Heinz SCHUMANN, Weingarten

Automatisierte algebraische Berechnungen an geometrischen Figuren

Einleitung

Die nunmehr ein Vierteljahrhundert währende Geschichte der für den Mathematikunterricht entwickelten interaktiven dynamischen Geometrie-Systeme (IDGS) beginnt 1988 mit der Weltpremiere des **Cabri géomètre** auf der 6. ICME in Budapest. Der durch den damaligen Prototyp Cabri géomètre vorgegebene Standard der Nutzer-Software-Interaktion und der Basisoptionen wurde von vielen nachfolgenden IDGSen mehr oder weniger übernommen.

Bereits 1991 werden Forderungen an die Erweiterung von IDGS aufgestellt, solche sind u. a. die Implementation eines Tabellenkalkulationssystems (TKS), eines Computeralgebrasystems (CAS) und einer Benutzersprache (vgl. Schumann 1991, S. 119/120). Ausgangspunkt dieser Forderungen war einerseits die Minimierung der Anzahl der vom Lerner bzw. von der Lehrkraft zu beherrschenden Computerwerkzeuge und andererseits die Erweiterung der mit einem IDGS zu bearbeitenden Probleme. Heute verfügt **Geogebra** 2.4 über ein zum System kompatibles TKS und CAS, letzteres verständlicherweise mit einem begrenzten Leistungsumfang – im Vergleich mit professionellen mathematischen Assistenzprogrammen. Das sehr differenzierte IDGS **Cinderella** 2 besitzt eine leistungsfähige Benutzersprache. Die inhaltliche Entwicklung von IDGSen ist aber noch längst nicht als abgeschlossen zu betrachten.

Ein herkömmliches IDGS kann im Allgemeinen nicht erklären, wie eine an einer interaktiv konstruierten geometrischen Figur messbare Größe von anderen Größen dieser Figur, z. B. von ihren Parametern abhängt. Kurz und bündig: Ein herkömmliches IDGS kann i. A. nicht zeigen, ***WIE*** WAS von WEM abhängt.

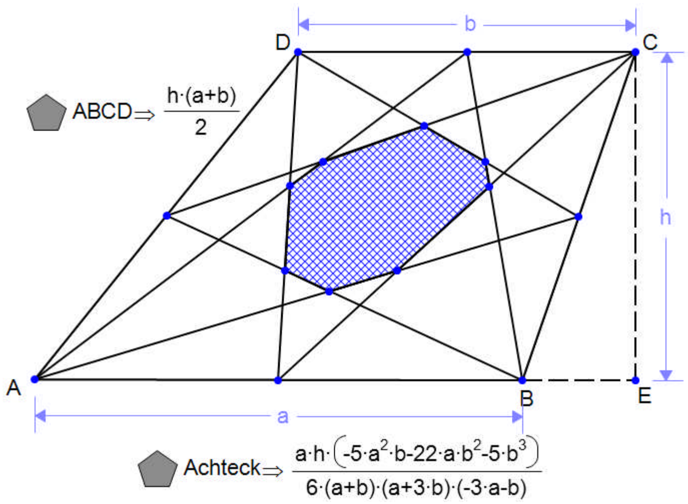

Abb. 1

Mit Methoden der „Automated Deduction in Geometry“ (ADG) ist es möglich, algebraische Berechnungen an solchen Figuren durchführen zu lassen. So kann eine Größe in Abhängigkeit von anderen Größen einer interaktiv konstruierten Figur algebraisch berechnet werden (Beispiel: Abb. 1). Das eröffnet eine neuartige computerunterstützte Verbindung der synthetischen Elementargeometrie zur Algebra. Ein anderer inhaltlicher Entwicklungsaspekt ist die Erweiterung und Vereinfachung der Zirkel- und Linealkonstruktionen. Das wird durch Festlegung von Figureneigenschaften mittels „Zwangsbedingungen“ (sog. constraints) erreicht. Soddy-Konfigurationen (Abb. 2) und auch andere Kreisberührungsfiguren sind recht einfach mit der Zwangsbedingung „tangential“ zu konstruieren. Hingegen sind die betreffenden Zirkel- und Linealkonstruktionen, nicht immer einfach.

