Rose VOGEL, Goethe-Universität Frankfurt am Main, DE

Diagrammatischer Charakter von Handlungen an Objekten in mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen

Durch Handlungen an Objekten gewinnen Kinder häufig ihre ersten mathematischen Erkenntnisse und bringen diese in der Interaktion mit anderen beteiligten Akteure und dem Materialarrangement zum Ausdruck. Mathematische Spiel- und Erkundungssituationen wie sie im Projekt erStMaL entwickelt und mit Kindern durchgeführt wurden, bilden den Ausgangspunkt der Annäherung an den diagrammatischen Charakter von mathematischen Handlungen an Objekten.

Mathematische Spiel- und Erkundungssituationen

In der Längsschnittstudie erStMaL (early Steps in Mathematics Learning – erste Schritte im Mathematiklernen) angesiedelt im IDeA-Zentrum Frankfurt/Main – einem interdisziplinären Forschungszentrum (ausgehend von der hessischen LOEWE-Initiative) wurden mathematische Spiel- und Erkundungssituationen entwickelt und in Kindergruppen durchgeführt (Brandt & Vogel 2017). Charakteristisch für diese offenen mathematischen Lernumgebungen sind der mathematische Auftrag, das Material-Raumarrangement und die multimodalen Impulse der begleitenden Person (vgl. Vogel 2014). Durch ausgewählte Materialien, die sich häufig an der Lebenswelt der Kinder orientieren, wird ein Material-Raumarrangement geschaffen, in dem mathematische Handlungen der Kinder entstehen und angeregt werden können. In der erStMaL-Situation „Stäbchen“ (Vogel 2013; 2014) sind es z.B. unterschiedlich eingefärbte Holzstäbchen (in der Größe von Eisstäbchen) in großer Anzahl. Der für diese Spiel- und Erkundungssituation vorgesehene mathematische Arbeitsauftrag besteht in der Entwicklung von Bandornamenten. Gleichzeitig ist diese mathematische Situation offen, dass die Kinder ihre eigene mathematische Deutung finden können und z.B. die Stäbchen dazu nutzen, geometrische Formen wie Quadrate und Dreiecke zu legen oder den Aufriss eines Gebäudes nachempfinden (vgl. Vogel 2014, S. 230 ff.).

Handlungen an Objekten

Objekte, Hilfsmittel bilden die Basis für mathematische Aktivitäten. In den mathematischen Handlungen findet von den beteiligten Akteuren eine mathematische Ausdeutung statt und das Objekt, die Objekte bekommen Relevanz für den mathematischen Erkenntnisprozess (vgl. van Oers 2004, S. 321 ff.; Vogel 2013, S. 211ff.).

„Indem Menschen lernen, mathematische Hilfsmittel zu verwenden [...] und neue Hilfsmittel für die Lösung mathematischer Probleme zu konstruieren, ohne dabei die Regeln der Mathematik zu verletzten, erfahren sie was es heißt, Mathematik zu betreiben." (van Oers 2004, S. 321/322).

Wie lassen sich die Objekte, die in mathematische Handlungen involviert sind, charakterisieren?

Im Kontext früher mathematischer Bildung und damit im Kontext der beschriebenen mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen sind es meist dreidimensionale Objekte der Lebenswelt der Kinder. Sie werden beispielsweise genutzt für erste Zählversuche, für Anzahlbestimmungen und erste geometrische Erfahrungen. In frühen schulischen Kontexten sind es dann Objekte, die sogenannten Arbeitsmittel, die in besonderer Weise für den arithmetischen Anfangsunterricht konzipiert und gestaltet sind, um beispielsweise den Kindern durch Handlungen einen Zugang zum dekadische Stellenwertsystem zu ermöglichen. So können regelkonforme Transformationsprozesse z.B. am Rechenrahmen oder am Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen zu arithmetischen Erkenntnissen führen. Dabei wird das Ziel formuliert „durch den Umgang mit dem konkreten Material, durch den Handlungsvollzug, ein visuelles Vorstellungsbild [zu] entwickeln." (Lorenz 1993, S. 132). Die mathematische Deutung der Objekte muss aber jeweils situativ durch die beteiligten Akteure konstruiert und im Hinblick auf den mathematischen Arbeitsauftrag in der Handlung genutzt werden.

Diagrammatischer Charakter von Handlungen an Objekten

Nach Dörfler (2006, S. 201) bezeichnet der amerikanische Philosoph und Mathematiker Charles Sanders Peirce „Diagrammatizität" als „eine bestimmte Form von Materialität und perzeptiver Gegenständlichkeit in mathematischen Tätigkeiten". Die „Peirce'schen Diagramme" haben inskriptionalen Charakter, d.h. es sind „Graphiken mit meist geometrischen oder auch bildhaft-figuralen Anteilen" (ebd., S. 202). Sie zeichnen sich außerdem dadurch aus, dass sie „in ein (konventionelles) Regelsystem von Herstellung, Gebrauch und Transformation eingebunden sind." (ebd., S. 202)

In welcher Weise zeigen Handlungen an dreidimensionalen Objekten diagrammatischen Charakter? Kann man bei Arrangements dreidimensionaler Objekte überhaupt von einem „Peirce'schen Diagramm" sprechen?

