

STROETMANN, Elise  
Potsdam

## Von der Hypothese zum Beweis: Mit DGS entdeckend Argumentieren lernen

Mathematisches Argumentieren ist eine facettenreiche prozessbezogene Kompetenz, die für den Geometrieunterricht eine besondere Relevanz hat. Auch wenn dynamische Geometriesoftware (DGS) Möglichkeiten zur Förderung der Argumentationskompetenz schafft, kann das Entwickeln deduktiver Beweise für Lernende weiterhin eine Herausforderung sein (Bescherer & Hoffkamp, 2022). Dieser Beitrag stellt theoretische Grundlagen dieser Problemstellung dar und gibt einen Einblick in ein Forschungsprojekt, welches Unterstützungsmaßnahmen für Lernende im Beweisprozess untersucht.

### Mathematisches Argumentieren und Beweisen

In diesem Beitrag wird unter *mathematischem Argumentieren* „die Generierung, Untersuchung und Absicherung von Vermutungen und Hypothesen in Bezug auf deren (objektiven oder individuell eingeschätzten) Wahrheitsgehalt“ (Reiss & Ufer, 2009, S. 157) verstanden. Argumentieren kann demnach vielfältige Formen annehmen. Es umfasst sowohl ergebnisoffene Explorationen mathematischer Zusammenhänge und Plausibilitätsbetrachtungen als auch „Aktivitäten zur Absicherung einer bereits als plausibel angenommenen Behauptung“ (Reiss & Ufer, 2009, S. 157). Dem letzten Aspekt wird das *Beweisen* zugeordnet, welches sich durch deduktive Schlüsse, den Bezug auf eine mathematische Rahmentheorie und ein gewisses Maß an Formalität von anderen Argumentationsformen abhebt (Reiss & Ufer, 2009). Der Beweisprozess ist durch typische Aktivitäten gekennzeichnet, welche in den folgenden Phasen zusammengefasst werden können (n. Kirsten, 2021, S. 36):

- Aufstellen einer Vermutung (1),
- Entwicklung einer formalen oder informalen Beweisidee (2),
- Ausarbeiten einer deduktiven Beweiskette (3) und
- Formulieren eines Beweises entsprechend der jeweiligen Standards (4).

Dabei sind besonders die ersten beiden genannten Phasen durch explorative Tätigkeiten und präformale Argumentationen geprägt. Zwischen der Vermutungsgenerierung (Phase 1) und der eigentlichen Beweiskonstruktion (Phasen 2 bis 4) kann eine produktive Verbindung bestehen, wenn die während Phase 1 gewonnenen Erkenntnisse und Argumente bei der Entwicklung des Beweises aufgegriffen und in eine deduktive Argumentationskette überführt werden können. In diesem Fall wird auch von einer *cognitive unity* zwischen der Vermutungsgenerierung und dem Beweis gesprochen (Pedemonte,

2007). Damit geht die Annahme einher, dass „[...] eine reichhaltige Argumentation eine erfolgreiche Beweiskonstruktion [fördert]“ (Kirsten, 2021, S. 21).

### **Schwierigkeiten im Beweisprozess und die Rolle von DGS**

Eine solche produktive Verbindung zwischen der generierten Vermutung und ihrem deduktiven Beweis herzustellen, kann für viele Lernende herausfordernd sein. Bescherer und Hoffkamp (2022) sprechen in diesem Kontext von einem „Spannungsfeld zwischen dem *Argumentieren als Prozess* an sich und dem *Beweis als Endprodukt* eines Argumentationsprozesses“ (S. 348), das insbesondere durch die Unterschiedlichkeit der dabei vorkommenden Schlussweisen geprägt ist: Während Vermutungen und Argumente in explorativen Phasen häufig per *Abduktion* und *Induktion* gewonnen werden, müssen sie für den Beweis in eine *deduktive* Argumentationskette überführt werden (Pedemonte, 2007). Die Schwierigkeiten von Lernenden beim Beweisen wurden durch empirische Untersuchungen bestätigt (vgl. z.B. Heinze et al., 2005). Dabei gilt vor allem das Finden einer Beweisidee als herausfordernd. Weitere Schwierigkeiten von Lernenden zeigen sich jedoch auch in den anderen Phasen des Beweisprozesses (Kirsten, 2021; Reiss & Ufer, 2009).

