

SCHÖTTLER, Christian
Köln

Das Verständnis des Dezimalsystems von Schülerinnen und Schülern - qualitative Unterschiede im Hinblick auf ein syntaktisches Wissen und ein semantisches Verständnis

Der Entwicklung eines tragfähigen dezimalen Stellenwertverständnisses wird eine große Relevanz für ein erfolgreiches schulisches Lernen beigemessen, ist es doch u. a. die Basis für den Erwerb von flexiblen und sicheren Fertigkeiten im Bereich der Grundoperationen, aber auch für das Verstehen von großen Zahlen und von Dezimalbrüchen. Allerdings wurde in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik das dezimale Verständnis insbesondere im Bereich Dimensionen und Nutzung bislang wenig untersucht. In diesem Beitrag sollen qualitative Unterschiede im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems von Schülerinnen und Schülern rekonstruiert werden. Dazu sollten Lernenden aus unterschiedlichen Jahrgangsstufen (Klasse 4 – 7) verschiedene Aufgaben zum Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen bearbeiten. Die Schülerlösungen wurden daraufhin analysiert.

Verständnis des Dezimalsystems

Die Darstellung von Zahlen gilt als eine zentrale mathematische Grundidee und folgt zwei Prinzipien, die charakteristisch für Stellenwertsysteme sind: das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip. Voraussetzung für ein Verständnis dieser beiden Prinzipien ist die Einsicht in das Teil-Ganzes-Prinzip. Das Stellenwertprinzip baut auf dem Bündelungsprinzip auf und bezieht sich auf die Notation der Bündelungsergebnisse in einer geordneten Ziffernfolge, die den Konventionen entsprechend von rechts nach links gelesen die Anzahl der Einer-, Zehner-, Hunderterbündel usw. wiedergibt. Dabei bestimmt die Position einer Ziffer innerhalb einer Zahldarstellung die Mächtigkeit des dazugehörigen Bündels (Ross, 1989; Sprenger, 2018; Schöttler, 2019; vgl. Abb.).

Für ein tragfähiges dezimales Stellenwertverständnis müssen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Eigenschaften des Dezimalsystems erarbeiten, verstehen, anwenden und angemessene inhaltliche Vorstellungen aufbauen (vgl. Fromme, 2017; Schöttler, 2019). Dazu müssen sie u. a. zwischen verschiedenen Zahlrepräsentationen (z. B. enaktive oder ikonische Darstellung einer Zahl mit Dienes-Material, Ziffernschreibweise mit Angabe der Bündelungseinheit, Zahlwort, formal-symbolische Zahldarstellung) oder innerhalb einer Repräsentation (z. B. 3 Z, 4 E = 2 Z, 14 E = 1 Z, 24 E) auf der Basis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung und des Stellenwertprinzips übersetzen, um jede Zahldarstellung angemessen interpretieren zu können.



Beispielhafte Analyse von zwei Schülerdokumenten

In der hier analysierten Aufgabe sollten die Lernenden angeben, ob die in der Zifferschreibweise mit Angabe der Bündelungseinheit gegebene Zahl korrekt in die Stellenwerttafel sowie in die formal-symbolische Zahldarstellung übertragen wurde und ggf. die Zahl korrigieren. Bei der Aufgabenkonzeption wurde darauf geachtet, dass die Stellenwerte nicht in der üblichen Reihenfolge gegeben sind sowie mit Nicht-Standardzerlegungen umgegangen werden muss. Daher werden nicht nur oberflächliche Kenntnisse überprüft; stattdessen zielt die Aufgabe gezielt auf das Stellenwertverständnis.

Im ersten Beispiel hat der Schüler 3 Zehner, 2 Zehntausender und 12 Hunderter in der formal-symbolischen Schreibweise zu 20150 "verbessert". In seiner Erklärung sortiert er die drei gegebenen Stellenwerte der Größe nach. Hierbei reproduziert er formales Wissen ($ZT > H > Z$). Zudem äußert er, dass in der Zahl an der Einer-Stelle eine Null stehen müsse. Eventuell orientiert er sich an der Stellenwerttafel, in der die '0' an der Einer-Stelle bereits steht. Insgesamt müsse die Zahl aus fünf Ziffern bestehen. Vermutlich greift er auf Faktenwissen zurück: Zehntausend ist fünfstellig, daher muss die Zahl ebenfalls aus fünf Ziffern bestehen. Eventuell orientiert er sich erneut an der fünf-spaltigen Stellenwerttafel. Die 12 Hunderter interpretiert er unabhängig von

	ZT	T	H	Z	E	Zahl
3 Zehner, 2 Zehntausender, 12 Hunderter	2	0	12	3	0	20123
Richtig: <input type="radio"/> Falsch: <input checked="" type="radio"/> → die richtige Zahl ist	20150					
Erklärung:	Zehntausender ist größer als Hunderte und größer als Zehner. In der Zahl wurde die 0 vergessen, da wo Einer sind. Und Zehntausend hat 5 Stellen, also muss die Zahl 5 Stellen haben. Dann rechne ich $12 + 3 = 15$. So einfach!					

ihrem spezifischen Stellenwert und addiert $12 + 3 = 15$. Die 15 notiert er links neben der 0 (also $15 = 1 \text{ H}, 5 \text{ Z}$). Anstatt die 12 Hunderter zu einem Tausender zu bündeln, weist er somit den 12 Hundertern einen nicht adäquaten Wert zu (im Prinzip 12 Z); er missachtet also die Stellenwerteigenschaft.

