Birgit GRIESE, Michael CASPER, Bochum

Tragfähigkeit von Weg-Zeit-Kontexten beim Einstieg in die Differentialrechnung

1. Motivation und Ausgangslage

Internationale Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS/III haben gezeigt, dass deutsche Oberstufenschüler in kontextorientierten Aufgabenstellungen daran scheitern, physikalische Größen, z.B. Geschwindigkeit, mathematisch zu beschreiben. Laut Blum (2000) ist der Grund hierfür im kalkülorientierten Analysisunterricht zu finden, in dem der Schwerpunkt auf algebraischen Lösungsalgorithmen ohne authentischen Kontext liegt. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) werden oftmals mit künstlichen Scheinproblemaufgaben ohne Anwendungsbezug (Danckwerts & Vogel, 2006) konfrontiert, sodass „echte” Problemlöseaktivitäten nicht stattfinden. Die Idee der qualitativen Analysis (Hußmann & Prediger, 2010) betont die Bedeutung inhaltlichen Denkens und erhebt seine Förderung zum zentralen Ziel.

2. Modultage Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum

Im Alfried-Krupp-Schülerlabor der RUB werden im Fach Mathematik Modultage angeboten, die auf dieser Idee basieren. Hier sollen SuS einen Tag lang Experimente durchführen und selbstständig Aufgaben zu einem ausgewählten Thema bearbeiten. Ein Modultag bietet vorstellungsorientierte Einstiege, die im Fachunterricht aufgegriffen werden können, und fokussiert so auf nachhaltiger Verständnisbildung. Der Modultag "Steig' ein!" adressiert die Einführungsphase (Stufe 10 / 11) der Gymnasialen Oberstufe und dient als Einstieg in die Differentialrechnung am Beispiel der eigenen Fahrt zur Universität und weiterer Weg-Zeit-Kontexte.

3. Theoretischer Hintergrund – *Abstraction in Context*

Abstraction in Context (AiC) ist ein von Hershkowitz, Schwarz und Dreyfus (2001) entwickelter theoretischer und methodischer Rahmen, der es ermöglicht, den Prozess der Bildung von abstraktem mathematischen Wissen bei SuS zu beschreiben und zu analysieren. AiC unterscheidet die folgenden Phasen: Die Lernenden erkennen zunächst, dass ein vorheriges Konzept im vorliegenden Kontext sinnvoll anwendbar ist - *Recognizing* (R). Dies kann nur gelingen, wenn ein Bedürfnis nach einem neuen Konstrukt besteht (vgl. Kidron und Monaghan, 2009). Nur dann nutzen die SuS ihre intuitiven Einschätzungen (vgl. Davydov, 1990) und ihr bisheriges Wissen zur Anpassung von Strategien und Begründungen, um das vorliegende Problem zu lösen, *Building-with* (B). So entwickeln die Lernenden in der dritten Phase aktiv durch Anpassung und Integration von vorherigen Konzepten ein neues von ihnen durch- und erdachtes Konstrukt, *Constructing* (C). Dieser Vorgang wurde auch als *vertical mathematization* von Treffers und Goffree (1985) beschrieben, womit betont wird, dass die Phasen der RBC-Theorie aufeinander aufbauen und somit sukzessiv beobachtbar sind. Erfolgreich durchlaufen, ist das neu erworbene mathematische Konstrukt langfristig tragfähig, *Consolidation* (+C).

4. Forschungsfragen und Methodologie

Im Falle des Modultags "Steig' ein!" findet sich *Recognizing* in der Anwendung des Steigungskonzeptes auf Geschwindigkeiten. Das Bedürfnis der SuS, die Problemstellung zu bearbeiten, wird dadurch gefördert, dass der Kontext auf gemeinsamen persönlichen Erfahrungen beruht (Anfahrt zum Schülerlabor, Aufnahme der Bewegungsdaten mit Hilfe von GPS-Geräten, Bewegungserlebnisse im Schülerlabor). *Building-with* meint die Nutzung der Steigung von Geraden bei der Bearbeitung verschiedener Fragestellungen zur Geschwindigkeit. *Constructing* erfolgt im Rahmen der weiteren Bearbeitungen und kann in den im Begleitheft abgefragten Beschreibungen der Vorgehensweise und in den videografierten Diskussionen identifiziert werden. Aufgabenbasierte Paarinterviews und Problemstellungen aus Bewertungssituationen dienen dazu, die letzte Phase der *Consolidation* zu operationalisieren. Somit sind alle Phasen der RBC+C-Theorie überprüfbar, auf deren Grundlage eine Evaluation der Tragfähigkeit von Weg-Zeit-Kontexten und die Weiterentwicklung des Modultages stattfinden kann. Die Forschungsfragen lauten daher:

- Wie genau verlaufen die Phasen RBC (insbesondere der Abstraktionsprozess beim Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit)?
- Welche Vorstellungen im Bereich dieses Kontextes werden ausgeprägt, und gibt es *Consolidations*, die auf diesen Kontext zurückzuführen sind?

Nach einer Pilotphase im Winter 2011/2012 mit Interviews im Sommer 2012 wurde ein Jahr später die Erhebungsphase begonnen, die im Sommer 2013 mit den Interviews dieser Kohorte beendet werden wird.

