

HUMENBERGER, Hans  
Wien

## Probleme über Wahrscheinlichkeiten auf Social Media für den Unterricht verwenden?

In der renommierten österreichischen Tageszeitung „Der Standard“ gab es 2024 einen interessanten Beitrag des Wissenschaftsjournalisten Klaus Taschwer (<https://www.derstandard.de/story/3000000234803/mathematiker-verbluefft-auf-social-media-mit-tueckischen-wahrscheinlichkeitsraetseln>). Man liest dort in den ersten Zeilen: „Münzwürfe, Urnen und Kugeln. Mathematiker verblüfft auf Social Media mit tückischen Wahrscheinlichkeitsrätseln. Daniel Litt, Spezialist für Zahlentheorie und algebraische Geometrie, denkt sich harmlos klingende Probleme aus, die kontraintuitive Antworten liefern – und inspiriert damit Fachleute.“ Das beschreibt die Lage recht gut. Daniel Litt lehrt und forscht als junger Assistenzprofessor an der Universität Toronto in Kanada und hat offenbar einen guten Sinn für stochastische Rätsel, obwohl er selbst gar kein Stochastiker ist (wer schafft es schon mit mathematischen Rätseln in renommierte Tageszeitungen zu kommen?).

Wir beginnen mit dem dortigen Rätsel 2:

Werfen Sie eine Münze so lange, bis Sie fünf aufeinanderfolgende Würfe der Art KZZZK oder KZKZK erhalten (wobei K für Kopf und Z für Zahl steht). Dann hören Sie auf. Diese letzten fünf Würfe waren wahrscheinlicher a) KZZZK b) KZKZK c) Beide Alternativen sind gleich wahrscheinlich?

Die Wahrscheinlichkeiten, dass das eine Muster früher kommt als das andere, wirklich auszurechnen ist nicht leicht, aber darum geht es auch gar nicht. Die Antwort c) „Gleichwahrscheinlichkeit“ kann dadurch getriggert werden man, dass natürlich jedes 5-gliedrige K-Z-Muster gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit bei 5 Würfeln hat, nämlich  $(1/2)^5$ , und es geht ja immer nur um die letzten 5 Münzwürfe. Betrachtet man allerdings diese beiden Muster genauer, kann – und soll – auffallen (und darum geht es hier primär): Wenn das erste Muster knapp vor Schluss „scheitert“, d. h. nach KZZZ kommt nicht K, sondern Z, dann ist das für beide Muster gleich schlecht, denn in beiden Fällen muss man auf das nächste K (als ersten richtigen Wert des jeweiligen Musters) warten. Wenn allerdings das zweite Muster knapp vor Schluss „scheitert“, d. h. nach KZKZ kommt nicht K, sondern Z, dann sind mit den dann letzten drei Würfeln (KZZ) schon die ersten drei Stellen des ersten Musters da, während das zweite Muster „wieder vor dem Nichts steht“ (es muss auf das erste K für einen Neubeginn warten), daher ist dieses Muster klar im Vorteil, und zwar in diesem Fall und auch insgesamt. Die Quantifizierung dieses Vorteils ist nicht Teil der Aufgabe.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Nun kommen wir zu Rätsel 1, mit dem wir uns im Folgenden noch etwas ausführlicher beschäftigen werden. Wir lassen es auf Englisch (Abb. 1).

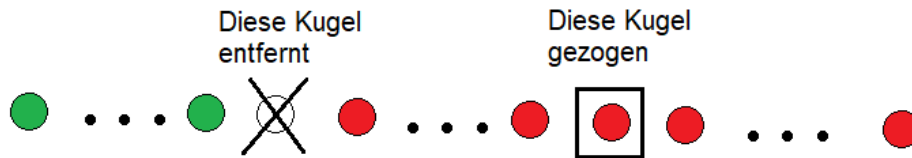


Abb. 1: Rätsel 1 von Daniel Litt

In Abb. 1 sieht man auch, dass nach einer Abstimmung unter 22.563 Stimmen (Ende Januar 2024) sich die relative Mehrheit für „eher grün“ entschieden hat (ca. 37 %). Die Alternativen (eher rot, gleichwahrscheinlich, weiß nicht) lagen alle ungefähr bei 20 % Zustimmung. Wir wissen nicht, ob die abstimmenden Personen viel überlegt, oder eher nach Bauchgefühl angekreuzt haben, auch nichts über ihre mathematische Bildung. Es ist auch nicht so wichtig, aber schon jetzt sei so viel verraten: die mehrheitliche Antwort „eher grün“ stimmt nicht.

Bevor wir hier genauere Überlegungen anstellen, eine geniale Lösung (laut Zeitungsartikel von George Lowther): „Stellen Sie sich vor, Sie beginnen nicht mit 100 Kugeln, sondern mit 101 Kugeln in einer Reihe. Wählen Sie eine Kugel nach dem Zufallsprinzip aus. Dann färben Sie die Kugeln links von ihr grün und die rechts von ihr rot. Werfen Sie diese Kugel weg, sodass 100 Kugeln übrigbleiben. Wählen Sie dann eine zweite Kugel nach dem Zufallsprinzip. Diese Kugel entspricht der ersten Kugel in der ursprünglichen Aufgabe. Die Aufgabe zeigt Ihnen, dass Sie eine rote Kugel gewählt haben, also rechts von der Kugel, die Sie weggelegt haben. Wählen Sie nun eine dritte Kugel. Diese Kugel liegt entweder links von der ersten Kugel,

zwischen der ersten und der zweiten Kugel oder rechts von der zweiten Kugel. Bei zwei der drei Möglichkeiten ist die dritte Kugel rot. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist, beträgt also  $2/3$ .“ (Abb. 2)