Im Hinblick auf sein gezeigtes dezimales Verständnis lässt sich festhalten, dass der Schüler einerseits regelgeleitetes sowie konventionelles Faktenwissen zeigt und sich an einzelnen Darstellungen orientiert (Reihenfolge der Stellenwerte bzgl. ihrer Größe; Fokussierung auf die Anzahl der besetzten Stellen bzw. Stellenwerttafel), ohne ein zugrundeliegendes, inhaltliches Verständnis zu offenbaren. Andererseits addiert er ohne Beachtung der spezifischen Stellenwerte 12 und 3; er beachtet ergo nicht die zugrundeliegenden Beziehungen zwischen den Stellenwerten sowie das Bündelungsprinzip.

Beim nächsten Beispiel hat die Schülerin 12 Hunderter, 2 Tausender und 2 Einer korrekt als 3202 notiert. In ihrer Begründung wendet sie die multiplikative Eigenschaft an: sie multipliziert den Zahlen- (12) mit dem Stellenwert (Hunderter) und erhält als Wert der Ziffer 1200. Anschließend nutzt sie die additive Eigenschaft und addiert die spezifischen Werte der drei Ziffern, sodass die Stellenwerteigenschaft berücksichtigt wird. Zusätzlich notiert die Schülerin, dass 12 Hunderter in 10 Hunderter und 2 Hunderter zerlegt und 10 Hunderter zu einem Tausender gebündelt werden kann. An ihrer Erklärung wird deutlich, dass sie das Bündelungsprinzip inhaltlich verstanden hat.

	ZT	T	H	Z	E	Zahl
12 Hunderter, 2 Tausender, 2 Einer		2	12		2	2122

Richtig: Falsch: → die richtige Zahl ist 3202

Erklärung:

12 H = 12 · 100 = 1200 wenn ich 12 Hunderter habe, kann ich sagen 10 Hunderter und 2 Hunderter 10 Hunderter sind 1 Tausender

2000 + 1200 + 2

Insgesamt zeigt sich, die Schülerin verständnisbasiert unter Beachtung der Stellenwerteigenschaft und der multiplikativen Eigenschaft eine stellengerechte Interpretation der Ziffern vornimmt und den korrekten Wert der Zahl bestimmt, sodass sie inhaltliche Beziehungen zwischen einzelnen Stellenwerten deutet. Zudem wendet sie das Bündelungsprinzip an (Umbündeln von Nicht-Standardzerlegungen $12 \text{ H} = 1 \text{ T} + 2 \text{ H}$). Sie zeigt also ein inhaltliches dezimales Verständnis.

Syntaktisches Wissen vs. semantisches Verständnis

Im Umgang mit den Aufgaben werden qualitative Unterschiede im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems deutlich, die sich in der Unterscheidung zwischen einem syntaktischen Wissen und einem semantischen Verständnis (vgl. Fromme, 2017; Schöttler, 2019) beschreiben lassen.

Dabei lässt sich ein syntaktisches Wissen als Reproduktion von konventionellen Regeln, Fakten oder Begriffen sowie eine Orientierung an einzelnen Objekten oder Darstellungen definieren (z. B. Namen, Reihenfolge und Position von Stellenwerten kennen, in Standardzerlegung gegebene Zahlen aus der Stellenwerttafel ablesen, Größe verschiedener Zahlen über die Anzahl der belegten Stellen vergleichen). Syntaktisches Wissen muss nicht unbedingt verständnisbasiert gelernt worden sein, sondern kann regelgeleitet und unreflektiert und damit eventuell unverstanden angewendet werden.

Ein semantisches Verständnis hingegen zeigen Lernende, wenn sie bei der Bearbeitung von Aufgaben verständnisbasiert dezimale Strukturen zwischen Zahlen erkennen und nutzen. Dazu verknüpfen sie Wissens Elemente miteinander und wenden diese in der Situation an, sodass sie ihre Kenntnisse auf neue Kontexte übertragen und flexibel nutzen (z. B. Umbündeln von Nicht-Standardzerlegungen $24 Z = 2 H + 4 Z$, Umgruppierungen ($6 Z = 5 Z + 10 E$), flexible Deutung von Ziffern in Abhängigkeit von ihrem Stellenwert).

Die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik kann dabei helfen, Stellenwertverständnis detaillierter zu diagnostizieren und darzustellen, ob ein inhaltliches Verständnis aufgebaut wurde oder eher – möglicherweise unverstandenes – formales Wissen genutzt wird. Darauf aufbauend könnte eine gezielte Förderung zum Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses erfolgen.

Dazu müssen geeignete Aufgaben eingesetzt werden. So wird die Diagnose dezimalen Verständnisses sowie das Aufdecken von eventuellen Defiziten oft durch den Einsatz von Routineaufgaben erschwert. Wenn Lernende z. B. Zehnergruppen in die Stellenwerttafel eintragen, Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegen oder Stellenwerte einzelner Ziffern korrekt benennen können, könnte voreilig von einem scheinbaren Verständnis ausgegangen werden. Diese Fertigkeiten sind jedoch nicht unbedingt ein Indikator für ein semantisches Verständnis. Stattdessen können die Routineaufgaben durch das Ausführen von gelernten Regeln oder Verfahren gelöst werden (syntaktisches Wissen); ohne ein inhaltliches Verständnis aufgebaut haben zu müssen.

Literaturverzeichnis

- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer.
- Ross, S. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47-51.
- Sprenger, L. (2018). *Zum Begriff des Dezimalbruchs. Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer.
- Schöttler, C. (2019). *Deutung dezimaler Beziehungen – Epistemologische und partizipatorische Analysen von dyadischen Interaktionen im inklusiven Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.