MONZ, Laura & WACHTER, Lukas
Saarbrücken

Kontextualisierung logischer Sprache im Beweisen

Entwicklung der Zielsetzung

Im vorliegenden Beitrag wird zunächst das Zusammenspiel von Sprache und Logik betrachtet. Logik erlaubt mathematische Sachverhalte präzise zu fassen und Beweise ggf. auch formal zu führen. Eine Exaktifizierung von Sachverhalten in Abgrenzung zum alltagsüblichen Verständnis von logischen Ausdrücken kann diese zwar einerseits kompliziert erscheinen lassen, andererseits kann eine proaktive Hervorhebung der logischen Struktur von Aussagen und Argumentationen und dabei die Verwendung eindeutig definierter Operatoren aber auch erhellend und verständnisfördernd sein. Adaptiert man eine der Informatik entstammende Sichtweise, so stellt man fest, dass aussagenlogische Begriffe auch für die Programmierung wesentlich sind. Insbesondere zur Formulierung von Verzweigungsstrukturen sind logische Implikationen und die Verknüpfung logischer Aussagen durch UND und ODER unverzichtbar. Ein Beispiel zur Konkretisierung mathematischer Logik im Rahmen von Beweisen durch Programmierung zur Stärkung des Verständnisses von logischen Operatoren wird in diesem Kontext vorgestellt.

Einfluss von Sprachformen zur Darstellung logischer Operatoren

Nach Assing (2023, S. 25) sollten "logische Grundlegungen mit einer Analyse der Sprache beginnen". Im Unterricht bewegen sich Lehrende und Lernende auf einem Kontinuum zwischen Umgangssprache und mathematischer Fachsprache (Vogel & Huth, 2010). Besonders zu beachten ist hierbei der Gebrauch von Bezeichnern in der Mathematik, die auch im Alltag genutzt werden. Die Bedeutungen können sich (weitestgehend) entsprechen, in gewissen Punkten abweichen oder sich auch gänzlich unterscheiden (Maier & Schweiger, 2008). Aufgrund dieser sprachlichen Besonderheiten sind im Unterricht zwei Ausprägungen von Logik - die der Umgangssprache und eine mathematische Kalküllogik - zu berücksichtigen (Assing, 2023). Besonders deutlich wird dies bei der Interpretation logischer Operatoren, die in der Umgangssprache teils in unterschiedlicher Weise verwendet werden und bei Anwendung in der Mathematik zu Verständnisproblemen führen können (etwa die typische Verwechslung von ODER und ENTWEDER-ODER (Oldenburg, 2022)).

Zur Vermeidung einer Vermischung von Alltags- und strenger mathematischer Logik im Unterricht bedarf es einer vorigen Klärung der Begrifflichkeiten (Assing, 2023). Die Eindeutigkeit ermöglichende formalisierbare ma-

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

thematische Logik birgt das Potenzial einer universell verständlichen Sprache und stellt die Grundlage der Höheren Mathematik dar. Allerdings muss man sich der zentralen Rolle bewusst sein, die die Umgangssprache insbesondere für jüngere SuS bei der Verbalisierung ihrer Gedanken einnimmt. Es kann daher nicht das (ohnehin unmögliche) Ziel sein, Umgangssprache aus dem Unterricht zu verbannen, damit SuS in ihrem Denken nicht durch eine Einschränkung auf mathematisch-logische Sprache blockiert werden. Im Hinblick auf die Schaffung einer einheitlichen Kommunikationsbasis ergibt sich jedoch die Forderung nach einer Verständigung auf eine gemeinsame Sprache aller am Unterricht Beteiligten.

Weiter stellt sich die Frage nach der Darstellung der Sachverhalte in der Schulmathematik. Beim Beweisen sind diese gegeben durch die zu zeigende Aussage und die Argumente zusammen mit (nicht immer explizierten) Schlussweisen. Logik kann im Wesentlichen verbal-begrifflich oder formal-algebraisch (Lambert, 2020) betrieben werden, wobei letztere Sprachform für den (Grund-)Schulunterricht jedoch eine untergeordnete Rolle spielt. Darüber hinaus erscheint es vielversprechend, die bisher noch nicht vollständig explizierte algorithmisch-informatische Sprachform zu betrachten (Begriff entstanden im persönlichen Gespräch mit Anselm Lambert 2023 als Ergänzung der Begriffsbildung in Lambert 2020). Diese zeichnet sich durch den Gebrauch von Konzepten aus, die der Algorithmik bzw. Programmierung entstammen, z. B. Schleifen, Bedingungen, u. Ä.. Im Beitrag wird aufgezeigt, wie Logik im Rahmen von Beweisen in der algorithmisch-informatischen Sprachform für die Sekundar- und auch Primarstufe umgesetzt werden kann. Ziel ist es, die Bedeutung mathematisch-logischer Operatoren mithilfe von Programmierung zu verdeutlichen.

