)

Beiträge zum Mathematikunterricht 2015

**VORTRÄGE AUF DER 49. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 09.02.2015 BIS 13.02.2015 IN BASEL**

Für die GDM herausgegeben von:

Franco Caluori
Helmut Linneweber-Lammerskitten
Christine Streit

BAND 1

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über
http://dnb.ddb.de
abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

ISBN 978-3-942197-92-2

Franco CALUORI, Helmut LINNEWBER-LAMMERSKITTEN,
Christine STREIT, Basel

Vorwort zum Tagungsband „Beiträge zum Mathematikunterricht 2015“

Die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik fand im Jahr 2015 zum dritten Mal in der Schweiz statt, 1993 trafen sich die Mathematikdidaktiker/innen in Freiburg / Fribourg und 1999 in Bern. Seither hat sich die Zahl der Mitglieder der GDM vervielfacht und mit der Gründung der GDM Schweiz am 14.06.2014 existiert zudem inzwischen ein eigener Landesverband mit bereits über 120 Mitgliedern. Entsprechend gut besucht war die 49. Jahrestagung der GDM im Februar 2015: Über 700 Personen folgten der Einladung nach Basel. Mit rund 300 Vorträgen, 16 moderierten Sektionen, 15 Arbeitskreistreffen und 21 Posterpräsentationen eröffnete sich ein breites Spektrum an Themen und unterschiedlichen Zugangsweisen zur Erforschung von Fragen rund um das Lernen und Lehren von Mathematik.

Höhepunkte des wissenschaftlichen Programms der Tagung waren die fünf Hauptvorträge. Im Eröffnungsvortrag stellte Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker (Duisburg-Essen) die Frage nach der Rolle der Mathematik in der Mathematikdidaktik. Das Thema des zweiten Hauptvortrags von Prof. Dr. Anna Sfard (Haifa) lautete *Metaphors in mathematical thinking and in research on mathematical thinking: a prop or a trap?* Die prämierte Nachwuchswissenschaftlerin Prof. Dr. Kathleen Philipp (Zürich) stellte das *Experimentieren* als mathematische Tätigkeit vor. Prof. Dr. Fritz Staub (Zürich) referierte zum Thema *Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Aus- und Weiterbildung* und der Vortrag von Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (Zürich) über *Skalierbare Themen im Mathematikunterricht* stellte den Abschluss der Tagung dar.

Ein Tag der Nachwuchsförderung (*Predoc-Tag*) wurde in diesem Jahr zum zweiten Mal angeboten. Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler konnten in einem 15-minütigen Vortrag ihr Dissertationsprojekt vorstellen. An die Präsentation schloss sich jeweils eine 20-minütige Diskussion an, die von zwei erfahrenen Chairs moderiert wurde. Herzlichen Dank diesen Kolleginnen und Kollegen für ihre Unterstützung. Die Nachwuchsvertretung der GDM hat erneut mit großem Engagement ein vielfältiges und interessantes Programm für den wissenschaftlichen Nachwuchs organisiert. Hierfür danken wir den Vertreterinnen und Vertretern der GDM-Nachwuchsgruppe. Auch auf der 49. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik in Basel gab es einen Posterwett-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bewerb. Der Dank geht an den Waxmann-Verlag, der den Posterpreis gestiftet hat.

Der traditionelle Tag für Lehrerinnen und Lehrer, der die Schnittstelle zur Praxis markiert, fand in diesem Jahr ausnahmsweise am Mittwoch statt. Über 150 Kollegen und Kolleginnen konnten wir beim Impulsvortrag Prof. Markus Cslovjecsek (PH FHNW) zum Thema *Mathe macht Musik – Einblick in ein interdisziplinäres EU-Entwicklungsprojekt* begrüßen. 24 Workshops waren ebenso wie die Ausstellung des Thuner Künstlers Eugen Jost *Alles ist Zahl – und die Mathematik ist noch viel mehr* gut besucht.

Das umfangreiche Rahmenprogramm bot viele Möglichkeiten, die „kleine Weltstadt Basel" mit ihren historischen und kulturellen Highlights näher kennenzulernen und die Kontakte im informellen Miteinander zu vertiefen.

Die 49. Tagung der GDM wurde von den drei Mathematikdidaktikprofessuren der Pädagogischen Hochschule FHNW ausgerichtet und fand in den Räumen der Universität Basel statt. Zur Vorbereitung der Tagung wurde ein wissenschaftliches Organisationskomitee gebildet, welchem außer den Leitenden der Professuren Dr. Torsten Linnemann und Dr. Christof Weber (beide PH FHNW) angehörten.

Wir bedanken uns bei allen, die zum Gelingen dieser Tagung beigetragen haben: beim Schweizerischen Nationalfonds und der Aebli-Näf-Stiftung für die finanzielle Unterstützung, bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, die uns die Ausrichtung der Tagung übertragen hat, dem Landesverband der GDM Schweiz für ihre Unterstützung bzgl. des Tags für Lehrerinnen und Lehrer, den Organisatoren der letztjährigen Tagung in Koblenz für viele wertvolle Hinweise, der Universität Basel für die Bereitstellung der Räume sowie dem (ehemaligen) Direktor der Pädagogischen Hochschule der Pädagogischen Hochschule, Prof. Dr. Hermann Forneck, für die Unterstützung auch gegen viele Widerstände. Besonderer Dank gilt der Firma Heimvorteil aus Freiburg für die Organisation der Tagung. Bei allen Teilnehmenden möchten wir uns ganz herzlich für ihr Kommen, ihr Mitwirken und den wissenschaftlichen Austausch bedanken.

Mit den Beiträgen in diesem Tagungsband hoffen wir, Ihnen interessante Einblicke in aktuelle Forschungsaktivitäten in der Mathematikdidaktik zu bieten.

Im Namen des Organisationsteams der Fachgruppe Mathematik der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz

Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten, Christine Streit

Basel im August 2015

Inhaltsverzeichnis

Band 2 — Seite 588 bis Seite 1174

6 Beiträge zu den Posterpräsentationen 1129

1 Grußwort

Rudolf VOM HOFE, Bielefeld

Grußwort des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung in Basel 2015

Sehr geehrte Ehrengäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Mitglieder der GDM,

ich freue mich, hier in Basel die 49. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Ich möchte bereits jetzt den Veranstaltern dafür danken, dass wir in dieser wunderbaren Stadt zu Gast sein dürfen. Meinen Eröffnungsvortrag möchte ich einem Kind dieser Stadt widmen, genauer gesagt einem Sohn dieser Stadt, der in vieler Hinsicht etwas mit uns und unserer Gesellschaft zu tun hat. Er war einer der ganz großen Mathematiker mit epochaler Bedeutung und – was vielleicht nicht ganz so bekannt ist – er war auch ein ausgezeichneter Lehrer und Didaktiker: Die Rede ist von *Leonhard Euler*. Ich möchte zunächst von seiner Baseler Zeit berichten, danach kurz sein umfangreiches Wirken in Berlin und St. Petersburg erwähnen und dann einen Blick auf die didaktische Seite dieses großen Mathematikers richten.

Eulers Basler Zeit

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Er war der älteste Sohn des Pfarrers Paul Euler und dessen Ehefrau Margaretha. Schon früh kam der junge Leonhard mit Mathematik in Berührung, und zwar durch seinen Vater. Weil dieser ein Schüler von Jacob Bernoulli gewesen war, – so schreibt Euler in seiner Autobiographie – „trachtete er mir sogleich die ersten Gründe der Mathematik beizubringen, und bediente sich zu diesem End des Christoph Rudolphs Coss,“ – also des Rechnens mit Unbekannten – „worinnen ich mich einige Jahre mit allem Fleiß übte"[1].

Leonhard Euler besuchte dann das Gymnasium am Münsterplatz, 11 Minuten zu Fuß von hier, am linken Rheinufer gelegen. Auch die höhere Schule kannte damals noch keinen systematischen Mathematikunterricht. Um Leonhard weiter zu fördern, engagierte sein Vater einen mathematikbegeisterten Privatlehrer, den jungen Theologen Johannes Burckhardt.

Dieser Förderung ist es zu verdanken, dass der 13-jährige Leonhard ab 1720 neben dem Gymnasium auch die Universität Basel besuchte und die Aufmerksamkeit des großen Johann Bernoulli weckte, der den dortigen Lehrstuhl für Mathematik innehatte. Euler hatte ihn zunächst um mathema-

[1] Euler 1767, PFA RAN: F. 136, op.1, Nr. 137, 124ob. Zitiert nach: Bredekamp, H. & Velminski, W. (Hrsg.): Mathesis und Graphe: Leonard Euler und die Entfaltung der Wissenssysteme, Akademie Verlag Berlin, 2010

tische Privatvorlesungen gebeten, doch Bernoulli hatte mit ihm etwas anderes vor, eine Art individuelles didaktisches Konzept für Hochbegabte: Er riet ihm, im Selbststudium einige anspruchsvolle mathematische Werke durchzuarbeiten und dann jeden Samstagnachmittag zu ihm zu kommen und mit ihm die aufgetretenen Schwierigkeiten zu diskutieren. Dieses Verfahren bezeichnete Euler später selbst als "gewiss die beste Methode ..., um in den mathematischen Wissenschaften glückliche Progressen zu machen"[2].

Und er machte äußerst glückliche Progresse. 1723 schloss er als 16-Jähriger mit dem Magistergrad das Grundstudium ab und immatrikulierte sich auf Wunsch seines Vaters zum Hauptstudium in der Theologischen Fakultät. Doch die Mathematik ließ ihn nicht mehr los. Den Plan, auch Theologie zu studieren, gab er zwei Jahre später auf. Umso mehr befasste er sich mit Mathematik und Physik. Dabei lernte er zwei junge Kollegen kennen: die beiden ältesten Söhne seines Professors, Nicolaus und Daniel Bernoulli. Diese wurden nicht nur seine wissenschaftlichen Begleiter, sondern gehörten mit der Zeit auch zu seinen engsten Freunden. 1725 bewarb sich Euler mit einer Abhandlung über den Schall in Basel um den Lehrstuhl für Physik, aber er war für die Universität Basel noch zu jung.

St. Petersburg und Berlin

Euler begann sich nun auch für andere Orte und Länder zu interessieren. 1727 bekam er Nachricht von seinen Freunden, den Bernoulli-Brüdern. Sie hatten zwei Jahre zuvor gut dotierte Professuren an der neu gegründeten Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg angenommen und konnten ihm dort nun ebenfalls eine Stelle verschaffen, allerdings als Adjunkt in der medizinischen Abteilung. Euler überlegte nicht lange und immatrikulierte sich in Basel rasch in der Medizinischen Fakultät. Doch schon einige Tage später begab er sich auf die lange und beschwerliche Reise an seinen neuen Wirkungsort, von dem er nie wieder in seine Heimatstadt zurückkehren sollte. Hier traf er auf Christian Goldbach, mit dem er jahrzehntelang in Briefwechsel stand. Seine medizinische Karriere dauerte nicht lange, 1730 erhielt Euler die Professur für Physik und bald danach eine für Mathematik.

1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen. Dort entstanden viele seiner berühmten Werke zur Analysis, Zahlentheorie und Algebra. Nebenbei musste sich Euler um den Bau von Kanälen, die Trockenlegung des Oderbruchs und die hydraulischen Systeme der Brunnenanlagen von Sanssouci kümmern. Letzteres führte schließlich zu einem Streit mit Friedrich dem Großen und zum Ende von Eulers Zeit in Berlin: Friedrich wollte mit einem

---

[2] Ebenda, S. 10

30-m-Springbrunnen die höchste Fontäne Europas in seinem Schlosspark haben, aber die Fontäne funktionierte nicht. Eulers Hinweise zur Behebung der Störungen wurden nicht akzeptiert, weil sie zu teuer waren. Aber mit reiner Mathematik allein ließen sich die Probleme leider nicht lösen.

Es gelang übrigens zu Friedrichs Lebzeiten nicht, die Fontaine zum Laufen zu bringen. Heute gehört sie zum Weltkulturerbe und funktioniert, und ich kann Ihnen – ohne der Mitgliederversammlung vorzugreifen – schon mal mitteilen, dass wir sie bald auf einer unserer nächsten Jahrestagungen besichtigen können.

Nach 25 Jahren in Berlin kehrte Euler 1766 zurück nach St. Petersburg, wo nun Katharina die Große als Kaiserin von Russland residierte. Sie schenkte ihm zur Begrüßung 8000 Rubel. Heute bekommt man dafür 111 Schweizer Franken, das sind etwa 112 Euro, damals konnte sich Euler dafür ein Palais direkt an der Newa kaufen. 1771 erblindete er vollständig. Trotzdem entstand fast die Hälfte seines Lebenswerks in der zweiten Petersburger Zeit. Leonhard Euler starb 1783 in St. Petersburg. 866 Arbeiten hatte er während seines wissenschaftlichen Schaffens publiziert. Er gilt als der bedeutendste Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Ein Großteil der noch heute verwendeten mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück: das Zeichen π, das Summenzeichen $\sum$, die Beschreibung von Funktionstermen durch f(x) und natürlich die Zahl e.

Euler als Didaktiker

Neben den zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten hat Euler auch Lehrwerke geschrieben, die eine deutliche didaktische Handschrift zeigen. Das berühmteste ist die "Vollständige Anleitung zur Algebra", ein Bestseller, der in 127 Sprachen übersetzt wurde und der bis ins 20. Jahrhundert immer wieder neu aufgelegt wurde. Nicht ganz so bekannt ist ein anderes Werk von Euler, die „Briefe an eine deutsche Prinzessin“. Es sind Lehrbriefe an eine Prinzessin von Brandenburg, von ihrem Vater in Auftrag gegeben. Sie residierte übrigens fast in Bielefeld, genauer im damaligen Reichsstift Herford, direkt an der Stadtgrenze von Bielefeld gelegen. Es geht in diesen Briefen um Philosophie, Physik und auch viel um Mathematik. In den behutsamen Unterweisungen dieser Werke kommen zahlreiche Prinzipen zum Ausdruck, die auch heute noch zu den Methoden guter Lehre gehören; z. B.:

- Erklärung eines Verfahrens zu nächst an einem einfachen und greifbaren Fall
- Anwendung auf komplexere, aber immer noch konkret nachvollziebare Beispiele

- Übertragung der dabei gewonnenen Erkenntnisse auf den allgemeinen Fall
- Überprüfung des Gedankengangs durch Umkehrung der Argumentation
- Vermeidung von Fehlvorstellungen durch das Thematisieren bekannter Irrwege

  Neben didaktischem Geschick spürt man beim Lesen dieser Briefe so etwas wie Vertrauen in die Erkenntnisfähigkeit des Lernenden und auch eine gewisse Freude, Verständnis zu wecken. Ich möchte dies nun anhand einiger Auszüge aus seinem „123. Brief an eine deutsche Prinzessin“ aufzeigen. Es geht um die Frage, inwieweit man eine Strecke in immer kleinere Teile zerlegen kann und was dabei herauskommt.

Euler beginnt mit der Feststellung, dass man eine gezeichnete Strecke leicht in zwei Teile zerlegen kann. Aber kann man auch kleine Strecken in beispielsweise 8 Teile zerlegen?

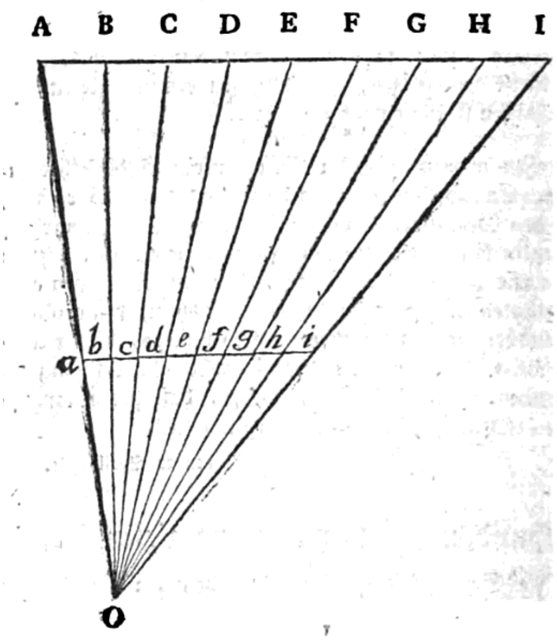


Abb. 1: Streckenteilung[3]

Um dies zu zeigen konstruiert er eine große Strecke, die zu der kleinen parallel ist und aus 8 Teilen besteht. Dann verbindet er die äußeren Punkte beider Strecken und erhält als Schnittpunkt dieser Verbindungen den Punkt O. Nun werden die Punkte der Streckenabschnitte der größeren Strecke mit O verbunden, was zu einer entsprechenden Teilung der kleinen Strecke führt. Seine dann folgenden Überlegungen möchte ich nun in Auszügen zitieren:

„Dieses Verfahren lässt sich immer wiederholen, die gegebene Linie *a i* sei auch so klein, wie sie wolle, und die Zahl der Teile werde so groß angenommen, als man wolle. Es ist zwar wahr, dass die Ausführung uns nicht erlaubt, hierin allzu weit zugehen; denn die Linien, die man zieht, haben immer einige Breite, wodurch sie nahe an ihrem Vereinigungspunkte zu-

[3] Leonhard Euler (1773): Briefe an eine deutsche Prinzessin, 1. Theil, Johann F. Junius: Leipzig, S. 180

sammenfließen, wie es Ew. H. in der gegebenen Figur nahe am Punkte O bemerken werden; aber es ist hier die Frage von dem, was an sich selbst möglich ist, und nicht von dem, was wir im Stande sind, auszuführen. In der Geometrie haben die Linien ganz und gar keine Breite und fließen daher niemals in einander; dass also ihre Teilung keine Grenzen haben muss.

Sobald mir Ew. H. zugeben, dass eine Linie in tausend Teile zerschnitten werden könne; so müssen Sie auch zugeben, dass sich dieselbe in zweitausend zerschneiden lasse, indem man jeden Teil wieder in zwei gleiche Teile zerschneidet; und aus eben dem Grunde muss sie in viertausend Teile und wiederum in achttausend können zerschnitten werden, ohne dass man jemals auf so kleine Teile käme, die sich nicht weiter zerschneiden ließen. So klein man sich eine Linie vorstellen mag; so ist sie immer in zwei Hälften teilbar, jede Hälfte wieder in zwei, und jede dieser Hälften von neuem in zwei, und so fort bis ins Unendliche. Wer der Ausdehnung diese Eigenschaft ableugnen würde, der würde behaupten müssen, dass man endlich so kleine Teilchen erhielte, die keiner weiteren Teilung fähig wären, und zwar deswegen, weil sie keine Ausdehnung mehr hätten. Gleichwohl müssen alle diese kleinen Teilchen zusammengenommen das Ganze ausmachen, durch dessen Teilung man auf sie geraten ist; und also würde folgen, da man die Größe jedes dieser Teilchen für nichts oder Zero angibt, dass mehrere Zero zusammengenommen eine Größe ausmachen, welches eine offenbare Ungereimtheit sein würde.

