Lisa Kathrin BRÜCKEL, Osnabrück

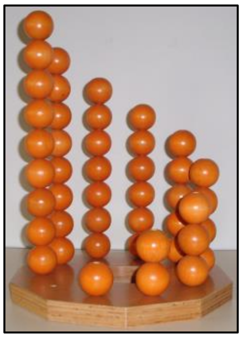
Förderung des arithmetischen Denkens von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern

Mathematische Fähig- und Fertigkeiten werden kumulativ erworben, wobei Kinder mit guten mathematischen Basisfertigkeiten ihre Fähigkeiten und ihr Wissen schneller erweitern als Kinder, die ihre Schullaufbahn auf einem niedrigeren mathematischen Leistungsniveau beginnen (vgl. Aunola et al. 2004). Aus diesem Grund benötigen insbesondere Kinder mit Lernschwierigkeiten besondere Unterstützungsangebote für einen guten Start in den Schulunterricht.

Basierend auf den langjährigen Erfahrungen von *Mathe-Magie,* dem Osnabrücker Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“ (Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank), zum Einsatz Mathematischer Spielwelten wurde eine Studie mit zwölf schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern durchgeführt. Die teilnehmenden Kinder waren zum Zeitpunkt der Studie 6 bzw. 7 Jahre alt und besuchten aufgrund von Lern- und Entwicklungsschwierigkeiten für ein Jahr eine spezielle Förderklasse an einer Grundschule in Niedersachsen („Schulkindergarten“). Diese Kinder wurden ein halbes Jahr lang in mathematischen Gruppen- und Einzelspielstunden individuell gefördert.

Die Studie stellte den Umgang mit dem *Zahlraum* und das darauf aufbauende Verständnis für *Rechenoperationen* in den Mittelpunkt. Ziel der Studie war festzustellen, auf welche Schwierigkeiten die Kinder bei der Auseinandersetzung mit arithmetischen Inhalten trafen, aber auch zu welchen logisch schlussfolgernden Argumentationen und Erkenntnisfortschritten die Kinder trotz ihrer Lernschwierigkeiten in der Lage waren.

Anhand von verschiedenen mathematikdidaktischen Materialien, vor allem mittels der Spielwelt „Rechenwendeltreppe“, sollten sich die Kinder zunächst mit dem Zahlraum von *null bis neun* auseinandersetzen. Die „Rechenwendeltreppe“ wurde am Osnabrücker Treffpunkt entwickelt (vgl. Schwank 2003, 2013) und anschließend im Rahmen verschiedener Abschlussarbeiten an der Universität Osnabrück mit Kindergarten- und Grundschulkindern erprobt. Das Material besteht aus einer Holzbodenplatte mit kreisförmig angebrachten Metallstangen, auf die Kugeln gesteckt werden können. Die Kugeln werden – ausgehend von dem Platz ohne Stange bzw. mit null Kugeln – so verteilt, dass bis hin zur Stange mit neun Kugeln von Stange zu Stange jeweils genau eine Kugel dazukommt (siehe obige Abb.).



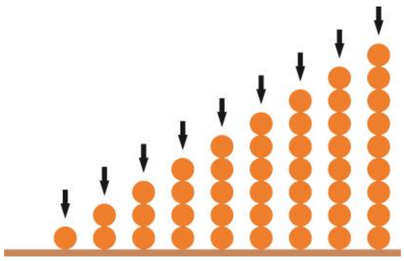
Auf die mit Kugeln gefüllten Stangen können verschiedene Spielfiguren (Akteure) gesetzt werden, die sich je nach Blickrichtung durch Versetzen auf Nachbarstangen die Treppe aufwärts oder abwärts bewegen. Im Folgenden wird die Rechenwendeltreppe in schematischer, „aufgefalteter“ Ansicht dargestellt.

Bei der Betrachtung des gegebenen Zahlraums können zwei unterschiedliche Sichtweisen eingenommen werden, die im folgenden Spielereignis auftreten. Zwei Mädchen bauen die Rechenwendeltreppe komplett auf und wenden sich zum Schluss der höchsten Stange mit neun Kugeln zu. Die Spiel-Leiterin lenkt die Aufmerksamkeit auf die Kugelanzahl auf dieser Stange.

SL: So, wie viele Kugeln haben wir jetzt gesteckt, auf die Stange? Wie viele Kugeln sind auf der höchsten Stange? Sagt mir das mal. [...]

