

Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren

Die kritische Auseinandersetzung mit Daten und daraus abgeleiteten Informationen wird im Alltag zunehmend wichtiger und benötigt ein grundlegendes Verständnis statistischer Methoden. Daher hat sich Statistik immer stärker in den schulischen Stochastikunterricht integriert. Trotzdem werden dort angestrebte Ziele am Ende der Oberstufe oft nicht erreicht. Ein möglicher Grund dafür könnte die wahrgenommene Unzugänglichkeit der beurteilenden Statistik und damit verbundene Unsicherheiten auf Lehrkräfte-seite, wie das Themenfeld unterrichtet und an die Inhalte der Sekundarstufe I angebunden werden kann. Das liegt auch daran, dass hier viele - zum Teil abstrakte Konzepte - miteinander vernetzt werden müssen (Watson, 2006). Wird erst in der Oberstufe damit begonnen, können Verständnisprobleme bei einzelnen Konzepten schnell zu einem Verlust des Gesamtverständnisses führen (Hauer-Typpelt, 2010). Wichtige Interpretations- und Deutungsfragen rücken eher in den Hintergrund - obwohl hier das Potenzial bestünde, isoliert wahrgenommenen Themen der (Mittelstufen-)Stochastik sinnvoll miteinander zu vernetzen (vgl. Garfield et al., 2008).

Zur Förderung eines Perspektivwechsels sollten statistische Inferenz und damit verbundene Fragestellungen schrittweise bereits früh informell eingeführt und entsprechende Denk- und Arbeitsweisen im Sinne informeller statistischer Inferenz regelmäßig spiralcurricular über einen längeren Zeitraum hinweg vertieft werden (Makar & Rubin, 2009; Garfield et al., 2008). Nachfolgend werden Hypothesentests - mit besonderem Blick auf dem Binomialtest - als exemplarischer Teil der beurteilenden Statistik betrachtet. Es wird untersucht, was im Sinne informellen Hypothesentestens zur Vorbereitung auf formales Denken adressiert werden sollte.

Arbeitsbegriff: Kernideen

Das Konzept der Kernideen (vgl. Leuders et al., 2011) wurde für den hier verfolgten Zweck modifiziert. Kernideen stellen demnach Verstehens-elemente für den Unterricht dar. Sie dienen der Strukturierung und fokussieren wesentliche und wiederkehrende Konzepte eines Themenbereichs. Sie können auch als Leitlinien durch das Curriculum tragen und mit passenden inhaltlichen Verständnisankern (vgl. Roth & vom Hofe, 2023) ein Ausgangspunkt für die Planung von Lehr-Lern-Prozessen sein. Durch ihre Vermittlerposition zwischen dem fachlichen Kern und der Vorstellungsebene der Lernenden können sie außerdem eine wichtige Rolle bei der Verständnissentwicklung spielen. Zugleich unterstützt diese Kombination aus Vor- und

Rückschauerspektive dabei, den Stellenwert statistischer Konzepte herauszustellen und Zusammenhänge zwischen den einzelnen Konzepten zu erfassen.

Phase 1: Herleitung von Kernideen zum Hypothesentest

In der ersten Projektphase wird untersucht, welche Kernideen notwendig sind, um Hypothesentests inhaltlich zu verstehen und bereits in der Sekundarstufe I informell angebahnt werden sollten. Dazu wurden in einem mehrstufigen Prozess vier Kernideen (vgl. Abbildung 1) kondensiert, die nun durch eine Expertenbefragung abgesichert und bei Bedarf modifiziert oder ergänzt werden sollen. Im Vortrag werden erste Ergebnisse der Fragebögen präsentiert und mögliche Modifikationen der nachfolgend kurz prototypisch umrissenen Kernideen diskutiert.

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Die *Kernidee hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit* (vgl. insbesondere Riemer, 2019; Riemer, 2023) vermittelt zwischen den anderen Kernideen. Sie steht für einen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der auch inferenzstatistisches Denken trägt - wie bereits zuvor eingefordert (Hauer-Typpelt, 2022; Burrill & Biehler, 2011). Er beinhaltet zwei Perspektiven: (1) **prognostisch**: Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die vorhersagen, um welchen Wert relative Häufigkeiten bei mehrfacher Versuchswiederholung in der Realität zufallsabhängig schwanken werden und (2) **hypothetisch**: Modelle können angezweifelt und modifiziert werden, wenn sie die Realität bei mehrfacher Versuchswiederholung nicht gut abbilden. Durch diese Verbindung von Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten wird ein Wahrscheinlichkeitsbegriff beschrieben, der in der Sekundarstufe I angelegt wird und zugleich an die Ideen der beurteilenden Statistik anknüpfen kann. Durch die Betonung des Modellcharakters von Wahrscheinlichkeiten und des „Hinterfragens von Modellen“ bereitet diese Kernidee informell auf das Hypothesentesten vor.

Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Beim Hypothesentesten wird beurteilt, wie wahrscheinlich ein beobachtetes Stichprobenergebnis im Kontext einer hypothetischen Verteilung ist. Die *Kernidee Repräsentativität & Variabilität von Stichproben-Daten* zielt dabei auf einen Schlüsselfaktor inferenzstatistischen Denkens ab (vgl. Ben-Zvi et al., 2015) - das Verständnis für die Beschaffenheit und Generierung von „guten“ Zufallsstichproben. Dazu beschreibt sie einen Mittelweg zwischen den Konzepten der (1) **Repräsentativität einer Stichprobe** bezüglich der Population, die über die Generalisierbarkeit der Ergebnisse entscheidet und

(2) der **Akzeptanz von Variabilität der Stichprobendaten**. So kann ein Verständnis für eine Stichprobe als Teil einer Menge von potenziellen anderen Stichproben entwickelt (vgl. Ben-Zvi et al., 2015) und ein Verständnis für das Gesetz der großen Zahlen (Bakker, 2004) angebahnt werden.