Denn Ew. H. wissen aus der Arithmetik, dass mehrere Zero addiert immer wieder Zero ergeben. Man sagt also in der Geometrie mit Recht, dass jede Größe ins Unendliche teilbar sei, und dass man nie mit einer solchen Teilung so weit kommen könne, dass eine noch weitere Teilung an sich selbst unmöglich würde. Aber man muss hier immer das, was an sich selbst möglich ist, wohl von dem unterscheiden, was wir im Stande sind auszuführen. Unsre Ausübung hat allerdings nur sehr enge Grenzen. Wenn man, zum Beispiele, einen Zoll in tausend Teile zerschnitten hat; so sind diese Teilchen schon so klein, dass sie unserem Auge entwischen, und eine noch weitere Teilung würde uns sicher unmöglich sein. Aber man darf nur diesen tausendsten Teil eines Zolls durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachten, das zum Beispiele etwa tausendmal vergrößert, so wird uns jeder Teil wieder so groß erscheinen, als der ganze Zoll unserem bloßen Auge erschien. Es lässt sich also die Möglichkeit einsehen, jeden dieser Teile wieder in tausend Teile zu zerschneiden; und der nämliche Schluss lässt sich immerfort wiederholen, weil die Gründe immer die selbigen bleiben.“[4]

[4] Ebenda, S. 181 ff. Die Diktion einiger Wörter wurde der heutigen Schreibweise angepasst.

Euler schrieb diesen Text im Jahr 1762, die Zitate stammen aus der zweiten deutschen Auflage von 1773. Wie aktuell sind diese Gedanken? Haben sie noch etwas zu tun mit dem, was mathematische Schulbildung heute ist oder sein sollte? Sind dies Inhalte für eine aristokratische oder bildungsbürgerliche Erziehung oder kann das Nachdenken über Prozesse, die ins Unendliche führen, auch heute bei Schülerinnen und Schülern Interesse, Staunen und Faszination wecken, z. B. bei Gesamtschülern aus Gelsenkirchen? Ich glaube schon, und viele Unterrichtsbeispiele können dies bestätigen. Und ich denke, dass wir auch heute bei der Umsetzung kompetenzorientierten Unterrichts diese Art des Denkens, die mit einer gewissen Grenzerfahrung verbunden ist zwischen dem was real gegeben und dem was gedanklich möglich ist, nicht zu kurz kommen lassen sollten. Denn sind es nicht letztlich mathematische Erfahrungen dieser Art, die viele von uns selbst dazu gebracht haben, sich nach der Schule mit Mathematik zu befassen? Wenn ich überlege, was mir Euler nach dem Lesen dieser interessanten Briefe sagt – oder sagen würde –, dann ist es mit einem leicht verschmitzten Lächeln vielleicht Folgendes:

„Vergesse er nicht, dass Berechnungen zur Ermittlung des günstigsten Hundefutters, des besten Sparkontraktes oder des größten Vorteils beim Einkaufe nicht alles sind, was die mathematische Bildung der Jugend verlangt. Bedenke er, dass im Geiste gar vieler Discipuli ein Wunsch nach Erkenntnis schlummert, für den die Kunst der Mathematica ein trefflich Spielfeld und ein Brunnen der Erkenntnis ist.“[5]

Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche und spannende Tagung. Herzlichen Dank!

Rudolf vom Hofe

1. Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

[5] Hierbei handelt es sich nicht um ein Originalzitat Eulers, sondern um einen retrospektiv-visionären Gedanken, der den Vortragenden nach dem Genuss Badischen Weines überkam, der jedoch ungeachtet dessen demselben auch am nächsten Morgen noch vortragswürdig erschien. Für den Fall möglicher Missverständnisse bittet er um Nachsicht und Vergebung.

2 Hauptvorträge

Markus CSLOVJECSEK, Brugg; Samuel INNIGER, Brugg

Sound Learning in Math Classrooms: How Children Teach us to Teach

Sound and motion highly comply with the way young children learn and with their unremitting inquiry of function and coherence. Many important steps in children's ways of exploring the world are anchored in the manner they deal with sound and motion. Even later on, when they grow up, musical activity is nearly always experience-related and connected with cognitive processes. Math textbooks use visual art tables and specific other learning materials to involve pupils in mathematical situations. However, as a rule they do not encourage activities with sound or motion. In this paper, we discuss why and how musical (sound), kinaesthetic (motion), and tactile (touch) impulses are of value to learning and show how we further intend to develop this approach in a transdisciplinary EU Comenius Project.

1. Is Math a Sounding Discipline?

Since classical antiquity, music and mathematics have been described as a wonderful pair. However, the valuable relation between the two disciplines has been associated neither with primary school mathematics nor with the topics of music instruction at school. Topics of an interdisciplinary discussion have rather been questions of harmonics, acoustics, the digitalization of sound, the pitch of instruments, or the mathematical calculability of composition and interpretation. Obviously, domains dealing with these topics do not have much in common with the curriculum of a primary school.

Our interest is in low-level connections between mathematics and music (Lakoff, & Núnez 2000). It originates in observations made in musically active classrooms. Based on these first-hand observations, our interest was not directed to the so-called *transfer effects*[6] or to collect, use or produce *Songs for Teaching*[7]. Surely, counting or reciting formulas by singing songs may be fun for children and in some situations, notably as mnemonics, such activities may be helpful. However, the relations we had observed

---

[6] Superficial interpretations of findings in brain research cause short circuits such as "music makes you smart" and prepares the field of simply using music as a learning machine (Jäncke 2008).

[7] Songs for Teaching are educational songs, chants, and rap songs to teach content across the curriculum to students of all ages. There are numerous materials developed and sold by professional providers over the last few years. E.g. http://www.songsforteaching.com

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

in the classrooms went much beyond this utilitarian use. They include at least shared conceptual structures and strategies, “functionally important in each domain” (Bamberger (2000).

2. Classrooms with Enhanced Music Education - Enable Transformative Practice Zones

The field of our first observations was a Swiss schoolproject in the late nineteen eighties. The long-term development of the project ‘*Musik macht Schule*’[8] goes along with Bresler’s (2003, 2004) suggestion of Transformative Practice Zones (TPZ) as “spaces as well as ways of interacting and thinking, where the participants are touched and often transformed in the process.” In the starting phase of the project, primary school teachers decided to teach five hours of music a week with their classes. Despite the correspondingly reduced hours in mathematics and languages, the curriculum remained unchanged for all subjects. No additional homework was allowed. After two years, the competences of the experimental group in the time-shortened subjects did not deviate from those of the control group (Weber, Spychiger & Patry 1993). This is tosay that in this setting, the reduction of 20% of math lessons did not have a negative impact on the measured output in maths learning. In a second phase, other astonishing effects where observed (Spychiger 1995, 2001; Cslovjecsek 1997; Cslovjecsek, Spychiger 1998): it became obvious that pupils and teachers started to link music with other subjects. The daily work with music soon urged out of its topical borders and the musical perspective offered interesting practices and tasks in the teaching and learning of languages, mathematics, and general studies. Students and teachers realized that many topics and methods in school were basically full of sound and potential for musical activities.

In the same time, mathematics education in Switzerland has developed in the direction of exploratory learning (Dewey 1934), the recognition of different learning paths (Hengartner 1999), the “concentration on fundamental ideas” and the “turning away from instruction in tiny steps in favour of a conceptual entireness of the learning situation” (Selter&Spiegel 1997; Wittmann 1998). The path from perception to mental conception is understood as process that also depends on the learner. It consciously comes with individual and social interpretation and requires openness, time, and space for creativity. To facilitate the postulated learning processes, specific materials have been introduced into the math classroom. According to

[8] Swiss project on „Schools with Enhanced Music Education”

Krauthausen (1998), criteria for learning materials for mathematics are as follows:

> […] adequate representation of the structure of the mathematical facts which are to be taught; multi-purposed possibilities of usage; possibility of continuation of the started learning-process; simple handling and simple structure; easy possibility of transfer to graphical representations; easy practicability of mental operations; potential of discovering individual and differentiated strategies for finding solution and the social interexchange in the process; continuous availability for all students and demo version for the class; low price, stability, and environmentally harmless material.

Music, sound, and motion highly comply with these criteria, but - perhaps due to the lack of tradition of a corresponding approach - they hardly have been considered working material or tools for teaching and learning. If at all, they appeared in educational material rather coincidentally and as a means of decoration.

3. Creative Potential of an Integrated Approach in Music Education

There is no justification for the limitation of educational material to verbal, visual, haptic, and mathematically-abstract approaches; acoustic (sound and music), kinaesthetic (motion), and tactile (touch) approaches are also of high value, especially with respect to acting and experiencing of primary school age children. The integration of these types of experiences in mathematical instruction has as good as no tradition – but it seems to have a great potential in several aspects:

Children's Thinking Paths: Sound and movement give access to important active learning paths of children in the classroom; insight of teachers in unexpected thinking paths of their pupils is promoted (Gardner 1991). As shown in *Snappings, Clappings and the Representation of Numbers* (Cslovjecsek, Linneweber-Lammerskitten 2011), children's thinking paths do not follow disciplinary traditions and borders.

Music Becomes a 'Language': When understanding sound and music simultaneously as a tool for teaching and learning, children assist in further developing sound and movement as an additional medium of teaching. When integrated in the curriculum, musical thinking and acting becomes a timeline in class for pupils and their teachers. It turns into a mode of operation and a starting point for further projects. By means of this double implementation of music in education, its potential takes on lasting effects: a group of the aforementioned third graders was working for a longer period of time on finding out the total number of possibilities combining 222-patterns with given body percussion movements. In the music class, they started composing instrumental music based on 222-patterns and became interested in listening and discussing compositions of *Philip Glass*[9]. More and more they understood themselves as experts in 'Clapping Music'.

New 'Moving Rooms' in the Conjunction of Math and Music: While analyzing such classroom activities in today's mathematics and music curricula, we realized that both are approached in a highly desirable way. When integrating musical activities in a math classroom, it is important to know about the disciplinary goals addressed. Many learning opportunities are simultaneously mathematical and musical (Bamberger 2000) and very likely linked to language learning and visual competencies as well. Furthermore, there are goals in understanding learning and design processes as well as dynamics in individuals and groups. In the mentioned example, the pupils' intervention changed the focus away from the representation of natural numbers by the positional notation system (i.e. decimal system) to a game with musical patterns and then back to the relevance of patterns and orders for the representation of numbers.

Learning in Cooperation: Human beings flourish, learn, and connect more when they are cooperating as opposed to competing or working in an isolated fashion (Hertz-Lazarowitz & Miller, 1992; Sharan, 1994; Slavin, 1996). In order to manage cooperative learning processes, teachers need to find approaches with less teacher-centred settings, open to students' needs and promoting initiative, providing opportunities and space for team processes and unexpected product results.

Promoting Innovation and Flexibility: The ability to recognize and compare forms and complete patterns based on their qualitative properties is an important prerequisite for creating arithmetical and geometrical theories. In fact, mathematics can be understood as the science of pattern (Devlin, 1994). The confrontation of the mathematical content and the processes with musical resources offers a great creative potential:

- Acoustic patterns are the basis of different types of music: rhythmic accompanying patterns (drums, keyboard, guitar, bass) in rock, pop and folk music, sound patterns (sampling technique) in techno music, and melodic patterns in minimal music. All types of (musical) expression have a form. This fact plays a central role both in the reception (perception), the production (composition), and the reproduction (interpretation) of music. Examples of this include the prelude, interlude, and the cadence in the arrangement of a song or in the setting of poetry to mu-

[9] Philip Morris Glass (*1937) is considered one of the most influential composers of the late 20th century. He described himself as a composer of 'music with repetitive structures'.

sic, the sequence of refrains and verses in a strophic song, the rhyme scheme in a text, the construction of a melody, and the rhythmic structure of the movement processes in sports.

- Musical patterns are audible and can be written down: they can be heard in tone colors, in time structure, in volume ratios, in pitches or harmonic sequences. Often, several different patterns on different levels can be distinguished simultaneously. However, the ear is directed towards singular aspects.
- Movement sequences and patterns are perceptible: they are palpable and visible. Here, the dimensions of the expression are space, time, and energy. They can be transformed into sound as well as be written down. When working with body percussion, sound and movement merge in such a way that movement patterns simultaneously produce acoustic patterns and vice versa.
- Audible material is open to be adapted based on individual prerequisites: The material for musical work with shapes and movement ranges from the simplest pattern (walking, clapping, etc.) to very complex forms. Based on the teaching situation, it is the teacher's task to invent meaningful variations and to create prerequisites for dealing with simpler or more complex forms. Surprising and interesting ideas often originate from the children themselves.

Learning Beyond Disciplines: Looking at teaching and learning situations based on musical activities, the focus soon goes beyond the disciplinary learning and takes challenging aspects of learning at school into account:

- Heterogeneity: Not all children find it equally easy to create serial sequences. It is advisable to work patiently with short sequences, repetitions, and variations until the level can be raised.
- Responsibility: The basis for music making is to be with one self and with the others simultaneously. In order to make one's own contribution at the correct time, it is essential to empathize with the other contributors.
- Creativity: Finding own solutions within an agreed framework awakens creative abilities. Creativity is further developed by the recognition and discussion of alternative solutions found by others.
- Self-assurance: Self-assurance of a child can be enhanced when it has to produce a pattern, present a solution, or act out a pattern and stay with it whilst other children perform a different one.

- Self-efficacy: Children learn that their ideas can be important contributions for the learning process. In this way, they understand that their own thinking and acting can be meaningful for learning.

Stimulating Teachers' Curiosity: As described before, integrating musical activity in other school subjects is an innovative and creative approach and a challenge for teaching and teachers, even when the proposed activities do not presuppose highly developed musical abilities. In a small field study in Switzerland, we proposed an activity about listening to the sound of falling coins with three different levels of difficulty to be chosen by the teacher depending on the capabilities of the class. Answering a questionnaire, the involved teachers told us that they were very surprised and happy about such easy ways to include listening abilities into math's lessons. They had been impressed about the children's attention and the ideas coming up after working with. Some teachers asked the children to invent and describe their own instructions for similar tasks. Often, in spite of not being taught anymore, the input lasted for a longer period in the agenda of the class. It seems that even teachers with high interest in both subjects are not putting into practice the simplest possibilities to incorporate aspects of music in their math lessons (Cslovjecsek 2003).

Discovering New Landscapes: While discussing shared learning situations with colleagues from other disciplinary backgrounds or other expertise, we learn a lot; as musicians, as mathematicians, and as teachers. Based on the collaboration and linked knowledge in our example (Cslovjecsek, Linneweber-Lammerskitten 2011), we embarked on the challenging idea to express numbers by means of music:

The sign-value notation of numbers opens possibilities for numerous variations of representing the same number – some of these will be aesthetically and /or mathematically interesting, others boring. [...] What would be a good musical representation that is easily understood and captures the central idea of a positional system of a given basis n?

4. How to Proceed

In the EU-funded Comenius Project "EMP-Maths: Sounding Ways Into Mathematics", we discuss interrelations, similarities, and differences of mathematics and music learning. We are aware of the fact that integrated teaching and learning within a school setting is a very challenging goal. Crossing the borders of disciplines is a complex problem. Moreover, this complex problem should be solved in a transdisciplinary way, which means: action-centered, participative, and interdisciplinary (Klein 2002).

Based on realistic classroom activities (action-oriented approach), we work together with classroom teachers and specialists in didactics and education (participatory approach) from the fields of mathematics and music (interdisciplinary approach).

In a first step, a practice-oriented description of the theoretical background was elaborated. The state-of-the-art papers from the involved countries (Hilton et al. 2015) show that mathematics and music are mostly thought of as separate disciplines. Nevertheless, in every country, we observe evidence for projects and suggestions for interdisciplinary teaching and learning. We also see, however, that teachers feel inadequately trained to teach the two subjects in an interdisciplinary way. Therefore, in order to stimulate the teachers' creativity and the search for new "moving rooms" in the conjunction of mathematics and music as described above, we work on an interdisciplinary guidance document, the Teacher Handbook. The elaboration process entails meetings and creative workshops in different European cities. We intensively discuss the content of the Handbook, experiment new approaches, and test proven practice activities.

After the completion of the necessary theoretical resource base, the project is now entering the testing and dissemination phase. In Continuing Professional Development courses, we present, perform, discuss, and further develop the material with teachers from all across Europe. The project works intensively with online platforms, which will feature a collection of good practice examples and possibilities of user-to-user interactions. Materials will be published continuously on www.emportfolio.eu

Literatur

Bamberger, J. (2000). Music, Maths and Science: Towards an Integrated Curriculum. Journal for Learning Through Music, 32–35.

Bresler, L. (2003). Out of the trenches: The joys (and risks) of cross-disciplinary collaborations. Council of Research in Music Education, 152, pp. 17-39.

Bresler, L. (2004). Crossing the Borders of Music and Arts Education: The Challenge, the Danger and the Opportunities. In F. Niermann, & C. Wimmer, (Eds.). Musik lernen – ein Leben lang (pp. 274-282). Wien: UE.

Cslovjecsek, M. (1997). Zur Frage der Zeichensysteme in der Praxis des Unterrichtens . In: Gymnasium Helveticum. Aarau: Sauerländer, Vol. 51. Jg., Nr. 3; pp. 134-142.

Cslovjecsek, M., Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Snappings, Clappings and the Representation of Numbers. In: The New Jersey Mathematics Teacher, 69 (1), 10-12.

Cslovjecsek, M., Spychiger, M. (1998). Mus ik oder Mus ik nicht? - Musik als Unterrichtsprinzip: Eine Unterrichtshilfe für Lehrpersonen der Volksschule. Hölstein: Verlag SWCH. Retrieved from http://www.creafon.com/content/mus_ik.php

Cslovjecsek, M. (2001/2004). Mathe macht Musik - Impulse zum musikalischen Unterricht mit dem Zahlenbuch (Vol 1-3), Zug: Klett und Balmer. Retrieved from http://www.mamu.ch/en

Cslovjecsek, M. (2003). Mathe macht Musik – ein alter Zugang zur Welt der Zahlen neu entdeckt. In Sache Wort Zahl – Zeitschrift für Grundschulpädagogik Heft 51, (Jg. 31 pp. 48-50). Köln: Aulis-Verlag.

Devlin, K. (1994). Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe. New York : Scientific American Library.

Dewey, J. (1934). Art as experience. New York: Capricorn Books.

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1991). The unschooled mind: How children think and how schools should teach. New York: Basic Books.

Hengartner, E. (1999). Mit Kindern lernen. Zug: Klett und Balmer.

Hertz-Lazarowitz, R., & Miller, N. (Eds.). (1992). Interaction in cooperative groups: The theoretical anatomy of group learning. Cambridge: Cambridge University Press.

Hilton, C. et al. (2015). A review of Literature. European Music Portfolio: Sounding Ways Into Mathematics. Online Publication. www.maths.emportfolio.eu

Jäncke, L. (2008). Macht Musik schlau? Bern: Huber Verlag.

Krauthausen, G. (1998). Lernen – Lehren – Lehren lernen. Zur mathematikdidaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Lakoff, G. & Núnez R. E. (2000). Where mathematics comes from – How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Düsseldorf: Klett

Sharan, S. (Ed.) (1994). Handbook on cooperative learning methods. Westport: Greenwood Press.

Slavin, R. E. (1996). Research for the future, research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. Contemporary Educational Psychology, 21, 43-69.

Spychiger, M. (1995). Mehr Musikunterricht an den öffentlichen Schulen? Entwicklung eines zeichentheoretisch orientierten Begründungsansatzes als Alternative zur aussermusikalischen Argumentation. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Spychiger, M. (2001). Understanding musical activity and musical learning as sign processes: Toward a semiotic approach to music education. The Journal of Aesthetic Education, 35(1), 53-67.

Weber, E. & Spychiger, M. & Patry, J.-L. (1993). Musik macht Schule. Biographie und Ergebnisse eines Schulversuchs mit erweitertem Musikunterricht. Essen: Die Blaue Eule.

Wittmann E.C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. Beiträge zur Lehrerbildung, 16(3), 329-342.

