

BENDER, Roland & HATTERMANN, Mathias
Braunschweig

Grundvorstellungen zur Folgenkonvergenz und wie Lernende mit ihnen argumentieren

Einleitung

Der Übergang von der Schule zur Hochschule stellt besonders in mathematischen Studiengängen für viele Studierende eine große Herausforderung dar. Im Laufe des letzten Jahrhunderts wurden bereits verschiedenste Ursachen für die Schwierigkeiten identifiziert sowie diverse Konzepte zu deren Eindämmung entwickelt (s. z. B. Neumann et al. 2017). Dennoch sind Übergangsprobleme nach wie vor virulent und es bedarf weiterer Anstrengungen zur Erleichterung dieses Übergangs. Während viele Konzepte wie Brücken- oder Onlinekurse an der Universität angesiedelt sind, setzt das hier vorgestellte Promotionsprojekt in der Schule an, um den Übergang Schule/Hochschule für die Teilnehmenden möglichst erfolgreich zu gestalten. Im Rahmen eines schuljahrbegleitenden Projektkurses wurden Schüler*innen in typische Arbeitsweisen und Verfahren der Hochschulmathematik eingeführt sowie in der Entwicklung von Grundvorstellungen zur Folgenkonvergenz gezielt gefördert. Im vorliegenden Beitrag werden verschiedene deskriptive Grundvorstellungen der Lernenden bzgl. Folggrenzwerten aufgezeigt, die in sowohl mündlich als auch schriftlich geführten Argumentationen beobachtet werden konnten. Neben den üblichen in der Literatur diskutierten Grundvorstellungen konnte in der qualitativen Interviewstudie eine weitere Vorstellung zum Grenzwert identifiziert werden, welche neue Impulse für die Lehre von Folggrenzwerten geben könnte. Die identifizierte Vorstellung kann als vorstellungsbasierter Einstieg zum Cauchy-Kriterium betrachtet werden.

Design & Forschungsfragen

Grundsätzlich orientiert sich die Untersuchung an der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Design Research). Das entsprechend entwickelte Unterrichtskonzept fokussiert dabei drei Schwerpunkte: Zum einen sollten die Teilnehmenden ein transparentes Bild der Mathematik (tendenziell wie sie an der Hochschule gelehrt wird) als deduktives System, basierend auf Axiomen, Definitionen und aufeinander aufbauenden Sätzen, erhalten. Zum anderen sollten grundlegende Arbeitstätigkeiten der Hochschulmathematik wie das Verstehen, Prüfen und Führen von Beweisen kennengelernt sowie die Anwendung der Symbolsprache (Quantoren, Summenzeichen, etc.) vertieft und gefestigt werden. Der dritte Schwerpunkt lag auf der Entwicklung von Grundvorstellungen zu Folgen und Folggrenzwerten und sollte die beiden

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

erstgenannten Punkte aufgreifen, in einen Zusammenhang bringen und dabei den Umgang mit abstrakten Konzepten (wie dem der Unendlichkeit) vertiefen. Diese drei Fokusse (Transparenz, Arbeitstätigkeiten der Hochschule & Abstraktion) stehen mit den Forderungen von Hochschuldozierenden an Studierende des ersten Semesters im Einklang (Neumann et al. 2017) und stellen gleichzeitig für viele Studierende eine große Herausforderung dar (vgl. z. B. Brunner 2014, Rach und Heinze 2017). Für die Umsetzung der Intervention wurde an einem Paderborner Gymnasium in der elften Jahrgangsstufe ein sog. schuljahrbegleitender Projektkurs eingerichtet, an dem 19 Schüler*innen teilnahmen. Der wöchentlich abwechselnd zwei bzw. vier Stunden umfassende Unterricht basierte auf einem selbst entwickelten Skript (orientiert an o. g. Schwerpunkten) und wurde schüler- sowie handlungsorientiert durchgeführt. Dazu wurden die Inhalte in Form von Power-Point-Präsentationen, Arbeitsblättern und GeoGebra-Dateien dargestellt und den Lernenden zugänglich gemacht. Im ersten großen Themenblock standen, orientiert an der Hochschulveranstaltung "Einführung in die Kultur der Mathematik" von Biehler und Kempfen, grundlegende Beweise aus der Arithmetik, der Umgang mit Definitionen & Sätzen und damit einhergehend generell das deduktive Arbeiten im Fokus. Diesbezüglich wurden u. a. Beweisverfahren wie die vollständige Induktion oder der Widerspruchsbeweis im Projektkurs thematisiert. Der zweite Block widmete sich Folgen und ihren Grenzwerten, insbesondere um das deduktive Arbeiten anhand eines spezifischen Inhalts der Hochschulmathematik praktisch umzusetzen. Dabei standen insbesondere intuitive Argumentationen anhand von in Koordinatensystemen dargestellten Folgen bis hin zu schriftlich ausgeführten Abschätzungsbeweisen gebrochen-rationaler Folgenrechenregeln im Mittelpunkt. Beide Blöcke beinhalteten eine schrittweise Einführung der hochschultypischen Symbolsprache und ermöglichten damit den Aufbau eines umfassenden (Symbol-) Sprachgerüsts.

Bereits während der Durchführung des Projektkurses konnten Aufgabenbearbeitungen sowie schriftliche Überprüfungen der Lernenden zur weiteren Optimierung des Unterrichts genutzt werden (s. Bender und Hattermann 2020). Im Fokus des vorliegenden Beitrags steht die Klärung der folgenden Forschungsfrage: "Welche Vorstellungen entwickeln die Lernenden im Laufe des Projektkurses zur Konvergenz von Folgen und inwiefern können sie mithilfe dieser Vorstellungen argumentieren?"

