WITTMANN, Gerald; VÖLKER, Sarah & HECK RIBEIRAS, Patricia
Freiburg

Darstellungen zur Erschließung des Tausenderraums – Erste Ergebnisse einer Schulbuchanalyse

Theoretischer Rahmen

Das Stellenwertverständnis gilt als zentral sowohl für das Verständnis großer Zahlen als auch das Rechnen (Verschaffel, Greer & de Corte, 2007). Allerdings wird das Stellenwertverständnis nicht einheitlich konzeptualisiert. Im Folgenden werden zwei Komponenten des Stellenwertverständnisses unterschieden (Treffers, 2008; Freesemann, 2014; Häsel-Weide & Schöttler, 2021):

(1) Das *Stellenwertverständnis im engeren Sinne* oder auch das *strukturorientierte Verständnis* umfasst die Zifferndarstellung einer Zahl im dezimalen Stellenwertsystem, einschließlich ihrer Grundlagen (insbesondere Bündeln und Entbündeln) und ihrer Bedeutung.

(2) Die *Orientierung im Zahlenraum* oder das *positionsorientierte Verständnis* bezieht sich auf das Verständnis einer geordneten Zahlenreihe, in der jede Zahl ihren festen Platz besitzt (exakt oder ungefähr).

Zentral für die Entwicklung eines Stellenwertverständnisses ist das intensive Arbeiten mit Darstellungen und insbesondere das Ausführen von Darstellungswechseln (Schulz & Wartha, 2021).

In Anlehnung an Bruner (1971) werden für den Mathematikunterricht traditionell enaktive, ikonische und symbolische Darstellungen unterschieden. In der Mathematikdidaktik üblich ist auch der Begriff Materialien, mit denen Schülerinnen und Schüler konkret-gegenständlich handeln können (Schipper, Ebeling & Dröge, 2015), und die die Grundlage für enaktive und ikonische Darstellungen bilden.

Vor einem kognitionspsychologischen Hintergrund unterscheidet Schnotz (2001) zwei Kategorien von Darstellungen:

(1) *Depiktionale Darstellungen* besitzen unmittelbare strukturelle Gemeinsamkeiten mit dem Sachverhalt und sind informational vollständig; Informationen können unmittelbar entnommen werden.

(2) *Deskriptionale Darstellungen* hingegen sind Beschreibungen mit Hilfe von Symbolsystemen und besitzen keine unmittelbaren strukturellen Gemeinsamkeiten mit dem Sachverhalt; ihre Nutzung erfordert die Kenntnis der Konventionen, die dem Symbolsystem zugrunde liegen.

Im Folgenden wird diese Kategorisierung herangezogen, da sie sich für

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Schulbuchanalysen als tragfähig erweist. Sie erspart zudem die für Abbildungen in Schulbüchern problematische und wenig tragfähige Unterscheidung von enaktiven und ikonischen Darstellungen.

Die Grundlage für depiktionale Darstellungen von Zahlen im Tausenderraum bilden unter anderem unstrukturierte Materialien, das Dienes-Material, Punktefelder und entsprechende vereinfachte Darstellungen (Abb. 1), die alle auf den kardinalen Zahlaspekt zielen, sowie der Zahlenstrahl, der vollständig oder teilweise skaliert und beschriftet oder leer sein kann und den ordinalen Zahlaspekt anspricht.

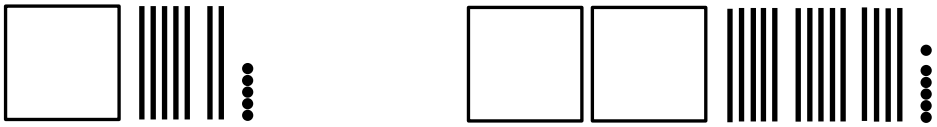

Abb. 1: Vereinfachte ikonische Darstellung, die aus dem Dienes-Material oder aus Punktefeldern hervorgehen kann (links eine konventionelle, rechts eine nicht-konventionelle Darstellung)

Deskriptionale Darstellungen sind insbesondere die Zifferndarstellung, die Stellenwerttafel, die Darstellung als Summe (100 + 70 + 6) oder als Stellenwerte (1H 7Z 6E), das Zahlwort (geschrieben oder gesprochen) und Darstellungen mittels Seguin-Karten.

Darstellungen wie 2H 14Z 6E oder in Abb. 1 rechts entsprechen nicht den Konventionen des dezimalen Stellenwertsystems, sind jedoch für den Lernprozess von großer Bedeutung, weil sie ein Bündeln erfordern.

Untersuchungsziel

In Deutschland erfolgt die Erschließung neuer Zahlenräume im Mathematikunterricht der Grundschule traditionell in festen Schritten. Zentral für das Stellenwertverständnis ist dabei Klasse 3, wenn die Erweiterung vom Hunderter- zum Tausenderraum stattfindet. Ziel der vorgestellten Analyse ist es, einen Überblick über die in Schulbüchern für Klasse 3 verwendeten Darstellungen zur Erschließung in den Tausenderraum zu gewinnen, um anschließend anhand der auftretenden Darstellungen Lernwege beschreiben und Schulbücher einordnen zu können. Diese Ergebnisse können eine wichtige Grundlage für die Aus- und Fortbildung von Lehrkräften bilden.