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Duisburg-Essen

Die Rolle der Mathematik in der Mathematikdidaktik

Es gibt verschiedene fachliche Perspektiven, aus denen ein mathematischer Unterrichtsgegenstand betrachtet werden kann. Sie sind je für sich wichtig und erst ihr Zusammenspiel erzeugt das rechte Hintergrundwissen für den Unterricht. Die folgenden Ausführungen möchten diese Auffassung am Beispiel der Bruchrechnung exemplarisch entfalten.

1. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt

Fachbücher zum Aufbau des Zahlensystems (z.B. Kramer 2008) behandeln Brüche im Rahmen der formalen Konstruktion des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen aus dem Integritätsring $(\mathbb{Z},+,.)$ der ganzen Zahlen. Das geschieht in folgenden Schritten:

Für Paare ganzer Zahlen wird eine Äquivalenzrelation definiert:

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c \ \ (a,c\in\mathbb{Z};\ b,d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}).$$

Die Äquivalenzklasse $[a,b]$ des Zahlenpaares (a,b) erhält die Bezeichnung $\frac{a}{b}$. Für die so gebildeten Brüche werden einen Addition und eine Multiplikation definiert:

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Dabei ist sicherzustellen, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind, dass also die Operationen unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten durchführbar und insofern mit der Klassenbildung verträglich sind.

Dadurch entsteht die algebraische Struktur eines Körpers, in den man die ganzen Zahlen vermöge der umkehrbar eindeutigen Zuordnung

$$a\mapsto[a,1]=\frac{a}{1}, \qquad a\in\mathbb{Z}$$

einbetten kann. Somit ist es sinnvoll, die ganzen Zahlen als Teil der rationalen Zahlen zu betrachten.

Diese Darstellung entfaltet ein Thema der Schulmathematik vom „höheren Standpunkt aus“ und verfährt damit im Sinne der Programmatik Felix Kleins (Klein 1908). Sie verwendet die in der Hochschulmathematik übliche Sprache und Symbolik der Mengen, Relationen und Verknüpfungen mit der zugehörigen Semantik (vgl. Wille 2005, S. 6). Inhaltlich nimmt sie einen Standpunkt ein, der sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts herausgebildet hat. Dabei wird der Begriff der Zahl rein formal ohne Bezug

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

auf den Begriff der Größe gefasst und die Gesetze des Operierens mit Zahlen werden in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt (vgl. Epple 1999).

Es handelt sich also um einen Wissensbestand, der aus dem Streben nach einem konsistenten und lückenlosen Theorieaufbau restrukturiert wurde. Dabei sind die Spuren einer langen Entwicklung verwischt und alle Realitätsbezüge abgestreift. Vielfach hat man geglaubt, diese Sichtweise sei als fachliches Rüstzeug zumindest für Lehrkräfte an Gymnasien bereits ausreichend. Jedoch ergeben sich ursprüngliche Zugänge hieraus nicht von selbst, was Martin Wagenschein in einem Bild sinngemäß so ausdrückte: Wer oberhalb der Baumgrenze lebt, den sollte man nicht nach Waldwegen fragen (Wagenschein 1983, S. 83).

Allerdings muss man auch hier zwischen hinreichenden und notwendigen (Wissens-)Voraussetzungen unterscheiden. Notwendig oder zumindest wünschenswert ist die entfaltete Sichtweise, weil sie Lehrkräften eine fachliche Langzeitperspektive und eine Art „Kompass" für Auffassungen und Gepflogenheiten aus Sicht der Fachwissenschaft vermittelt. Der strenge Aufbau des Zahlensystems ist ein Beispiel für eine „deduktive Welt eigener Art" (Winter 1995), in der die Objekte des Denkens in ein logisch konsistentes Theoriegebäude mit einer minimalen Ausgangsbasis eingepasst werden. Die einzelnen Schritte vermitteln Sensibilität für das „Getriebe einer mathematischen Theorie" (Toeplitz 1928, S. 6). Ein entsprechendes Bewusstsein hat Auswirkungen auf das Erklärungsverhalten im Unterricht. Bekanntlich haben Schülerinnen und Schüler der Klasse 6 zunächst wenig Verständnis dafür, dass ganze Zahlen auch als Brüche aufgefasst werden sollen. Lehrkräfte, die den Einbettungsgedanken verstanden haben, können an passenden Stellen immer wieder zeigen, welche Vereinfachungen der begrifflichen Beschreibung und der formalen Formulierung von Regeln durch die professionelle Sicht möglich werden. Lehrkräfte, die einen Sinn für die Konsistenz von Definitionen haben, werden ihre Schülerinnen und Schüler bei der Behandlung von Potenzen mit rationalen Exponenten auf das Problem der Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten hinweisen.

Die Beschäftigung mit einer fachlichen Ebene, die oberhalb des mathematischen Schulstoffes liegt, bringt noch einen weiteren wesentlichen Ertrag für den Unterricht, nämlich dort, wo elementarmathematische Themen als Grundlage für die Konstruktion von gehaltvollen Aufgaben dienen können. Ein solches Beispiel sind die Farey-Brüche (Müller, Steinbring & Wittmann 2004, Humenberger 2009).

Die geordnete Folge der gekürzten Brüche zwischen 0 und 1 mit Nennern $\leq n$ heißt die n-te Farey-Reihe F_n. Zwischen den Brüchen einer Farey-

Reihe bestehen interessante Beziehungen. Zum Beispiel ist die Differenz zweier benachbarter Brüche ein Stammbruch, und zwischen zwei Brüchen mit gleichem Nenner und sich um 1 unterscheidenden Zählern liegt stets ein Bruch mit kleinerem Nenner.

Elementarmathematisches Wissen dieser Art ist Quelle für Aufgaben zum produktiven Üben (Winter 1984) und für substantielle Lernumgebungen (Wittmann 2012). Dazu brauchen Aufgabenkonstrukteure einen reichen elementarmathematischen Fundus. Wittmann entfaltet, inwiefern Elementarmathematik ein substantieller Bestandteil mathematikdidaktischen Wissens sein sollte (Wittmann 1989).

2. Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen

Eine genetische Sicht auf mathematische Unterrichtsinhalte skizziert Freudenthal in der folgenden Grundphilosophie:

„Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind, and, as far as this description is concerned with the learning process of the young generation, it is didactical phenomenology, a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind." (Freudenthal 1983, S. ix)

In dem entsprechenden Kapitel über Brüche entfaltet der Autor, dass Brüche vielfältige Erscheinungsformen haben.

Bruch als Anteil: Dieser Bruchzahlaspekt steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Verb „brechen“: Um gerecht teilen zu können, wird die Einheit in Stücke gebrochen. Beispielsituationen können handelnd mit konkretem Material erfahren werden. Dabei kann das Bezugsganze in vielerlei Formen und Beschaffenheit auftreten: es kann zusammenhängend oder diskret, begrenzt oder unbegrenzt sein, und die Anteile können regelmäßige Muster bilden oder unstrukturiert bleiben.

Bruch als Vergleichsinstrument: Beispiele für diese Erscheinungsform sind Aussagen zum Größenvergleich: „Stab A ist $\frac{5}{6}$ mal so lang wie Stab B.“ oder: „Im Raum sind befinden sich $2\frac{1}{2}$ mal so viele Erwachsene wie Kinder.“ In diesen Situationen wird nichts „in Stücke gebrochen“, sondern Objekte werden in Bezug auf ihre Größe in Beziehung gesetzt. Brüche haben hier die Bedeutung von „ratio“ als Ausdruck von Zahlenverhältnissen. Dieser Bruchzahlaspekt ist abstrakter als der Anteilaspekt und indiziert Kontexte, in denen gemischte Zahlen sinnvoll werden.

Bruch in einem Operator: Diese Auffassung resultiert aus einer übergeordneten Sicht, die viele Erscheinungsweisen umfasst. Den Bruch als Maß-zahl, als Punkt auf einer Zahlengeraden und schließlich als rationale Zahl erhält man durch Anwenden des Bruchoperators auf eine Einheit.

Eine solche phänomenologische Betrachtung erzeugt ein Bewusstsein für die Vielfalt der Aspekte, die ein mathematischer Begriff haben kann, für die Spezifika der einzelnen Aspekte mit ihren jeweiligen Anforderungen und Abstraktionsniveaus wie auch für die innere Gemeinsamkeit, um derentwillen sie unter einen gemeinsamen Begriff fallen. Sie liefert Grundlagen für natürliche Lernanlässe und Anhaltspunkte für eine genetisch orientierte Unterrichtsplanung.

Freudenthals Erörterung der vielfältigen Erscheinungsformen von Brüchen ist bereits begrifflich strukturiert. Die Bezeichnungen „Anteil", „Vergleichsinstrument" und „Operator" sortieren die Verwendungsweisen nach Handlungsschemata bzw. mentalen Modellen an der Schnittstelle zwischen mathematischen Konzepten und Situationen, die gedanklich organisiert werden sollen. Werden solche Schemata zu aktivierbaren Vorstellungsgehalten, die zwischen Realität und Mathematik vermitteln, können sie ein lernendes Individuum befähigen, einen mathematischen Begriff inhaltlich zu deuten und damit auch anzuwenden. Zur näheren theoretischen Einordnung und zur didaktischen Bedeutung des Konzeptes der „Grundvorstellungen" sei auf (vom Hofe 1995, 2003) verwiesen.

Grundvorstellungen können auf verschiedenen Stufen mathematischer Denkentwicklung eine Rolle spielen. Elementare Grundvorstellungen sind nah an der Ebene konkreter Handlungen wie die Anteilsvorstellung zum Bruchzahlbegriff. Auf einem elaborierteren Niveau können Grundvorstellungen auch bereits mathematische Begriffe und Operationen einbeziehen, so etwa in der grundlegenden Charakterisierung des prozentualen Wachstums durch folgende Eigenschaft: „Zu gleichlangen Zeiten gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor." (Kirsch 1976).

3. Epistemologische Analyse von Unterrichtsinhalten

In den Abschnitten 1 und 2 wurden mathematische Unterrichtsinhalte von entgegengesetzten Perspektiven aus betrachtet. In der langen Spanne zwischen ursprünglichem Verstehen und exaktem Denken sind für die einzelnen Unterrichtsgegenstände fachlich-epistemologische Analysen im Detail notwendig. Das sei am Beispiel des Problems „Anteil vom Anteil" genauer verdeutlicht. Ausgangspunkt kann ein Sachproblem sein:

„Im Land X gehen nur ungefähr zwei Drittel der Sechsjährigen in die Schule und besuchen die erste Klasse. Der Rest der Kinder muss arbeiten. Bis zur 5. Klasse bleiben von den Schulkindern nur ungefähr drei Viertel in der Schule. Zeichne ein Bild zu dieser Situation. Wie groß ist der Anteil der Kinder, die bis zur 5. Klasse eine Schule besuchen? “ (Glade 2014)

Aus didaktischer Sicht sind zu diesem Problem folgende Fragen interessant: Welche Möglichkeiten gibt es, in einer 6. Klasse einen solchen Zusammenhang zu erarbeiten? Welche Begründungs- und Sinnbasis kann den Lernenden hierfür angeboten werden? Welche Beziehungen zwischen mathematischen Begriffen, Verfahren und realen Gegebenheiten werden dabei entwickelt? Welcher Art Denkprozesse werden dabei angestoßen? Das sind Fragen zur Natur des Erkenntnisgegenstandes Mathematik und zur Struktur der Prozesse mathematischer Erkenntnis (Steinbring 2009).

Die nachfolgende Abbildung stellt beispielbezogen ein in Unterrichtswerken gängiges Verfahren dar, einen Anteil von einem Anteil zu bestimmen, und gibt Anlass, dazu eine formale Regel zu erarbeiten.

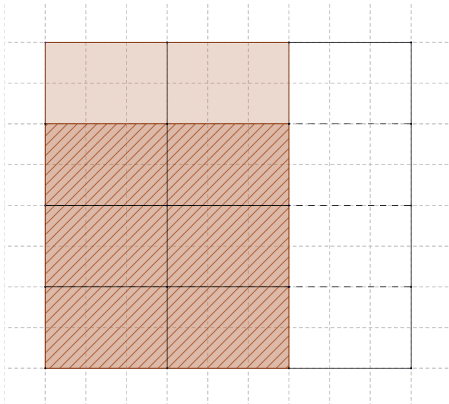


Abbildung: ⅔, davon ¾

Der Zusammenhang wird hier nicht in der Sachsituation selbst erarbeitet, sondern mit Hilfe eines strukturellen Diagramms und damit in einem bereits theoretischen, idealisierten Kontext. Dieser Kontext stellt für die Schülerinnen und Schüler einen neuen und eigenständigen Lerngegenstand mit einem eigenen Problemgehalt dar. Auch eine bereits fertige Darstellung dieses Typs ist nicht selbsterklärend. Sie muss in der Dynamik von Ablesen und Hineinlesen entschlüsselt und richtig gedeutet werden. Dabei spielt der Wechsel der Bezugseinheit eine wichtige Rolle.

Um solche Darstellungen selbst auf Rechenpapier entwickeln und mit Sinn füllen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler ein geeignetes Handlungsschema entwickeln. Sie müssen einsehen, welche Ökonomie in der Verschränkung von vertikalen und horizontalen Einteilungen steckt, das Rahmenrechteck dafür günstig wählen, die Größen von Zielrechteck und Ausgangsrechteck unter Verwendung der Unterteilung aufeinander beziehen und dabei die Passung zwischen Arithmetik und Geometrie erkennen und nutzen.

Der folgende fiktive Unterrichtsdialog zur Aufgabenerarbeitung zeigt, welche Probleme entstehen können, wenn eine Lehrkraft diese Anforderungen unterschätzt:

L:	Was für ein Bild wollen wir zeichnen? – Anja!
A:	Ein Kreisbild.
L:	Jaa … Gibt es noch einen anderen Vorschlag? – Sven?
S:	Ein Rechteck.
L:	Ein Rechteck! Das wollen wir jetzt mal zeichnen. *Zeichnet ein Rechteck an die Tafel, 9 Kästchen breit, 8 Kästchen hoch.*
L:	So, wer zeichnet jetzt ⅔ ein? – Markus.
M:	*Geht an die Tafel, zeichnet (vertikale) Drittelstreifen, schraffiert zwei davon.*
L:	Wie können wir nun ¾ von den ⅔ zeichnen? – Irene!
I:	Die Streifen nochmal unterteilen.
L:	Ja, machst du das mal vor?
I:	*Geht zur Tafel, setzt an, die Senkrechteinteilung zu verfeinern.*
L:	Mach‘ es lieber quer, dann kann man es hinterher besser erkennen. *(Deutet die Richtung an).*
I:	*Zeichnet Querlinien.*
L:	Rahmst du jetzt bitte noch die ¾ ein?
I:	*Zeichnet Rahmen.*
L:	So, und wie viel ist das jetzt vom Ganzen?

Auf drei wesentliche Charakteristika dieses Unterrichtsdialogs sei hier verwiesen:

(1) *Verwechseln von Fachstruktur und Lernstruktur:* Der Gedankengang ist von der Lehrkraft in seinen wesentlichen Etappen vorstrukturiert. Die Schülerinnen und Schüler können nur innerhalb einer vorgeordneten Fragenkette auf die jeweiligen Teilaspekte reagieren. Die meisten von ihnen werden auf diese Weise kein eigenständiges Handlungsschema entwickeln können. Diese Art der Unterrichtsführung verkennt, dass Lernen nicht als linear ablaufende Entwicklung, sondern als Knüpfen eines Wissensnetzes erfolgt (Wittmann 2012).

(2) *Interaktionsmuster:* Es gibt in dem Dialog Stellen, in denen die „Interaktionslogik die Sachlogik überdeckt“ (Voigt 1984). Dort werden Beiträge nur durch fein abgestimmte Reaktionen wie „Jaa, aber ...“ bewertet, ohne dass auf der Sachebene geklärt wird, warum eine Antwort aufgegriffen oder verworfen wird oder warum sie richtig oder falsch ist. Es handelt sich um Interaktionsmuster, die oft unbewusst ablaufen und gute didaktische Absichten konterkarieren können (ebd.).

(3) *Implizitheit von Lerninhalten:* Es gibt in dem Dialog Stellen, in denen Zusammenhänge nur angedeutet, aber sprachlich nicht vollständig explizit

gemacht und bedeutungstragende Elemente nicht ausgewiesen werden. Das Procedere verfehlt dann die Entwicklung einer für eine elaborierte Erklärung wichtige „Bildungssprache“ und damit auch die inhaltliche und strukturelle Klarheit der sachlichen Entwicklung (Schreiber et al. 2015).

Demgegenüber bewirken epistemologische Analysen eine Bewusstseinsschärfung. Sie helfen, den Referenzkontext als eigene sachliche Anforderung ernst zu nehmen, diesen in seinen Einzelheiten und deren wechselseitigem Aufeinander-bezogen-Sein zu erkennen und sachlich wie sprachlich die notwendige Genauigkeit und Explizitheit zu entwickeln und den Lernenden vorzuleben. Dazu gehört es, die Struktur des zu erwerbenden Wissens klar zu sehen und Bewusstheit darüber zu erlangen, welche Bestandteile koordiniert werden müssen und wie diese ineinander greifen. Damit können epistemologische Analysen zur inhaltlichen und strukturellen Klarheit des Unterrichts beitragen (vgl. Ufer et al. 2015).

4. Bilanz

Die Ausführungen sollten zeigen, dass es vielerlei Gründe gibt, sich aus fachlicher Sicht mit mathematischen Unterrichtsinhalten zu beschäftigen, und dies immer wieder neu, aus verschiedenen Perspektiven und in bedarfsgerechter Auflösung.

Damit verbunden ist die Hoffnung, dass Befürchtungen „Vom mählichen Verschwinden des Faches aus der Mathematikdidaktik“ (Jahnke 2010) niemals eintreffen. Die Beziehung einer Fachdidaktik zu ihrem Fach muss vital und kräftig bleiben.

Literatur

Epple, M. (1999). Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860 – 1910. In H. N. Jahnke (Hrsg.), *Geschichte der Analysis* (S. 371–410). Spektrum.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Kluwer.

Glade, M. (2014). *Individuelle Schematisierungsprozesse – Empirische Rekonstruktionen zum Anteil vom Anteil.* Dissertation. Dortmund.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematiklehren, 118*, 4-8.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum.

Humenberger, H. (2009). Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 62, 2,* 19–115.

Jahnke, Th. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 89*, 21-24.

Kirsch, A. (1976). Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. *Didaktik der Mathematik* 4, 257-284.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus.* Bd. I (Arithmetik, Algebra, Analysis). B. G. Teubner.

Kramer, J. (2008). *Zahlen für Einsteiger. Elemente der Algebra und Aufbau der Zahlentheorie.* Vieweg.

Müller, G. N., Steinbring, H., Wittmann, E. Ch. (Hrsg.) (2004): *Arithmetik als Prozess.* Kallmeyer.

Schreiber, Ch., Schütte, M. & Krummheuer, G. (2015). Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und Adaption von Untersuchungsmethoden. Erscheint in: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer.

Steinbring, H. (2009). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective.* Springer.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 11(10), 1–16.

Ufer, S., Heinze, A. & Lipowski. F. (2015). Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. Erscheint in: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer.

Voigt, J. (1984). Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht - dargestellt an einer Szene aus dem alltäglichen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik* 5, 265-283.

Wagenschein, M. (1983). *Erinnerungen für morgen. Eine pädagogische Autobiographie.* Beltz.

Wille, R. (2005). Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. In: K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.): *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 3-19): Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61*, 37-46.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematiklehren* 2, 4 – 11.

Wittmann, E. Ch. (2012). Das Projekt "mathe 2000": Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In G. N. Müller, Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Hrsg.): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben* (S. 265–279). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1989). The mathematical training of teachers from the point of view of education. *Journal für Mathematikdidaktik 10*, 291-308.