Der Einsatz von DGS schafft zahlreiche Möglichkeiten für Beweisprozesse im Geometrieunterricht und kann besonders in Phase 1 unterstützend wirken. Im Zugmodus einer DGS können geometrische Objekte durch Bewegung variiert werden, während die ihnen per Konstruktion inhärenten geometrischen Beziehungen invariant bleiben. Das Beobachten solcher Invarianzen in DGS ermöglicht es, mathematische Zusammenhänge zu entdecken und Vermutungen darüber zu generieren. Beispiele aus theoretischer und empirischer Perspektive zeigen, dass in DGS-gestützten Lernumgebungen darüber hinaus auch eine *cognitive unity* zwischen der Vermutungsgenerierung und dem Beweis ermöglicht werden kann (Baccaglini-Frank, 2011; Bescherer & Hoffkamp, 2022). Betont wird dabei stets die entscheidende Rolle der Lehrkraft, welche die Lernenden durch geeignete Lehr-Lern-Szenarien und ihr Handeln (Hinweise etc.) unterstützen muss (Bescherer & Hoffkamp, 2022). Wie solche Lernumgebungen und Hilfestellungen jedoch systematisch gestaltet werden können, sodass eine *cognitive unity* ausgebildet wird und möglichst vielen Lernenden der Übergang zum Beweis gelingt, ist bisher wenig untersucht (Bescherer & Hoffkamp, 2022; Jahnke et al., 2023).

### **Forschungsprojekt zum Lerngegenstand ‚Satz des Thales‘**

In meinem Promotionsprojekt greife ich dieses Forschungsdesiderat im Kontext des Lerngegenstandes ‚Satz des Thales‘ auf und adressiere die folgenden Forschungsfragen:

1. Wie kann eine Lernumgebung zum Satz des Thales gestaltet sein, sodass Lernende mithilfe von DGS selbstständig Hypothesen zu geometrischen Zusammenhängen generieren, den Satz des Thales entdecken und ihn schließlich beweisen?

2. Welche Unterstützungsmaßnahmen sind in dieser DGS-Lernumgebung zum Satz des Thales notwendig, damit Lernende den Übergang von der Satzfindung zum mathematischen Beweis des Satzes bewältigen können?

Im Rahmen dieses Beitrags liegt der Fokus auf der ersten Forschungsfrage. Die vor dem Hintergrund des Forschungsinteresses konzipierte Lernumgebung umfasst fünf Aufgaben und Applets in der DGS *Cinderella* und richtet sich an Lernende der 7. bis 8. Klassenstufe. Die Aufgaben bilden alle wesentlichen Phasen des Beweisprozesses ab: Die Lernenden sollen Vermutungen über geometrische Zusammenhänge generieren, den Satz des Thales und seine Umkehrung entdecken, stützende Argumente finden und diese in eine deduktive Argumentationskette überführen, um den Satz zu beweisen. Die Lernumgebung wurde bereits in fünf Unterrichtsstunden à 45' pilotiert. Der vorliegende Beitrag stellt ausgewählte Aufgaben daraus exemplarisch vor.

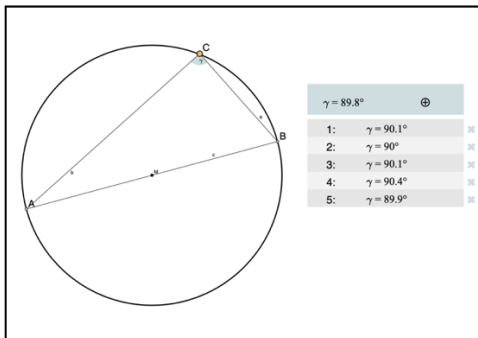
Mit der Aufgabe in Abbildung 1 sollen die Lernenden den Satz des Thales entdecken. Hierfür positionieren sie den frei beweglichen Punkt C im DGS-Applet an verschiedenen Stellen auf dem gegebenen Kreis. Als Konsequenz kann dann beobachtet werden, dass die Winkelgrößen von  $\gamma$  für diese Positionen von C jeweils (circa)  $90^\circ$  betragen (vgl. Abb. 1, rechts). Daraus resultiert die Vermutung: *Wenn der Punkt C auf der Kreislinie liegt, dann ist der Winkel  $\gamma$  ein rechter Winkel* – die Aussage des Satzes des Thales.