Denkt man an die Arbeitsmittel des arithmetischen Anfangsunterrichts z.B. den Rechenrahmen, so weist dieser aufgrund der Anordnung der Kugeln auf Stangen durchaus bildhaft-figurale Charakter auf. Nur auf der Grundlage eines Regelsystems für den Gebrauch und für Transformationen kann der Rechenrahmen zu arithmetischen Erkenntnissen führen. So gibt es beispielsweise am Rechenrahmen eine sogenannte „Nullstellung", d.h. alle Kugeln müssen aus der Sicht des Kindes auf die rechte Seite geschoben werden. Erst jetzt kann der Rechenrahmen in sinnvoller Weise für arithmetische Transformationen genutzt werden. Die Anzahl der Kugeln die in Fünfer- bzw. Zehnerschritten nach links geschoben werden, ermöglichen die Darstellung einer Zahl zu der eine andere Zahl addiert werden kann, indem eine weitere Kugelgruppe, die für die zweite Zahl steht, nach links geschoben wird. Die beiden Kugelkonstellationen werden zu einer Kugelkonstellation zusammengefügt und das Ergebnis der Addition zweier Zahlen kann auf der linken Seite des Rechenrahmens als Gesamtzahl der Kugeln abgelesen werden. Experimentell kann das Kind dann geeignete Strategien für das Zusammenführen von einzelnen Konstellationen und schnelle Erkennen des Ergebnisses aus der Endkonstellation entwickeln.

Huth (2017) verweist in ihrem Aufsatz zum diagrammatischen Charakter von Gesten auf Schreiber (2010), der bereits eine erweiterte Auffassung von Inskriptionen in Form von Materialanordnungen beschreibt. Ist es also möglich sowohl Gesten wie auch Handlungen am Objekten diagrammatischen Charakter zuzuordnen und dadurch eine multimodale Perspektive auf mathematisches Lernen und Erkenntnisgewinnung einzunehmen? (vgl. Huth 2017)

Wie sieht es mit Handlungen an Objekten aus, die erst situativ mathematisch gedeutet werden müssen? Dies soll am Beispiel der mathematischen Spiel- und Erkundungssituation „Stäbchen" in einer ersten Annäherung an den diagrammatischen Charakter von Handlungen an Objekten vorgenommen werden.

Beispiel - mathematische Spiel- und Erkundungssituationen „Stäbchen"

Die Stäbchen werden in einer Vielzahl von durchgeführten Situationen von den Kindern inskriptional genutzt. Dies bedeutet einzelne Stäbchen werden wie Striche auf einem Blatt Papier aneinandergesetzt. So werden Konfigurationen gelegt, die z.B. geometrische Figuren darstellen, dabei wird darauf geachtet, dass diesen Figuren ein geschlossener Kantenzug zugrunde liegt. Es werden auf diese Weise unterschiedliche geometrische Grundfiguren erzeugt, die der Regel „geschlossener Kantenzug" folgen. Durch die Flexibilität im Umgang mit den einzelnen Stäbchen kann sehr schnell und intuitiv weitere Figuren erzeugt und durch Umlegen neue Figuren gefunden bzw. vorhandene vergrößert, verkleinert oder in anderer Weise verändert werden.

Ein Hinweis darauf, dass Handlungen der Kinder an den Stäbchen diagrammatischen Charakter zeigen, wird z.B. darin deutlich, dass die Kinder häufig mit den Stäbchen „Darstellungssysteme" (Dörfler 2006, S. 210) entwerfen. So wird die Möglichkeit der Darstellung ebener Figuren dazu genutzt, Gebäude in der Form eines Aufrisses nachzubilden. Auch der „extra-linguistischer Status“ von Diagrammen (ebd., S. 210) wird in der mathematischen Situation „Stäbchen“ deutlich. Es wird mit den Stäbchen Gebäude (hohe Häuser) dargestellt, über die gesprochen wird. Experimentell wird die Erfahrung der Darstellung von Häusern auf die Darstellung anderer Gegenstände aus der Phantasiewelt der Kinder übertragen.

Am Beispiel der mathematischen Spiel- und Erkundungssituation „Stäbchen“ konnte exemplarisch der diagrammatische Charakter von Handlungen an Objekten aufgezeigt werden. Weitere systematische Analysen von Handlungen an Objekten in ausgewählten mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen müssen folgen, um den diagrammatischen Charakter von Handlungen an Objekten detaillierter beschreiben zu können.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

Literatur

Brandt, B., & Vogel, R. (2017). Frühe mathematische Denkentwicklung. In U. Hartmann, M. Hasselhorn, & A. Gold (Hrsg.), *Entwicklungsverläufe verstehen - Individuelle Förderung wirksam gestalten. Forschungsergebnisse des Frankfurter IDeA-Zentrums* (S. 207-226). Stuttgart: Kohlhammer.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 27 (3/4), 200-219.

Huth, M. (2017). Inskriptionaler Charakter von Gesten – zur Schnittstelle von Gestik und Inskription in mathematischen Interaktionen. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag

Lorenz, J. H. (1993). Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 122-146)

Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten – Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen.* Münster: Waxmann.

van Oers, B. (2004). Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In W. E. Fthenakis & P. Oberhuemer (Hrsg.), *Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt* (S. 313-329). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Vogel, R. (2013). Mathematical situations of play and exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 84(2), 209–225.

Vogel, R. (2014). Mathematical situations of play and exploration as an empirical research instrument. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Eds.), *Early Mathematics Learning. Selected Papers of the POEM 2012 Conference* (S. 223–236). New York: Springer