Norbert HUNGERBÜHLER, Zürich

Skalierbare Themen im Mathematikunterricht

Es ist ein herausfordernder Gedanke, den Mathematikunterricht entlang der gesamten Schullaufbahn vom Kindergarten bis zur Hochschule zu denken, sowohl didaktisch, wie auch inhaltlich. Sind wir als Lehrende überhaupt bereit, über den gepflegten Garten der eigenen Schulstufe hinauszuschauen? Kennen wir die darunter- und die darüberliegende Stufe gut genug, um die Übergänge nicht zu Klippen werden zu lassen, die Schülerinnen und Schüler unten abzuholen, wo sie sind und oben adäquat vorzubereiten? Pflegen wir den didaktischen und den inhaltlichen Dialog mit den Lehrkräften der anderen Schulstufen? Dieser Text möchte einige Anregungen geben, diesen Dialog zu führen.

1. Was heisst skalierbar?

Informatiker werden diese Frage anders beantworten als Physiker, Chemiker verstehen wieder etwas anderes unter dem Wort skalierbar, Ökonomen ebenfalls und Mathematiker sowieso. Schon Wittgenstein bemerkte, dass gewisse Begriffe nicht hinreichend erfasst werden können, ohne dass sich der Verstand beim Versuch einer Definition Beulen holt. Hingegen können im Sinne von Wittgensteins Familienähnlichkeit Merkmale des Begriffs genannt werden. Etwa so: Eine gewisse Qualität einer Sache ist skalierbar, wenn sie sich in bestimmter Art und Weise verhält, wenn die Sache in grösserer oder kleinerer Menge vorliegt. Oder so: Ein Aspekt einer Sache ist skalierbar, wenn er in bestimmter Ausprägung oder Komplexität erscheint, je nachdem, wie tief man in die Sache eindringt oder wie genau man sie betrachtet. Was soll demnach ein skalierbares Thema im Mathematikunterricht sein? Ein skalierbares Thema

- hält Aspekte bereit, die sich vom Kindergarten bis zur Dissertation bearbeiten lassen,
- lässt sich sowohl in der Theorie als auch von seinen Anwendungen her ausdehnen,
- lässt sich vertikal (Komplexität, Schwierigkeitsgrad) und horizontal (verschiedene Aspekte gleicher Komplexität oder Schwierigkeit) ausdehnen,
- hält Aspekte für stärkere und für schwächere Schülerinnen und Schüler bereit,
- lässt eine Vielzahl von Anwendungen (auch innermathematische) zu,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- lässt sich mit Hilfe von immer fortgeschritteneren Methoden untersuchen, und
- am Thema kann mit einer Vielzahl an Werkzeugen gearbeitet werden.

Skalierbare Themen, so es sie denn gibt,

- lassen sich im Sinne eines Spiralcurriculums behandeln,
- bieten eine Vielzahl von Anknüpfungspunkten zu vorhandenem Wissen,
- begünstigen die Vernetzung des Wissens,
- bieten Anknüpfungspunkte zu anderen (MINT-)Fächern,
- sind geeignet für Projekt- oder Maturaarbeiten (Breite und Tiefe möglich, Raum für Entdeckungen),
- eröffnen den Schülerinnen und Schülern eine Perspektive, weil sie über sich hinausweisen.

Auch didaktisch und lerntheoretisch lassen sich skalierbare Themen einordnen. Insbesondere eignen sie sich für das *PTP-Prinzip* von Thomas Wihler und Hans Rudolf Schneebeli: Eine konkrete Anwendung aus der Praxis motiviert einen Theorieblock, welcher neues Wissen und Werkzeuge bereitstellt. Dieses neue Wissen ist im Anschluss vielseitig in der Praxis einsetzbar und illustriert den gewonnen Fortschritt. Skalierbare Themen sind auch kompatibel mit dem *Zone of Proximal Flow Prinzip* von Lev Vygotsky und Mihaly Csikszentmihalyi (siehe zum Beispiel Basawapatna et al. (2013)): Durch ihren Einsatz lässt sich vermeiden, im Unterricht die *Skills* vor den *Challenges* zu entwickeln und dabei in den *Boredom*-Bereich abzugleiten. Stattdessen bieten skalierbare Themen immer wieder überschaubare Herausforderungen, welche die Weiterentwicklung des Wissens motivieren. Skalierbare Themen erweitern zudem das Konzept der *substantiellen Lernumgebungen* von Erich Wittmann (1998). Wer erst einmal den Blick für das Konzept der skalierbaren Themen geschärft hat, wird sie plötzlich überall entdecken.

2. Beispiele skalierbarer Themen

2.1 Gleichungen

Das Thema Gleichungen zieht sich durch alle Schulstufen. In der Primarstufe beginnt der spielerische Umgang mit der Arithmetik

- $2 + 3 = 5$
- $3 \times \square = 12$

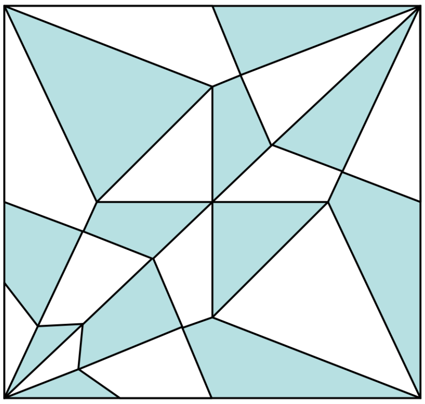
- „Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich vom Doppelten der Zahl 7 subtrahiere, erhalte ich 3."

In der Sekundarstufe I beginnt die Idee der Unbekannten und der Variablen Form anzunehmen, und am Übergang zur Algebra entwickeln sich die ersten Lösungstechniken anhand immer anspruchsvollerer Beispiele: Ähnlich wie in der Biologie die Ontogenese die Phylogenese rekapituliert, so vollzieht der einzelne Schüler, die einzelne Schülerin, die historische Genese der mathematischen Begriffe individuell nach. In der Sekundarstufe II zeigt sich nach und nach eine Systematik der Gleichungstypen (lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen, lineare Systeme), und der Zusammenhang mit dem Aufbau des Zahlenreichs zeichnet sich ab: Die sukzessive Erweiterung des Zahlenraums erfolgt aufgrund der Notwendigkeit, gewissen Gleichungen eine Lösung zu verschaffen. Die Gleichung $5 + x = 2$ hat in den natürlichen Zahlen keine Lösung, dies führt zu den ganzen Zahlen. Die Gleichung $7x = 3$ hat erst in den rationalen Zahlen eine Lösung. Die Gleichung $x^2 = 2$ macht die Einführung reeller Zahlen nötig, und $x^2 = -1$ liefert schliesslich die Motivation für die komplexen Zahlen. Auf dieser Schulstufe zeigen sich auch erstmals abstraktere Lösungsbegriffe, etwa bei Fixpunktgleichungen oder bei einfachen Differentialgleichungen. Der Bogen spannt sich weiter zur Hochschule, wo der Fokus nicht mehr in erster Linie auf Lösungstechniken liegt, sondern bei der Untersuchung abstrakterer Theorien, etwa zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Flugs ist man dann bei aktuellen Forschungsthemen, zum Beispiel bei partiellen Differentialgleichungen oder in der Numerik.

2.2 Origami

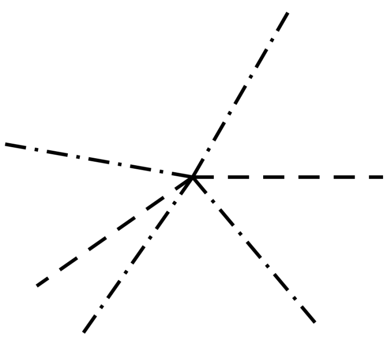
Als Friedrich Fröbel der Welt die Idee des Kindergartens schenkte, war Papierfalten fester Teil seines Curriculums. Er war der Überzeugung, dass die spielerische Beschäftigung mit Papier sowohl die feinmotorischen Fähigkeiten, als auch das Raumvorstellungsvermögen der Kinder schult. So zeugt noch heute der Fröbel-Stern in der Weihnachtszeit von dieser Idee. In der Primarschule lassen sich wunderbare Vorstellungsübungen mit Origami durchführen: Ein Papier wird gefaltet und in Gedanken entlang einer Geraden zerschnitten: Wie sieht das entstandene Loch aus? Oder: Wie viele Berg- und Talfalten besitzt ein gefalteter Papierstreifen nach dem Auffalten?

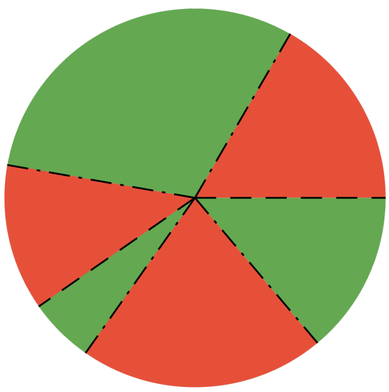
Der Satz von Meguro (siehe Figur) ist auf der Sekundarstufe I zugänglich. Er lautet: *Das Faltmuster einer flach gefalteten Origami-Figur ist zweifärbbar*. Diese graphentheoretisch nichttriviale Aussage kann mit Wagenscheinscher Uferhilfe bereits von Sekundarschülerinnen und -schülern entdeckt und mit einer einfachen Überlegung begründet werden. Die Beschäftigung mit Papierfalten im Unterricht führt auch zur Origami-Geometrie, welche geometrische Konstruktionen durch Falten anstatt mit Zirkel und Lineal erlaubt (siehe zum Beispiel Geretschläger (2008)).



Satz von Meguro illustriert am Faltmuster des Kranichs

Auf Sekundarstufe II können Fragen zur Konstruierbarkeit thematisiert werden: Die Winkeldreiteilung beispielsweise ist mit Origami-Geometrie eine einfache (und einfach einsehbare) Konstruktion, jedoch mit Zirkel und Linear nicht möglich. Zum Satz von Meguro gesellen sich hier die wunderbaren Sätze von Maekawa-Justin oder Kawasaki-Justin (siehe Figur). Der erste dieser Sätze lautet: *Treffen in einem Punkt einer flach faltbaren Origami-Figur t Talfalten und b Bergfalten aufeinander, so gilt* $|t - b| = 2$. Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Innenwinkelsumme in Polygonen. Insbesondere folgt daraus (wie auch aus dem Satz von Meguro), dass in einem solchen Punkt eine gerade Anzahl Falten, also eine gerade Anzahl Winkelgebiete zusammentreffen. Der Satz von Kawasaki-Justin sagt dann über diese Winkelgebiete: *Treffen in einem Punkt P eine gerade Anzahl Falten aufeinander, und färbt man die Winkelgebiete abwechselnd rot und grün, so ist die Origami-Figur genau dann lokal in P flach faltbar, wenn die Summe der roten Winkel gleich der Summe der grünen Winkel ist.*





Links der Satz von Maekawa-Justin (2 Talfalten gestrichelt, 4 Bergfalten strichpunktiert), rechts der Satz von Kawasaki-Justin

Auf Universitätsstufe besitzt Origami Anwendungen beispielsweise im Maschinenbau, in der Architektur, und innermathematisch in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Die Axiomatik der Origami-Geometrie ist ebenfalls noch nicht endgültig geklärt und beliebig viele Origami-Probleme in der Analysis, der Geometrie und der Kombinatorik harren noch ihrer Lösung.

2.3 Kryptologie

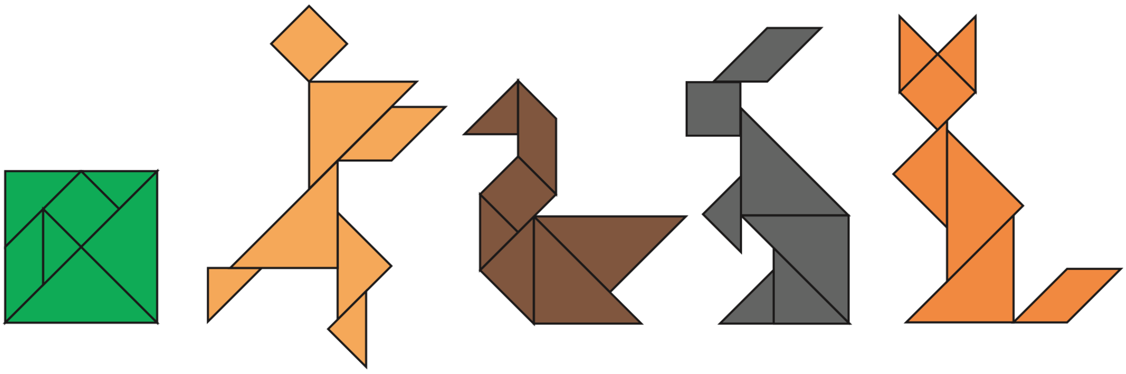
Geheimschriften faszinieren bereits Kinder im Vorschulalter, etwa beim Spiel mit unsichtbarer Tinte. In der Primarschule und auf Sekundarstufe I können einfache Verschlüsselungen, etwa die Cäsar-Verschlüsselung oder die Skytale, besprochen werden. Die Herausforderung, eine auf diese Weise verschlüsselte geheime Botschaft zu entschlüsseln gelingt mit Hilfe einfacher mathematischer Überlegungen, welche kaum einer weiteren Motivation bedürfen. Bei der Entschlüsselung von polyalphabetischen Ersetzungschiffren, bei denen jedes Zeichen des Klartextes durch ein Zeichen einer anderen Schrift ersetzt wird, gelangen statistische Methoden zum Einsatz: Die Häufigkeitsverteilung einzelner Buchstaben in der (deutschen) Sprache ermöglicht gleich einen natürlichen Zugang zur Statistik. Die Codierung mit Hilfe von Schlüsseln (Vignère-Verschlüsselung) bietet Gelegenheit, modular zu rechnen. Diese Methode gewährt höchste Sicherheit, solange der Schlüssel geheim bleibt und nur ein einziges Mal benutzt wird, leidet aber am inhärenten Problem des Schlüsselaustauschs zwischen Sender und Empfänger der geheimen Botschaft: Diese müssen sich nämlich treffen, um den Schlüssel miteinander abzustimmen. Bei diesem Treffen könnte der Sender auch gleich die geheime Botschaft übergeben.

Die Sekundarstufe II ist dann der Ort für den Ausweg aus dem Dilemma des Schlüsselaustauschs: Hier können die Idee und die Paradoxie der Public Key Kryptographie besprochen werden. Zwei Personen sprechen auf einem öffentlichen Platz miteinander und jedermann kann dieser Konversation folgen. Dennoch haben am Ende die beiden Personen eine Information ausgetauscht, die kein anderer Zuhörer erfassen konnte. Wie ist das möglich?! Oder die Idee der Zero Knowledge Beweise: Wie kann ich jemanden überzeugen, dass ich im Besitz einer bestimmten Information bin, ohne die Information selber preiszugeben? Letzteres hat beispielsweise beim Online Banking eine pfiffige Anwendung: Statt sein Passwort über einen unsicheren Kanal zu übertragen, überzeuge ich die Bank (respektive deren Server), dass ich das Passwort tatsächlich habe ohne es nennen zu müssen. Das historische vielleicht erste Beispiel eines Zero Knowledge Beweises gab Niccolò Tartaglia indem er seine Lösungsformel für die Gleichung dritten Grades nicht bekannt gab. Seine Zeitgenossen überzeugte er dennoch, dass er diese Formel besass, indem er alle ihm gestellten Aufgaben in kurzer Zeit lösen konnte.

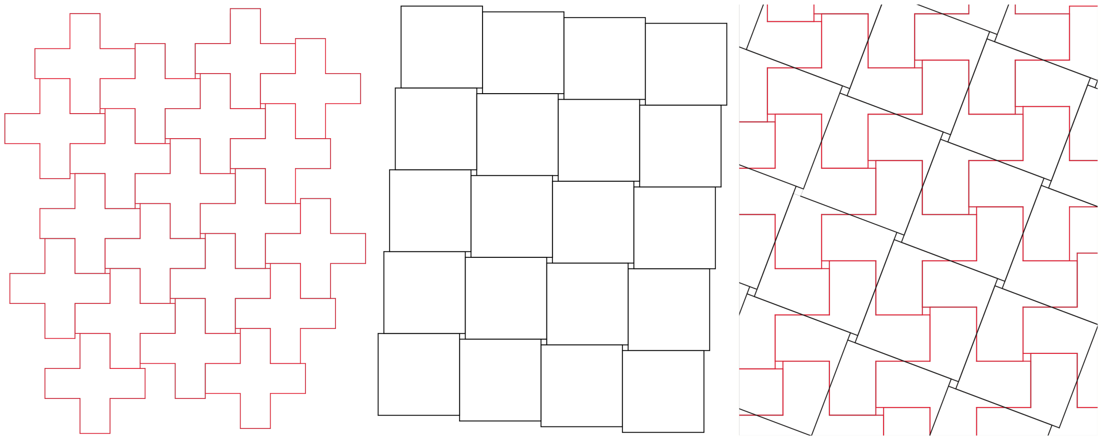
Auch die Methode der Quantenkryptographie gehört noch zu den erreichbaren Zielen der Sekundarstufe II. Die Forschung zur Kryptologie schliesslich strebt derzeit nach dem „heiligen Gral“ der Verschlüsselung, nämlich nach Methoden, die *beweisbare* Sicherheit bieten.

2.4 Zerlegungen

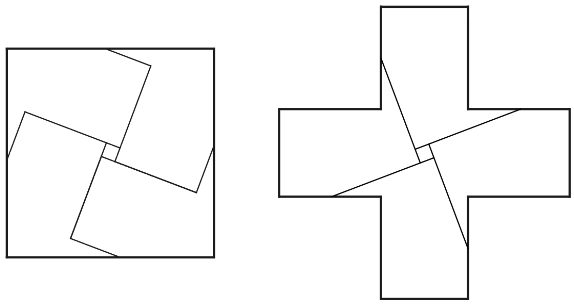
Bereits im Kindergarten spielen die Kleinsten gern mit Bauklötzen und fabrizieren dabei, freilich ohne sich dessen bewusst zu sein, gemeinsame Zerlegungen von Polyedern und Polygonen. Im Fall von Tangram wird besonders augenfällig, dass zerlegungsgleiche Figuren die selbe Fläche besitzen:



Auf dieser Tatsache beruhen dann die einfachen Argumente, welche in der Primarstufe die Berechnung von Flächen von Dreiecken oder Trapezen erlauben. Auf der Sekundarstufe I gelingt ein anschaulicher Beweis des Satzes von Pythagoras mit Hilfe von Zerlegungen. Auf der Sekundarstufe II hat der phantastische Satz von Wallace-Bolyai-Gerwien Platz, der die Umkehrung der Beobachtung aus dem Kindergarten liefert: *Zwei flächengleiche Polygone besitzen eine gemeinsame Zerlegung in Polygone*. Der Beweis ist zwar elementar, liefert aber typischerweise Zerlegungen mit sehr vielen Teilen. Eine Technik, die in vielen Fällen Zerlegungen mit wenigen Stücken liefert, verwendet Parkettierungen. Dies wird hier illustriert am Beispiel, eine gemeinsame Zerlegung eines Schweizerkreuzes und eines flächengleichen Quadrates zu finden. Man beachte, dass die vier Arme eines heraldisch korrekten Schweizerkreuzes 7 Teile lang und 6 Teile breit sind. Aus diesem Grund lässt sich die Ebene mit Schweizerkreuzen allein nicht parkettieren, wohl aber, wenn man ein kleines Quadrat zu Hilfe nimmt (siehe Figur links). Das zum Schweizerkreuz flächengleiche Quadrat zusammen mit dem kleinen Hilfsquadrat parkettiert ebenfalls die Ebene (Figur Mitte). Man verschiebt dann die beiden Parkettierungen auf Folien solange übereinander, bis die beiden Gitter in einer bestimmten Position „einrasten“ (Figur rechts).