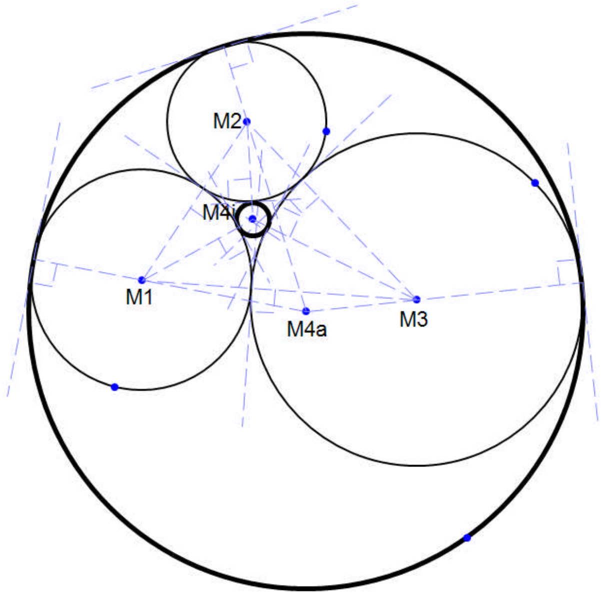

Abb. 2

Das System **Geometry Expressions** erfüllt beide inhaltlichen Erweiterungen (Kurzbezeichnung: „**GX**“, G steht für Geometrie und der Variablenname X für Algebra; Homepage: http://www.geometryexpressions.com/)

Beispiele

Mit dem für den Unterrichtseinsatz entwickelten dynamischen Systems GX der Version 3.1 werden im Folgenden nur drei Beispiele aus verschiedenen Gebieten der ebenen synthetischen Elementargeometrie, nämlich aus der Dreiecks- und Kreisgeometrie vorgestellt. Auf Beispiele aus der analytischen Geometrie muss hier aus Platzgründen verzichtet werden, also auch auf solche zu algebraischen Kurven.

Beispiel 1 (In- und Umkreisradius des Dreiecks)

In- und Umkreis des Dreiecks ABC kann man wie üblich konstruieren oder auch einfach mit den Zwangsbedingungen tangential bzw. oder inzident zu sein (Abb. 3). Um Gesetzmäßigkeiten zu erkennen lassen sich aus den berechneten Termen für r, R und dem Dreiecksinhalt neue Terme, z. B. Quotienten oder Produkte, bilden mit denen weitergerechnet werden kann.