In einer DGS wurden ein Dreieck  $ABC$  und der Kreis mit dem Durchmesser  $AB$  konstruiert. Außerdem wurde der Winkel  $\gamma$  gemessen.

a) Erzeuge verschiedene Dreiecke, bei denen  $C$  auf der Kreislinie liegt. Merke dir die Winkelgrößen  $\gamma$  dieser Dreiecke, indem du jeweils auf  $\ominus$  klickst. Formuliert nun zu zweit mithilfe eurer gemerkten Winkelgrößen eine Vermutung über den Winkel  $\gamma$ .

Wenn der Punkt  $C$  \_\_\_\_\_,

dann ist der Winkel  $\gamma$  \_\_\_\_\_.



$\gamma = 89,8^\circ$	$\ominus$
1: $\gamma = 90,1^\circ$	$\times$
2: $\gamma = 90^\circ$	$\times$
3: $\gamma = 90,1^\circ$	$\times$
4: $\gamma = 90,4^\circ$	$\times$
5: $\gamma = 89,9^\circ$	$\times$

Abb. 1: Aufgabe der Lernumgebung (links) und dazugehöriges Applet (rechts)

In einer anderen Aufgabe der Lernumgebung ist das Vorgehen umgekehrt. Der Winkel  $\gamma$  wird durch Bewegung von C im Zugmodus mehrmals auf  $90^\circ$  eingestellt und die verschiedenen Positionen von C werden markiert. Es kann die Konsequenz beobachtet werden, dass die Markierungen von C auf einer Kreislinie liegen, was auf die Umkehrung des Satzes des Thales als Vermutung führt. Die Art der *Abhängigkeit der in DGS beobachteten Invarianten*

( $\gamma = 90^\circ$  und ,C liegt auf dem Thaleskreis über  $\overline{AB}$ ‘) bestimmt in den vor-  
gestellten Aufgaben also die *logische Abhängigkeit* in der zu formulierenden  
Vermutung (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Trotz dieser Korrespon-  
denz von Bewegungsabhängigkeit in DGS und logischer Abhängigkeit  
wurde das Unterscheiden von Prämisse und Konklusion im Satz des Thales  
und seiner Umkehrung bei einer Pilotierung des Aufgabendesigns als  
Schwierigkeit für Lernende identifiziert. Diese Beobachtung legte die Vor-  
gabe von Formulierungshilfen für die Vermutung nahe (vgl. Abb. 1, links).

Nachdem der Fokus der bisherigen Entwicklungsarbeit vorwiegend auf der  
Phase der Vermutungsgenerierung im Beweisprozess der Lernumgebung  
lag, werden im weiteren Verlauf des Projektes die zielgerichtete Auswahl  
von Unterstützungsmaßnahmen für die Beweiskonstruktion und die Unter-  
suchung ihrer Wirkung auf die Argumentationen der Lernenden sowie auf  
das Herstellen einer *cognitive unity* (Forschungsfrage 2) fokussiert.

## Literatur

- Baccaglini-Frank, A. (2011). Abduction in generating conjectures in dynamic geometry through maintaining dragging. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 110-119). UNIV RZESZOW PUBLISHING HOUSE.
- Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225–253. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3>
- Bescherer, C. & Hoffkamp, A. (2022). Argumentieren und Beweisen mit digitalen Werkzeugen. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 347-374). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_15)
- Heinze, A., Reiss, K. & Rudolph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 212–220. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0011-7>
- Jahnke, H. N., Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2023). Argumentieren, Begründen und Beweisen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 369–398). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_12)
- Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-32242-7>
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV*, 111(4), 155–177.