Einbettung logischer Sprache und Beweise in der Programmierung

Für den Unterricht werden Beweise auf unterschiedliche Arten geführt (eine strukturierte Übersicht findet sich u. A. bei Krumsdorf, 2015). Logik wird jedoch meist gesondert vom Beweisen beleuchtet. Erfahrungsgemäß gilt Gleiches für viele universitäre Veranstaltungen der Höheren Mathematik. Dass ein Beweis nicht ohne wenigstens eine informelle Art von Logik existieren kann, steht außer Frage. Der Zusammenhang von Logik und Sprache zeigt sich auch in den Funktionen, die Sprache und Beweis haben können. Maier und Schweiger (2008) unterscheiden kommunikative und kognitive Funktionen von Sprache. Der Ausdruck $\forall x, y \in \mathbb{N}: x + y = y + x$ kommuniziert einem verständigen Leser in kompakter Form: die Reihenfolge natürlicher Summanden spielt für den Wert der Summe keine Rolle. Gleichzeitig bringt Logik als Sprache eigene Zeichen mit sich, hier z. B. den Allquantor $\forall$. Ein Beweis der obigen Aussage kann ebenso eine kommunikative

Funktion und darüber hinaus Funktionen erfüllen, die kognitiver Natur sind (z. B. DeVilliers, 1990). Ein deduktiv führbarer Beweis liefert nicht nur Einsicht über die Gültigkeit der Kommutativität und der Einordnung in das Gefüge von Eigenschaften natürlicher Zahlen. Er vermittelt zudem sowohl inter- als auch intrasubjektiv eine Begründung, warum die Aussage gilt, und kann so die beweisende Person sowie deren soziales Umfeld von deren Gültigkeit überzeugen.

Zur parallelen Auseinandersetzung mit Beweisen und Logik schlagen wir den Kontext des Programmierens vor. Die Implementierung eines Programms, das zu einer Eingabe die gewünschte Ausgabe erzeugt, ist im Wesentlichen nichts anderes als eine konstruktive Beweisaufgabe (Förster, 2015). Die Besonderheit ist, dass die Korrektheit eines Programms zumeist direkt am Bildschirm durch dessen Ausführung plausibel gemacht werden kann. Aussagenlogische Ausdrücke können so durch die Überprüfung aller möglichen Fälle untersucht werden. Die Begrenzung eines Beweises auf eine endliche, diskrete Menge ist v. a. in der Primarstufe bei ersten Kontakten mit Beweisen legitim und geeignet (Stylianides, 2016). Im Kontext solcher Mengen (z. B. dem Zahlenraum bis 100) ist dazu zunächst eine logische Formulierung der zu überprüfenden Aussage notwendig. Im Anschluss wird ein Algorithmus konstruiert, der für alle relevanten Fälle überprüft, ob die Aussage korrekt ist. Im gleichen Kontext kann auch die Negation prädikatenlogischer Ausdrücke behandelt werden: Die Ausgabe eines eine allquantifizierte Aussage überprüfenden Programms wird falsch, sobald mindestens ein Fall nicht zur gewünschten Ausgabe führt.

```python
sechserreihe = list([])
for k in range(100//6 + 1):
    sechserreihe.append(6*k)

wahre_aussage = True
for zahl in range(100 + 1):
    if (zahl % 2 == 0) and (zahl % 3 == 0):
        wahre_aussage &= zahl in sechserreihe

print(wahre_aussage)
```

Abb.1: Teilbarkeitsregel in Python für die Sekundarstufe (für die Primarstufe empfiehlt sich eine Blocksprache)

Als Beispiel dient die Überprüfung der Regel für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 6 im Zahlenraum bis 100 (Abb. 1). Das zugehörige Programm überprüft, ob eine Eingabe durch 2 UND durch 3 teilbar ist (Stichwort: Modularisierung). WENN diese Bedingung erfüllt ist, DANN wird überprüft, ob die Zahl beim Teilen durch 6 keinen Rest lässt. Die Bedingung muss FÜR ALLE, z. B. durch eine Schleife konstruierbaren, korrekten Prüffälle gelten. Würde ein Gegenbeispiel gefunden, wäre die Teilbarkeitsregel falsch. Lernende können in diesem Kontext analoge Teilbarkeitsregeln (er-)finden und im Zahlenraum bis 100 beweisen.

Fazit und Ausblick

Mathematische Logik verfügt über das Potenzial zur Universalsprache, wobei im Unterricht jedoch auch der Umgangssprache eine hohe Bedeutung zukommt. Durch die Transformation von sprachlichen Argumentationen in Programmcode wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, wie mithilfe der informatisch-algorithmischen Sprachform Logik und Beweise in anschaulicher Weise vereint behandelt werden können. Die Implementierung bietet beim Übergang zu unendlichen Mengen, die in der Sekundarstufe relevant werden, aber auch Anlass zur Diskussion über die Allgemeingültigkeit von Beweisen und zudem weitere Beweismethoden.

Literatur

Assing, H. (2023). *Die Logik der Schulmathematik*. wbg Academic.

De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. Pythagoras, 24, 17–24.

Förster, K.-T. (2015). Scratch im Geometrieunterricht. *mathematik lehren, 188*, 20–24.

Krumsdorf, J. (2015). *Beispielgebundenes Beweisen*. Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors in den Erziehungswissenschaften an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe (in der Schule) – ein Vorschlag zur Unterscheidung. *Der Mathematikunterricht, 66*(2), 3–15.

Maier, H., & Schweiger, R. (2008). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Obv & htp Verlagsgesellschaft. https://me.aau.at/~kadunz/semiotik/sprache%20und%20mathematik.pdf

Oldenburg, R. (2022). Logisch? - Logisch!. *mathematik lehren, 234*, 44-46.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198723066.001.0001

Vogel, R., & Huth, M. (2010). Mathematical cognitive processes between the poles of mathematical technical terminology and the verbal expressions of pupils. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME* (S. 1033–1042). https://tinyurl.com/bk76k9pm