Daraus lässt sich eine gemeinsame Zerlegung mit nur fünf Teilen ablesen:



In einer Maturaarbeit liesse sich zeigen, dass die zum Satz von Wallace-Bolyai-Gerwien analoge Aussage in drei Dimensionen falsch ist, um schliesslich zum Satz von Dehn oder zu den Hillschen Tetraedern zu gelangen. Auf Stufe Universität werden analoge Aussagen in höheren Dimensionen oder in der hyperbolischen Geometrie betrachtet.

2.5 Spieltheorie

Kindern scheint der Spieltrieb in die Wiege gelegt. Dies lässt sich trefflich verwenden, um Kinder und Jugendliche auf spielerische Weise an mathematische Überlegungen heranzuführen. Schon Primarschulkinder wollen zum Beispiel unbedingt wissen, wie Wickie in der Folge „Ein gewisser Herr Lumperich“ das Spiel gegen den fahrenden Händler gewinnt. Dabei darf abwechselnd jeder der beiden Spieler 1 bis maximal 3 Dinge von einem Haufen mit 17 Gegenständen nehmen, und wer zuletzt das schwarze Kästchen nimmt, hat verloren. Nach und nach verlieren alle Wikinger gegen den Händler Lumperich, obwohl der ihnen scheinbar grosszügig den ersten Zug erlaubt. Erst als Wickie heimlich seine Flöte mit auf den Haufen legt und damit die Zahl der Gegenstände auf 18 erhöht, hat Herr Lumperich keine Chance mehr gegen Wickie. Ein bekanntes Spiel, das auf Sekundarstufe I analysiert werden kann, ist Hex. Hier ist ein intuitiver Beweis möglich, dass eine Hex-Partie niemals unentschieden enden kann. Dazu stellt man sich die beiden schwarzen Seiten links und rechts des Spielfeldes als Ufer eines Flusses, die schwarzen Spielsteine als Steine im Fluss und die weissen Spielsteine als fliessendes Wasser vor. Wenn das Wasser von oben nach unten fliessen kann (weil es einen weissen Weg gibt) hat Weiss gewonnen, wenn das Wasser nicht fliesst, wird es offenbar von einem Damm aus schwarzen Steinen daran gehindert. In diesem Fall hat Schwarz gewonnen. Auf der Sekundarstufe II ist dann ein kombinatorischer Beweis möglich. In einer Maturaarbeit kann gezeigt werden, dass dieser Satz äquivalent zum Brouwerschen Fixpunktsatz ist. Hübsch ist auch das Argument, welches zeigt, dass beim Hex eine Gewinnstrategie für den erstziehenden Spieler existiert. Die Idee basiert auf *Strategy Stealing* und wird an folgender Geschichte deutlich. In einem kleinen französischen Dorf spielt der Metzger gern abends im Bistro Schach. Da er meistens gewinnt, fordert er eines Tages den Weltmeister zu einer Partie Fernschach heraus. Der Weltmeister willigt ein, hat aber zu seinem grössten Erstaunen erhebliche Mühe, den Unbekannten zu schlagen. Die Revanchepartie geht sogar Remis aus. Die dritte Partie entscheidet der Metzger schliesslich gar für sich. Die Sensation im kleinen Dorf scheint perfekt − bis dem Postboten auffällt, dass der Metzger nicht nur regelmässig Post vom Weltmeister, sondern auch vom Vizeweltmeister bekommt! Er hat heimlich die beiden gegeneinander spielen lassen und nur jeweils die Antwortzüge des einen an den andern weitergeleitet... Anschliessend kann noch die Theorie von Grundy und Sprague anhand des Nim-Spiels exploriert werden. Auf Stufe Universität folgt dann die kombinatorische Spieltheorie.

2.6 Weitere skalierbare Themen

Weitere Kandidaten für skalierbare Themen sind Funktionen, Kurven, Symmetrie, Billard, Graphentheorie, Statistik, Computertomographie, Sonnenuhren. Dem Leser werden gewiss noch weitere Beispiele einfallen.

Literatur

Basawapatna, A. R., Repenning, A., Koh, K. H., Nickerson, H. (2013). The Zones of Proximal Flow: Guiding Students Through a Space of Computational Thinking Skills and Challenges. In Proceedings of the Ninth Annual International ACM Conference on International Computing Education Research, 67-74, (ICER 2013, August 12-14, San Diego, California, USA). ACM Press: New York.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16 (3)*, 329–342.

Geretschläger, R. (2008). *Geometric Origami*. Arbelos.

Kathleen PHILIPP, Zürich

Kinder experimentieren mit Zahlen – Eine mathematische Tätigkeit unter der Lupe

Der Begriff des Experimentierens begegnet einem in ganz unterschiedlichen Kontexten. Häufig assoziiert man damit ein Hantieren mit Materialien oder Apparaturen. Was aber ist gemeint, wenn von Experimentieren in der Mathematik die Rede ist? Wie sieht diese mathematische Tätigkeit bei Lernenden aus? Und wie kann man im Mathematikunterricht experimentieren?

1. Was ist Experimentieren?

In den Naturwissenschaften ist das Experimentieren zentrales Erkenntnisinstrument (z.B. Shadish et al. 2002). Aber auch beim mathematischen Erkenntnisgewinn spielen experimentelle Tätigkeiten eine Rolle. Euler (1761) spricht in diesem Zusammenhang von Beobachtungen und Quasi-Experimenten. Er meint damit, dass etwa Eigenschaften natürlicher Zahlen durch Beobachtungen an Beispielen entdeckt werden können. Diese Erkenntnisse werden dann auch anhand von Beispielen experimentell überprüft. Dieser Überprüfung kommt die Bedeutung einer ersten Absicherung des neuen Wissens zu und ist von zentraler Bedeutung, da in der Mathematik viele Erkenntnisse schon lange Zeit als wahr gelten, bevor sie bewiesen werden können. Mathematische Vermutungen entstehen also nicht deduktiv, sondern aus der Anschauung von Beispielen (Heintz 2000). Pólya (1962) knüpft an die Ausführungen Eulers an und zeigt am Beispiel der Goldbachschen Vermutung auf, wie ein solcher experimenteller Erkenntnisweg aussehen kann: Man kann an den Beispielen 3+7=10, 3+17=20 und 13+17=30 unter anderem beobachten, dass jeweils beide Summanden Primzahlen sind und die Summe immer gerade ist. Die Untersuchung weiterer gerader Zahlen (6=3+3, 8=3+5, 10=5+5=3+7, 12=5+7, etc.) kann dann zu der Vermutung führen, dass sich alle geraden Zahlen als Summe von zwei Primzahlen darstellen lassen. Man kommt zu dieser Vermutung also durch „suggestive“ Beobachtungen. Um die Vermutung experimentell abzusichern, kann man nun eine weitere gerade Zahl heranziehen: 60=7+53. Das bezeichnet Pólya als „stützende“ Beobachtungen. Diese beiden Beobachtungsformen lassen sich unter erkenntnistheoretischer Perspektive als Abduktion bzw. Induktion kennzeichnen. Peirce (Peirce & Walther 1967) führt den Begriff der *Abduktion* ein und meint damit die Bildung einer erklärenden Hypothese zu einem (überraschenden) Phänomen. Es wird also neues Wissen generiert. Der *Induktion* schreibt er die Bedeutung der Bestätigung bzw. Falsifizierung einer abduktiv gewonnen Hypothese zu, in Form einer empirischen Prüfung an weiteren Einzelfällen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die *Deduktion* bringt keine neuen Erkenntnisse hervor, dient aber deren Absicherung durch logische, wahrheitsübertragende Schlüsse. Alle drei Schlussformen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Beim Experimentieren liegt der Fokus auf den für das Mathematiklernen bedeutenderen Teilprozessen des Erkenntnisgewinns, der Abduktion und Induktion (Philipp 2015b, 2013).

Experimentieren als mathematische Tätigkeit kann vor diesem theoretischen Hintergrund als Suche nach Gesetzmäßigkeiten, Mustern und Strukturen verstanden werden. Zentrale Tätigkeiten sind das Erzeugen und Untersuchen von Beispielen und Hypothesen. Die Erkenntnisprozesse können dabei als abduktive und induktive Prozesse charakterisiert werden, d.h. es werden Hypothesen auf der Basis von Beispielen generiert und auf Plausibilität geprüft. Experimentieren in der Mathematik hat also zwei wesentliche Funktionen: eine hypothesengenerierende und eine hypothesenprüfende Funktion. Experimentieren ist damit ein wesentlicher Prozess mathematischen Denkens und genuines Mathematiktreiben. Wenn man nun den Blick auf Lernende richtet, so stellt sich die Frage, ob sich solche experimentellen Prozesse auch beim Mathematiklernen wiederfinden lassen.

2. Wie sieht Experimentieren bei Lernenden aus?

Um zu untersuchen, wie Lernende experimentieren, wurden Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 3,4 und 6 (n=15) sowie Studierende (n=9) bei der Bearbeitung von Aufgaben gefilmt (Philipp 2013). Um gerade jüngeren Kindern das laute Denken zu erleichtern, wurden die Aufgaben teilweise zu zweit bearbeitet. Insgesamt wurden fünf verschiedene Aufgaben mit offener Fragestellung im Rahmen der Untersuchung eingesetzt. Ziel war es, ein möglichst breites Spektrum an Vorgehensweisen zu finden und daraus eine in den Daten verankerte Theorie zu entwickeln (Glaser & Strauss 1998). Am Beispiel der Aufgabe Treppenzahlen (vgl. Abb.1, Leuders 2013) lassen sich Vorgehensweisen von Lernenden beschreiben.

Abbildung 1: Aufgabe Treppenzahlen

Ein erster Zugang erfolgt meist durch das Erstellen und Betrachten von eigenen Beispielen. Typische erste Vermutungen, die sich dann im weiteren Verlauf als nicht richtig herausstellen, sind „Man kann mit allen Zahlen eine Treppe bauen“ oder „Man kann mit geraden Zahlen keine Treppen bauen.“ Das Formulieren von falschen Vermutungen ist im Experimentierprozess besonders wertvoll, da an dieser Stelle deutlich wird, dass es notwendig ist, Vermutungen auch einer Prüfung zu unterziehen. Daneben können sie auch als eine Art Anker dienen. Darauf aufbauend können beispielsweise weitere (auch unterschiedlich spezifische) Vermutungen gebildet werden wie etwa „Es gehen nicht alle geraden Zahlen.“, „Mit der Zahl 4 kann man keine Treppe bauen.“ oder „Man kann mit allen geraden Zahlen eine Treppe bauen.“ Alle Schülerinnen und Schüler konnten Zahlen finden, die man als Treppenzahlen darstellen kann und auch Zahlen, bei denen das nicht möglich ist. Etliche entdeckten auch, dass es die Zweierpotenzen sind, die sich nicht als Treppenzahlen darstellen lassen (vgl. auch Philipp 2014, 2012b). Dahinter steckt der Satz von Sylvester, der besagt, dass jede natürliche Zahl n so viele Darstellungen von Summen aufeinanderfolgender Zahlen hat, wie sie ungerade Teiler besitzt. Dabei wird die Zahl 1 nicht als Teiler gezählt, wohl aber die Zahl n selbst (Sylvester 1882).

Basis für die Analyse der Vorgehensweisen von Lernenden bei der Bearbeitung der Aufgaben bildeten die Arbeitsprodukte (Beispiele und Notizen) und die aufgezeichneten Gespräche. Diese wurden zunächst in einer Phase des freien Kodierens (Glaser & Strauss 1998) interpretiert. Ergebnis dieses Analyseschrittes ist ein umfassendes Kategoriensystem.

Kode	Kodenotiz	Beispiel
Beispielorientierte Hypothese	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.	„16 geht nicht. Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“
Gegen-beispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
Reihenfolge-beispiel	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge ausprobiert.	Die Zahlen von 1 bis 20 als Treppenzahlen darstellen.
Gruppenbildung	Strukturierung des Beispielbereichs.	Betrachtung von geraden und ungeraden Zahlen.
…	…	…

Abbildung 2: Vorgehensweisen von Lernenden

Exemplarisch werden in Abb. 2 einige Vorgehensweisen benannt (Kode), in einer Kodenotiz genauer definiert und durch ein Ankerbeispiel mit Bezug zur Aufgabe Treppenzahlen illustriert. Im nächsten Analyseschritt wurden Beziehungen zwischen solchen Vorgehensweisen genauer betrachtet und Achsenkategorien identifiziert, die als zentrale Tätigkeiten beim Experimentieren aufgefasst werden können. Auf dieser Basis lässt sich ein in den Daten verankertes theoretisches Modell (vgl. Abb. 3) zum Experimentieren in der Mathematik entwickeln (Philipp 2013): (1) Beispiele werden generiert. (2) Um zu einer Vermutung zu kommen, werden Beispiele strukturiert. (3) Eine Hypothese/Vermutung wird formuliert und um sie (4) zu überprüfen, wird wiederum ein Beispiel herangezogen und der Kreislauf kann auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse von neuem beginnen. An dieser Stelle werden die beiden Funktionen von Experimenten, Hypothesengenerierung und Hypothesenprüfung, deutlich.

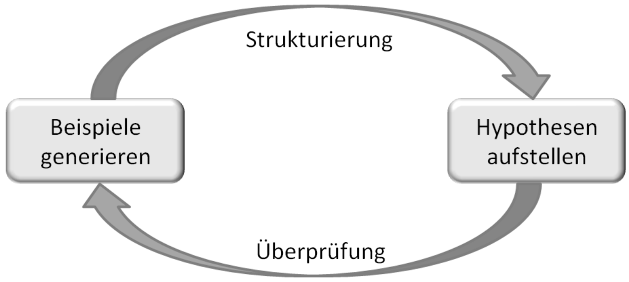


Abbildung 3: Experimentierkreislauf

Es zeigt sich also, dass Lernende ganz ähnlich wie Mathematikerinnen und Mathematiker zu neuen Erkenntnissen gelangen können, wenn sie Mathematiktreiben. Der experimentelle Charakter des Vorgehens zeigt sich im Umgang mit selbst erstellten Beispielen und Vermutungen. Im Hinblick auf Mathematikunterricht ist nun von Interesse, wie sich solche experimentellen Prozesse anregen lassen.

3. Wie kann man im Mathematikunterricht experimentieren?

Zunächst kann man überlegen, welche Aufgaben sich zum Experimentieren eignen. Am Beispiel der Aufgabe Treppenzahlen (vgl. Abb. 1) lassen sich Kriterien identifizieren: (1) Das Phänomen wird mit einer offenen Fragestellung präsentiert, (2) eine Vielzahl von Vermutungen können angestellt werden, die Aufgabe ist also mathematisch reichhaltig und (3) das Generieren von Beispielen ist problemlos möglich. Es sollten also keine komplizierten, fehleranfälligen Algorithmen für das Erstellen der Beispiele erforderlich sein. Häufig kann man Aufgaben aus Lehrmitteln zum Experimentieren nutzen, indem man die Fragestellung öffnet (Philipp 2012a).

Unterstützen kann man Lernende mit einer Unterrichtskultur, die dazu anregt, eigene Fragen an mathematische Phänomene zu stellen. Förderlich ist es auch, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Ideen, Beispiele und Lösungen schriftlich festhalten, beispielsweise in einem Forscherheft. Diese Aufzeichnungen können in Phasen des Austauschs und der Reflexion als Grundlage dienen. Eine weitere Möglichkeit ist es, experimentelle Vorgehensweisen (Strategien) explizit zu fördern. Ob eine solche Förderung grundsätzlich möglich ist, wurde im Rahmen einer Interventionsstudie untersucht. Ziel war die Erprobung eines Unterrichtskonzepts zur Förderung experimenteller Strategien (Training) und ihre psychometrische Erfassung zur Überprüfung der Wirksamkeit der Förderung (Philipp 2013).

Basierend auf dem theoretischen Modell des Experimentierens in der Mathematik (vgl. Abb. 3) wurden folgende Impulse für Schülerinnen und Schüler abgeleitet, die den Einsatz experimenteller Strategien zur aktiven Aneignung mathematischen Wissens anregen (Philipp 2015a):

- Schreibe einige Beispiele auf.
- Schreibe Beispiele geordnet auf (z.B. als Liste oder Tabelle).
- Suche eine andere Darstellung (z.B. eine Zeichnung oder Rechnung).
- Schreibe eine Vermutung auf (Was fällt dir auf?).
- Überprüfe deine Vermutung (z.B. Finde ich ein Gegenbeispiel?)

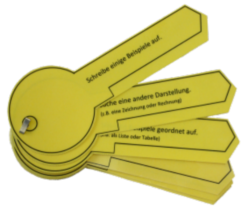


Abbildung 4: Impulsschlüssel

Die Impulse standen den Schülerinnen und Schülern im Rahmen der Intervention als Schlüssel (s. Abb. 4) zur Verfügung und konnten bei der Bearbeitung von Aufgaben verwendet werden. Im Unterricht hatten die Schlüssel dann zweierlei Funktionen. Sie konnten einerseits den Schreibprozess der Schülerinnen und Schüler erleichtern, da sie zur Gliederung der Aufzeichnungen genutzt werden konnten. Andererseits konnten die Schlüssel dazu dienen, Unterrichtsgespräche über die Aufgaben zu strukturieren, indem etwa Reflexionsphasen auf zwei Ebenen unterschieden wurden: *inhaltlich* (z.B. Welche Beispiele habt ihr aufgeschrieben?) und *prozessbezogen* (Welche Schlüssel habt ihr an welcher Stelle verwendet?).

Das Training selbst war in vier Phasen gegliedert, die wichtig Schritte beim Strategieerwerb darstellen (Klauer 1993, Bruder 2003). Nach einer ersten Phase der Hinführung an die Art der Aufgaben (offene Fragestellung, Erstellen eigener Beispiele) wurden die experimentellen Strategien in der zweiten Phase beim Bearbeiten der Aufgabe Treppenzahlen eingeführt und expliziert. Das diente der Verankerung der Strategien. In der dritten Phase sollte die Verwendung der Strategien reflektiert werden. Das geschah anhand eigener Bearbeitungen, aber auch losgelöst vom eigenen Bearbeitungsprozess anhand einer fiktiven Schülerlösung. Die vierte Phase beinhaltete das Verwenden der Strategien beim Bearbeiten weiterer Aufgaben

(Transfer). Eingebettet war das Training in eine Unterrichtseinheit[1] zu den Inhalten Teilbarkeit und Primzahlen. Die Unterrichtseinheit bestand aus insgesamt zwölf Aufgaben. Wesentliche Bausteine zur Unterstützung des Experimentierens waren das Führen eines Forscherheftes und das Kommunizieren über Strategien, Lösungswege und Ergebnisse.

Zentrale Fragestellung der Interventionsstudie war, inwiefern experimentelle Strategien im Mathematikunterricht gefördert werden können. Die Untersuchung fand in einem Zwei-Gruppen-Design mit Experimental- (n=126) und Kontrollgruppe (n=101) in 6. Klassen in Realschulen statt. Die Experimentalgruppe nahm im Rahmen dieser Unterrichtseinheit am Training zur Förderung von experimentellen Strategien teil, während in den Kontrollklassen dieselben Inhalte nach Schulbuch unterrichtet wurden. Alle Klassen wurden von ihrer Mathematiklehrkraft unterrichtet. Um die Wirksamkeit des Trainings zu überprüfen, nahmen beide Gruppen an einem Test zu drei verschiedenen Zeitpunkten teil: direkt vor und nach der Unterrichtseinheit und mit einem Abstand von sechs Wochen ein drittes Mal (vgl. Abb. 5).

