KOLLHOFF, Sebastian & GERLACH, Kerstin
Bielefeld

„Ich sehe was, was du nicht siehst, und das ist zwölf!“ – Zur interaktiven Normierung von bildlichen Darstellungen

Die Mathematik als abstrakte Wissenschaft bedarf in besonderem Maße der Repräsentation durch Darstellungen. Durch den Einsatz von Darstellungen sollen Schülerinnen und Schüler befähigt werden, mathematische Konzepte visuell zu erfahren, um sie begrifflich erschließen und sie mit Blick auf eine flexible Anwendung als Vorstellungen mental verankern zu können (vgl. Salle, 2023). Darstellungen sind jedoch in den seltensten Fällen eindeutig, sondern „prinzipiell mehrdeutig“ (Voigt, 1993). Darstellungen müssen interpretiert werden, denn erst durch ihre Interpretation erhalten sie eine Bedeutung (vgl. Salle et al., 2023) und können als didaktische Hilfs-, Erkenntnis- oder Kommunikationsmittel (Voigt, 1993) verwendet werden. Somit wird das Interpretieren bzw. Deuten von Darstellungen zu einer unabdingbaren Grundlage für das Mathematiklernen.

Darstellungen deuten als individueller und sozialer Prozess

Das Interpretieren mathematischer Darstellungen ist ein anspruchsvoller Prozess, da die mathematischen Begriffsaspekte und Zusammenhänge in Darstellungen nur selten sichtbar sind, sondern von den Lernenden durch Abstraktion von den Oberflächenmerkmalen der Darstellung in diese „hineingedeutet“ werden müssen (vgl. Söbbeke, 2005). Dieses Hineindeuten einer Bedeutung ist ein individueller, konstruktiver und mentaler Prozess, in dem Lernende die Darstellungen auf der Grundlage ihrer individuellen Vorerfahrungen interpretieren (Kollhoff, 2021). Die in Darstellungen repräsentierten mathematischen Konzepte und Zusammenhänge sind den Lernenden in den vielen Fällen zunächst unbekannt. Daher ist anzunehmen, dass die Interpretationen der Lernenden häufig von den normativ intendierten Bedeutungen einer Darstellung abweichen. Die Lernenden müssen entsprechend lernen, die jeweils intendierten mathematischen Beziehungen in Darstellungen hineinzudeuten. Ein solches Lernen geschieht nicht von selbst, sondern es erfordert intersubjektive Aushandlungen von Bedeutungen zwischen Lernenden und Lehrenden. Darstellungen werden damit zu „sozialen Produkten“ (Schulz & Tiedemann, 2020), die situativ in den und durch die Interpretationen und definierenden Aktivitäten der Interagierenden ausgehandelt werden. Mit Blick auf die Annäherung an normativ intendierte Deutungen sind in diesen Aushandlungen in besonderer Weise Prozesse der soziomathematischen Normierung (Tiedemann 2015, Yackel & Cobb, 1996) zu erwarten.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Forschungsinteresse und methodisches Vorgehen

Im Rahmen unseres Projekts gehen wir u.a. den Fragen nach, wie in kollektiven Argumentationen die Bedeutungen von Darstellungen interaktiv ausgehandelt werden und welche Prozesse der soziomathematischen Normierung hinsichtlich der Annäherung an normativ intendierte Bedeutungen rekonstruiert werden können. Hierzu werden Unterrichtsgespräche im Mathematikunterricht der Grundschule aufgezeichnet, in denen Bedeutungen von Darstellungen ausgehandelt werden. Die Unterrichtsgespräche werden transkribiert und anhand der Transkripte werden Aspekte der soziomathematischen Normierung und der Bedeutungsaushandlung von Darstellungen qualitativ-interpretativ analysiert.

Zwischen Umdeuten und Wechseln von Darstellungen – ein Beispiel

Die folgende Szene stammt aus einer Unterrichtsbeobachtung einer zweiten Klasse zur Erarbeitung der Multiplikation.

Lehrerin:	Mir geht es in den Wochen vor den Märzferien darum, dass es so ist, dass ihr äh, versteht, was eine Malaufgabe ist. So, wer geht denn mal .. sechsmal und holt jeweils zwei Würfel? (02:46-06:02) Okay, was seht ihr da jetzt in der Mitte? .. Hannah.
Hannah:	Das ist das Doppelte von sechs geworden.
Lehrerin:	Mmh. Ne ganz spannende Information. Liam.
Liam:	Ein Haufen Würfel.
Lehrerin:	Mmh. Was siehst du in der Mitte? .. Was steht da? .. Emma.
Emma:	Das ist .. ähm .. Das sind sechs mal zwei. Also es sind immer zwei Würfel, aber wenn man die zusammentut, sind es immer sechs.
Lehrerin:	Na, wie würde denn die Plusaufgabe dazu heißen, ne passende? (…) Jakob.
Jakob:	Zwei plus zwei plus zwei plus zwei plus zwei plus zwei.
Lehrerin:	[schreibt „2+2+2+2+2+2=“ ans Whiteboard] Uuh, was für eine lange Rechnung. Ist gleich was? Kevin.
Kevin:	Zwölf.
Lehrerin:	[schreibt „12“ ans Whiteboard] So jetzt ist es aber so und ihr habt auch schon gesagt „Puh, ganz schön lang!“, das ist mir zu tüddelig und man könnte das auch anders schreiben, nämlich als Malaufgabe schreiben. … Stevan.
Stevan:	Man schreibt sechs auf. Dann ein Punkt. Und zwei.
Lehrerin:	Ganz genau. Super. [schreibt 6 · 2 = 12“ ans Whiteboard] Also, aus diesen sechs Zweien wird sechs mal zwei. (…)

