KLINGBEIL, Katrin; RÖSKEN, Fabian; BARZEL, Bärbel & SCHACHT, Florian
Duisburg-Essen

(Fehl-)Vorstellungen entschlüsseln: Exploration von Antwortmustern im SMART-Test „Bedeutung von Variablen“

Für ein tieferes Verständnis des Lernens von Schüler*innen ist es wichtig, Verstehenshürden, typische Fehler und Fehlvorstellungen zu identifizieren. Gerade beim Verstehen von Variablen sind Schwierigkeiten bei Schüler*innen bereits seit Jahrzehnten bekannt (z. B. Küchemann, 1981) und durch Forschungsergebnisse immer wieder bestätigt worden (z. B. Akhtar & Steinle, 2017). Eine der typischen Fehlvorstellungen ist dabei die *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung, bei der Lernende die Variable als Abkürzung für ein involviertes Objekt anstelle als für einen numerischen Wert stehend interpretieren, z. B. *e* als Enten anstelle als Preis einer Ente. Der Online-Test SMART („Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking“) zur „Bedeutung von Variablen” nutzt sechs Multiple-Choice-Items, um die *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung zu diagnostizieren (zur Validität dieses Tests siehe Klingbeil et al., 2024). Die Testung von 2051 Schüler*innen der Klassenstufen 7 und 8 ergab, dass lediglich 21 von ihnen in der Lage waren, alle sechs Items korrekt zu beantworten. 99% beantworteten mindestens ein Item falsch, 65% fünf bis sechs Items. Um die (Fehl-)Vorstellungen der Schüler*innen besser zu verstehen, wurden die Antwortmuster anschließend mithilfe einer Latent Class Analysis genauer untersucht. Dabei konnten sechs typische Antwortmuster bezüglich der *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung identifiziert werden. Diese machen deutlich, dass die Konstruktion der Aufgabe – d.h. außermathematischer Kontext, Komplexität, innere Struktur der zugrundeliegenden Gleichung und Abstraktheit involvierter Größen/Objekte – eine wichtige Rolle beim Interpretieren von Variablen spielt.

Literatur

Akhtar, Z., & Steinle, V. (2017). The prevalence of the ‘letter as object’ misconception in junior secondary students. In A. Downton, S. Livy & J. Hall (Hrsg.), *Proceedings of the 40th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 77–84). MERGA.

Klingbeil, K., Rösken, F., Barzel, B., Schacht, F., Stacey, K., Steinle, V. & Thurm, D. (2024). Validity of multiple-choice digital formative assessment for assessing students’ (mis)conceptions: Evidence from a mixed-methods study in algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 56 (4). https://doi.org/10.1007/s11858-024-01556-0

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock, & M. McCartney (Hrsg.), *Children’s understanding of mathematics: 11–16* (S. 102–119). John Murray.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

»*e* steht für Enten«

99% verstehen Variablen falsch
Aufgabenkonstruktion spielt wichtige Rolle

(Fehl-)Vorstellungen entschlüsseln: Exploration von Antwortmustern im SMART-Test „Bedeutung von Variablen“

Motivation

- massive Schwierigkeiten im Verstehen von Variablen bei Schüler:innen sind schon seit Jahrzehnten bekannt (z. B. Küchemann, 1981) und durch Forschungsergebnisse immer wieder bestätigt (z. B. Akhtar & Steinle, 2017)
- eigene Studie: nur 21 von 2051 7./8.-Klässler:innen beantworten alle 6 Items des SMART-Tests „Bedeutung von Variablen“ zur Diagnose der *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung korrekt, 99% beantworten mindestens 1 Item falsch, 65% beantworten 5-6 Items falsch (Klingbeil & Moons, eingereicht)
- um die (Fehl-)Vorstellungen der Schüler:innen besser zu verstehen, ist eine genauere Analyse der Antwortmuster notwendig

Fokussierte Fehlvorstellungen

Letter-as-Object (LO):
Schüler:innen interpretieren Variablen als Abkürzung für ein Objekt anstatt als stehend für einen numerischen Wert, z. B. $6e = 12$ gelesen als „6 Enten kosten 12 Euro“

