LANKEIT, Elisa & BIEHLER, Rolf
Paderborn

Bedeutungsfacetten der Beziehungen von Differenzierbarkeit und Stetigkeit im Ein- und Mehrdimensionalen: Ein Blick auf die semantische Ebene

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit, die umgekehrte Richtung gilt nicht – ein bekanntes Resultat, mit dem Studierende dennoch häufig Schwierigkeiten haben (vgl. z. B. Duru et al., 2010; Juter, 2012). Noch komplizierter wird die Situation für Lernende im mehrdimensionalen Fall, in dem es mehr als einen Differenzierbarkeitsbegriff gibt: Neben totaler Differenzierbarkeit gibt es partielle Differenzierbarkeit und Richtungsdifferenzierbarkeit. Nur die totale Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Was zunächst wie ein Vorstellungsbruch aussieht, ist in Wirklichkeit keiner, wenn man analog zu den drei Differenzierbarkeitsbegriffen auch drei Stetigkeitsbegriffe einführt, womit wir uns in diesem Beitrag befassen wollen. Dazu nutzen wir Bedeutungsfacetten der verschiedenen mathematischen Konzepte in unterschiedlichen Deutungskontexten, die wir im Rahmen von „Bedeutungsmodellen“ formuliert haben (Lankeit & Biehler, 2023). Damit nehmen wir vor allem die semantische Ebene nach Hußmann und Prediger (2016) in den Blick.

Neben dem herkömmlichen Stetigkeitsbegriff kann man Richtungsstetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definieren als die Stetigkeit der eindimensionalen Funktion mit Zuordnungsvorschrift $t \mapsto f(x_0 + tv)$ an der Stelle $t = 0$. Als partielle Stetigkeit bezeichnen wir Richtungsstetigkeit in Richtung der kanonischen Basisvektoren e_i. Die Einführung dieser Begriffe vor Thematisierung der Differenzierbarkeitskonzepte ermöglicht es, schon hier die Unterschiede von Stetigkeit und der „auf einzelne Komponenten bezogenen“ partiellen Stetigkeit zu betonen.
Wir befassen uns in diesem Beitrag mit der folgenden Forschungsfrage: Wie können Beziehungen von Differenzierbarkeits- und Stetigkeitskonzepten für Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ auf semantischer Ebene mit Hilfe von Bedeutungsfacetten der Konzepte in verschiedenen Deutungskontexten erklärt werden? Dabei interessieren wir uns insbesondere für den Vergleich des ein- und mehrdimensionalen Falls.
Wir betrachten die Beziehungen in den Deutungskontexten „analytisch-algebraisch“, „geometrisch“ und der „Approximationsdeutung“. Innerhalb dieser Deutungskontexte geben wir Plausibilisierungsversuche an, die dabei helfen können, zu verstehen, warum entsprechende Implikationen gelten.

Für den eindimensionalen Fall lässt sich die Implikation „Differenzierbarkeit

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

$\Rightarrow$ Stetigkeit" besonders gut mit der Approximationsdeutung erklären: Differenzierbarkeit bedeutet, dass die Funktion in einer Umgebung der betreffenden Stelle gut durch eine affin-lineare Funktion angenähert werden kann, mit beliebig kleinem relativen Fehler: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$ mit $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$. Daraus ergibt sich sofort, dass die Funktion durch eine konstante Funktion $g(x) = f(x_0)$ mit kleinem absoluten Fehler approximieren lässt, mit Fehlerfunktion $r(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$ und $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$.

Im geometrischen Kontext kann man Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 als Existenz einer Tangente an den Graphen von f am Punkt $(x_0, f(x_0))$ verstehen. Nach Dörge (1948) ist eine Gerade eine Tangente, wenn für jeden Sektorstreifen (die Menge der Punkte, die zwischen zwei Geraden mit vorgegebenem Schnittpunkt und vorgegebenen Steigungen liegen) um diese Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Umgebung $U(x_0)$ existiert, sodass für alle $x \in U$ die Punkte $(x, f(x))$ jeweils im Sektorstreifen enthalten sind. Daraus kann man insbesondere folgern, dass zu jedem vorgegebenen ε-Schlauch um $f(x_0)$ auch eine Umgebung um x_0 existiert, in der alle Funktionswerte im entsprechenden ε-Schlauch landen. Mit Hilfe der Approximationsdeutung für Differenzierbarkeit übertragen auf den geometrischen Kontext lässt sich auch geometrisch die Stetigkeit erklären: Der Graph sieht wegen der Differenzierbarkeit lokal einer Gerade sehr ähnlich. Daraus kann man weiter folgern, dass lokal keine „Sprünge" vorliegen und kein anderes irreguläres Änderungsverhalten auftritt, sodass man in einer Umgebung der betroffenen Stelle den Funktionsgraphen „durchzeichnen" kann, was eine vereinfachende anschauliche geometrische Bedeutungsfacette für Stetigkeit ist.

Im analytisch-algebraischen Deutungskontext kann man sich überlegen, dass wegen der Existenz des Differentialquotienten schon der Grenzwert der Differenz der Funktionswerte 0 sein muss, was wiederum Stetigkeit bedeutet. Dies lässt sich noch leichter über die Ausnutzung der linearen Approximation erklären: Wenn $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ist, ist anschaulich leicht ersichtlich, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$ sein muss, da die rechte Seite offenbar für $x \to x_0$ gegen 0 konvergiert. Durch hinreichend kleine Änderungen am Argument kann man also beliebig kleine Änderungen am Funktionswert erreichen. Im letzten Argument wurde für die Differenzierbarkeit die Approximationsdeutung, für die Stetigkeit aber eine analytisch-algebraische Deutung verwendet.