**Abb. 2:** Zur Lösung von George Lowther

Diese Lösung setzt voraus, dass die drei angesprochenen Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind. Dies genauer zu beurteilen, ist nicht leicht, aber es ist ziemlich plausibel, weil die Größe der drei angesprochenen Abschnitte von den zufälligen Auswahlen abhängt, und die Kugelanzahl in diesen Abschnitten kann in allen drei Fällen von 0 bis 99 variieren. Da „zufällige Auswahl“ gleichbedeutend mit „keine Bevorzugung“ ist, kann es doch sehr gut sein, dass sich da alles im Mittel ausgleicht.

Man kann dieses Ergebnis aber auch durch genauere Überlegungen bestätigen, es ist also das richtige Ergebnis. D. h. das Ziehen der ersten roten Kugel ist offenbar ein starkes Indiz (stärker als intuitiv vielleicht zunächst angenommen?), dass in der Urne viele rote Kugeln sind, weil die Wahrscheinlichkeit für die nächste Kugel rot zu sein nicht nur ziemlich knapp über  $1/2$ , sondern sogar bei  $2/3$  liegt.

Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Werte von  $n$  (0 bis 100) nach der Ziehung der ersten gezogenen roten Kugel (a posteriori Wahrscheinlichkeiten)? Ursprünglich, d. h. a priori, betragen diese ja jeweils  $1/100$  („ $n$  is chosen uniformly at random in  $[0, 100]$ “). Das ist ein Fall für die Bayes'sche Formel mit 101 möglichen Fällen für die Bestimmung von  $P(1. \text{ Ziehung} = \text{rot})$  im Nenner („Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit“). Außerdem kommt eine berühmte Summenformel („kleiner Gauß“) zur Anwendung, eine schöne Vernetzung.

$$\begin{aligned}
 P(n | 1. \text{ Ziehung ist rot}) &= \frac{P(n) \cdot P(1. \text{ Ziehung ist rot} | n)}{P(1. \text{ Ziehung ist rot})} = \\
 &= \frac{\frac{1}{101} \cdot \frac{n}{100}}{\frac{1}{101} \cdot \left( \frac{0}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{100}{100} \right)} = \frac{n}{\frac{100 \cdot 101}{2}} = \frac{n}{50 \cdot 101} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Als „Probe“ dafür kann man alle diese Werte für  $0 \leq n \leq 100$  summieren, und es sollte sich 1 ergeben, was auch der Fall ist:

$$\frac{1}{50 \cdot 101} \cdot (0 + 1 + \dots + 100) = \frac{1}{50 \cdot 101} \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei  $n$  roten von 100 Kugeln und einer bereits gezogenen roten Kugel die nächste wieder rot ist, beträgt klarerweise  $(n-1)/99$ . Daher kann man mit den obigen bedingten Wahrscheinlichkeiten die gewünschte Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, leicht bestimmen (wieder „Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit“), und zwar zunächst als Term in Abhängigkeit von  $n$ :

$$P(2. \text{ Kugel ist rot}) = \sum_{n=0}^{100} \frac{n-1}{99} \cdot \frac{n}{50 \cdot 101} = \frac{1}{50 \cdot 101 \cdot 99} \cdot \sum_{n=0}^{100} (n-1) \cdot n$$

Die hier auftretende Summe  $\sum_{n=0}^{100} (n-1) \cdot n$  lässt sich heutzutage auch auf

Knopfdruck mit CAS berechnen, und man erhält tatsächlich insgesamt  $P(2. \text{ Kugel ist rot}) = 2/3$ , wodurch obige Lösung bestätigt wird. CAS-Einsatz ist hier, wenn man im Bereich der Stochastik bleiben und nicht genauer auf zugehörige Summenformeln eingehen möchte, durchaus vertretbar.

Wenn man das Konzept eines bedingten Erwartungswertes kennt, hat man auch noch eine andere Möglichkeit das Resultat  $2/3$  einzusehen. Mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten (\*) ergibt sich nämlich (wieder mit CAS)

$$E(n | 1. \text{ Ziehung ist rot}) = \sum_{n=0}^{100} n \cdot \frac{n}{50 \cdot 101} = \frac{1}{50 \cdot 101} \cdot \sum_{n=0}^{100} n^2 = 67,$$

und das bedeutet, dass der Erwartungswert (durchschnittlicher Wert auf lange Sicht) von  $n$  unter der Bedingung, dass die erste gezogene Kugel rot ist, 67 ist. Wenn dann, wie wir wissen, eine rote Kugel gezogen wird, bleiben noch 66 rote und 33 grüne Kugeln in der Urne. Daher muss die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste aus dieser Urne gezogene Kugel rot ist,  $2/3$  sein. Auch ohne eine formale Definition eines bedingten Erwartungswertes, bzw. überhaupt ohne diesen Fachbegriff, nur mit der Vorstellung „Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable = Summe über alle möglichen Ausprägungen mal den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten“, und diese Wahrscheinlichkeiten sind eben andere durch das Wissen „1. Ziehung ist rot“, ist obige Berechnung naheliegend und einleuchtend.

Die Frage im Beitragstitel kann also, zumindest in diesem substantiellen Fall, durchaus mit Ja beantwortet werden, sogar auf verschiedenen Niveaustufen.