

GRETZSCHEL, Isabelle
Halle (Saale)

Was bedeuten geringfügige strukturelle Variationen von Problemen für deren Bearbeitungen? - Einblicke in eine qualitative Interviewstudie zur strategischen Flexibilität

Einführung

Viele Problembearbeitungen verlaufen nicht idealtypisch und führen nicht unmittelbar im ersten Anlauf zur angestrebten Problemlösung. Insbesondere für solche Bearbeitungsprozesse sind verschiedene Situationen denkbar, die Veränderungen verlangen können. So können beispielsweise unergiebigere Lösungsbemühungen Veränderungen der Vorgehensweise erforderlich machen. Dies kann bedeuten, dass man von einem eingeschlagenen Weg zu einem anderen wechselt. Eine vollständige Abkehr von einem bislang nicht zielführenden Weg ist jedoch nicht immer zwangsläufig erforderlich. Ein zur Lösungsfindung bereits genutztes Vorgehen kann auch durch Modifizieren verändert werden. Wechsel und Modifikationen können sowohl innerhalb als auch zwischen Problembearbeitungen auftreten und werden als Ausdruck probleminterner bzw. problemübergreifender *strategischer Flexibilität* angesehen. Beim Problemlösen ist diese Flexibilität besonders für Bearbeitungsprozesse und den Umgang mit heuristischen Elementen von großer Bedeutung. Flexibilität kann unter anderem dazu beitragen, unergiebigere Lösungsbemühungen zu überwinden. Ebenso kann sie es ermöglichen, auf unterschiedliche mathematische Anforderungen reagieren zu können.

Flexibilität innerhalb mathematischer Problembearbeitungen wurde vor allem von Heinrich (2004) umfassend untersucht, wobei er sich auf das Wechseln von Lösungsanläufen innerhalb der Bearbeitung von reichhaltigen geometrischen Problemstellungen konzentrierte. In weiteren jedoch eher produktorientierten Studien (u.a. Arslan & Yazgan, 2015; Elia et al., 2009) wurde neben der probleminternen auch die problemübergreifende Flexibilität untersucht. Dies erfolgte bisher vor allem unter Einsatz mathematischer Probleme, deren erkennbare oberflächliche wie auch tiefenstrukturelle Verschiedenheit Veränderungen der Vorgehensweisen zwischen den Bearbeitungen direkt naheliegend erscheinen lassen kann.

Insgesamt ist bisher noch immer verhältnismäßig wenig über strategische Flexibilität beim mathematischen Problemlösen bekannt. Mit einer qualitativ angelegten empirischen Untersuchung zur problemübergreifenden, aber auch probleminternen Flexibilität von Lehramtsstudierenden beim Bearbeiten mathematischer Probleme im Rahmen eines Dissertationsprojektes soll ein weiterer Beitrag zu diesem Forschungsfeld geleistet werden.

Zur Untersuchung

Primär auf die Untersuchung problemübergreifender Flexibilität ausgerichtet, wurden für diese Studie drei Problemserien entwickelt. Jede dieser Problemserien setzt sich aus einem Verbund von drei textbasierten und potentiell problemhaltigen Aufgaben zusammen. Die Probleme innerhalb jeder Serie weisen nicht nur ähnliche Oberflächenmerkmale (u.a. Kontext) auf, sondern basieren auch jeweils auf ähnlichen mathematischen Strukturen. Diese wurden jedoch bewusst so variiert, dass es zwar durchaus möglich ist, für die Bearbeitung aller drei Probleme analog vorzugehen, ein solches Vorgehen ausgenommen des Probierens oder eines rein algebraischen Vorgehens jedoch nicht zielführend, d.h. lösungsträchtig ist. Die so konzipierten Problemserien können es ermöglichen, insbesondere aufgabenübergreifende Flexibilität systematisch herauszufordern und neben dem Wechseln auch das Modifizieren gezielt zu untersuchen, ohne dass entsprechende Veränderungen der Vorgehensweisen durch die Probleme direkt nahegelegt werden. So basiert die Problemserie zum Rückwärtsarbeiten auf drei Problemen (P1, P2, P3), in denen jeweils ein vorgegebener Endwert durch Anwendung mehrerer aufeinanderfolgender mathematischer Operationen aus einem noch unbekanntem Anfangswert hervorgeht (s. Abb. 1).