Untersuchungsdesign

Die Datenbasis umfasst alle 16 in Baden-Württemberg zugelassenen Schulbücher für Klasse 3, jeweils in der im Februar 2023 vorliegenden Ausgabe. Untersucht wurden jene Abschnitte im Schulbuch, die auf die Erschließung des Tausenderraums zielen. Zur Abgrenzung: Nicht analysiert wurden einer-

seits Abschnitte, die sich noch auf den Hunderterraum beziehen, so die üblichen Wiederholungen zu Beginn des Schulbuchs, und andererseits Abschnitte, die explizit das Rechnen im Tausenderraum ansprechen.

Die Untersuchung wurde als qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt. Der erste Schritt hierbei war eine Kodierung aller Aufgaben in den ausgewählten Schulbuchabschnitten, wobei jede Teilaufgabe eine eigene Kodiereinheit bildete. Das Kategoriensystem wurde vorab aufgrund der Literatur erstellt und im Laufe der Kodierung ergänzt. Es ist eindimensional: Jeder Kode bezeichnet eine Darstellung, die in dieser Teilaufgabe verwendet wird. Mehrfachkodierungen sind möglich. Zur Bestimmung der Interkoderreliabilität wurde ein Teil des Materials doppelt kodiert.

Diese Form der Kodierung gibt unmittelbar an, welche Darstellungen überhaupt auftreten, in welcher Abfolge und in welcher Kombination sie auftreten. Sie enthält aber nicht, in welcher Weise und mit welchem Ziel die Darstellungen verwendet werden sowie ob und in welcher Richtung Darstellungswechsel angeregt werden. Die Kodierung hat in erster Linie heuristischen Charakter, d.h. sie soll die weitere Beschreibung und Analyse der betreffenden Schulbuchabschnitte leiten und strukturieren.

Erste Ergebnisse

Als depiktionale Darstellung, mit der das dezimale Stellenwertsystem für den Tausenderraum hergeleitet wird, verwenden 14 der 16 Schulbücher Abbildungen des Dienes-Materials. Es ist elfmal durchgängig einfarbig gehalten und dreimal zumindest anfangs mehrfarbig; die jeweiligen Farben markieren in allen drei Fällen u.a. die entsprechenden Stellenwerte in der Kopfzeile der Stellenwerttafel. Die beiden Schulbücher, in denen das Dienes-Material nicht auftaucht, stützen sich von Beginn an auf Punktefelder zur Einführung des dezimalen Stellenwertsystems.

Mit einer Ausnahme arbeiten alle Schulbücher im weiteren Verlauf mit einer vereinfachten ikonischen Darstellung, die sowohl aus dem Dienes-Material als auch aus Punktefeldern entwickelt werden kann. Sie ist häufig die zentrale depiktionale Darstellung, weil sie auch ohne Material auskommt und sich auch für eine Einzelarbeit im Heft eignet.

Weit verbreitet sind die Seguin-Karten, bereits eine deskriptionale Darstellung, teils in den klassischen Montessori-Farben (Einer grün, Zehner blau, Hunderter rot), teils mit schwarzen Ziffern. Es finden sich zwei typische Einsatzorte: Einerseits zu Beginn als Bindeglied zwischen dem Dienes-Material und der Zifferndarstellung, andererseits nach der Stellenwerttafel zur Unterstützung beim Erlernen der Zahlwörter.

Eine ebenfalls häufig auftretende depiktionale Darstellung beinhaltet unstrukturierte Materialien. Sie werden teilweise zum Einstieg verwendet, im Rahmen von Schätzaufgaben oder zur Erarbeitung der Bedeutung gebündelter Darstellungen, teilweise erst später, dann ebenfalls für Schätzaufgaben.

Diskussion der ersten Ergebnisse und Ausblick

Zwei Befunde erscheinen kritisch: zum einen die Vielzahl an Darstellungen in einigen Schulbüchern, die teilweise nur für wenige Aufgaben genutzt werden (vgl. in Bezug auf den Hunderterraum Gaidoschik, 2015), zum anderen eine Diskrepanz zwischen der Praxis in den Schulbüchern und den mathematikdidaktischen Lehrbüchern, die z.B. die Seguin-Karten und ihre Handhabung nicht erwähnen.

Die weiteren Analysen werden zeigen, welche Hilfen die Schulbücher für das Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen geben, in welcher Weise Darstellungswechsel angeregt werden und wie substanziell die Aufgabenformate sind, u.a. auch aufgrund nicht den Konventionen entsprechender Darstellungen.

Literatur

Bruner, J. S. (1971). *Toward a Theory of Instruction*. New York: Norton.

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), S. 163–190. https://doi.org/10.1007/s13138-015-0071-3.

Häsel-Weide, U. & Schöttler, C. (2021). Das Dezimalsystem verstehen – Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, 2. https://doi.org/10.48648/8qae-mb28.

Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen: 1. Schuljahr*. Braunschweig: Westermann.

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft, 29*(4), S. 292–318. https://doi.org./10.25656/01:7717.

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Berlin: Springer Spektrum.

Treffers, A. (2008). Numbers and number relationships. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (S. 101–120). Utrecht: Freudenthal Institute.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 557–628). Charlotte, NC: Age Publishing.