5. Erste Ergebnisse

Die Aufzeichnungen bestätigen, dass die SuS nahezu vollzählig (> 90%) Verknüpfungen zwischen den Steigungen im Weg-Zeit-Diagramm und den erlebten Geschwindigkeiten herstellen, d.h. *Recognizing* bewältigen. Etwa 10% der SuS erweitern dies sogar auf Beschleunigungs- und Bremsvorgänge. Der Kontext und das reale Erleben fördern also theoriekonform den Aufbau abstrakten mathematischen Wissens.

Ob die Hauptschwierigkeit, den Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit zu erfassen, überwunden wurde, zeigt sich im Modultag an einer Aufgabe über einen Autofahrer, dem eine Geschwindigkeitsüberschreitung vorgeworfen wird, die er abstreitet. Die Durchschnittsgeschwindigkeit von 50km/h muss hier als *Building-with* mit den Geschwindigkeiten in sinnvoll ausgewählten Intervallen bzw. mit den Momentangeschwindigkeiten verglichen werden. Und tatsächlich gelangen die SuS zu der Erkenntnis, dass der zeitweise steilere Verlauf der Kurve im Weg-Zeit-Diagramm einer Geschwindigkeitsüberschreitung entspricht.

> Er fährt nur 50km/h, wenn der Graph parallel zu der Geraden (= Durchschnittsgeschwindigkeit) ist, da dann die gleiche Steigung auch die gleiche Geschwindigkeit ausmacht. An den Stellen, an denen die Graphen nicht parallel sind, fährt er langsamer, wenn der Graph flacher ist, und schneller, wenn der Graph steiler ist. (Robin02, 19.12.2012.)

Auch die Verkleinerung des betrachteten Intervalls auf eine infinitesimale Größe wird z.B. in folgender Schülerantwort formuliert: „Wir nehmen zwei Punkte, die nah bei einander liegen, sodass der Zeitraum so minimal wird, dass er fast ein Zeitpunkt ist.“ (Sarah03, 19.12.2012). Damit ist ein neues Konstrukt geschaffen, *Constructing* findet statt. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Konstrukt der Geschwindigkeit als Steigung von Weg-Zeit-Funktionen zur Problemlösung eingesetzt wird.

Die Höchstgeschwindigkeit wird jedoch nur etwa von der Hälfte der SuS ermittelt, wie auch in der Klausuraufgabe zwei Wochen später. Offenbar trägt der Kontext in der bisher präsentierten Form nicht so weit, dass auch diese Problemstellung als relevant empfunden wird. Das Konstrukt der mittleren Geschwindigkeit dominiert und wurde nicht vom Konstrukt der momentanen Geschwindigkeit abgelöst. In der Aufgabenformulierung wird auch nicht explizit danach gefragt, so dass die Schülerinnen und Schüler einen für sie zufriedenstellenden Ansatz wählen. Über ihre Fähigkeit zur Nutzung ihres neu erstellten Konstrukts sagt dies jedoch nichts aus. Somit wird der Übergang von der mittleren zur momentanen Steigung in diesem Kontext angeregt, *Consolidation* kann jedoch noch optimiert werden.

6. Reflexion und Ausblick

Die SuS benutzten bisher ausschließlich die mittlere Steigung als Hilfsmittel für die Beschreibung der Geschwindigkeitsverläufe. Die genauen Gründe hierfür werden Ausgangspunkt für die noch anstehenden Interviews sein. Um den Fokus des Modultages deutlicher in Richtung Momentansteigung bzw. Momentangeschwindigkeit zu verschieben und damit eine weitere mathematische Konzeptualisierung im Sinne von RBC zu erwirken, wird der Sachkontext der Autofahrer-Aufgabe dahingehend verändert, dass nicht nur nach einer beliebigen, sondern nach einer führerscheingefährdenden Geschwindigkeitsübertretung gesucht werden muss. Die Forderung nach authentischen Bezügen und echten Problemstellungen (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006) wird somit erfüllt, und die Modultage Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum können in Zukunft noch besser dazu beitragen, bei SuS wertvolle Konstrukte entstehen zu lassen, auf die im Mathematikunterricht nutzbringend zurückgegriffen werden kann.

Literatur

Blum, Werner (2000). Perspektiven für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht 46* (4-5), S. 5-17.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum, Heidelberg.

Davydov, V. (1990). Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Hrsg.) & J. Teller (Übers.) *Soviet studies in mathematics education, Vol. 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. [Original veröffentlicht 1972]

Dreyfus, T. (2012). Constructing abstract mathematical knowledge in context. Online verfügbar unter http://www.icme12.org/upload/submission/1953_F.pdf [22.02.2013].

Hahn, S., & Prediger, S. (2004). Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative. In A. Heinze & S. Kuntze (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 217-220). Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 195–222.

Hershkowitz, R. (2009). Contour lines between a model as a theoretical framework and the same model as methodological tool. In B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Hg.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (S. 273-280). London, UK: Routledge.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(31), 35-38.

Kidron, I., & Monaghan, J. (2009). Commentary on the chapters on the construction of knowledge. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Hrsg.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (S. 81-90). London, UK: Routledge.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II (S. 97-123). Utrecht, The Netherlands: OW&OC.