

LENZ, Denise; BÖHME, Nadine; BRÄUER, Michelle; BRÄUNING, Kerstin & SCHORCHT, Sebastian  
Leipzig, Erfurt, Halle a. d. S., Dresden

## **Lehrbuchanalyse zu Aufgaben gemäß dem Waagemodell**

### **Problemaufriss**

Um mathematische Gleichungen lösen zu können, müssen Schüler\*innen verstehen, dass die Ausdrücke auf beiden Seiten einer Gleichung den gleichen Wert haben (oder äquivalent zueinander sind) und während der Lösung der Gleichung diese Gleichheit beibehalten werden muss (Kieran et al., 2016; Steinweg, 2013). Die Gleichheit stellt ein Schlüsselkonzept beim Lösen von linearen Gleichungen dar (Bush & Karp, 2013). Missverständnisse im Zusammenhang mit dem Konzept der Gleichheit zeigen sich insbesondere in der Interpretation des Gleichheitszeichens (Borromeo Ferri & Blum, 2011; Hagemeister, 2013; Otten et al., 2019). Anstatt es als relationales Symbol und als Äquivalenzzeichen zu verstehen, wird es oft aus einer rein operativen Sicht als Handlungszeichen wahrgenommen, im Sinne von „etwas zu tun“ oder dass „es etwas ergibt“ (u. a. Knuth et al., 2006). Eine unzureichende Festigung beider Vorstellungen des Gleichheitszeichens als Zuweisungs- und Beziehungszeichen (Malle, 1993) bereits im Mathematikunterricht der Grundschule kann einen sicheren Umgang mit Variablen und algebraischen Gleichungen behindern (Borromeo Ferri & Blum, 2011; Hagemeister, 2013). Der Wechsel zwischen den beiden Vorstellungen wird von Schüler\*innen nicht selbstständig vollzogen (Borromeo Ferri & Blum, 2011) und benötigt extrinsische Anstöße (Malle, 1993) durch entsprechende Aufgaben und Impulse der Lehrperson.

Um Schüler\*innen den Zugang zum Konzept der Gleichheit zu erleichtern, wird trotz seiner Einschränkungen (vgl. Aczel, 1998; Steinweg, 2013) häufig das Waagemodell genutzt. Die unbekanntesten Werte werden hier bspw. als Boxen gekennzeichnet, während die gegebenen Werte durch Einzelobjekte wie Kugeln dargestellt werden (Steinweg, 2013). Die beiden sich im Gleichgewicht befindlichen Waagschalen werden dabei verwendet, um die Gleichheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zu verdeutlichen. Otten et al. (2019) konnten basierend auf einer umfassenden Review-Studie zu Gleichgewichtsmodellen (physisch und virtuell repräsentierte Waagen, Mobiles etc.) als Mittel für den Unterricht von linearen Gleichungen positive Lerneffekte bei Lernenden zu Beginn der Auseinandersetzung mit Gleichungen feststellen. Gezeichnete Waagen wurden eher bei Lernenden genutzt, die bereits über Erfahrungen in der Algebra verfügten. Hier zeigte sich nach Otten

et al. (2019) eher ein gemischter bis negativer Effekt bei Verwendung gezeichneter Waagemodellen hinsichtlich des Lernerfolgs.

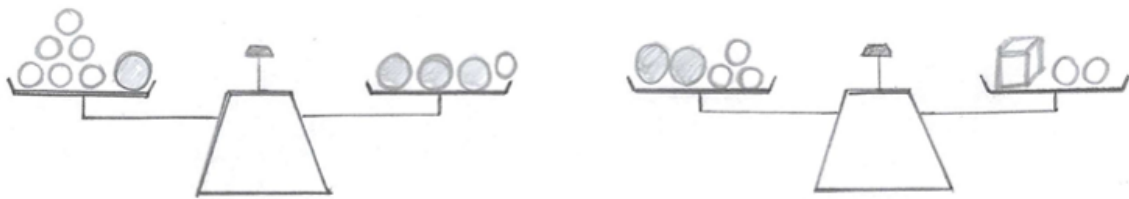
Aufgrund der Bedeutung des Waagemodells zur Unterstützung der Vorstellungen des Gleichheitszeichens als Zuweisungs- und Beziehungszeichen (Malle, 1993) und dem Stellenwert des Mathematikschulbuchs als unterrichtsgestaltendes Element (Sievers et al., 2020) wird im Folgenden eine Studie skizziert, die Aufgaben in Mathematiklehrwerken der Grundschule zum Waagemodell (Balance model) mit gezeichneten Waagen in der Aufgabenstellung analysiert. Im Rahmen der Untersuchung steht die Frage im Fokus, wie die Aufgaben zum Waagemodell in aktuellen Schulbüchern gestaltet sind bzw. inwiefern sich ein Aufgabenspektrum, insbesondere in Hinblick auf die mögliche Anbahnung relationalen Denkens und somit einer geforderten Fokussierung auf den Übergang zu einer relationalen Sicht auf das Gleichheitszeichen zeigt.

