HÜSER, Annika
Bielefeld

"Wenn man das umgekehrt rechnet": Zum Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge in der Grundschule

Die Thematisierung der Multiplikation im Mathematikunterricht in der Grundschule hat in den letzten Jahren einen Wandel vollzogen. Während es früher als Ziel galt, die einzelnen Einmaleins-Reihen nacheinander auswendig zu lernen, um die Ergebnisse sicher abrufen zu können, stehen nun das Verständnis der Operation sowie eine beziehungsreiche Behandlung der Multiplikation im Fokus (Köhler, 2019). Dabei sollen die Lernenden zum einen inhaltliche Vorstellungen konstruieren (Grundvorstellungen) und zum anderen strategische Werkzeuge (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018) entwickeln, mit denen sie Aufgaben lösen und Ergebnisse aus bekannten Aufgabenreihen ableiten können. Um diesen ganzheitlichen Zugang (Gaidoschik, 2017) zur Multiplikation erfolgreich bewältigen zu können, ist u. a. ein verallgemeinertes Verständnis distributiver Strukturen notwendig. Denn das geschickte Zerlegen und Zusammensetzen von Aufgaben stellt eine Grundlage für das Nutzen strategischer Werkzeuge, wie dem Ableiten, dar. Studien zur Multiplikation (z.B. Baiker & Götze, 2019; Köhler, 2019) zeigen jedoch, dass es insbesondere in Bezug auf ein Verständnis und Anwenden der distributiven Zusammenhänge zu Schwierigkeiten kommt. Statt Multiplikationsaufgaben distributiv zusammenzusetzen, orientieren sich Lernende zuweilen an mathematisch unpassenden oder inkorrekten Strukturen und fügen bspw. unterschiedliche Multiplikationsaufgaben auf eine additive Art zusammen: $5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 7 \cdot 6$ (Baiker & Götze, 2019). Da der unterrichtliche Zugang des ganzheitlichen Konzepts nun jedoch auf genau diesen distributiven Zusammenhängen basiert, ist es notwendig zu erforschen, inwiefern solche (Fehl-) Vorstellungen im Kontext der Distributivität zu erklären sind. Dazu wurde in der vorliegenden Studie das Zusammensetzen von Multiplikationsaufgaben beleuchtet.

Aus Studien zu Verallgemeinerungsprozessen im Kontext anderer mathematischer Inhalte ist bekannt, dass das Nutzen von Anschauungsmitteln die Lernenden bei der Einsicht in allgemeingültige Strukturen unterstützen kann (z.B. Wilkie, 2016). Zur Thematisierung der Multiplikation wird im Unterricht u.a. auf Felddarstellungen (vgl. Abb. 1) zurückgegriffen. Die Schüler*innen können dabei bspw. eine Reihe von Punkten als eine gleichmächtige Gruppe bzw. als Multiplikanden deuten und in Beziehung zur Anzahl dieser Gruppen, dem Multiplikator, setzen. Eine solche intendierte Deutung muss jedoch erst erlernt werden, denn nicht immer nehmen die Kinder die

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Relationen der Multiplikation in den Blick (Kuhnke, 2013). Inwiefern Lernenden eine solche Felddarstellung konkret im Kontext der Distributivität deuten und dabei in Beziehung zu symbolischen Multiplikationsaufgaben setzen, ist empirisch bislang kaum erforscht. Eine Untersuchung dessen scheint gleichwohl bedeutungsvoll, um Erklärungen zu den unterschiedlichen Vorstellungen beim Erwerb von Einsichten in distributive Zusammenhänge zu finden. Die Fragestellung des Projekts lautet daher: Wie nutzen Lernende Darstellungen (symbolisch notierte Multiplikationsaufgaben und die Felddarstellung) beim Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge?