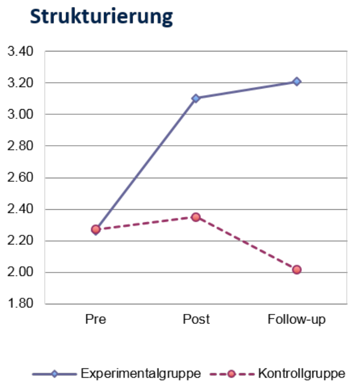
Abbildung 5: Design der Interventionsstudie

Der Kontrolle der Bedingungen der Intervention dienten Maßnahmen wie Unterrichtsbeobachtungen und schriftliche Rückmeldungen der Lehrkräfte zum Einsatz jeder Aufgabe. Das Testinstrument enthielt verschiedene Bausteine (Philipp 2013). In Anlehnung an das theoretische Modell zum Experimentieren in Mathematik (vgl. Abb. 3) gelang es, zwei inhaltliche Dimensionen auch psychometrisch zu trennen: die Dimensionen *Strukturierung* und *Überprüfung* (im Modell repräsentiert durch die beiden Pfeile). Diese beiden Dimensionen beschreiben also die Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern (1) über das Strukturieren von Beispielen zu Vermutungen zu gelangen und (2) Vermutungen anhand selbst generierter Beispiele zu überprüfen. In der folgenden Tabelle ist zu jedem der drei Testzeitpunkte Cronbachs Alpha für beide Skalen angegeben:

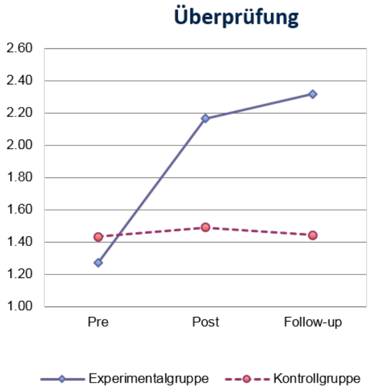
[1] Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Skala	*Anzahl der Items*	*Pre*	*Post*	*Follow up*
Strukturierung	6	0.66	0.67	0.76
Überprüfung	4	0.71	0.7	0.74

Das Testinstrument enthielt sowohl inhaltsnahe als auch inhaltsferne Items. Zusätzlich wurden mögliche Moderatorvariablen wie beispielsweise die Fähigkeit zum induktiven Denken erfasst. Zur Überprüfung der Wirksamkeit des Trainings wurde in beiden Dimensionen eine Kovarianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt. Es zeigten sich in beiden Dimensionen signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen und große Effekte. Die Experimentalgruppe hat einen Zuwachs zu verzeichnen, die Kontrollgruppe nicht. Bemerkenswert ist auch der weitere Zuwachs in beiden Dimensionen zwischen dem zweiten (Post) und dritten (Follow up) Messzeitpunkt. Das Training war also erfolgreich und auch nachhaltig. Die großen Effektstärken (Strukturierung: η^2=0,307; Überprüfung η^2=0,183) lassen sich möglicherweise auch dadurch erklären, dass das zugrunde liegende theoretische Modell stark in empirischen Daten verankert ist und damit sehr nah an Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern orientiert ist. Inhaltlich bedeutet dieser Zuwachs im Bereich Strukturierung, dass die Schülerinnen und Schüler, die an dem Training teilgenommen haben, Strukturen besser erkennen und diese auch verbal ausdrücken können. Auch die Anzahl von substanziell unterschiedlichen Vermutungen nimmt in diesem Bereich zu, ebenso wie die Spezifizität der Formulierungen. Im Bereich Überprüfung ist ein sehr viel kritischerer Umgang mit Vermutungen zu beobachten. Gegenbeispiele werden nach dem Training häufiger dazu genutzt, Vermutungen zu verwerfen, auch wenn sich Beispiele finden lassen, für die die Vermutung gilt. Außerdem wird die Notwendigkeit, die Gültigkeit von Vermutungen an mehr als einem Beispiel abzusichern, erkannt. Dass die Kontrollgruppe hier keinen Zuwachs zu verzeichnen hat, belegt, dass dieser nicht durch das Erlernen der Inhalte begründet werden kann.



Effekt	Signifikanz	η2
Zeit*Gruppe	0,000	0,307



Effekt	Signifikanz	η2
Zeit*Gruppe	0,000	0,183

Eine wesentliche Erkenntnis, die Schülerinnen und Schüler beim Experimentieren gewinnen können, ist, dass Vermutungen nicht nur manchmal gelten können. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch (Prinzip der Zweiwertigkeit). In engem Zusammenhang damit steht die Feststellung, dass ein Gegenbeispiel genügt, um eine Vermutung zu widerlegen (Beweiskraft eines Gegenbeispiels) während bestätigende Beispiele noch keine Beweiskraft haben. Auf diese Weise kann auch ein Beweisbedürfnis bereits in der Primarstufe angebahnt werden. Experimentieren kann also als fundamentale mathematische Tätigkeit gesehen werden, die das Entdecken neuen Wissens schon früh ermöglicht.

Literatur

Bruder, R. (2003): *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens*. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.

Euler, L. (1761). *Specimen de usu observationum in mathesi pura*: (Example of the use of observation in pure mathematics). In Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae (Vol. 6, pp. 185–230). Anonymos.

Glaser, B. G., & Strauss, A. A. L. (1998). *Grounded theory: Strategien qualitativer Forschung*. Bern: Huber.

Heintz, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik*. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer-Verlag, Wien.

Klauer, K. J. (Hrsg.). (1993). *Kognitives Training*. Göttingen: Hogrefe.

Leuders, T. (2013). *Zahlen unter der Lupe*. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann, & T. Leuders (Hrsg.), mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Philipp, K. (2015a). Muster und Strukturen. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.). *Mathematik – Didaktik für die Grundschule.* Cornelsen: Scriptor, 74-87.

Philipp, K. (2015b). Teilbarkeit experimentell erkunden. In *MU – Der Mathematikunterricht* 2 / 2015, S. 5 – 11. Friedrich, Seelze.

Philipp, K. (2014). Individuelle Lernwege unterstützen – Mit Zahlen experimentieren. *Praxis der Mathematik (PM)*, 58, 40-44.

Philipp, K. (2013): *Experimentelles Denken*. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Philipp, K. (2012a). „Die könnten doch auch UHU-Zahlen heißen!“ – Zahlenmuster experimentell erkunden. *Sache-Wort-Zahl*, Heft 124, 27-35.

Philipp, K. (2012b). Mit Zahlen experimentieren – Individuelle Lernwege unterstützen. *Die neue Schulpraxis*, Heft 10, 45-49.

Peirce, C. S./ Walther, E. (Hrsg.) (1967): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Agis Verlag GmbH, Baden-Baden.

Pólya, G. (1962). *Induktion und Analogie in der Mathematik*. Wissenschaft und Kultur. Basel etc.: Birkhäuser.

Shadish, W., Cook, T., & Campbell, D. (2002). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference*. Boston: Houghton Mifflin.

Sylvester, J.J. (1882). A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interactand an exodin. *American Journal of mathematics*, 5, 251-330.

Anna SFARD, Haifa

Metaphors in mathematical thinking and in research on mathematical thinking: a prop or a trap?

When Rainer Maria Rilke spoke about the “geflügelte Entzücken” (“winged energy of delight”) or the “frühen Abgrund” (“first abysses” of childhood) (Rilke, 1956, 157), he was helping himself with the poets’ favorite device known as *metaphor*. The use of this special linguistic form, although usually associated with literary context, far exceeds the boundaries of literature and poetry. Scientists are probably as frequent users of metaphors as poets, except that they try to conceal this fact by pushing the tropes into the straitjacket of formal definitions. In this way, they deprive the metaphor of this one feature that poets find most endearing: ambiguity. For instance, geneticists use metaphors when they speak about *messenger RNA*, as do physicists when they mention *chain reaction*.

In this paper, I reflect on the role of metaphors in two inter-related domains: that of creative *mathematical thinking* and that of *research on mathematical thinking*. In particular, I aim to show that metaphors shape our thinking, either mathematical or meta-mathematical, and through thinking, they mold our decisions and actions. The focus of these reflections is on one ubiquitous and particularly consequential type of metaphor that can be called *metaphor-of-object* or *MofO*, for short. I am guided by the question of MofO's relative strengths and weaknesses. I begin with stressing the all-important constructive role of MofO in the development of mathematics. Later, while reflecting on the way the same metaphor functions in mathematics education research, I give special attention to those of its uses that are potentially harmful. I conclude with an attempt to answer the question of how to utilize metaphors in both mathematics education research and in teaching, so as to make sure they serve as props rather than traps.

1. The metaphor of object in mathematical thinking

Metaphor

The word *metaphor*, a combination of the Greek terms *meta*, which is equivalent to *trans* or *beyond*, with *phrein* – to *carry*, was first defined by Aristotle as calling something by a name that belongs to something else. While I agree that metaphor is a linguistic device, I prefer a definition that relates it to language *in use*, that is, to discourse: we encounter a metaphor wherever parts of a familiar discourse are used in conjunction with another, seemingly unrelated one. Thus, when we begin speaking about *messenger RNA*, we relate the "source" discourse about carrying telegrams or letters,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

which is what messengers traditionally do, to the "target" discourse of genetics, which is not about people or their actions, but rather about organisms and the ways they develop. When the metaphor comes into being, the resulting change in the target discourse involves much more than addition of the word *messenger*. Together with this single old term, utterances modeled on those about human messengers begin appearing in the relatively new discourse of genetics. This is the first evidence for the utmost importance of metaphor as a discursive device. As I will be arguing all along this talk, metaphors create new discourses rather than just embellishing existing ones, and as such, they shape our thinking, and through our thinking they impact almost anything we do (i.e. Lakoff & Johnson, 1980).

Metaphor of object

One type of metaphor, which we encounter literally everywhere, hides in expressions with which we are so familiar that we are unlikely to notice their metaphorical nature. Consider, for instance, such terms as *falling in love*, *acquiring knowledge*, *transferring learning*, *crystallizing ideas*, *building meaning* or *decomposing numbers*. Although coming from different domains, all these abstract notions have one common feature: because of their being preceded by words such as *falling into*, *acquiring*, *crystallizing*, *building* and *decomposing*, they all sound as is if they were signifying physical objects. Once we become aware of our tendency to think in terms of objects, we start noticing *the metaphor of object* literally everywhere. Wherever we go, we hear people and ourselves speaking about *entities*, either concrete or abstract; and this is true, in particular, in research discourses. To give just a few examples, let me mention such nous as *energy*, *force* or *number*, which we use in the so called "exact" sciences, and the terms *knowledge*, *concept*, *meaning*, *belief*, *attitude*, *value*, *personality*, *ability*, *gift*, *ego*, *superego* that populate our talk about humans. I am aware that calling all these notions metaphors may sound, at first, somewhat implausible, if only because none of these words seems to have an alternative that could be regarded as its "literal" version. In the next two sections devoted, respectively, to mathematical thinking and to thinking about mathematical thinking, I will support this claim with some additional arguments. Special effort will be invested in showing the metaphorical origins of the concept of number.

Before doing this, let me remark on the mechanism of *objectification* through which metaphor of object comes into being. Objectifying may be described as a discursive process of introducing new nouns and using them as if they signified self-sustained, discourse-independent object. This process involves two discursive moves: *reification*, that is replacing talk about process (using verbs) into talk on things (using nouns); and *alienation*, that is, removal of the human performer of the process. See, for instance, the two cases presented in Table 1. In the first example, which comes from mathematical discourse, the transition is from the talk about an operation to the talk about its product; in the second case, taken from the discourse on people doing mathematics, the move is from talk about properties of human action to talk about properties of the actor.

Mathematical discourse	**Operation**		**product**
	If I extract a square root from x and raise the result to the third power, I get the same result as when I raise x to the 3^{rd} power and extract square root from it	$\Rightarrow$	The 3^{rd} power of square root equals square root of the 3^{rd}
Discourse about doing mathematics	**property of action**		**property of actor**
	John often solves difficult mathematical problems and always passes test with flying colors	$\Rightarrow$	John has a gift for mathematics

Table 1: Examples of objectifying in mathematics and in research on mathematical thinking

2. Metaphor of object in mathematical thinking

Example: Number as metaphor

The claim that number is but a metaphor may sound unlilely. The reified and alienated way we speak about numbers, and the fact that talk on numbers is governed by strict rules that no person can change makes us convinced that while mentioning, say "number five" we refer to an object that exists in the world independently of our thoughts or will, just like stars and animals. The fact that contrary to the latter, this thing called *five* is not accessible through our senses does not undermine our belief in its independent existence. Still, why is it that when we take a look at pictures as different as the fingers of one hand, the famous building called Pentagon and the American coin called "nickel", we are tempted to claim that something is "the same" in all of them? What is it in these pictures that makes us see "sameness"? One can say that in each of these pictures, she can "see" number five. But what is this number five? In fact, we cannot see, smell or touch it! A similar query with regard to another set of pictures, say, a set of photographs of yourself from different times of your life and possibly quite dissimilar to one another, is much easier to answer: The same object (person) is shown in all them. Back to the first set, we do not find any *concrete object* behind the pictures and, after some additional reflection we are compelled to admit that the common property is different: It is the fact that *if we count the elements of the set*, we end with the same number word (*five*) in all three cases. Thus, if the common property of the photographs is the *object* that features in all of them, the common property of the other set is a certain *process* – process of counting. If so, why do we speak about both sets of pictures as if they were presenting *objects*? This way of speaking makes us able to build on what we are familiar with: concrete objects and processes involving such objects. This, in turn, makes us feel we understand things better. Indeed, thinking in terms of "the same object" about the processes that underlay the equivalence of the fingers of one hand, the Pentagon and the nickel helps us to account for the fact that we view these three things as in some sense "the same" in spite of the fact that they do not look as having anything in common. Below, I argue that using number words as referring to objects has another extremely important advantage: It makes us able to say more with less, thus making our discourses more concise and more likely to develop even further.

MofO in mathematical thinking as a prop

To objectify number means to start using number words within language structures originally devised for the talk about objects. It is thanks to this kind of use that we can create the brief expression "three multiplied by five is fifteen", which in its symbolic form, $5 \cdot 3 = 15$, becomes even briefer. Here, indeed, the words *five*, *three* and *fifteen* are used as if they signified things, two of which combine together to give the third. As long as number words remain unobjectified, the general fact expressed as $5 \cdot 3 = 15$ would have to be stated in so many words: *If I have five sets of objects such that when I count the elements of any of these five sets I stop at the word* three*, then when I put these five sets together and count the elements of the resulting big set, I finish with the word* fifteen.

This shows how the act of objectifying compresses the discourse, and thus increases its manageability. In metaphorical terms, mathematical objects function as compact black boxes which we may conveniently use without bothering about their complex, densely packed interiors. It is now possible to manipulate the newly constructed mathematical objects and combine them together – something that would have been a very awkward thing to do as long as the processes that gave rise to these objects have not undergone objectification. One can say that MofOs are the "whipping boys of mathematics": they take the "punishment" of complexity on themselves, leaving us free to enjoy the simple and elegant sides of mathematics.

It is also because of this newly attained manageability that mathematicians may now look at the existing numerical discourse "from above", searching for its characteristic patterns. They may be intrigued by, say, the operation of squaring numbers. Soon, the explorers will be objectifying this proceedure, and perhaps presenting it with the help of the brief algebraic formula x^2. The objectified operation of squaring will eventually be baptized with the new name *quadratic function* and will become subject to new operations and new complex processes.

What was presented here will repeat itself time and again: processes on already existing mathematical objects will be objectified and then operated upon. The new process, involving the newly created objects will be objectified again, giving raise to yet another extension of mathematical discourse. All this will repeat itself over and over again. It is therefore the metaphor of object that fuels the development of mathematical discourse (Sfard, 1994; Lakoff & Núñez, 2000). One can say that mathematics owes this metaphor its very existence, no less!

MofO in mathematical thinking as a trap

One generally acknowledged downside of metaphors is that they often bring with them undesirable entailments. This is what happens when we automatically ascribe a property of the source object to the one that constitutes the target. Thus, for instance, the students tend to interpret the mathematical term *limit* as referring to what mathematicians call the *upper bond*: they wrongly believe that a sequence cannot, at any point, transcend its limit. Clearly, this belief is fed by such everyday uses of the word as the one we make while speaking about speed limit or when stating emphatically, “My patience has its limit!”.

Another MofOs-related problem, probably more difficult to deal with, stems from the counterintuitive nature of the idea of viewing a process as its own product. Indeed, defining the basic complex number *i* as “the square root of –1” may be seen as improbably as the claim that a cake is the same as the recipe according to which it is made. Moreover, to construct a new object, one must fulfill an inherently circular pair of requirements: On the one hand, to bring this object into being and start getting acquainted with its properties, one has to engage in a conversation about it; on the other hand, how can one talk about an object before she knows anything about it and is not even aware of its existence? Many of those who lag behind others in their mathematical development, possibly also suffering from acute mathematical anxiety, may be the victims of this paradox.

3. Metaphor of object in thinking about mathematical thinking

In this part, I turn to the role of metaphor of object in discourses in which we engage while doing research on mathematical thinking. After showing some examples, I will claim that the risks of MofOs in the talk about people may exceed their gains.

Examples: MofOs in discourses on thinking

In the previous part of this paper, I made an effort to show the omnipresence of MofOs in mathematical thinking. The examples in Table 2 make us realize how common this metaphor is also in our thinking about thinking. At a closer look we realize that literally every statement on processes – on what people do (*think*, *see*, *deal*, *fail*) – can be replaced with an allegedly equivalent statement on objects – what people *have* (*ideas*, *concepts*, *discaclulia*).

Talk about processes		Talk about objects
The student *has always been dealing* successfully with tasks involving functions	⇨	The student acquired *the concept of function*
She *has been always been failing* in dealing with numerical tasks	⇨	She has dyscalculia

Table 2: Examples of objectification in our discourses about mathematical thinking

MofO in thinking about mathematical thinking as a prop

Although MofOs are as beneficial in the discourse on mathematical thinking as they are in mathematical discourse with regard to the economy of speech (see Table 2), I now wish to point out the price we pay for replacing the talk about what people *do* with statements about what they we *have*.

MofO in thinking about mathematical thinking as a trap

Those who use the metaphor of object in the talk about people face at least three types of dangers. First, the MofOs may lead to ambiguities and, at the same time, create a misleading impression of clarity; second, some metaphorical entailments may induce decisions that harm the learners of mathematics rather than helping them; and third, the unacknowledged ambiguities may lead to faulty reasoning and to logical fallacies. Let me elaborate on each of these claims.

Ambiguity is the inherent property of metaphors, which, although greatly appreciated by poets, makes scientists suspicious. The researcher's wariness is fully understandable: when used without necessary precautions, the non-operationalized metaphors may lead to controversies that appear to be disagreements about *facts*, while being in reality the result of differing *uses of words*. For instance, the long-standing controversies around Piaget's famous number-conservation task may be explained by the fact that the central idea of "having the concept of number" has never been defined in operational terms and that different interpreters probably did not mean the same thing while talking about children's numerical thinking (Sfard, 2008).