Die Szene beginnt mit der handelnden Herstellung einer Darstellung, für die die Lehrerin eine Schülerin bittet „sechsmal […] jeweils zwei Würfel“ zu holen und für alle sichtbar zu platzieren. Die Lehrerin formuliert die Handlungsanweisung präzise im Sinne der wiederholten Addition von zwei Würfeln, so dass es den Lernenden möglich ist, an ihr Vorwissen anzuknüpfen und die Darstellung im Bezugsrahmen der Addition als Hinzufügen zu interpretieren. Im Anschluss an die Herstellung der Darstellung fordert die Lehrerin eine Deutung der Darstellung ein (Abb. 1): „Okay, was seht ihr da jetzt in der Mitte?“. Obgleich sie ihre Frage offen formuliert, fordert sie die additive Deutung der Darstellung und ihrer Herstellungshandlung ein. Entsprechend geht sie nicht auf die multiplikativen Deutungen von Hannah und Emma ein, sondern konkretisiert ihre Erwartung: „Wie würde denn die Plusaufgabe dazu heißen“. Sie nimmt einen intermodalen Darstellungswechsel vom Würfelbild zum Term vor, indem sie die wiederholte Addition von 2 am Whiteboard notiert. Sie erfragt das Ergebnis „12“ und stellt wiederholt heraus, dass diese Rechnung „zu lang“ und „zu tüddelig“ sei, womit sie eine kürzere und übersichtlichere Schreibweise der Gleichung soziomathematisch motiviert. Von der wiederholten Addition ausgehend nimmt die Lehrerin daraufhin einen intramodalen Wechsel der symbolischen Darstellung vor, indem sie zu der wiederholten Addition die zugehörige Multiplikationsaufgabe notiert und den Darstellungswechsel explizit formuliert: Aus „2+2+2+2+2+2=12“ wird „6 · 2 = 12“ bzw. „aus diesen sechs Zweien wird sechs mal zwei“. Eine Umdeutung der additiven Struktur zu einer multiplikativen Struktur in der Würfeldarstellung bleibt aus und damit auch eine inhaltliche Begründung für die Umformulierung der Gleichung.

Abb. 1: Würfel

Ausblick

Diese Szene zur interaktiven Normierung von Darstellungen ist als Einblick zu verstehen. Er zeigt auf, dass der Entwicklungsprozess von individuellen Deutungen zu einer intendierten geteilten Bedeutung einer Darstellung ein komplexer Prozess ist, der im Spannungsfeld der individuellen Vorerfahrungen der Lernenden, den normativen Leitideen der Lehrenden und der Aushandlung soziomathematischer Normen in kollektiven Argumentationen bearbeitet wird.

Durch ihre Reaktionen auf die Beiträge der Lernenden und ihr eigenes argumentatives Handeln zeigt die Lehrerin in dieser Szene ihre Erwartungen an. Obgleich sie die unterschiedlichen Deutungen der Lernenden augenscheinlich akzeptiert und diese z.B. als „spannende Information“ markiert, lässt sie die inhaltlichen Deutungen der Lernenden weitgehend außen vor und expliziert die intendierte Bedeutung als Ausgangspunkt für die weitere Themenentwicklung. Dabei nimmt sie einen entscheidenden Wechsel des Anschauungsobjekts vor und abstrahiert von der Würfeldarstellung zur symbolischen Notation der Rechnung, die fortan im Zentrum der Betrachtung steht. Eine explizite Verknüpfung von Darstellung und Term, die in Hinsicht auf das inhaltliche Verständnis der Multiplikation wünschenswert wäre, bleibt aus und an ihre Stelle tritt die Umformulierung des Terms auf symbolischer Ebene.

Mit Blick auf die Bedeutsamkeit von Darstellungen für das Mathematiklernen ist es notwendig, diese Prozesse der interaktiven Normierung von Darstellungen im Vollzug des alltäglichen Mathematikunterrichts zu untersuchen. Dies ist wichtig, um aus wissenschaftlicher Perspektive grundlegend zu verstehen, wie Bedeutungen für Darstellungen im Unterricht entwickelt und verwendet werden. Dieses Verständnis ist eine zentrale Grundlage, um Lehrkräfte auf die Anforderungen dieser hoch komplexen Unterrichtsgespräche vorzubereiten.

Literatur

Kollhoff, S. (2021). *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4

Salle, A., Schmidt-Thieme, B., Schulz, A., & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 429–461). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_14

Schulz, A., & Tiedemann, K. (2020). Zum gemeinsamen Deuten bildlicher Darstellungen – Momente der produktiven Deutung. In H. S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 845–848). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Franzbecker.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 147–166). Aulis.

Tiedemann, K. (2015). Unterrichtsfachsprache – Zur interaktionalen Normierung von Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica, 38*(1), 37-62. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2015.1196

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(4), 468–477. https://doi.org/10.2307/749877