### **Methodisches Vorgehen**

Um die Forschungsfrage zu beantworten, wird eine qualitative Inhaltsanalyse von Schulbüchern nach Mayring (2015) durchgeführt. Die hier eingesetzte Frequenzanalyse als Spezialfall der Inhaltsanalyse untersucht die „relative Häufigkeit bestimmter Merkmale von Kommunikationsinhalten“ (Böhm-Kasper et al. 2009, S. 90). Für die Bestimmung des Ausgangsmaterials wird sich im Sinne der Korpusbildung auf die fünf am meisten verwendeten Lehrwerke beschränkt, die im Mathematikunterricht an Grundschulen in Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen eingesetzt werden. Alle Grundschulen in den drei genannten Bundesländern wurden per E-Mail kontaktiert, sodass sich nach erfolgter Abfrage die fünf häufigsten genutzten Lehrwerke ergaben. Als Analyseeinheit gelten Schulbuchausschnitte, die explizit durch Aufgabennummern oder deutliche visuelle Hervorhebungen als Aufgaben markiert sind und einen Aufforderungscharakter haben. Als zentrale Bedingung für die Einbeziehung in die Analyse, muss ein Bild einer Waage entsprechend des Balance-Modells bspw. eine Balken- oder Tafelwaage vorhanden sein. Es folgte eine Materialsichtung aller fünf Lehrwerke in der aktuellsten Fassung (Stand: Sept. 2023) von Klasse 1 bis 4. Im Anschluss wurde anhand der einbezogenen Aufgaben induktiv ein Kategoriensystem entwickelt, indem die einzelnen Analyseeinheiten den relevanten Hauptkategorien bzw. Unterkategorien zugeordnet wurden (Mayring, 2015, S. 68). Die Aufgaben wurden anhand der möglichen Aufgaben- und Zielstellung, ihrer Aufgabenstruktur, der Art der Darstellungen des Balance Modells und der verwendeten Unbekannten sowie deren Relationen und hinsichtlich verschiedener Unterkategorien zu diesen analysiert.

## Exemplarische Aufgabe nach dem Balance Model

Abbildung 1 zeigt eine Beispielaufgabe, die in starker Anlehnung an eine Aufgabe aus dem Lehrwerk Duden der Mathematik Klasse 3 erstellt wurde, um das Analyseschema zu verdeutlichen. Die Aufgabenstruktur legt nahe, dass die Kinder zwei Tafelwaagen miteinander in Beziehung setzen sollen, um das Gewicht des Würfels zu ermitteln. In der Darstellung des Balance Modells befinden sich beide Waagen im Gleichgewicht. In Bezug zu den verwendeten Unbekannten und deren Relationen ist zunächst das Gewicht eines kleinen Balls bekannt. Die Kinder können durch Äquivalenzumformungen auf der linken Waage (z.B. Wegnehmen von jeweils einem kleineren und größeren Ball auf der rechten und linken Seite der linken Waage) und das Ersetzen der größeren Bälle durch kleinere Bälle auf der rechten Waage ermitteln, dass der Würfel so schwer ist wie 6 kleine Bälle. Alternativ lässt sich durch Anwendung von Rechenoperationen der Wert eines größeren Balls ermitteln (Unbekannte), um diesen Wert für die Ermittlung des Gewichts des Würfels auf der rechten Seite nutzen zu können. Bei beiden Vorgehensweisen sind mehrere Bearbeitungsschritte erforderlich.



Jeder kleine Ball wiegt 50 g. Wie schwer ist der Würfel?

Abb. 1: nachgebildete Aufgabe in Anlehnung an eine Schulbuchaufgabe aus dem Lehrwerk Duden Mathematik Klasse 3 (Müller-Wolfangel, Heilig & Schreiber, 2022, S.89)

### Diskussion

Abbildung 1 zeigt eine Aufgabe, bei der das Modell der Waage nicht nur zum Ausführen von Rechenoperationen und der Ermittlung von Ergebnissen genutzt wird, sondern zum in Beziehung setzen von Zahlen und Termen. Es regt zu relationalem Denken an, indem es nicht nur das prozedurale Ausrechnen des Gewichts des Würfels, sondern durch das Auftreten von Unbekannten auf mehreren Seiten der Waagen zu strukturalen Betrachtungen anregen kann. Insbesondere Äquivalenzumformungen können anhand der dargestellten Aufgabe angewendet werden.

Eine Besonderheit bei Waagen im Sinne des Balance Modells ist, dass diese in der Alltagswelt der Kinder selten vorkommen, da Wiegeprozesse kaum noch unter Zuhilfenahme von Tafelwaagen oder Balkenwaagen vollzogen

werden. Weiterer Forschungsbedarf bleibt, inwieweit bildliche Darstellungen von Waagen gemäß des Balance Models einen Beitrag zur Anbahnung relationalen Denkens leisten und wie diese verständnisunterstützend in den Unterricht integriert werden können.

## Literatur

- Aczel, J. (1998). Learning algebraic strategies using a computerised balance model. In A. Oliver & K. Newstead (Hrsg.), *Proceedings of the 22nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 1–16). PME.
- Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In H. Reinhold & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 127–130). WTM-Verlag.
- Böhm-Kasper, O., Suchart, C., & Weishaupt, H. (2009). *Quantitative Methoden in der Erziehungswissenschaft*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz
- Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, S. 613–632. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002>
- Hagemeister, Volker (2013). Grundschulprobleme mit dem Gleichheitszeichen. *MNU*, 66(7), S. 393–398
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, S. 297–312.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.
- Müller-Wolfangel, U., Heilig, S. & Schreiber, B. (2022). *Wissen Üben Testen: Mathematik 3. Klasse*. Duden.
- Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6, S. 1–21. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2>
- Sievert, H., van den Ham, A-K., & Heinze, A. (2020). Mit guten Schulbüchern zum flexiblen Rechnen? Lerngelegenheiten in Schulbüchern und ihr Bezug zum Lernerfolg. *Die Grundschulzeitschrift*, 34(324), S. 41–44.
- Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule: Muster und Strukturen Gleichungen – funktionale Beziehungen*, Springer Spektrum <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2738-0>