Letter-as-Unit (LU):
Schüler:innen interpretieren Variablen als Einheitssymbol oder Abkürzung für eine Einheit, z. B. e in $6e = 12$ gelesen als „Euro“, auch wenn sich dadurch keine korrekte Gleichung ergibt (Subtyp von *Letter-as-Object*)

Solution-as-Coefficient (SAC):
Schüler:innen interpretieren Variablen als Abkürzungen für Objekte und die Koeffizienten als Lösungen, z. B. $35f + 10d = 100$ gelesen als „35 Fahrräder plus 10 Dreiräder haben zusammen 100 Reifen.“ (Subtyp von *Letter-as-Object*)

Forschungsfrage

Welche Antwortmuster bezüglich der *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung lassen sich bei Schüler:innen der 7. und 8. Klasse anhand ihrer Antworten auf die sechs Multiple-Choice-Items des SMART-Tests „Bedeutung von Variablen“ erkennen?

Methode

- 2051 Schüler:innen (7./8. Jahrgang) von 103 Lehrkräften aus 6 Bundesländern
- Durchführung des SMART-Tests „Bedeutung von Variablen“ nach 1-2 Wochen Algebra-Unterricht
- Latente Klassenanalyse: Auswahl des 6-Klassenmodells mit besten AIC/BIC-Werten und am besten inhaltlich interpretierbaren Klassen
- Antwortraten pro Item:

Bedeutungs-Items		Additive Items		Proportionale Items	
17% 76% 7%	34% 63% 3%	26% 18% 56%	11% 16% 73%	18% 69% 13%	9% 76% 15%

korrekt · Letter-as-Object (LO) · Letter-as-Unit (LU) · Solution-as-Coefficient (SAC)

Items des SMART-Tests „Bedeutung von Variablen“

- nur eine Variable
- gefragt wird nach der Bedeutung der Variable
- das Enten-Item nutzt Anfangsbuchstaben der Objekte bzw. Einheiten als Variable, das Bausteine-Item nicht
- entwickelt von MacGregor & Stacey (1997)

Enten
Lucy hat 6 Enten für insgesamt 12 Euro gekauft. Sie hat folgende Gleichung aufgeschrieben: $6e = 12$.
Wofür steht das e in Lucys Gleichung?
- ☐ den Preis einer Ente (COR)
- ☐ eine Ente (LO)
- ☐ Enten (LO)
- ☐ Euro (LU)

Bausteine
Tina hat 9 gleich große Bausteine aufeinander gesteckt und dadurch einen 99 mm hohen Turm gebaut. Sie hat folgende Gleichung aufgeschrieben: $9y = 99$.
Wofür steht das y in Tinas Gleichung?
- ☐ die Höhe eines Bausteins (COR)
- ☐ einen Baustein (LO)
- ☐ die Bausteine im Turm (LO)
- ☐ Millimeter (LU)

- zwei Variablen, additiv verknüpft durch gegebene Situation
- zur Situation passende lineare Gleichung soll ausgewählt werden
- Variablen entsprechen Anfangsbuchstaben der involvierten Objekte
- im Garten-Item geht es um Preise der Objekte, im Räder-Item um Teilkomponenten der Objekte
- basierend auf Küchemanns (1981) „pencil item“

Garten
Payam hat für seinen Garten r rote Rosen-Sträucher und l lila Lavendel-Pflanzen gekauft. Ein Rosen-Strauch kostet jeweils 4 €. Eine Lavendel-Pflanze kostet jeweils 5 €. Welche Gleichung gibt an, dass die Pflanzen insgesamt 70 € gekostet haben?
- ☐ $4r + 5l = 70$ (COR)
- ☐ $r + l = 70$ (LO)
- ☐ $10r + 6l = 70$ (SAC)

Räder
In einem Geschäft gibt es f Fahrräder (mit jeweils 2 Reifen) und d Dreiräder (mit jeweils 3 Reifen).
Welche Gleichung gibt an, dass es in dem Geschäft insgesamt 100 Reifen gibt?
- ☐ $2f + 3d = 100$ (COR)
- ☐ $f + d = 100$ (LO)
- ☐ $35f + 10d = 100$ (SAC)