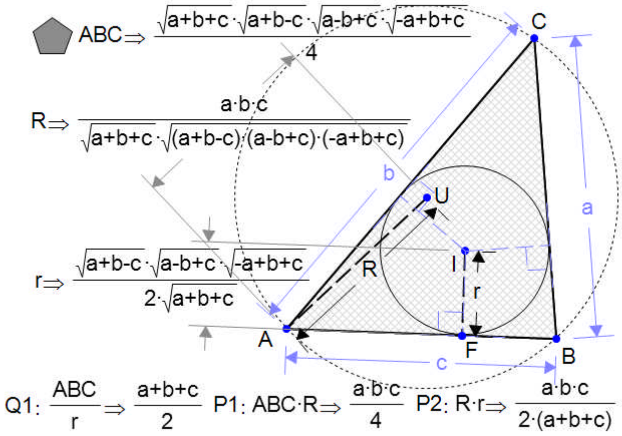

Abb. 3

Beispiel 2 (Figuren aus Ecktransversalen des Dreiecks)
Mit Hilfe des Satzes von Routh kann man Gesetzmäßigkeiten über die Umfänge und Inhalte von Vielecken, speziell von Dreiecken herleiten, welche durch Ecktransversalen des Dreiecks gebildet werden. Die Abbildung 4 zeigt die ersten zwei Figuren, jeweils mit den beiden „äußeren“ Dreiecken DEF und UVW, die gebildet werden, wenn man die Schnittpunkte entsprechender Transversalen zu den Teilpunkten der Seiten bei deren Viertelung bzw. Sechstelung verbindet. Mittels unvollständiger Induktion findet man für die Inhalte dieser Dreiecke bei Teilung der Dreiecksseiten in 2k, k=2, 3,...) gleiche Teile: $|DEF| = 4|ABC|(k-1)^2/(2k+1)^2$, $|UVW| = 4|ABC|(k-1)^2/(4k-1)^2$.

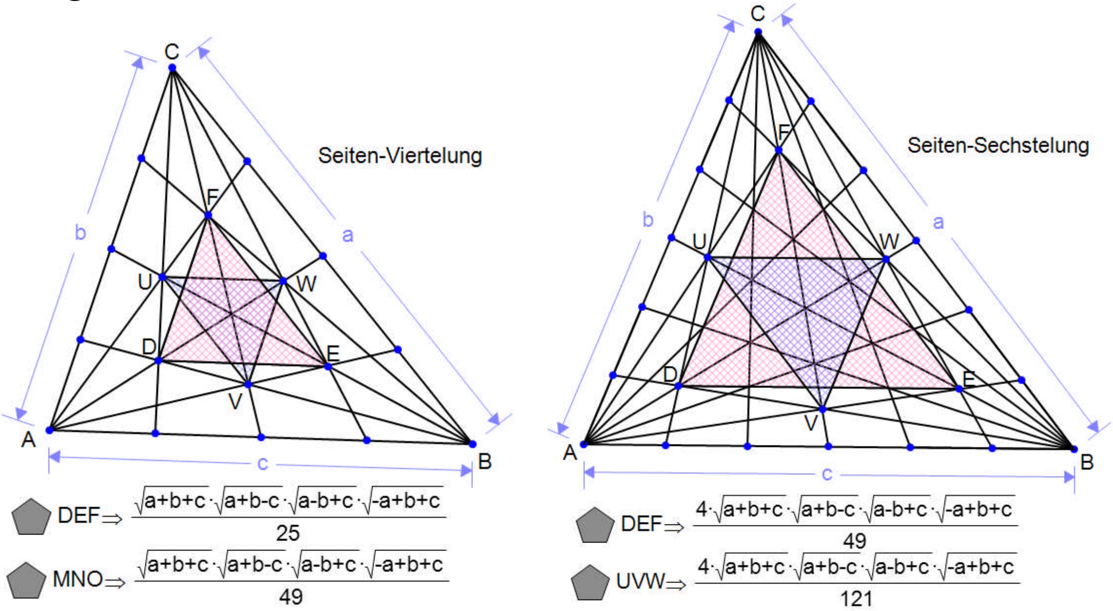

Abb. 4

<u>Anmerkung</u>: Ingmar Lehmann berichtet in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2010 („Entdeckungen im Innern eines Dreiecks – Schnittfiguren mit überraschenden Invarianten“, S. 545-548) über Gesetzmäßigkeiten an solchen Vielecken; seine Ergebnisse ließen sich wohl einfacher mit GX gewinnen.

Beispiel 3 (Kreiskette im Arbelos)
Ein effektives Beispiel für die Kombination der Zwangsbedingung „tangential“ mit der algebraischen Berechnungskomponente von GX ist die Konstruktion einer Kreiskette in der Arbelos-Figur und die Berechnung der betreffenden Kreisradien aus den gegebenen Ra-