To illustrate the dangers that come with uncontrolled metaphorical entailments, let me use the example of the talk about *learning disability*. We are tempted to use these words whenever we face a child who has a long history of poor scholarly performance. Succumbing to the urge for objectification, we begin speaking in nouns and adjectives that indicate a property of the learner (*learning disability*, LD); this, as opposed to using verbs and adverbs that would make us focus on properties of the learners' actions (*performs poorly*). Without realizing, we also start being guided by the implicit message of the objectified talk: properties of a person, unlike those of her actions, are more likely to be given by nature than shaped by people; are general rather than context-dependent; and are permanent rather than transient. This view of the student's difficulty may to lead to consequential decisions: we are likely to direct those with "learning disability" to a separate life trajectory where there is little chance for them to further their mathematical education. In this way, our talk about LD becomes self-fulfilling prophecy: we create the reality rather than just reacting to it.

The last noteworthy consequence of objectifying is faulty reasoning expressing itself, among others, in our phony explanations of the observed phenomena. Think about the way we diagnose dyscalculia. To do so, we observe the student's performance on certain numerical tasks. If the performance is disappointing, we often conclude that the child "has" discalculia. From now on, we will use this "fact" to *explain* her inadequate numerical skills. At a closer look, however, this explanation is circular. While diagnosing, we stated: "poor performance, therefore dyscalculia". Later, while "explaining", we said "dyscalculia, therefore poor performance". The cause and effect exchanged their roles. In today's reality, where dyscalculia does not have a clear definition and is describable only in terms of how the learner *acts*, we do not add any information while saying that his poor performance is "due to dyscalculia". Since our diagnoses may impact the learners' lives, this kind of reasoning is a luxury we cannot afford.

4. Some implications for educational research and practice

Implications for research in mathematics education

The ramifications for educational research are quite obvious. First, we should look at past studies critically, staying alert to the danger of being misled by the MofOs with which the resulting literature is replete. Second, in any new research, we should eschew objectifications as much as we can. And if our discourse cannot be hermetically closed to new objects, we need to take precautions whenever such object is introduced. This means, above all, that we need to define the new notion as clearly and operationally as we can, while also adding an explicit disclaimer with regard to those metaphorical entailments and interpretations that we wish to exclude.

Implications for the teaching and learning of mathematics

In this paper, a closer look at the process of objectification brought an insight about arguably the greatest challenge for the learner of mathematics: turning processes into objects, which is an inherently circular procedure, with its different conditions constituting prerequisites for each other. The question of how to teach to overcome this difficulty requires much thinking. This said, one thing is pretty clear: the teacher may greatly increase the effectiveness of instruction just by staying aware of those special junctures at which the learner may be trapped in the "vicious circle" of reification. Another possibly helpful thing to do is supporting students in developing proper attitudes and realistic expectations. This can be done by exposing the learners' to expert discourse on new mathematical objects before they are capable of full-fledged participation, and accompanying this early experience with the slogan that, according to the historian of mathematics Jourdain (1956), has been assisting mathematicians of the past in similar situations: "Go on, faith will come" (p. 27)

While deliberating on how to define natural numbers, the founders of the axiomatic set theory Zermelo and Fraenkel could not escape the conclusion that these numbers originate in literally nothing: in the empty set. It is by turning the empty set into a set of which it is the only element, and then creating a new set composed of this latter set and the empty set, and so on, that natural numbers could be properly "ojectified". Indeed, metaphor of object seems to be a magic wand for turning nothing into something. Considering how much can be done with mathematical objects such as natural numbers – after all, our world would not be the same without them – one cannot but agree that metaphors may be among the most important sources of our creative powers.

References

Jourdain, P. E. B. (1956). The nature of mathematics. In J. P. Newman (Ed.), *The world of mathematics*. New York: Simon and Schuster

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Rilke, R. M. (1956). *Sämtliche Werke: Gedichte. Zweiter Teil.* Wiesbaden: Insel-Verlag.

Sfard, A. (1994). Reification as a birth of a metaphor. *For the learning of mathematics, 14*(1), 44–55.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Fritz C. STAUB, Zürich

Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Aus- und Weiterbildung

Unterrichten ist eine hoch komplexe und anforderungsreiche Tätigkeit (für Mathematikunterricht vgl. Reusser, Pauli & Waldis, 2010), die auf umfangreichem Wissen und Können, aber auch auf Werthaltungen und Überzeugungen basiert (vgl. Kunter et al., 2011; Staub & Stern, 2002). Evidenzbasiertes Wissen über lernwirksamen Unterricht lässt sich beispielsweise in Form von Merkmalen von Unterrichtsqualität (z.B. Helmke, 2012), allgemeinen Lehr-Lernprinzipien (z.B. Resnick & Hall, 1998) oder durch das Bereitstellen erprobter Unterrichtsmaterialien verfügbar machen. Die Vermittlung allgemeiner Prinzipien, Konzepte oder Unterrichtsmaterialien alleine reichen jedoch für eine nachhaltige Weiterentwicklung von Unterrichtskompetenz nicht aus (z.B. Cohen & Hill, 2001). Als Bedingungen wirksamer Fortbildungen für Lehrpersonen konnten in empirischen Studien insbesondere der *Fokus auf curricular relevante Unterrichtsinhalte* und die *Möglichkeiten zu praxisbezogenem Lernen in kooperativen Settings* identifiziert werden (z.B. Garet, Porter, Desimone, Birman & Yoon, 2001). Dazu zählen beispielsweise das Beobachten von kompetenten Lehrpersonen, das Erhalten von Rückmeldungen zum eigenen Unterricht oder die Teilnahme an Gesprächen zur Umsetzung von Kursinhalten in die Praxis.
Die Gestaltung von Unterricht basiert auf komplexen Wissensbeständen und weiteren personalen Ressourcen, die in oft auch dynamisch sich verändernden Situationen zu nutzen und zu integrieren sind. Ein zentraler Bestandteil professioneller Lehrkompetenz ist das fachspezifisch-pädagogische Wissen, verstanden als eine Verschmelzung von Wissen über die zu lehrenden disziplinären Fachinhalte, von Wissen über die Lernenden und ihre Voraussetzungen und von handlungsbezogenem methodisch-didaktischem Wissen (vgl. Bromme, 1992). Nach Schön (1987) ist Gestaltungsarbeit zwar nicht direkt lehrbar, sie ist aber unter geeigneten Bedingungen im Tun lernbar, vor allem dann, wenn dabei eine kompetente Person als Coach dieses Tun situationsbezogen und handlungsorientiert unterstützt. Die folgende Darstellung eines Ansatzes zum Unterrichtscoaching basiert auf Staub (2015). Dieser Ansatz wurde unter der Bezeichnung „Content-Focused Coaching[SM]" (Staub, Bill & Miller, 1998; West & Staub, 2003) ursprünglich in den USA entwickelt und ist auch als „Fachspezifisch-Pädagogisches Coaching" (Staub 2001, 2004), „Fachunterrichtscoaching" (Hirt & Mattern 2014) oder insbesondere „Fachspezifisches Unterrichtscoaching" (z.B. Kreis & Staub 2011; Staub, 2015) bekannt. Der Ansatz des Fachspezifischen Unterrichtscoachings sieht spezifische Kooperations- und Interaktionsstrukturen vor, auf deren Grundlage fachspezifisch-pädagogische Lehr-Lernprozesse von Unterricht in den Blick genommen und in gemeinsam

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

verantworteter Gestaltungsarbeit optimiert und weiterentwickelt werden. Der Darstellung der Kernelemente dieses Ansatzes folgen Hinweise auf Studien zu dessen Nutzung und Wirkungen in Fortbildungen und zur Unterstützung von angehenden Lehrpersonen in Unterrichtspraktika.

1. Aktivitätsstruktur und Verlauf eines Coaching-Zyklus im Fachspezifischen Unterrichtscoachings

Die Kooperation im Fachspezifischen Unterrichtscoaching erfolgt in Unterrichtsvorbesprechungen, Unterrichtsdurchführung und Unterrichtsnachbesprechungen, deren Abfolge einen vollständigen Zyklus des Unterrichtscoachings bildet. Ein zentrales Merkmal ist die gemeinsame Verantwortungsübernahme von Lehrperson und Coach für die im Rahmen eines Coaching-Zyklus durchgeführte Unterrichtseinheit. Der von Coach und Lehrperson in gemeinsamer Verantwortung geplante, durchgeführte und reflektierte Unterricht orientiert sich an zwei Globalzielen: der bestmöglichen Förderung des fachbezogenen Lernens der unterrichteten Schüler/innen einerseits und der Entwicklung der Unterrichtskompetenz der kooperierenden Lehrpersonen andererseits. Zur Erreichung dieser Ziele folgt die Zusammenarbeit folgenden Grundsätzen:

- Im Zentrum steht das fachspezifische Lernen der Schüler/innen.
- Der Coach übernimmt Mitverantwortung für die Gestaltung des Unterrichts und das Lernen der Schüler/innen.
- Die Zusammenarbeit erfolgt auf der Grundlage eines respektvollen Dialogs, der eine ko-konstruktive Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht ermöglicht.
- Sowohl die Lehrperson als auch der Coach verstehen sich als Lernende.
- Der Coach geht flexibel auf die aktuelle Unterrichtssituation und die Entwicklungsbedürfnisse der Lehrperson(en) ein und orientiert seine Arbeit zugleich an wissenschaftlich fundierten Instrumenten.

Zur Ermöglichung und Förderung eines *ko-konstruktiven Dialogs* (West & Staub, 2003) muss es dem Coach einerseits gelingen, dass die gecoachte Lehrperson ihre eigenen Pläne, Ideen und Überzeugungen darlegt, begründet, elaboriert und auch hinterfragt. Andererseits bringt der Coach an geeigneten Stellen auch eigene Ideen, Anregungen, Hinweise und Begründungen ein. Die *gemeinsame Verantwortung* für den Unterricht im Dienste des Lernens der Schüler/innen erfordert eine Einigung auf einen gemeinsamen Handlungsplan und eine Absprache zur Koordinierung der Handlungen von Coach und Lehrperson während des Unterrichts. Diese Zusammenarbeit verlangt eine gründliche Verständigung über Unterrichtsziele und Gestaltungsüberlegungen. Der Coach kann seine Ressourcen bereits vor der Unterrichtsdurchführung einbringen, statt Verbesserungsvorschläge und Problematisierungen erst im Nachhinein anzubringen. Ausgangspunkt einer Vorbesprechung kann ein bereits vorbereiteter

Lektionsplan der Lehrperson oder des Coachs sein. Noch nicht vollständig ausgearbeitete *Unterrichtsskizzen* oder *Unterrichtsentwürfe* ermöglichen jedoch einen grösseren Gestaltungsspielraum, den die Lehrperson und der Coach zur Ko-Konstruktion nutzen können. Der Coach achtet dabei auf eine angemessene Balance zwischen *Gesprächshandlungen*, welche dem aktiven Zuhören einerseits und dem Einbringen von eigenen Gestaltungsvorschlägen andererseits dienen. Lehrperson und Coach überlegen gemeinsam welche Gestaltungsvarianten für das Lernen der Schüler/innen der betreffenden Klasse am produktivsten sein können. Die Rolle des Unterrichtscoachs beschränkt sich somit nicht auf die eines Prozessberaters, wie dies beispielsweise im Cognitive Coaching nach Costa und Garmston (1994) gefordert wird. Aufgrund seiner Mitverantwortung für den Unterricht bietet der Coach auch substanzielle Hilfestellung zur Gestaltung dieses Unterrichts. Dabei versucht der Coach seine Unterstützung in einer Art und Weise einzubringen, welche die Lehrperson mit ihrem Wissen, ihren Überzeugungen und ihrem Denken ernst nimmt. Die jeweils im Unterricht umgesetzte Gestaltungsvariante kann in Nachbesprechungen gemeinsam reflektiert werden. Von einer traditionellen Form der Meisterlehre unterscheidet sich das Unterrichtscoaching unter anderem darin, dass der Coach seine Arbeit an wissenschaftlich fundierten Instrumenten zu orientieren sucht. So werden im Fachspezifischen Unterrichtscoaching Coach und Coachee anhand von *Kernperspektiven und spezifischen Kernaspekten zur Unterrichtsplanung und zur Reflexion von Unterricht* (West & Staub, 2003) dazu angeregt, die fachspezifische Unterrichtsgestaltung aus lerntheoretischer Sicht in den Blick zu nehmen. Zentrale Kernperspektiven umfassen: Klärung der Fachinhalte, Lernziele und Kompetenzen; Einordnung der Lektion(en) in Unterrichtseinheit und Lehrplan; Diagnose von Vorwissen und Antizipation von Schwierigkeiten der Schüler/innen; Gestaltung des Unterrichtsarrangements, Unterstützung des beabsichtigten Lernens. Die spezifischen Leitfragen thematisieren beispielsweise das unterrichtsrelevante Vorwissen, fachspezifische Schwierigkeiten oder inadäquate Vorstellungen der Schüler/innen, wie zentrale Inhalte der Lektion erklärt werden können, oder die Frage danach, wie im Unterricht Gelegenheiten geschaffen werden, dass die Schüler/innen ihr Denken und Verstehen mitteilen können.

Die Zusammenarbeit während des Unterrichts kann sehr unterschiedlich aussehen. Die Rolle des Coachs beschränkt sich dabei eher selten auf die eines reinen Beobachters. Häufig unterrichten Coach und Lehrperson gemeinsam, indem sie abwechslungsweise bestimmte Teile des Unterrichts übernehmen. Der Unterricht kann auch gemeinsam erfolgen, indem sich beispielsweise der Coach im Rahmen von Klassengesprächen ebenfalls einbringt. Damit die Lehrperson während des gesamten Unterrichts in der direkten Zusammenarbeit mit dem Coach lernen kann, sind Varianten des Teamteachings, welche die Aufteilung der Klasse erfordern oder die getrennte Betreuung von einzelnen Gruppen beinhalten, zu vermeiden.

In Nachbesprechungen sind Unterrichtssequenzen, die nicht gemäß den Erwartungen verliefen, von besonderem Interesse. Unterrichtsreflexionen, die auf ein geteiltes Verständnis der Unterrichtsgestaltung aus der Vorbesprechung aufbauen, erlauben eine gezielte Thematisierung zentraler und in der Unterrichtsplanung allenfalls problematisierter Gestaltungsfragen. Auf dieser Grundlage werden die erreichten Lernergebnisse analysiert. Hierzu werden nebst Beobachtungen auch Arbeitsprodukte der Schüler/innen beigezogen. Wenn solche Überlegungen nicht unverbindliche Erörterungen bleiben sollen, gehen Nachbesprechungen in der Regel in Vorbesprechungen der nächsten Unterrichtseinheit über.

2. Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Fortbildung

Es existieren bereits einige Interventionsstudien, die die Wirksamkeit solcher Fortbildungen untersuchen, die im Folgenden exemplarisch vorgestellt werden sollen.

In einer quasi-experimentellen Interventionsstudie zur Förderung adaptiver Lehrkompetenz im Sachunterricht von 49 Schulklassen der Primar- und Sekundarstufe in der deutschsprachigen Schweiz, die als ein Element Fachspezifisches Unterrichtscoaching implementierte, konnte gezeigt werden, dass sich die Planungskompetenz der unterstützten Lehrpersonen sowie die Leistungen der Schüler/innen teilweise verbesserten (Beck et al., 2008; Rogalla & Vogt, 2008). Die Lehrpersonen der Interventionsgruppe erhielten einen zweitägigen Weiterbildungskurs zum Thema „Adaptive Lehrkompetenz" und neun Unterrichtscoachings (je 3 Stunden). Die Lehrpersonen der Kontrollgruppe erhielten nebst ihrer individuell bestimmten Fortbildung keine solche Unterstützung. Die Veränderung der Planungskompetenz wurde mittels eines Vignettentests vor und nach der insgesamt neun Monate dauernden Intervention gemessen.

Die bisher umfangreichste Untersuchung zur Wirksamkeit des Fachspezifischen Unterrichtscoachings in der Fortbildung umfasste 29 Schulen, 167 Lehrpersonen und 2983 Schüler/innen und fokussierte auf die Förderung der Leseleistung in der 3. und 4. Klassenstufe im Fach Englisch (Matsumura, Garnier & Spybrook, 2013). In einer als Längsschnitt angelegten Interventionsstudie wurden die teilnehmenden Schulen aus Austin (Texas) randomisiert entweder dem Ansatz des Fachspezifischen Unterrichtscoachings oder dem an den Schulen bereits praktizierten Unterrichtscoaching für den Englischunterricht (literacy coaching) zugewiesen. Die Arbeit der fachspezifischen Unterrichtscoachs zielte auf die Kompetenzen zur Planung, Durchführung und Reflexion von Unterrichtsgesprächen, in welchen es um das Verständnis und die Diskussion englischer Texte ging. Hierzu wurden kognitionspsychologisch fundierte methodisch-didaktische Ansätze beigezogen (Beck & McKeown, 2006). Die Fortbildung sah eine monatliche individuelle Unterstützung von Lehrpersonen im Unterricht durch entsprechend ausgebildete Unterrichtscoachs sowie wöchentliche Treffen von klassenstufenbezogenen Lehrpersonenteams mit einem Unterrichtscoach vor. Die Ergebnisse dieser umfangreichen Interventionsstudie zeigten Effekte für den Ansatz des Fachspezifischen Unterrichtscoachings sowohl mit Bezug auf die im Unterricht gemessene Qualität von Textdiskussionen wie auch für die Verbesserung der Leseleistung der Schüler/innen. Verfügt der Coach über fachliche, pädagogische und fachdidaktische Expertise, so handelt es sich um ein *Expertencoaching*. Die mit dem Fachspezifischen Unterrichtscoaching vorgeschlagene Struktur der Zusammenarbeit und die zentralen Instrumente für dessen Implementation lassen sich jedoch auch für *kollegiale Unterrichtscoachings* nutzen. Eine entsprechend adaptierte Anwendung des fachspezifischen Unterrichtscoachings für die Unterrichtsentwicklung in Schulteams wurde von Kreis und Staub (2009, 2013) entwickelt. Die zentralen Elemente des Kollegialen Unterrichtscoachings entsprechen weitgehend dem Fachspezifischen Unterrichtscoaching. Die Rollen von Coach und Coachee werden jedoch in reziproker Weise eingenommen (je nachdem, wer für die unterrichtete Klasse zuständig ist). Eine explorative Studie zum Kollegialen Unterrichtscoaching im Kanton Thurgau, in Kombination mit fachdidaktischen Impulsen, zeigte eine qualitative und quantitative Intensivierung unterrichtsbezogener Kooperation zwischen Lehrpersonen (Kreis & Staub, 2009).

3. Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Ausbildung

Die Kooperationsstruktur des Fachspezifischen Unterrichtscoachings lässt sich auch für die Unterstützung von angehenden Lehrpersonen im Kontext von Praktika nutzen. Hierzu wurden in den letzten Jahren Interventionsstudien durchgeführt, welche die Wirkungen von Unterrichtscoaching auf das Lernen von angehenden Lehrpersonen in Praktika untersuchten. In einer quasi-experimentellen Interventionsstudie mit zehn Praxislehrpersonen und 26 Lehramtsstudierenden der Primarschulstufe im Kontext von Halbtagespraktika im ersten Studienjahr fanden Futter und Staub (2008), dass die Mehrzahl der untersuchten Lehramtsstudierenden Unterrichtsvorbesprechungen auf der Grundlage des Fachspezifischen Unterrichtscoaching für das eigene professionelle Lernen als hilfreicher beurteilten im Vergleich zu den in der Praxis dominierenden Unterrichtsnachbesprechungen. In einer zweiten quasi-experimentellen Interventionsstudie, wurden 16 Praxislehrpersonen auf Basis des Fachspezifischen Unterrichtscoachings zu Unterrichtscoachs für den Mathematikunterricht ausgebildet (mit ca. 50h Präsenzzeit). Im Vergleich zu einer Kontrollgruppe mit 16 erfahrenen Praxislehrpersonen, welche die übliche Praktikumsbetreuung anboten, zeigte sich, dass die als Unterrichtscoachs ausgebildeten Praxislehrpersonen im Praktikum häufigere und längere Unterrichtsvorbesprechungen durchführten (Kreis & Staub, 2011) und die von ihnen betreuten Lehramtsstudierenden einen höheren Lernertrag, gemessen an verschiedenen Indikatoren (Kreis & Staub 2011, 2012), sowie eine höhere extern eingeschätzte Unterrichtsqualität zeigten (Brunner, Kreis, Staub, Schoy-Lutz & Kosorok Labhart, 2014). Anhand detaillierter Analysen der Unterrichtsbesprechungen zeigte Kreis (2012), dass insbesondere ko-konstruktive Elaborationen der Unterrichtsplanung mit hohen Lernerträgen einhergingen. Ebenso zeigte sich für Nachbesprechungen, dass diese vor allem dann zu verbalisierbarem Lernen führen, wenn genügend Zeit für die ko-konstruktive Bearbeitung von Problemen und Unklarheiten eingesetzt wurde. Rein monologische Rückmeldungen der Praxislehrperson erwiesen sich demgegenüber als weniger lernförderlich.