Regina: Neun!

Lena: Acht.



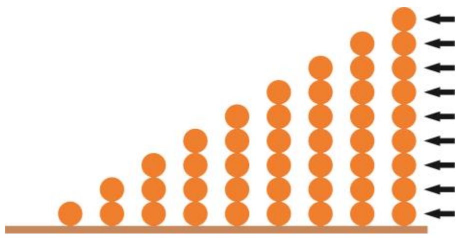
Regina: Neun! [...]

SL: Zählt mal vor.

Regina: [*tippt dabei nacheinander die jeweilige Stange oben an*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

Lena: Nee. [*fängt ebenfalls wie Regina an, die Stangen anzutippen*] Eins, zwei, drei, ... [*stoppt bei der Stange mit vier Kugeln*] Du hast so gezählt, deswegen sind es neun. [*bewegt ihre Hand über die Stange mit einer Kugel bis zur Stange mit neun Kugeln*]

Du musst aber so ... [*berührt die Kugeln auf der Stange mit neun Kugeln – beginnend mit der untersten*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun-zehn.



SL: Wie viel, Lena?

Lena: Neun-zehn.

Regina: Gar nicht. Eins ... [*fasst die untere Kugel auf der Stange mit neun Kugeln an*]

Lena: Doch, Regina! Du hast ja so gezählt! [*bewegt ihre Hand über die Stange mit einer Kugel bis zur Stange mit neun Kugeln*]

SL: Zähl noch mal, Lena. Lena!

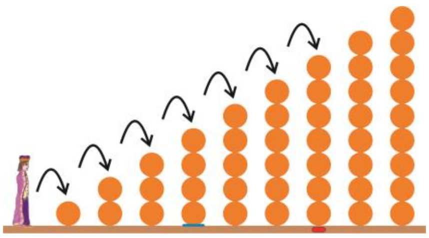
Lena: [*berührt erneut die Kugeln auf der Stange mit neun Kugeln – beginnend mit der untersten*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

SL: Mhm [*zustimmend*].

Es lässt sich in diesem Spielereignis erkennen, dass entweder der Entstehungsprozess der Kugelanzahl über die Stangen (erste Abb. im Transkript) oder die Gesamtanzahl der Kugeln auf der gerade aktuellen Stange (zweite Abb. im Transkript) betrachtet werden kann. Bei der ersten Sichtweise wird die Kugelanzahl durch die Nachfolgerabbildung $f(x) = x + 1$ bestimmt (*Ordinalzahlaspekt*), bei der zweiten Sichtweise (*Kardinalzahlaspekt*) interessiert die Mächtigkeit einer endlichen Menge von Elementen (vgl. Ebbinghaus 2003, S. 65). Beim ordinalen Aspekt kann leichter eine Vorstellung von den Zahlen über ihre Beziehungen zu anderen Zahlen aufgebaut werden; beim kardinalen besteht hingegen die Gefahr des reinen Aufsagens der Zahlwortreihe, ohne eine Vorstellung von den Zahlen zu erwerben.

In der Studie zeigte sich, dass die teilnehmenden Kinder zunächst eher isoliert Anzahlen betrachteten und verstärkt ergebnisorientiert vorgingen, indem der Prozess der Anzahlbestimmung ausgeblendet wurde. Dieses Vorgehen war recht fehleranfällig, wobei den Kindern Fehler häufig nicht selbstständig auffielen. Im Verlauf der Studie änderte sich ihr Verhalten jedoch. Die Kinder orientierten sich vermehrt an Vorgängern bzw. Nachfolgern von Zahlen und begründeten und hinterfragten Erkenntnisse. Durch die auf Zahlnachbarschaften bezogenen Begründungen der Kinder konnten Fehler reduziert und von den Kindern schneller korrigiert werden.