<p>Problem 1: Vier Piraten haben eine Schatzkiste mit Goldmünzen gestohlen. Die Piraten beschließen, die Münzen am nächsten Tag gerecht zu teilen. Nachts schleicht sich jedoch der erste Pirat heimlich zur Schatzkiste. Er zählt die Münzen und nimmt sich die Hälfte. Später kommt der zweite Pirat an der Schatzkiste vorbei und steckt sich 3 Münzen ein. Danach steht der dritte Pirat auf. Er öffnet die Schatzkiste, zählt die Münzen und nimmt sich davon die Hälfte. Später schleicht sich noch der vierte Pirat zur Schatzkiste und nimmt sich 4 Münzen. Am nächsten Morgen sind noch 5 Münzen in der Schatzkiste. Wie viele Goldmünzen waren es am Anfang?</p>	<p>Problem 2: Vier Kinder sammeln zu Halloween Bonbons. Sie bewahren alle Bonbons in einer Tüte auf. Die Tüte steht im Wohnzimmer auf dem Tisch. Zuerst geht das erste Kind ins Wohnzimmer und greift sich 5 Bonbons heraus. Danach schleicht sich das zweite Kind zur Tüte. Es zählt die Bonbons und nimmt sich ein Drittel von diesen. Später isst das dritte Kind 4 Bonbons aus der Tüte. Schließlich geht das vierte Kind ins Wohnzimmer. Es schaut in die Tüte und nimmt sich die Hälfte der Bonbons. Danach sind noch 6 Bonbons in der Tüte. Wie viele Bonbons haben die Kinder ursprünglich gesammelt?</p>
<p>Problem 3: Drei Diebe haben einen Sack mit Diamanten erbeutet, die sie am nächsten Tag unter sich aufteilen wollen. In der Nacht schleicht sich der erste Dieb zum Sack und steckt sich ein Drittel der Diamanten ein. Als er wieder schläft, geht der zweite Dieb zum Sack und nimmt sich 2 Diamanten mehr als der erste heraus. Im Morgengrauen nimmt sich der dritte Dieb die Hälfte der übrig gebliebenen Diamanten. Danach sind noch 5 Diamanten im Sack. Wie viele Diamanten waren zu Beginn im Sack?</p>	

Abb. 1: Überblick Problemserie „Rückwärtsarbeiten“

Der jeweils gesuchte Wert für die vor Beginn der beschriebenen Prozesse vorhandene Gesamtanzahl an Objekten lässt sich durch Rückwärtsarbeiten ermitteln. Ausgehend vom gegebenen Endwert kehrt man dazu den chronologischen Ablauf der beschriebenen Prozesse sowie die damit verbundenen Rechenoperationen um und wendet diese dann entsprechend nacheinander auf den Endwert an. Während in P1 alle der beschriebenen Operationen unmittelbar umgekehrt werden können, sind für die zielführende Aufrechterhaltung des Rückwärtsarbeitens zur Bearbeitung von P2 und P3 aufgrund nicht unmittelbar umkehrbarer Operationen zunehmend umfangreichere

Veränderungen dieser Vorgehensweise notwendig. So bedarf es sowohl für die Bearbeitung von P2 als auch von P3 der Umdeutung des Wegnehmens eines Drittels in das Übrigbleiben von zwei Dritteln. Für durchgängiges Rückwärtsarbeiten in der Bearbeitung von P3 ist darüber hinaus auch Strukturbildung zwischen den beschriebenen Operationen erforderlich.

In den Wintersemestern 2021/2022 und 2022/2023 bearbeiteten insgesamt 20 kriteriengeleitet ausgewählte Erstsemesterstudierende des Lehramt an Grundschulen im Rahmen von halbstandardisierten Leitfadeninterviews diese Problemserie in Einzelarbeit unter Zuhilfenahme der Methode des lautenden Denkens. Die Dokumentation erfolgte prozessbegleitend durch Videoaufnahmen, die anschließend zu ausführlichen Transkripten verarbeitet wurden. Die Analyse und Auswertung der erhobenen Daten erfolgt prozessorientiert im Rahmen einer deduktiv-induktiven qualitativen Inhaltsanalyse.

Einblicke in Bearbeitungen der Problemserie

Alle Untersuchungsteilnehmenden konnten die Lösung von P1 erfolgreich durch Rückwärtsarbeiten ermitteln. Auch die daran anschließenden Probleme P2 und P3 bearbeiteten die Studierenden zunächst ausgehend vom Endwert durch Rückwärtsarbeiten, wobei dieses Vorgehen aufgrund der veränderten mathematischen Strukturen für viele Studierende herausfordernd war. Es konnten verschiedene Umgangsweisen mit den Variationen in P2 und P3 rekonstruiert werden, über die im Folgenden genauer berichtet werden soll.