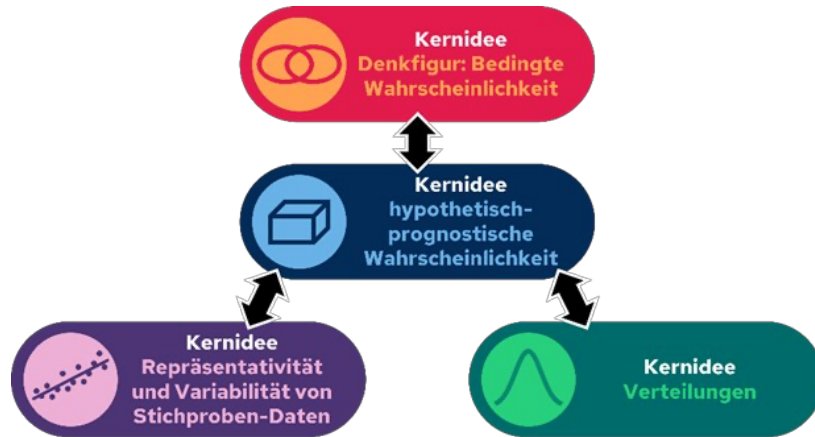


Abb. 1: Kernideen zum Hypothesentest

Kernidee: Verteilungen

Hypothesentests lassen sich auch als Aushandlungsprozess zwischen empirischen und theoretischen Verteilungen auffassen. Empirische Verteilungen basieren auf beobachteten Daten und beschreiben deren Variabilität mittels statistischer Kennzahlen, theoretische Verteilungen modellieren Variabilität. Für das Verständnis von Hypothesentests müssen Unterschiede und Zusammenhänge zwischen diesen Verteilungstypen herausgestellt werden. So kann eine globale Sichtweise auf Daten als Aggregat entwickelt werden (vgl. Konold et al., 2015). Diese Sichtweise hilft, globale Muster in Daten zu erkennen und zu erklären, die (1) als zentrale Modellelemente zur Beschreibung der Realität und (2) als Vergleichselemente, um die Struktur der Daten in einer Stichprobe mit der anderer Stichproben zu vergleichen, dienen. Die Kernidee hebt damit auch hervor, dass zentrale Tendenzen stets mit Streuung betrachtet werden sollten (Watson, 2006; Konold & Pollatsek, 2002).

Kernidee Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beim klassischen Hypothesentesten können Annahmen keine Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Die Entwicklung eines konditionalen Denkmusters und das damit verbundene Verständnis von „wenn ... dann ...“-Strukturen ist trotzdem wichtig. Im Unterschied zu klassischen bedingten Wahrscheinlichkeiten wird durch den Begriff "Denkfigur" die Bedingung zu einer Annahme abgeschwächt - beispielsweise, dass ein (Wahrscheinlichkeits-)Modell zutrifft. Die Bewertung der Plausibilität beobachteter Daten unter der Annahme eines solchen Modelles, kann Aufschluss darüber geben,

dass ein anderes Modell womöglich zutreffender ist. Damit umfasst diese Kernidee eine p-Wert-Interpretation, indem sie unter der Annahme, dass H_0 gilt, die Wahrscheinlichkeit beschreibt, mit der das Stichprobenergebnis oder noch extremere Werte auftreten können. Über eine Wahrscheinlichkeit, inwieweit solche Modelle überhaupt gelten, kann dennoch keine Aussage getroffen werden.

Diese vier Kernideen sind eng miteinander verknüpft und kaum unabhängig voneinander zu denken. In der Fähigkeit, sie zu vernetzen kann sich daher das entwickelte Verständnis der Lernenden zeigen.

Literaturverzeichnis

- Bakker, A. (2004). Reasoning about shape as a pattern in variability. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 64–83.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291–303.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Hrsg.), *New ICMI Study Series. Teaching Statistics in School Mathematics—Challenges for Teaching and Teacher Education* (Bd. 14, S. 57–69). Springer Netherlands.
- Garfield, J., Ben-Zvi, D. & Zieffler, A. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Netherlands.
- Hauer-Typelt, P. (2010). Angemessene Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln: Vorschläge für den Stochastikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, 43, 1–13.
- Hauer-Typelt, P. (2022). Stochastik in der Sekundarstufe 1. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, 54, 35-49.
- Konold, C. & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4), 259–289.
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305–325.
- Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B. & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis Mathematik*, 53(37), 2–9.
- Makar, K.; Rubin, A. (2009): A framework for thinking about informal statistical inference. In: *Statistics Education Research Journal* 8(1), 82–105.
- Riemer, W. (2019). Grundvorstellungen beurteilender Statistik: Wahrscheinlichkeit als bezweifelbares Modell. In: *Der Mathematikunterricht*, 65(6), 11–22.
- Riemer, W. (2023). *Statistik unterrichten: Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik*. Klett Kallmeyer.
- Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren*, 236, 8-11.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Studies in mathematical thinking and learning. Erlbaum.