

UMGELTER, Karyna & GEISLER, Sebastian  
Universität Potsdam

## **Präsentation von Definitionen, Sätzen und Beweisen in Analysisvorlesungen**

Das Mathematikstudium ist für viele Studierende sehr herausfordernd. Die Abbruchquoten sind sowohl international (z.B. Chen, 2013) als auch in Deutschland (Heublein et al., 2022) beunruhigend. Die Gründe für den Studienabbruch können vielfältig sein: Studierende sind nicht nur mit neuem Wissen konfrontiert, sondern auch mit neuen pädagogischen Ansätzen (Kouvela et al., 2018; Rach & Heinze, 2017). Da das Mathematikstudium in der Regel auf Vorlesungen und Übungen aufbaut, scheinen diese einen signifikanten Einfluss auf Lernprozesse von Studierenden zu haben (Hellwig & Geisler, 2024). Insbesondere werden Vorlesungen als primäre Quelle für die Wissensvermittlung genutzt. Auch wenn einige WissenschaftlerInnen die Effektivität von Vorlesungen in Frage stellen (z.B. Fritze & Nordkvelle, 2003), wird die Notwendigkeit für mehr empirische Forschung betont (Viirman, 2021). In diesem Beitrag gehen wir genauer auf die Präsentation von mathematischen Inhalten in Analysisvorlesungen ein und stellen Ergebnisse aus einer Beobachtungsstudie vor.

### **Forschungsstand und theoretischer Hintergrund**

Mathematische Vorlesungen lassen sich in Bezug auf allgemeine und mathematische Kriterien beschreiben (Umgelter & Geisler, 2024), wobei wir in diesem Beitrag auf mathematische Kriterien eingehen werden. Hierfür nutzen wir das Framework von Rach et al. (2016). Rach et al. (2016) nennen zwei Kategorien: Präsentation von Definitionen sowie Präsentation von Sätzen und Beweisen. Die Kategorie Präsentation von Definitionen beruht auf der Theorie zur Begriffsbildung nach Tall und Vinner (1981), wobei sie zwischen concept definition (formale Definition eines Konzepts) und concept image (informelle Aspekte der Definition, z.B. Beispiele, Repräsentationen) unterscheiden. Die Kategorie Präsentation von Sätzen und Beweisen ist auf der Theorie zu Beweisprozessen nach Boero (1999) aufgebaut, wobei sie sowohl formale (z.B. nennen einer formalen Behauptung) als auch informelle (z.B. Exploration von Argumenten) Aspekte von Beweisprozessen beinhaltet. Wir haben das von Rach et al. (2016) auf Grundlage von diesen Theorien entwickelte Beobachtungsinstrument adaptiert (Umgelter & Geisler, 2024).

Empirische Forschung zu Präsentation von mathematischen Inhalten in Vorlesungen ist rar. Nichtsdestotrotz, lassen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Dozierenden herausstellen. So berichtet Chorlay (2022) von der Präsentation der Definition von konvergenten Folgen bei drei

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Dozierenden: in allen Vorlesungen wurden die formale Definition, Beispiele und Repräsentationen vorgestellt, jedoch gab es Unterschiede in der Auswahl von Beispielen und Skizzen. Formale Aspekte von Definitionen, Sätzen und Beweisen werden meistens schriftlich festgehalten, und informelle Aspekte wie Repräsentationen oder Explorations von Dozierenden höchstens verbal erwähnt (z.B. Fukawa-Connelly et al., 2017). Dabei werden die verbalen Äußerungen von Studierenden oft als unwichtig eingestuft und in ihre Notizen nicht aufgenommen (Iannone & Miller, 2019). Die meisten Studien beinhalten entweder eine kleine Anzahl an beobachteten Vorlesungen zum gleichen Thema oder Vorlesungen zu verschiedenen thematischen Schwerpunkten. Deshalb ist eine systematische Erforschung von Vorlesungsreihen zum gleichen thematischen Schwerpunkt notwendig.

### **Forschungsfrage und Methodik**

In diesem Beitrag stellen wir einen Einblick zur systematischen Beobachtung von Mathematikvorlesungen vor. Insbesondere soll die verbale und schriftliche Präsentation von formalen und informellen Aspekten zu Definitionen, Sätzen und Beweisen im deutschen Kontext untersucht werden. Daraus ergibt sich die folgende Forschungsfrage:

*Wie werden formale und informelle Aspekte von Definitionen, Sätzen und Beweisen in Vorlesungen präsentiert und welche Unterschiede lassen sich in Bezug auf verbale und schriftliche Aussagen feststellen?*

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden Vorlesungsreihen in Analysis zum Thema Folgen und Reihen bei  $N=10$  Dozierenden mittels Beobachtungsprotokoll (Umgelter & Geisler, 2024) kodiert. Für die Präsentation von Definitionen wurden die Kategorien (1) *Motivation der Definition*, (2) *Nennen einer formalen Definition*, (3) *Nennen von (Gegen-)Beispielen*, (4) *Mentale/visuelle Repräsentationen* kodiert. Für die Präsentation von Sätzen und Beweisen wurden die Kategorien (5) *Entwicklung einer Behauptung*, (6) *Formulierung einer Behauptung*, (7) *Exploration einer Behauptung*, (8) *Organisation der Argumente*, (9) *Bedeutung und Überblick* kodiert. Die Kategorien (2), (6) und (8) erfassen die Präsentation von formalen mathematischen Aspekten, die Kategorien (1), (3), (4), (5), (7), (9) - von informellen. Jede Kategorie kann in den Niveaus "3 = gut behandelt" bis "0 = nicht behandelt" bewertet werden und wurde für jede Definition sowie jeden Satz und Beweis sowohl für verbale als auch schriftliche Aussagen kodiert (Auszüge aus dem Beobachtungsprotokoll mit Kodieranweisungen finden sich in Umgelter und Geisler (2024)). Die Interrater-Reliabilität zwischen der Kodierung vom Erstautor und zwei weiteren angeleiteten Kodierern nach Spearman  $.707 \leq r \leq .738$  weist auf eine mittlere Korrelation zwischen den Ratern.

