaren Objekte hinausgeht (Steinbring 2005). Für diese anspruchsvolle Aufgabe stehen Mathematikerinnen und Mathematikern algebraische Ausdrücke wie Variablen, Terme oder Gleichungen zur Verfügung, mit deren Hilfe sie die Sachverhalte auf allgemeiner Ebene erforschen und auch darstellen können (Malle 1993). Da Grundschulkindern jedoch noch keine Kenntnisse von Variablen besitzen, um mathematische Muster zu beschreiben, stehen sie vor der schwierigen Anforderung, mit den ihnen verfügbaren Mitteln das Allgemeine im Besonderen beschreiben zu müssen (Steinbring 2005). Diese Tätigkeit des Verallgemeinerns mathematischer Muster durchzieht als grundlegende Tätigkeit den gesamten Mathematikunterricht, in dessen Zentrum die Beschäftigung mit Mustern und Strukturen steht.

Im Folgenden werden Ergebnisse eines Dissertationsprojekts (Akinwunmi 2012) dargestellt, welches Verallgemeinerungsprozesse im Rahmen von 30 klinischen Interviews untersuchte. In diesen wurden Lernenden der vierten Jahrgangsstufe Aufgaben zur Entdeckung und Beschreibung mathematischer Muster vorgelegt. Mit Hilfe Steinbrings Theorie zur Konstruktion mathematischen Wissens (Steinbring 2005) wurden die Verallgemeinerungen der Lernenden aus epistemologischer Perspektive in den Blick genommen. Der vorliegende Beitrag fokussiert im Folgenden auf die Darstellung der sprachlichen Mittel, welche die Lernenden beim Verallgemeinern

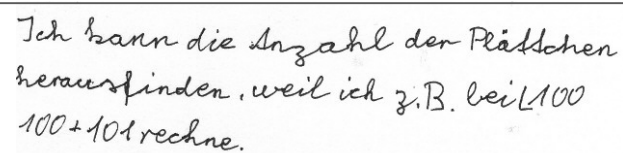
mathematischer Muster nutzen und welche in den Beschreibungen die Rolle von Variablen und Termen einnehmen.

2. Verallgemeinerungsweisen

In der Analyse der Untersuchungsdaten zeigt sich, dass Kinder bei der Verallgemeinerung wiederkehrende Beschreibungsmuster verwenden. So werden im Folgenden fünf Kategorien für Verallgemeinerungsweisen vorgestellt, welche sich in den klinischen Interviews als von den Lernenden selbstständig verwendete Beschreibungsmuster finden lassen. Sie zeigen auf, welche sprachlichen Mittel die Kinder nutzen, um mathematische Muster und Strukturen über die sichtbaren Objekte hinweg zu beschreiben.

Angabe eines repräsentativen Beispiels

Lernende geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses explizit als solches.

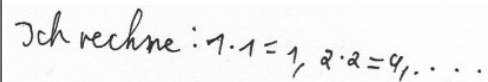


Ich kann die Anzahl der Plättchen herausfinden, weil ich z.B. bei 100 100+101 rechne.

Die Kennzeichnung eines Beispiels als solches zeigt auf, dass es noch andere Fälle bzw. Objekte gibt, die durch das gegebene Beispiel nicht dargestellt werden, aber existieren. Es wird vom Gegenüber, dem Empfänger der Aussage, gefordert, dass er das konkrete Beispiel der Aussage erkennen und auf andere Fälle als die des gegebenen Beispiels beziehen kann.

Aufzählung mehrerer Beispiele

Lernende zählen mehrere Beispiele auf und verweisen gegebenenfalls auf einen Fortlauf.

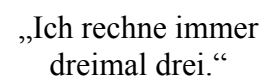


Ich rechne: $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, ...

Durch die Angabe von generischen Beispielen ist es möglich, nicht nur die Existenz weiterer Fälle, sondern ebenfalls eine Beziehung der angegebenen Beispiele untereinander anzudeuten. So wird beispielweise vom Gegenüber erwartet, dass dieser den Abstand der auftretenden Fälle rekonstruiert und in der Lage ist, die Folge der generischen Beispiele fortzusetzen. Die Fortsetzbarkeit der Beispielfolge wird von den Kindern teilweise beschrieben, teilweise auch nicht erwähnt.

Quasi-Variablen

Lernende verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.



„Ich rechne immer dreimal drei.“

Es kann beobachtet werden, dass Kinder konkrete Zahlen mit sprachlich verallgemeinernden Mitteln verwenden, um allgemeine Sachverhalte zu beschreiben. Die konkreten Zahlen stehen ohne Angabe eines Beispiels da-

bei aber nicht nur für die gewählten Zahlen, sondern sind als Platzhalter zu verstehen.