Zur Beantwortung dieser (und weiterer) Fragen wurden im Anschluss an die Durchführung des Unterrichts nicht-standardisierte Leitfadenterviews mit den Lernenden durchgeführt. Ein besonderes Augenmerk galt dabei den Ar-

gumentationsmustern der Befragten und inwiefern sich verschiedene Grundvorstellungen im Rahmen des Kurses ausbildeten. Die Auswertung fand in Anlehnung an Kuckartz' qualitativer Inhaltsanalyse (2018) statt.

Entsprechende Ergebnisse dienen der Optimierung des Lernprozesses sowie der Weiterentwicklung des Kurses und werden zudem im Sinne des Design-Research-Ansatzes zur Theorieentwicklung genutzt.

Ergebnisse

Grundsätzlich war während des Projektkurses und im Laufe der jeweiligen Interviews eine Entwicklung von der Annäherungsvorstellung („Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert [...]“ (Greefrath et al. 2016, S. 105)) hin zur Umgebungsvorstellung („Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.“ (ebd., S. 105)) festzustellen. Wurden in den Interviews Grenzwerte von einer meist selbst im Koordinatensystem eingezeichneten Nullfolge vorerst intuitiv (ohne Folgenvorschrift) mithilfe einer Annäherung an Null beschrieben, war bei der anschließenden Erläuterung des Ausdrucks "beliebig annähern" sowie bei späteren konkreten Konvergenznachweisen bei allgemeineren Folgen vor allem die Umgebungsvorstellung mit Bezug zur formalen Definition zu beobachten. U. a. in den schriftlichen Beweisführungen wurde zudem deutlich, dass die meisten Schüler*innen eine Objektvorstellung von Folgen Grenzwerten entwickelt hatten und anhand der Termdarstellungen grundlegender Folgen den Grenzwert herleiten konnten (Kriterien zur Identifizierung der verschiedenen Grundvorstellungen finden sich in ebd., S. 105 f.). Die darauf aufbauenden Beweisführungen fielen in ihrer Qualität dennoch sehr heterogen aus.

Zudem konnte in den Interviews bei zwei Schüler*innen eine weitere Vorstellung beobachtet werden, die sich zu keiner der drei o. g. Grundvorstellungen eindeutig zuordnen lässt. So begründeten die beiden Befragten die Konvergenz einer Folge mit einem "immer kleiner werdenden" Abstand zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder bei Erhöhung der Folgennummern und positionierten sich damit in Richtung der Cauchy-Eigenschaft einer konvergenten Folge, ohne dass Cauchy-Folgen im Projektkurs thematisiert worden waren. Für eine korrekte "Cauchy-Vorstellung" müssten diese Vorstellungen der beiden Schüler*innen noch wie folgt präzisiert werden: Anstatt immer nur zwei aufeinander folgende Folgenglieder zu betrachten, müssen ab einer Nummer N sämtliche Folgenglieder paarweise verglichen werden. Wenn es dann zu jedem $\epsilon > 0$ eine Nummer N gibt, so dass die Absolutbeträge jeglicher Differenzen zweier Folgenwerte mit Nummern $> N$ kleiner

als ϵ sind, dann liegt (in \mathbb{R}) eine konvergente Folge vor. Diese Konvergenzdefinition lässt sich nun auch als Grundvorstellung formulieren. Fokussiert man dabei eher eine dynamische Sichtweise (in Anlehnung an Greefrath et al. 2006), könnte sie wie folgt lauten: "Für hinreichend große N nähern sich die Folgenglieder untereinander beliebig nahe an." Hingegen wäre eine statische Interpretation: "Der Abstand zwischen zwei beliebigen Folgengliedern ist ab einem bestimmten Folgenglied kleiner als jede beliebig kleine Größe." Vorteile dieser Vorstellung sind eine leicht nachvollziehbare Veranschaulichung im Koordinatensystem sowie die konkrete Vorbereitung des in der Hochschule relevanten Cauchy-Kriteriums.

Zusammenfassung und Ausblick

Sämtliche hier vorgestellten Ergebnisse basieren auf der o. g. qualitativen Untersuchung. Daher ist eine direkte Verallgemeinerung der Ergebnisse nicht ohne Weiteres möglich. Im Sinne der Entwicklungsforschung dienen die Ergebnisse vorerst der Überarbeitung des dargestellten Projektkurses.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die bekannten Grundvorstellungen zur Folgenkonvergenz (Annäherungs-, Umgebungs- und Objektvorstellung) bei den meisten Lernenden entwickelt wurden. Zudem könnte die von zwei Lernenden in Ansätzen eigenständig entwickelte Cauchy-Vorstellung Anlass für einen zusätzlichen Fokus des Lehrkonzeptes bieten. Diese durchaus tragfähigen Grundvorstellungen nun auch für die Anfertigung formaler Argumentationen zu nutzen erfordert für einige Schüler*innen zusätzliche Übung. Hierbei kann die Hochschule unterstützen.

Literatur

- Bender, R. & Hattermann, H. (2020). Hochschulmathematik in der gymnasialen Oberstufe am Thema „Grenzwert“ kennenlernen. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. Franz Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1452–1452). Münster: WTM-Verlag.
- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Mathematik im Fokus*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim: Beltz Juventa.
- Neumann, I., Pigge, C., Heinze, A. (2017). *Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für ein MINT-Studium?* Kiel: hansadruck und verlag gmbh + co. kg.
- Rach, S. & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education* 15(7), 1343-1363.