## Ergebnisse

Insgesamt wurden N=124 Definitionen sowie N=240 Sätze und dazugehörige Beweise beobachtet und kodiert. Die Mittelwerte und Standardabweichungen sind in Tabelle 1 für jede Kategorie zusammengetragen. Insgesamt kann die Präsentation von formalen Aspekten (z.B. (2), (6)) eher gut behandelt eingestuft werden, die informellen Aspekte (z.B. (1), (5)) eher in schlecht behandelt. Der Wilcoxon-Test zeigt, dass die Unterschiede zwischen der verbalen und schriftlichen Präsentation von Inhalten bis auf Aspekt (6) signifikant sind.

	verbal		schriftlich	
	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>
Präsentation von Definitionen				
(1) <i>Motivation der Definition</i> ***	1.12	1.25	.36	.88
(2) <i>Nennen einer formalen Definition</i> *	2.97	.22	2.92	.33
(3) <i>Nennen von (Gegen-)Beispielen</i> ***	1.44	1.27	1.26	1.24
(4) <i>Mentale/visuelle Repräsentationen</i> ***	1.11	1.38	.77	1.20
Präsentation von Sätzen und Beweisen				
(5) <i>Entwicklung einer Behauptung</i> ***	.63	1.02	.16	.63
(6) <i>Formulierung einer Behauptung</i>	2.94	.32	2.92	.39
(7) <i>Exploration einer Behauptung</i> ***	.78	.97	.30	.66
(8) <i>Organisation der Argumente</i> ***	2.12	1.16	1.80	1.04
(9) <i>Bedeutung und Überblick</i> ***	1.00	1.22	.50	1.02

**Tabelle 1:** Ergebnisse (3 = gut behandelt bis 0 = nicht behandelt; \* $p < .05$ , \*\*\* $p < .001$ )

## Zusammenfassung und Diskussion

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass formale mathematische Aspekte (z.B. *Nennen einer formalen Definition*, *Formulierung einer Behauptung*) von Dozierenden sowohl verbal als auch schriftlich gut behandelt werden. Dies ist jedoch nicht der Fall in Bezug auf informelle Aspekte (z.B. *Motivation der Definition*, *Exploration einer Behauptung*), da die Mittelwerte eher auf dem Niveau schlecht behandelt liegen. Insbesondere lassen sich signifikante Unterschiede in verbaler und schriftlicher Präsentation von mathematischen Inhalten in fast allen Kategorien feststellen. Aber auch die Standardabweichungen weisen darauf hin, dass es Unterschiede in der Präsentation der Inhalte gegeben hat. Diese Ergebnisse sind im Einklang mit internationalen

Studien (z.B. Fukawa-Connelly et al., 2017). Eine Limitation unserer Studie ist die Beobachtung von Vorlesungen bei nur 10 Dozierenden sowie die Auswahl von Vorlesungsreihen ausschließlich zu einem Thema. Eine weitere Limitation ist die Fokussierung ausschließlich auf mathematische Aspekte im Sinne der Qualität von Mathematikvorlesungen, da allgemeine Kriterien ebenso einen Einfluss auf die Leistung der Studierenden haben könnten.

## Literatur

- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).
- Chen, X. (2013). *STEM attrition: College students' paths into and out of STEM fields*. Washington, DC: National Centre for Education Statistics, U.S. Department of Education.
- Chorlay, R. (2022). Accounting for the variability of lecturing practices in situations of concept introduction. *IJMEST*, 53(5), 1071-1091.
- Fritze, Y., & Nordkvelle, Y.T. (2003). Comparing lectures: effects of the technological context of a studio. *Education and Information Technologies*, 8(4), 327-343.
- Fukawa-Connelly, T. P., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2017). Informal content and student note taking in advanced mathematics classes. *JRME*, 48(5), 567-579.
- Hellwig, L., & Geisler, S. (2024). Instructions in math problems: are proof tasks considered more difficult by university students? In T. Evans, o. Marmur, J. Hunter, G. Leach, & J. Jhagroo (Eds.), *Proceedings of the 47th conference of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 3* (pp. 17-24). PME.
- Heublein, U., Hutzsch, C., & Schmelzer, R. (2022). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland*. (DZHW Brief 05|2022). Hannover: DZHW.
- Iannone, P., & Miller, D. (2019). Guided notes for university mathematics and their impact on students' note-taking behaviour. *ESM*, 101(3), 387-404.
- Kouvela, E., Hernandez-Martinez, P., & Croft, T. (2018). "This is what you need to be learning": An analysis of messages received by first-year mathematics students during their transition to university. *MERJ*, 30, 165-183.
- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: which influence do school-related variables have? *IJSME*, 15, 1343-1363.
- Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *ESM*, 12, 151-169.
- Umgelter, K., & Geisler, S. (2024). Analysing the quality of real analysis lectures using a structures observation tool. *IJMEST*, 1-23.
- Viirman, O. (2021). University mathematics lecturing as modelling mathematical discourse. *IJRUME*, 7, 466-489.