Zum methodischen Zugang

Um diesem Forschungsinteresse nachzugehen, wurden im Jahr 2019 leitfadengestützte Einzelinterviews mit 31 Drittklässler*innen drei unterschiedlicher Grundschulen durchgeführt. In den Interviews wurde das distributive Zusammensetzen von Multiplikationsaufgaben fokussiert. Die Lernenden wurden bspw. gefragt, ob man die Aufgaben 5·3 und 2·3 zusammenfügen kann. Zur Deutung und Beantwortung der Fragen standen den Kindern einerseits eine Felddarstellung, Punktefelder oder Holzblöcke (vgl. Abb. 1), und andererseits die symbolische Notation der Multiplikationsterme (vgl. Abb. 2) zur Verfügung.

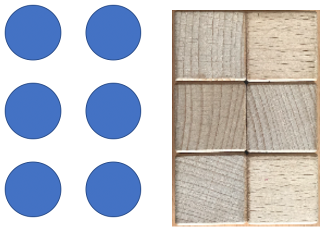

Abb. 1: Punktefeld und Holzblock

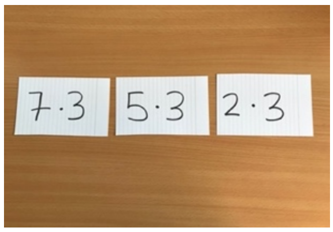

Abb. 2: Multiplikationsterme

Die dabei entstandenen videografierten Daten wurde zum einen mit Hilfe der Interaktionsanalyse (Krummheuer, 2012) und zum anderen unter Rückgriff des epistemologischen Dreiecks (Steinbring, 2005) ausgewertet. Auf diese Weise konnten sowohl die interaktiven Bedeutungsaushandlungen um die distributiven Zusammenhänge als auch die dabei vollzogenen Deutungsprozesse rekonstruiert werden.

Zu den Ergebnissen

Die Ergebnisse zeigen, dass Lernende beide Darstellungen (vgl. Abb.1 und Abb. 2) beim Zusammensetzen von Multiplikationsaufgaben unterschiedlich als Referenzkontexte heranziehen (Hüser, im Druck). Beim Verallgemeinern, ob und wie Multiplikationsterme zusammenzusetzen sind, bezogen sich die Kinder bei den symbolisch dargestellten Multiplikationsaufgaben auf folgende fünf Merkmale: *Produkte der einzelnen Terme* (2·3+5·3=6·15), *Reihenfolge der Terme* (in Kombination mit den Positionen der Faktoren:

2·3+5·3=25·33), die *Positionen der Faktoren* (2·3+5·3=7·6), die *Gleichheit der Faktoren* (2·3+5·3=7·3, weil "3 gleich ist") und die *Reihenzugehörigkeit* (2·3+5·3=7·3, weil "beides zur 3er-Reihe gehört"). Bei der Felddarstellung bezogen sie sich auf folgende fünf Merkmale: *gesamte Rechtecksaufgabe* („die neue Aufgabe ist dann 7·3“), *gesamte Rechtecksform* („weil ein neues Feld entsteht, kann man die beiden Aufgaben zusammenfügen“), die *Ausrichtung des Felds* („wenn die 3 hinten steht, muss das Feld nach unten liegen“), die *gleiche Spaltenanzahl* („es geht zusammen, weil in beiden Feldern immer eine 3 ist“) und die *gleiche Spaltenlänge* („es geht, weil beide Felder gleich lang sind“).

Dabei zogen die Lernenden teilweise auch mehrere Referenzkontexte gleichzeitig heran. Bspw. fokussierten die Kinder in den Aufgabentermen häufig die *Positionen* und die *Gleichheit der Faktoren*, sodass sie die Aufgaben 5·3 und 2·3 entsprechend des Distributivgesetzes zu der Aufgabe 7·3 zusammensetzten, ein Zusammenfügen der Aufgaben 5·3 und 3·2 jedoch verneinten, da die Multiplikanden nun nicht mehr gleich waren. Im Kontext dieses Aufgabenbeispiels kam es aber ebenso vor, dass die Kinder sich zur Regelbedingung auf die *Gleichheit der Faktoren* bezogen, die geltende Kommutativität erkannten und ein Zusammenfügen der Aufgaben 5·3 und 3·2 bejahten. Zur Regelanwendung griffen sie dann jedoch erneut auf die *Positionen der Faktoren* zurück, sodass aus 5·3 und 3·2 die Aufgabe 8·3 gebildet wurde, indem sie die Multiplikatoren addierten und einer der Multiplikanden auswählten. Durch die Rekonstruktion der Referenzkontexte wird nachvollziehbar, warum Lernende Aufgaben nicht immer entsprechend der Distributivität zusammensetzen, sondern auf weitere Weisen verknüpfen. Sie handeln auf Basis unterschiedlicher begrifflicher Deutungen der Distributivität.