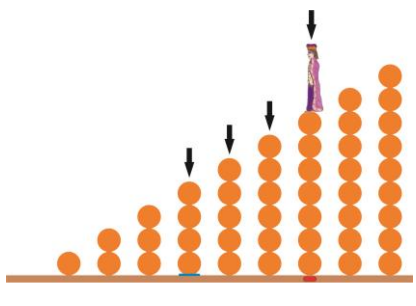
Aufbauend auf einem *Zahlraumverständnis* wurden mit den Kindern anschließend *additive* und *subtraktive Rechenoperationen* besprochen. Hierfür wurden die oben erwähnten Akteure eingesetzt, die sich entsprechend der Rechenoperation auf der Rechenwendeltreppe bewegen konnten. Im folgenden Spielereignis sollen durch Handlungen mit dem Akteur „König“, der am Startplatz mit null Kugeln beginnt, die Rechenoperationen $0 + x = 7$ und $7 - y = 4$ durchgeführt werden. Die Stangen mit sieben und vier Kugeln sind hierfür durch einen roten Glasstein („Edelstein“) bzw. eine blaue Moosgummischeibe („Ziel“) markiert.



SL: Sonja, fängst du mal an ... und lauf mal mit dem König bis zum Edelstein und zähl mal die Schritte.

Sonja: [*versetzt den König jeweils um eine Stange und sagt dazu das passende Zahlwort auf*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. Sieben.

SL: Super. Genau dort macht er eine Pause und schaut sich den Edelstein an. Genau. Und jetzt darf Robert mit dem König wieder nach unten gehen bis zum Ziel. Und zähl mal die Schritte.



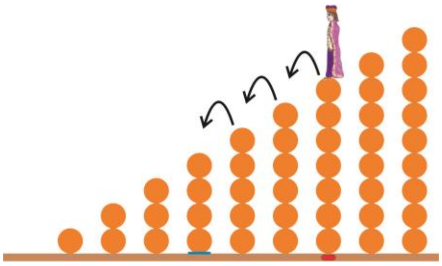
Robert: Sieben. [*versetzt den König immer um eine Stange und sagt dazu jeweils ein Zahlwort auf*] Sechs, fünf, vier.

SL: Klasse. Robert, und jetzt hast du ja immer gesagt, auf wie vielen Kugeln der König steht, ne? Du hast gesagt [*stellt den König jeweils auf die entsprechende Stange*]: Hier sind sieben, hier sind sechs, hier sind fünf, hier sind vier ... immer gesagt, auf wie vielen Kugeln der steht.

Wir haben hier [*stellt den König auf die Stange mit sieben Kugeln*] angefangen und wenn er jetzt die Schritte gehen soll ...

Robert: Dann muss der eins ...

SL: Eins. Zählst du mal weiter, Robert? Also wir fangen hier an. [*stellt den König auf die Stange mit sieben Kugeln*]



Robert: [*versetzt den König jeweils um eine Stange*] Eins, zwei, drei.

SL: Ganz klasse, Robert. Super.

In diesem Spielereignis zeigt sich, dass der Junge zunächst auf Objekte fokussiert ist und die Gesamtanzahl an Kugeln auf den jeweiligen Stangen angibt. Er geht zwar Schritte mit dem Akteur, lässt sich aber erst auf Nachfrage der Spiel-Leiterin auf die Bewegungseinheiten, d.h. auf eine *Schrittperspektive* ein. Das Einnehmen solch einer handlungsbezogenen Perspektive gelang den teilnehmenden Kindern zunehmend im Verlauf der Studie. Während sie zu Beginn ihr Augenmerk noch stark auf Objekte bzw. Mengen richteten, Schritte mit Objekten verwechselten und Schwierigkeiten mit dem Setzen des Akteurs beim Rechenoperationsbeginn und -ende hatten, wurde mit der Zeit ihr Agieren im Zahlraum zunehmend sicherer. Sie ließen sich vermehrt auf Bewegungseinheiten ein und waren nach einer Erweiterung des Zahlraums hin zu *null bis neunzehn* in der Lage, auch Rechenoperationen mit Zehnerübergang durchzuführen.

Literatur

Aunola, K. et al. (2004): Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), S. 699-713.

Brückel, L. K. (2011): Spuren arithmetischen Denkens bei Vorschulkindern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, S. 163-166, Münster: WTM.

Brückel, L. K. (in Arbeit): Arithmetisches Denken von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern – Eine qualitativ empirische Studie zum Zahlraum- und Rechenoperationsverständnis. Universität Osnabrück.

Ebbinghaus, H.-D. (2003): Einführung in die Mengenlehre. Heidelberg: Spektrum.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 35(3), 70-78.

Schwank, I. (2013, in Druck): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster, J. H. Lorenz (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 2., überarb. und erw. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.