- zwei Variablen, die proportional zueinander sind
- zur Situation passende Gleichung soll ausgewählt werden
- Variablen entsprechen Anfangsbuchstaben der involvierten Objekte bzw. Einheiten
- das Kugelschreiber-Item bezieht sich auf reale Objekte, das Rennstrecken-Item auf abstraktere Objekte bzw. Einheiten (Runden, Minuten)
- basierend auf dem „Students and Professors“-Problem (Clement et al., 1981)

Kugelschreiber
Kugelschreiber werden in 3er-Packungen verkauft. Sam hat p Packungen gekauft und hat jetzt insgesamt k Kugelschreiber.
Wähle die passende Gleichung:
- ☐ $3p = k$ (COR)
- ☐ $p = 3k$ (LO)
- ☐ $p = 3$ (LO)
- ☐ $k + p = 4$ (LO)
- ☐ $30k = 10p$ (SAC)

Rennstrecke
Ein Auto braucht 12 Minuten für eine Runde der Rennstrecke. Ein Rennfahrer fährt in m Minuten r mal die Runde.
Wähle die passende Gleichung:
- ☐ $12r = m$ (COR)
- ☐ $12m = r$ (LO)
- ☐ $r = 12$ (LO)
- ☐ $5r = 60m$ (SAC)

Klasse	Bedeutungs-Items		Additive Items		Proportionale Items	
1. überwiegend LO (Prävalenz: 23%)	12% 81% 7%	25% 70% 4%	8% 64% 28%	10% 57% 33%	19% 71% 10%	11% 76% 13%
2. LO mit SAC (Prävalenz: 11%)	8% 88% 4%	33% 66% 1%	15% 4% 81%	0% 1% 99%	8% 54% 37%	6% 0% 94%
3. LO mit SAC nur in additiven Items (Prävalenz: 38%)	3% 92% 5%	25% 73% 2%	8% 2% 90%	2% 0% 98%	9% 79% 12%	2% 98% 0%
4. Bedeutungsitems korrekt, sonst LO/SAC (Prävalenz: 8%)	89% 0% 11%	82% 13% 5%	23% 3% 74%	7% 0% 93%	11% 79% 10%	2% 85% 13%
5. LO außer in additiven Items (Prävalenz: 15%)	16% 75% 9%	24% 70% 6%	91% 9% 0%	39% 17% 44%	29% 64% 7%	8% 89% 3%
6. überwiegend korrekt (Prävalenz: 5%)	61% 30% 9%	86% 12% 2%	69% 10% 21%	31% 7% 62%	85% 14% 1%	64% 33% 3%

korrekt · Letter-as-Object (LO) · Letter-as-Unit (LU) · Solution-as-Coefficient (SAC)

Ergebnisse & Diskussion

1. Klasse: LO-Antworten am wahrscheinlichsten in allen Items, sogar wenn der Anfangsbuchstabe des involvierten Objekts nicht genutzt wird (Bausteine-Item), in additiven Items auch SAC möglich
▶ Die vergleichsweise hohen Wahrscheinlichkeiten für SAC selbst in dieser Klasse, deuten darauf hin, dass additive Items möglicherweise verstärkt den Drang von Schüler:innen befördern, eine numerische Lösung zu finden und anzugeben.

2. Klasse: hohe Wahrscheinlichkeit für SAC-Antworten, im Kugelschreiber-Item aber LO wahrscheinlicher
▶ Die stark unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für die proportionalen Items deuten darauf hin, dass eine SAC-Interpretation in proportionalen Items wahrscheinlicher ist, wenn sich die Variablen auf abstraktere Objekte bzw. Einheiten beziehen.

3. Klasse: SAC höchstwahrscheinlich in additiven Items, in anderen Items LO
▶ Bei additiven Items scheinen die SAC-Gleichungen intuitiver als eine Art Lösungssatz gelesen werden zu können (z. B. „35 Fahrräder und 10 Dreiräder haben zusammen 100 Reifen“) als bei proportionalen Items (z. B. „Sam hat 30 Kugelschreiber in 10 Packungen gekauft“).