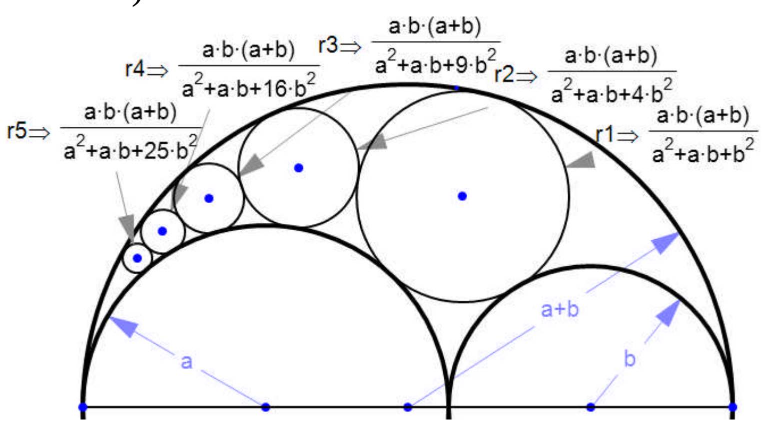

Abb. 5

dien, welche die Arbelos-Figur festlegen (Abb. 5). Leicht erkennt man mittels unvollständiger Induktion, dass

$r_n = ab(a+b)/(a^2+ab+n^2b^2)$, $n = 1, 2,\dots$ sein muss.

Fazit

Die Bedeutung der automatisierten algebraischen Berechnungen im Verbund mit constraint-basierten Konstruktionen in **Geometry Expressions** (**GX**) gegenüber den Messungen an geometrischen Figuren in herkömmlichen IDGS besteht in der Angabe der Abhängigkeit der zu bestimmenden von den gegebenen Größen. Es eröffnen sich damit neue Möglichkeiten der Entdeckung geometrischer Gesetzmäßigkeiten. Dazu unterstützt das System die Anwendung heuristischer Methoden wie das (unvollständige) Induzieren und Analogisieren. Die Berechnungen führen oft auf relativ komplizierte Terme, die verstanden, interpretiert und verglichen werden müssen Für ein eventuell notwendige weitere Bearbeitung der Terme verfügt GX über Exportmöglichkeiten nach professionellen mathematischen Assistenzprogramme. – Die ausgegebenen Terme stellen aber Behauptungen dar. Wenn man diese nicht nur informell nutzen will, so liegen entsprechende Beweisprobleme vor, die im Sinne der Kognitionspsychologie als Interpolationsprobleme zu bezeichnen sind, denn der Beweis „interpoliert" zwischen der bekannten Voraussetzung und der bekannten Behauptung.
Eine erfolgreiche Nutzung setzt notwendigerweise die Beantwortung folgender Frage voraus: Welche Größen reichen aus, um die gesuchten Größen zu berechnen? Das System hilft dem Nutzer beim Erkennen von Überbestimmungen; bei Unterbestimmungen verwendet das System automatisch Hilfsvariablen. – Ein Hauptproblem bei der Nutzung von GX ist die Verletzung der Erwartungskonformität, wenn nämlich der unterliegende Berechnungsalgorithmus kein oder nur ein „unbrauchbares" Ergebnis liefert. Es liegt in der Natur der Sache, dass es keinen universellen algebraischen Berechungsalgorithmus geben kann, welcher quasi für alle geometrischen Figuren funktioniert. Der Einsatz von GX im Unterricht zur freien Exploration ist deshalb nicht ratsam. Es ist eine Vorauswahl von GX-geeigneten Aufgaben zu treffen; dies begünstigt aber den Aufgabenselektionismus. Ein anderes, nicht so gravierendes Problem ist das erwartungswidrige Verhalten von GX im Zugmodus, der sich auf eine dem naiven Nutzer nicht erschließende Weise verhält und auch nicht teilverhältnis-invariant ist.

Literatur

Laborde, J.-M. et al. (1988): Cabri géomètre. Grenoble: Université Joseph Fourier.
Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler+Teubner.
ppt-Präsentation zum Vortrag: http://www.mathe-schumann.de/geometrie-seite/SchumannGDM2013-secure.pdf