Bedingungssätze

Lernende verwenden Bedingungssätze.

„Wenn da drei steht,
dann rechne ich dreimal drei.“

Bedingungssätze ermöglichen es, sich zunächst auf einen konkreten Fall zu beziehen und dabei direkt andere mögliche Fälle im Blick zu behalten. Es wird zwar nur ein Fall unter der angegebenen Bedingung beschrieben, jedoch wird vom Gegenüber gefordert, dass er zwischen den konkreten Elementen, welche die Bedingung betreffen, und allgemeinen Elementen unterscheidet, welche über die gegebene Bedingung hinweg allgemein gelten sollen.

Variablen

Lernende verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.

Die Zahl die das steht
muss du + 1 rechnen und
dann noch mal + die eigene Zahl.

Eine weitere Verallgemeinerungsmöglichkeit stellt die spontane Verwendung von Zeichen mit Variablencharakter dar, bei der die Lernenden auf Wörter (wie hier die Beschreibung für den Term $(n+1)+n$) oder Symbolen wie „? \cdot ?“ aus verschiedenen Kontexten zurückgreifen.

Die hier vorgestellten Kategorien stellen in der Untersuchung vorgefundene *Möglichkeiten* der Kinder für *Verallgemeinerungen* dar. Diese dürfen dabei nur auf einzelne Phasen eines Beschreibungsprozesses bezogen verstanden werden, nicht als Kompetenzen der Kinder. Sie werden je nach Komplexität des zu beschreibenden Gegenstandes, des in der Situation herangezogenen Referenzkontextes und der den Kindern spontan zur Verfügung stehenden sprachlichen Mittel ausgewählt und können von ein und demselben Kind nacheinander oder auch während eines Beschreibungsprozesses in wechselnder Form verwendet werden.

3. Fazit

Im Mathematikunterricht dienen Verallgemeinerungen verschiedenen Zielen. Vor diesem Hintergrund werden die hier dargestellten Verallgemeinerungsweisen abschließend betrachtet.

Ziel 1: Mit Verallgemeinerungen werden allgemeingültige Aussagen formuliert, das heißt eine Beschreibung gilt für alle Objekte des Musters bzw. von gleicher Struktur. Hinsichtlich dieses Kriteriums weisen die ersten vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen auf. Sie treffen meist nur Aussagen für ein konkretes Beispiel oder unter einer speziellen Bedingung und verweisen nur darauf, dass es noch andere Fälle gibt, auf welche die getroffene

Aussage bezogen und verändert werden muss. Unter den vorgefundenen Verallgemeinerungsweisen kann nur die Verwendung von Wörtern und Zeichen mit Variablencharakter dem oben genannten Anspruch genügen, allgemeingültige Aussagen zu treffen. Der Grund hierfür liegt in der besonderen Funktion der Variablen als Unbestimmten oder Veränderlichen, mit Hilfe eines Zeichens auf mehrere Objekte, gleichzeitig oder in einer zeitlichen Abfolge, zu verweisen.

Ziel 2: Die Beschreibung verdeutlicht den allgemeinen Charakter des Musters, dient also dem ‚Allgemein-verstanden-Werden‘ in der Interaktion. Wenn Lernende ihre Erkenntnisse zu Mustern und Strukturen mitteilen möchten, dann müssen sie eine Möglichkeit finden, das Muster so zu beschreiben, dass ihren Kommunikationspartnern deutlich wird, dass sie sich nicht nur auf ein konkretes Objekt beziehen, sondern auf die den Objekten aufgeprägte Struktur verweisen. Aus diesem Blickwinkel stellen alle fünf Verallgemeinerungsweisen Möglichkeiten dar, um über Muster und Strukturen zu kommunizieren und deren allgemeinen Charakter zu verdeutlichen. Bei allen Verallgemeinerungsweisen wird der Kommunikationspartner aufgefordert, die Beschreibung über ein oder mehrere konkrete Beispiele hinaus zu verstehen.

Während dem Ziel der allgemeingültigen Beschreibung nur die Verwendung von Wörtern oder Zeichen mit Variablencharakter genügen kann, sind alle Verallgemeinerungsweisen dazu geeignet, den allgemeinen Charakter der Muster zu verdeutlichen und so ein ‚Allgemein-verstanden-Werden‘ in der Interaktion zu ermöglichen. Bei Verallgemeinerungen steht die Verständigung in der Interaktion im Mittelpunkt des Interesses der Lernenden. Mit den dargestellten Verallgemeinerungsweisen gelingt es ihnen, mit ihren sprachlichen Mitteln das Allgemeine im Besonderen zu beschreiben.

Literatur

- Akinwunmi, K. (2012): Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Devlin, K. (2003): Das Mathe-Gen. Wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. München: dtv.
- Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G.N. (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 40-63.