4. Klasse: korrekte Antworten in Bedeutungs-Items sehr wahrscheinlich, in additiven Items SAC, in proportionalen Items LO
▶ Diese Schüler:innen scheinen (oberflächlich) zu wissen, wofür Variablen stehen, wenn sie direkt danach gefragt werden, können dies aber nicht auf das Interpretieren von Gleichungen übertragen.

5. Klasse: mittlere bis hohe Wahrscheinlichkeiten für LO in nicht-additiven Items, in additiven Items korrekt (Garten-Item) oder SAC oder korrekt (Räder-Item) wahrscheinlich
▶ Da diese Schüler:innen in den meisten Items kein korrektes Verständnis zeigen, ist es möglich, dass die hohe Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Antwort im Garten-Item Ergebnis eines geschickten Kombinierens von gegeben Variablen und Werten ist oder in der eher vertrauten Situation (Objekte und deren Preise) begründet liegt.

6. Klasse: korrekte Antworten am wahrscheinlichsten in allen Items außer im Räder-Item, dort SAC doppelt so wahrscheinlich wie korrekt, im Enten- und Rennstrecke-Item auch LO möglich, aber halb so wahrscheinlich wie korrekt
▶ Diese Schüler:innen scheinen die *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung schon häufig vermeiden zu können, allerdings nicht konsequent.

▶ **Die Konstruktion der Aufgabe – d.h. außermathematischer Kontext, Komplexität, innere Struktur der zugrundeliegenden Gleichung und Abstraktheit involvierter Größen/Objekte – spielt eine wichtige Rolle beim Interpretieren von Variablen.**

Das SMART-Projekt

SMART steht für „Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking“ und ist ein verstehensorientiertes Onlinetool für Diagnose und Förderung im Bereich Mathematik. Das SMART-System besteht aus kurzen, digitalen Tests, mit denen das konzeptuelle Verständnis von Schüler:innen diagnostiziert werden kann. Den Lehrkräften stehen die forschungsbasierte Diagnose sowie Hinweise zur individuellen Förderung direkt zur Verfügung. Ursprünglich wurden die SMART-Tests an der Universität Melbourne entwickelt und erforscht. Zurzeit werden die Tests im Rahmen eines DigitalPakt-Projekts an der UDE für die Verwendung in Deutschland adaptiert und ihr Potential für Schüler:innenlernen und Lehrkräfteprofessionalisierung untersucht (siehe smart.dzlm.de).

Literatur

Akhtar, Z., & Steinle, V. (2017). The prevalence of the ‘letter as object’ misconception in junior secondary students. In A. Downton, S. Livy & J. Hall (Eds.), *Proceedings of the 40th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 77–84). MERGA.

Brandenburger, M., Schwichow, M. (2023). Utilizing Latent Class Analysis (LCA) to Analyze Response Patterns in Categorical Data. In X. Liu, & W. J. Boone (Eds.), *Advances in Applications of Rasch Measurement in Science Education. Contemporary Trends and Issues in Science Education* (Vol. 57, S. 123 –154). Springer.

Clement, J., Lockhead, J., & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286–290.

Klingbeil, K., Rösken, F., Barzel, B., Schacht, F., Stacey, K., Steinle, V. & Thurm, D. (2024). Validity of multiple-choice digital formative assessment for assessing students’ (mis)conceptions: Evidence from a mixed-methods study in algebra. *ZDM – Mathematics Education, 56* (4). https://doi.org/10.1007/s11858-024-01556-0

Klingbeil, K., & Moons, F. (eingereicht). Unravelling (mis)conceptions about algebraic letter: exploring response patterns in the ‘Meaning of Letters’ SMART-test using latent class analysis. FAME – Feedback & Assessment in Mathematics Education (ERME Topic Conference 14, June 5–7, 2024).

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock, & M. McCartney (Eds.), *Children’s understanding of mathematics: 11–16* (S. 102–119). John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997) Students’ understanding of algebraic notation: 11-16. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Steinle, V., Gvozdenko, E., Price, B., Stacey, K., & Pierce, R. (2009). Investigating students’ numerical misconceptions in algebra. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, S. 491–498). MERGA.

Katrin Klingbeil, Fabian Rösken,
Bärbel Barzel & Florian Schacht
Universität Duisburg-Essen
katrin.klingbeil@uni-due.de

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Open-Minded