In einigen Bearbeitungen zeigten sich keine anforderungsbedingten Veränderungen. So rekonstruierte beispielsweise Nina das Wegnehmen einer Hälfte in P1 durch Verdoppeln. Dieses Vorgehen übertrug sie dann auf die Bearbeitung von P2 und kehrte ähnlich dazu das Wegnehmen eines Drittels durch Verdreifachen um. Auch Colin bearbeitete P2 zunächst auf diese Weise. Anschließend modifizierte er seine Vorgehensweise jedoch noch einmal und passte diese damit an die veränderten Anforderungen in P2 an. Anders als Nina gelang es ihm durch Rückwärtsarbeiten mit Umdeutung im zweiten erkennbaren Bearbeitungsanlauf somit noch, P2 korrekt zu lösen.

Auch die Bearbeitung von P3 erfolgte bei vielen der Studierenden zunächst ausgehend vom vorgegebenen Endwert durch Umkehrung des Wegnehmens einer Hälfte. Aufgrund von Schwierigkeiten im Umkehren der weiteren in P3 beschriebenen Operationen wechselten dann sowohl Colin als auch Nina jeweils ihren Bearbeitungsansatz, wobei Nina ihre Vorgehensweise dabei sogar wiederholt innerhalb der Bearbeitung von P3 veränderte:

"Also am Anfang habe ich praktisch versucht, rückwärts zu rechnen, dann habe ich es über eine Gleichung versucht. Das ist beides nicht so gut geglückt (lacht) und dann habe ich sozusagen den Startwert einfach ausprobiert."

Diese beiden Studierenden ermittelten die Lösung für P3 letztlich durch Probieren. In den Veränderungen der Vorgehensweisen zwischen diesen exemplarisch geschilderten Bearbeitungen von P2 und P3 kommt problemübergreifende Flexibilität zum Ausdruck. Diese ergibt sich bei Nina und Colin allerdings nur aufgrund der probleminternen Wechsel innerhalb von P3.

Es gab aber auch Studierende, die ihr Vorgehen zwischen den drei Problemen jeweils direkt veränderten. So gelangte beispielsweise Anton ohne probleminterne Flexibilität zur Lösung, indem er sein Vorgehen direkt passend für die Bearbeitung von P3 modifizierte. Anton setzte die ersten beiden im Text beschriebenen Operationen miteinander in Beziehung und schlussfolgerte davon ausgehend, wie aus dem zunächst durch Rückwärtsarbeiten bestimmten Zwischenwert der gesuchte Anfangswert ermittelt werden kann:

"Ähnliches Prinzip, aber etwas schwieriger. Der Zweite hatte dann ein Drittel plus zwei. Heißt, zwei fehlen bei dem letzten Drittel. Also rechne ich einfach zwölf mal drei.

Ausblick

Diese Bearbeitungseinblicke verdeutlichen bereits, dass die Studierenden unterschiedlich mit den variierten Anforderungen innerhalb der Problemserie zum Rückwärtsarbeiten umgegangen sind. In Rahmen des fortlaufenden Dissertationsprojektes werden die erhobenen Daten zu dieser Problemserie weiter qualitativ und prozessorientiert ausgewertet. Dazu werden die individuellen Vorgehensweisen der Studierenden jeweils für die Bearbeitung aller drei Probleme möglichst detailliert rekonstruiert und anschließend hinsichtlich Ausprägungen probleminterner und problemübergreifender Flexibilität analysiert. Dieses methodische Vorgehen wird auch für die zu den anderen beiden Problemserien erhobenen Daten genutzt. Schlussfolgerungen zum Auftreten und zu qualitativen Ausprägungen strategischer Flexibilität von Lehramtsstudierenden beim Problemlösen werden angestrebt. Davon ausgehend können sich didaktische Implikationen für die erste und zweite Ausbildungsphase im Lehramt ergeben.

Literatur

- Arslan, C. & Yazgan, Y. (2015). Common and Flexible Use of Mathematical Non Routine Problem Solving Strategies. *American Journal of Educational Research*, 3(12), 1519–1523. <https://doi.org/10.12691/education-3-12-6>
- Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM - Mathematics Education*, 41(5), 605–618. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6>
- Heinrich, F. (2004): *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme – Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen*. Verlag Dr. Kovac.