Im mehrdimensionalen Fall gilt analog, dass totale Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert. Dies wird teilweise auch als Motivation für die Einführung

des Begriffs der totalen Differenzierbarkeit ergänzend zum Konzept der partiellen Differenzierbarkeit, welches nicht die Stetigkeit nach sich zieht, angegeben (z. B. Forster 2008).
Die Argumentation mit der Approximationsdeutung lässt sich ohne größere Änderungen aus dem ein- auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.
Im geometrischen Deutungskontext ergeben sich ein paar Änderungen. Den Funktionsgraphen kann man nur für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sinnvoll darstellen. In diesem Fall bedeutet totale Differenzierbarkeit, dass der Funktionsgraph lokal wie eine nicht vertikale Ebene, die Tangentialebene, aussieht. Für höhere Dimensionen spricht man weiterhin von der Tangential(hyper)ebene und kann mit analogen Argumenten arbeiten, auch wenn eine bildliche Vorstellung nicht mehr möglich ist. Den Graphen einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man sich grob vereinfacht als „verformten Teppich ohne Risse oder Löcher" vorstellen. Aus dem ε-Schlauch wird in diesem Fall eine „Schicht", die nach oben und unten durch zur xy-Ebene parallele Ebenen begrenzt wird. Die angesprochene Umgebung von x_0, die im Eindimensionalen ein offenes Intervall ist, wird im Mehrdimensionalen Ball genannt. Man kann nun das geometrische Argument aus dem Eindimensionalen darauf übertragen: Sieht der Graph lokal aus wie eine Ebene, kann man kleine Änderungen am Funktionsgraphen stattdessen entlang der Tangentialebene vornehmen, und erhält so, dass kein irreguläres Änderungsverhalten auftreten und man den Funktionsgraphen durch einen hinreichend kleinen Ball in jedem beliebig kleinen verallgemeinerten ε-Schlauch „einsperren" kann. Eine Übertragung des Konzepts „Sektorstreifen" ist hier nicht in einfacher Weise möglich. Argumente mit Hilfe des Differentialquotienten sind für diesen Fall unpassend, die Grenzwertbetrachtung mit Hilfe der Approximation kann aber ebenso vorgenommen werden.
Richtungsdifferenzierbarkeit in alle Richtungen hingegen impliziert noch nicht die Stetigkeit, wie man mit verschiedenen Gegenbeispielen auf formaler Ebene nachweisen kann, wohl aber Richtungsstetigkeit in alle Richtungen. Analoges gilt für partielle Differenzierbarkeit und partielle Stetigkeit. Anschaulich lässt sich auch dieser Zusammenhang im geometrischen Deutungskontext und im Approximationskontext analog zum eindimensionalen Fall erklären: Dadurch, dass partielle Differenzierbarkeit und Richtungsdifferenzierbarkeit die Approximierbarkeit durch (affin-)lineare Abbildungen bzw. durch Tangenten nur in bestimmte Richtungen garantieren, sind keine Informationen darüber gegeben, was passiert, wenn man diese Richtungen verlässt, was aber für Stetigkeit notwendig wäre. Es werden jedoch Informationen über Veränderungen in spezielle Richtungen gegeben, sodass für diese konkreten Richtungen „Richtungsstetigkeit" gegeben ist, was sich analog zum obigen Abschnitt erklären lässt.

Diskussion

Wie verschiedene Studien (Duru et al., 2010; Juter, 2012) zeigen, haben Lernende teilweise bereits im eindimensionalen Fall Schwierigkeiten damit, Differenzierbarkeit und Stetigkeit richtig in Beziehung zueinander zu setzen. Hilfreich könnte sein, neben dem formalen Satz und dessen Beweis auch die semantische Ebene zu adressieren und so das Concept Image (Tall & Vinner 1981) der Lernenden zu stärken. In diesem Beitrag haben wir Zusammenhänge von Stetigkeits- und Differenzierbarkeitskonzepten im ein- und mehrdimensionalen Fall auf semantischer Ebene in verschiedenen Deutungskontexten plausibilisiert und dabei auch die Begriffe „Richtungsstetigkeit“ und „partielle Stetigkeit“ thematisiert, die zwar für sich allein genommen wenig mathematische Aussagekraft haben, aber beim Verstehen von Zusammenhängen von Differenzierbarkeitskonzepten im mehrdimensionalen Fall nützlich sein könnten. Inwiefern dies bisher umgesetzt wird, kann durch eine Analyse von Lehrbüchern und Vorlesungen geklärt werden. Zudem sind weitere Studien nötig, um zu untersuchen, ob eine ausführlichere Besprechung der Konzepte auf semantischer Ebene das Verständnis der Lernenden fördern würde. Die hier vorgenommene Aufteilung in verschiedene Deutungskontexte ermöglicht dabei einen differenzierten Blick.

Literatur

Duru, A., Köklü, Ö., & Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers’ conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and essays, 5*(12), 1519-1529.

Dörge, K. (1948). *Differential- und Integralrechnung, Teil 1*. Ferd. Dümmlers Verlag.

Forster, O. (2008). *Analysis 2*. Vieweg+Teubner.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 33-67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Juter, K. (2012). The validity of students' conceptions of differentiability and continuity. In C. Bergsten, E. Jablonka, & R. Manya (Hrsg.), *Evaluation and Comparison of Mathematical Achievement: Dimensions and Perspectives. Proceedings of MADIF 8* (S. 121-130). Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning.

Lankeit, E., & Biehler, R. (2023). Different interpretations of the total derivative and how they can be reconstructed in textbooks for Multivariable Real Analysis. In M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth, & J. Peters (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2022, 19-22 October 2022)* (S. 193-202). University of Hannover and INDRUM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/bf00305619