Die Auswertung der Daten zeigt ebenso, dass der explizite Gebrauch der Felddarstellung die Lernenden dabei unterstützen kann sich von weniger tragfähigen Referenzkontexten, wie den *Positionen der Faktoren*, zu lösen und sich auf die *Gleichheit der Faktoren*, z.B. im Sinne einer gleichmächtigen Gruppe, zu beziehen. So gelang es bspw. einem Schüler die Aufgaben 2·3 und 2·4 nach dem Gebrauch der Blöcke zu verknüpfen, obwohl er zunächst ein Zusammenfügen verneint hatte: "weil hier ist keine 4 (zeigt auf die 3 der 2·3-Karte) oder hier ist keine 3 (zeigt auf die 4 der 2·4-Karte)". Nach einer Aufforderung der Interviewerin die Aussage mit den Blöcken zu prüfen, schob er beide Blöcke zusammen, fokussierte dabei die gesamte Rechtecksform und erkannte, dass die Aufgaben doch passend sind. Daraufhin betrachtete er die Aufgabenterme neu: "2 (zeigt auf die 2en der 2·3-Karte und 2·4-Karte) wenn man das umgekehrt rechnet\". Wenn Kinder demnach die Felddarstellung als Referenzkontext heranziehen, kann dies potenziell dazu beitragen, dass sie ihre begriffliche Deutung um die distributiven Zusammenhänge ausweiten und Aufgaben korrekt zusammenfügen.

Bedeutung für den Unterricht

Die rekonstruierten Referenzkontexte zeigen auf, dass Lernende auf Grundlage unterschiedlicher Fokussierungen der Darstellungen handeln und somit zu verschiedenen begrifflichen Deutungen der distributiven Zusammenhänge gelangen. Daran anknüpfend liefern die Ergebnisse zudem Anhaltspunkte zur expliziten Thematisierung der distributiven Zusammenhänge im Unterricht. Um im Kontext des Verallgemeinerns Ausweitungsprozesse zu initiieren, scheint vor allem der Einsatz der Felddarstellung ertragreich zu sein. Durch den Wechsel der Darstellung gelang es den Kindern sich auf symbolischer Ebene bspw. von den *Positionen der Faktoren* zu lösen. Dies ist insofern von Relevanz, als dass sie dadurch lernen die distributiven Zusammenhänge zunehmend auf weitere Fälle zu übertragen, um diese dann potenziell im Sinne eines strategischen Werkzeugs (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018) flexibel nutzen zu können.

Literaturverzeichnis

Baiker, A., & Götze, D. (2019). *Distributive Zusammenhänge inhaltlich erklären können – Einblicke in eine sprachsensible Förderung von Grundschulkindern*. https://doi.org/10.17877/DE290R-20651

Gaidoschik, M. (2017). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (3. Aufl.). Klett and Kallmeyer.

Hüser, A. (im Druck). *Zum Gebrauch von Darstellungen beim Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge. Eine epistemologisch-interaktionistische Untersuchung von Verallgemeinerungsprozessen bei Grundschulkindern*.

Köhler, K. (2019). *Mathematische Herangehensweisen beim Lösen von Einmaleinsaufgaben: Eine Untersuchung unter Berücksichtigung verschiedener unterrichtlicher Vorgehensweisen und des Leistungsvermögens der Kinder*. Waxmann.

Krummheuer, G. (2012). Interaktionsanalyse. In F. Heinzel (Hrsg.), *Methoden der Kindheitsforschung: Ein Überblick über Forschungszugänge zur kindlichen Perspektive*. (S. 234–247). Beltz Juventa.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Springer Spektrum.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer Spektrum.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction* (Bd. 38). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/b104944

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational studies in mathematics, 93*, 331–361.