4. Schlussfolgerungen für Forschung und Praxis

Die bisher durchgeführten Interventionsstudien zeigen, dass zentrale Elemente des Fachspezifischen Unterrichtscoachings wie die Unterrichtsvorbesprechung erfolgreich implementierbar sind (vgl. auch Staub, Waldis, Futter & Schatzmann, 2012). Weiter liegen ermutigende erste Belege für die förderliche Wirkung solcher Kooperationsstrukturen auf die Kompetenzentwicklung von Lehrpersonen sowie auf das Lernen von Schüler/innen vor. Insgesamt steht die empirische Forschung hier jedoch erst am Anfang. Die Rollenstruktur auf der Grundlage gemeinsam verantworteter Unterrichtsplanung führt im Fachspezifischen Unterrichtscoaching zu einer Kooperationsdynamik, welche nicht primär die gecoachte Lehrperson ins Zentrum stellt, sondern das gemeinsame Projekt. In gemeinsamer Verantwortung soll das Bestmögliche zur Unterstützung des Lernens der Schüler/innen im Rahmen der gegebenen zeitlichen Ressourcen erreicht werden. In dieser Zusammenarbeit können sowohl für die Lehrperson als auch für den Coach vielfältige Lerngelegenheiten entstehen. Die dabei bearbeiteten Inhalte und Gestaltungsfragen ergeben sich sowohl aus den fachspezifischen Anforderungen des Fachunterrichts, den individuellen Voraussetzungen der unterrichteten Schüler/innen sowie aus den Entwicklungsanliegen und Ressourcen der beteiligten Lehrpersonen. Darüber hinaus können für die Unterrichtsentwicklung auch in einer Schule vereinbarte allgemeine Entwicklungsziele wie z.B. die Weiterentwicklung von lernförderlichen Aufgabenstellungen leitend sein. Zur Rolle von Unterrichtscoachs auf der Grundlage des Fachspezifischen Coachings gehört ebenfalls, dass sie Lehrpersonen nicht nur einzeln unterstützen, sondern auch mit Gruppen von Lehrpersonen arbeiten, Fachgruppen oder Fachschaften leiten, Fortbildungselemente organisieren und unterrichten oder Schulleitungen bei der Planung von Angeboten zur Fortbildung unterstützen (vgl. Hirt & Mattern, 2014; West & Staub, 2003). Fachspezifische Unterrichtscoachs und die von ihnen realisierte spezifische Kooperationsstruktur mit und zwischen Lehrpersonen können damit als Katalysator zur Entwicklung von professionellen Lerngemeinschaften genutzt werden.

Literatur

Beck, E., Baer, M., Guldimann, T., Bischoff, S., Brühwiler, C., Müller, P., Niedermann, R., Rogalla, M., & Vogt, F. (2008). *Adaptive Lehrkompetenz: Analyse und Struktur, Veränderung und Wirkung.* Münster: Waxmann.

Beck, I. L., & McKeown, M. G. (2006). *Improving comprehension with questioning the author: A fresh and enhanced view of a proven approach.* New York: Scholastic Inc.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Lehrerwissens.* Bern: Huber.

Brunner, E., Kreis, A., Staub, F.C., Schoy-Lutz, M. & Kosorok Labhart, C. (2014). Qualitätssteigerung von Mathematikunterricht angehender Lehrpersonen durch Fachspezifisches Unterrichtscoaching. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 273-276). Münster: WTM-Verlag.

Cohen, D. K., & Hill, H. C. (2001). *Learning Policy: When State Education Reform Works*. Yale University Press

Costa, A. L., & Garmston, R. J. (1994). *Cognitive coaching: A foundation for renaissance schools.* Norwood, MA: Christopher-Gordon Publishers.

Futter, K. & Staub, F. C. (2008). Unterrichtsvorbesprechungen als Lerngelegenheiten in der berufspraktischen Ausbildung, *Beiträge zur Lehrerbildung, 26*(2), 126-139.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American Educational Research Journal, 38*(4), 915-945.

Helmke, A. (2012). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (4. Aufl.). Seelze-Velber: Klett-Kallmeyer.

Hirt, U., & Mattern, K. (Hrsg.) (2014). *Coaching im Fachunterricht. Wie Unterrichtsentwicklung gelingt.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Kreis, A. (2012). *Produktive Unterrichtsbesprechungen: lernen im Dialog zwischen Mentoren und angehenden Lehrpersonen*. Bern: Haupt.

Kreis, A. & Staub, F.C. (2009). Kollegiales Unterrichtscoaching. Ein Ansatz zur kooperativen und fachspezifischen Unterrichtsentwicklung im Kollegium. In K. Maag Merki (Hrsg.), *Kooperation und Netzwerkbildung. Strategien zur Qualitätsentwicklung in Schulen* (S. 26-39). Seelze-Velber: Klett-Kallmeyer.

Kreis, A., & Staub, F. C. (2011). Fachspezifisches Unterrichtscoaching im Praktikum. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 14*(1), 61-83.

Kreis, A., & Staub, F. C. (2012). Lernen zukünftiger Lehrpersonen im Kontext von Unterrichtsbesprechungen im Praktikum–multiple Indikatoren für ein schwer zu fassendes Phänomen. In M. Gläser-Zikuda, T. Seidel, C. Rohlfs, A. Gröschner & S. Ziegelbauer (Hrsg.), *Mixed Methods in der empirischen Bildungsforschung* (S. 209-226). Münster: Waxmann

Kreis, A., & Staub, F. C. (2013). Kollegiales Unterrichtscoaching. In A. Bartz, M. Dammann, S. G. Huber, T., Klieme, C. Kloft, & M. Schreiner (Hrsg.), *PraxisWissen SchulLeitung* (33. Aktualisierungslieferung. Teil 3, 30.32, S. 1-13). Köln: Wolters Kluver.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms CO-ACTIC. Münster: Waxmann.

Matsumura, L. C., Garnier, H. E., & Spybrook, J. (2013). Literacy coaching to improve student reading achievement: A multi-level mediation model. *Learning and Instruction, 25*, 35-48.

Resnick, L. B., & Hall, M. W. (1998). Learning organizations for sustainable education reform. *Daedalus, 127*(4), 89-118.

Reusser, K., Pauli, C., & Waldis, M. (Hrsg.). (2010). *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht.* Münster: Waxmann.

Rogalla, M., & Vogt, F. (2008). Förderung adaptiver Lehrkompetenz: eine Interventionsstudie. *Unterrichtswissenschaft*, *36*(1), 17-36.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey Bass.

Staub, F. C. (2004). Fachspezifisch-Pädagogisches Coaching: Ein Beispiel zur Entwicklung von Lehrerfortbildung und Unterrichtskompetenz als Kooperation. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 7*(3), 113-141.

Staub, F. C. (2015). Fachspezifisches Unterrichtscoaching. In H.-G. Rolff (Hrsg.), *Handbuch Unterrichtsentwicklung* (S. 476-489). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Staub, F. C., Bill, V., & Miller, A. (1998, April). Content-Focused Coaching: Scaffolding teaching and reflection on core issues of instructional practice. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344-355.

Staub, F. C., Waldis, M., Futter, K. & Schatzmann, S. (2012). Förderung von Lerngelegenheiten in Praktika zum Mathematiunterricht durch die Vermittlung von Kernelementen des fachspezifischen Unterrichtscoachings. In T. Hascher & G.H. Neuweg (Hrsg.), *Forschung zur (Wirksamkeit der) LehrerInnenbidung* (S. 181-193). Wien: LIT-Verlag.

West, L., & Staub F. C. (2003). *Content-Focused Coaching^{SM}. Transforming Mathematics Lessons*. Portsmouth, NH: Heinemann.

3 Sektionsbeschreibungen

Thomas GAWLICK, Hannover

Hannoveraner Studien: Analyse Heuristischer Programme

Die Sektion vereint theoretische und empirische Problemlöse-Studien zu Problembearbeitungen und -prozessen des Projekts HeuRekAP (www.dynamische-geometrie.de/heuristik/HeuReKaP/index.htm). **Heuristische Programme** sind deskriptive oder präskriptive Handlungsanweisungen zum Lösen von Problemen – ein präskriptives zeigt Abb. 1.

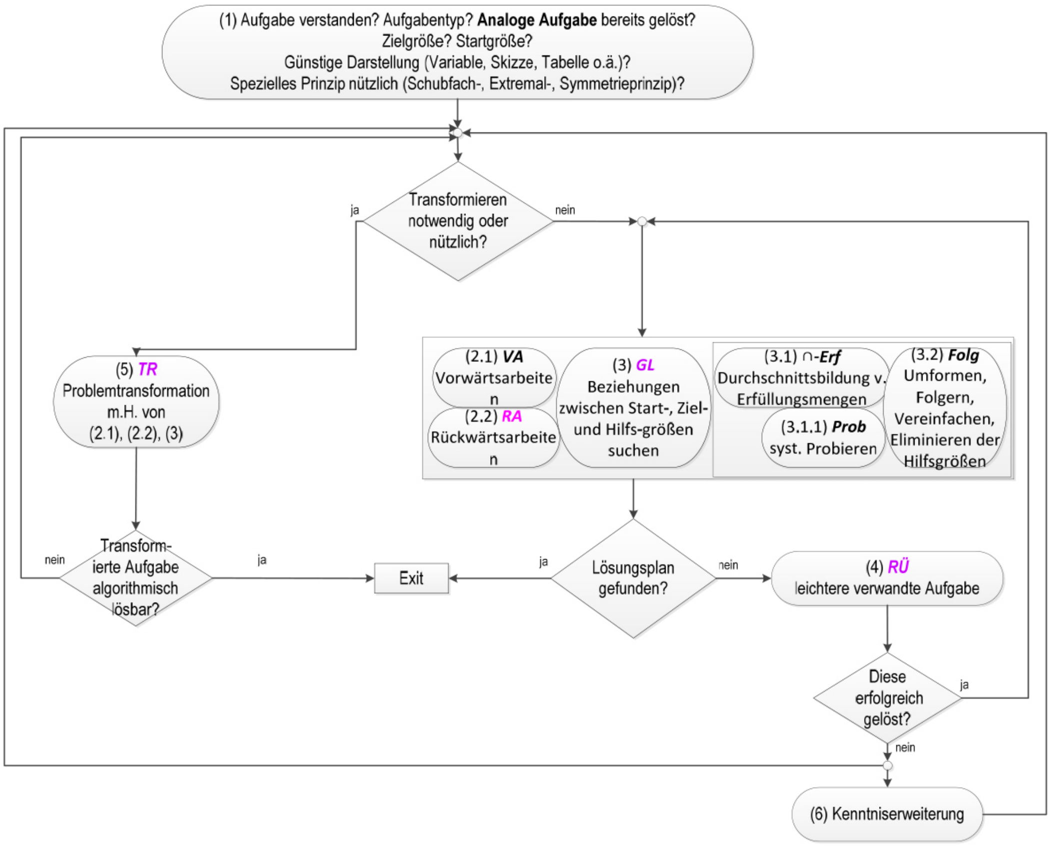


Abb. 1 Heuristisches Regelsystem nach König (1996)

Im Rahmen des Projektes HeuRekAP (**Heu**ristische **Rek**onstruktion von **A**ufgaben zum **P**roblemlösen) wurde die Entwicklung der Problemlösekompetenz eines Hannoveraner Gymnasiumsjahrgangs untersucht. Zwei Klassen erhielten dabei über den gesamten Zeitraum ein Heurismen- und Argumentationstraining – in Abb. 1 sind einige der trainierten Heurismen hervorgehoben. Die anderen beiden Klassen dienten als Vergleichsgruppen. Sowohl im Training als auch bei seiner Auswertung wurden Lösungswege durch Lösungsgraphen strukturiert repräsentiert. Vom Beginn des achten bis zum Halbjahr des neunten Schuljahrs wurden regelmäßig *Problembearbeitungen* schriftlich erhoben. Abschließend wurden diverse *Bearbei- tungsprozesse* der TIMSS-Aufgabe K10 videographiert.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Sektionsvorträge

Prozessanalysen: Anknüpfend an die Analyse des Auftretens der α-β- Barriere in den schriftlichen K10-Bearbeitungen (vgl. Vorjahressektion) wird untersucht, wie sie in einem Bearbeitungsprozess überwunden wird:

Gawlick, Th.: Pólya, König, Dörner – vom Nutzen Heuristischer Programme

Wir betrachten Programme von Pólya, König und Dörner anhand einer Be- arbeitung der TIMSS-Aufgabe K10 auf ihre Nützlichkeit:

1. theoretisch: Welches Potential enthalten sie bzgl. Erfolgsförderlichkeit?

2. empirisch: Was davon wird im Bearbeitungsprozess realisiert?

Lucyga, E.: Prozessanalyse mittels strukturell verfeinerter Prozesskodierung – Feinstrukturanalyse der Absichtsregulation

Die strukturell verfeinerte Prozesskodierung ermöglicht eine übersichtliche Repräsentation von Bearbeitungsstand und Problemlöseverhalten. Die Feinstrukturanalyse zeigt auf, wie Probanden lösungsförderliche Absichten verfolgen, was Einsichten in ihr heuristisches Programm ermöglicht.

Produktanalysen: Aus einer trainierten und einer nicht trainierten Klasse (Vergl.) wurden Matched Samples von je 20 Schülern ausgewählt. Unter- sucht wurden je 5 Aufgabenbearbeitungen dieser Probanden.

Brockmann-Behnsen, D.: Ist doch logisch – Untersuchungen der Korrektheit und des Verknüpfungsgrades von Schülerargumentationen

Zur Untersuchung der mathematischen Korrektheit und des Verknüpfungs- grades der Schülerargumentationen in diesen Bearbeitungen wurde ein Ka- tegoriensystem entwickelt. Dies wird anhand der Aufgabe K18 erläutert. Es zeigt sich ein Anstieg in der Trainings- gegenüber der Vergleichsklasse.

Jürgensen, K.: Strukturelle Analyse von Problemlöseerfolg und Heurismeneinsatz

Es wird dargestellt, inwieweit das Training den Bearbeitungserfolg beein- flusst. Weiterhin wird untersucht, ob sich mit Schulnoten, Erfolg bei Routineaufgaben und Heurismeneinsatz der Problemlöseerfolg vorhersagen lässt.

Literatur

König, H (1996): Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich. Chemnitz

Gilbert GREEFRATH, Christoph NEUGEBAUER, Münster

Übergang Schule-Hochschule: Möglichkeiten und Grenzen

Gerade im Bereich der Mathematik ist der Übergang von der Schule in das Studium mit großen Hürden verbunden (Heublein, 2013, Tall, 1991). Entsprechend zeigen sich an Hochschulen hohe Abbruchquoten in Studiengängen mit signifikanten Mathematikanteilen. Daher werden die Konzeption von Vor- bzw. Brückenkursen für Studierende vor Studienbeginn sowie Unterstützungsangebote während des ersten Studienjahres derzeit an vielen Hochschulen neu diskutiert (vgl. Bausch et al., 2014, Roth et al., 2015).

Um zum einen mögliche Vorkurskonzepte auf ihre Passung hin zu evaluieren und zum anderen individuelle Unterstützungsangebote für die künftigen Studierenden machen zu können, werden an vielen Hochschulen auch Tests zu Beginn des Vorkurses oder des Studiums durchgeführt. Eine weitere Möglichkeit Studienbewerber zu unterstützen, bieten sogenannte Self-Assessment-Tests. Diese können potenziellen Studienanfängerinnen und Studienanfängern eine detaillierte, studienfachbezogene Rückmeldung bezüglich ihrer Eingangskompetenzen geben und sie so in ihrer Entscheidung für oder gegen ein bestimmtes Studium unterstützen.

Im Rahmen der Forschung zu Vorkursen am Übergang Schule-Hochschule stellen Kürten & Greefrath die Selbstwirksamkeitserwartungen von neun Studienanfängerinnen und -anfängern an der Fachhochschule Münster vor, die mit Hilfe von Leitfadeninterviews vor und nach Besuch eines Mathematikvorkurses erhoben wurden. Parallel dazu werden die Daten von Mathematiktests dieser Studierenden in die Ergebnisse der Studierenden des Studienjahrgangs 2014/15 eingeordnet, die im Rahmen des Vorkurses im Projekt Rechenbrücke erhoben wurden.

Mathematisches Grundlagenwissen gilt für Podgayetskaya, Derr & Hübl als wichtige Voraussetzung für die Bewältigung eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums. Für den Online Vorkurs des Verbundprojekts optes wurden unterschiedliche Lehr-Lernszenarien erprobt, von der Verzahnung mit einem Präsenzangebot über die Unterstützung durch eMentoren bis hin zum reinen Selbststudium. Zusätzlich wurden Lerngruppen gebildet, die parallel zur Bearbeitung der Lernmodule online betreut wurden.

Neben Vorkursangeboten gibt es an vielen Standorten weitere studienbegleitende Unterstützungsangebote. Vor zwei Jahren wurde dazu für die Hochschule für Technik, Wirtschaft und Gestaltung (HTWG) ein pragmatischer Ansatz gesucht, die Bedingungen der Studieneingangsphase in Mathematik ergänzend zu den Vorkursen zu verbessern. Dazu wurde das Best-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Practice-Modell MathePlus der Ruhr-Universität Bochum übertragen. In der Retrospektive reflektiert Link, welche Kernaspekte an der HTWG zum Erfolg führen.

Über den Helpdesk Mathematik für Studierende der Ingenieur- und Naturwissenschaften an der Ruhr-Universität Bochum berichten Buchsteiner & Kallweit. Die über Jahre gesammelten Erfahrungen wurden genutzt, um die Professionalisierung des Helpdesk voranzubringen. Dabei entstanden ein bivalentes Regelwerk zur Beratung, neues eLearning-Material, frei verfügbare Lernzettel und sich wiederholende Kurz-Repetitorien.

Online-Self-Assessments versuchen bereits im Rahmen der Studienwahl die angehenden Studierenden auf mögliche Probleme hinzuweisen. An bestehenden Online-Self-Assessments wird jedoch vermehrt Kritik bezüglich der Aussagekraft geäußert. Ein besonderer Fokus bei solchen Assessmentsystemen liegt auf der Auswahl bzw. Entwicklung geeigneter Testitems. Im Rahmen des Beitrags von Neugebauer & Winter werden Aufgabenbeispiele aus mehreren Tests und Ergebnisse verschiedener Aufgabenanalysen vorgestellt, die die Basis für den erfolgreichen Einsatz eines Online-Self-Assessments bilden sollten.

Sektionsvorträge

Kürten, R., Greefrath, G. Selbstwirksamkeitserwartungen angehender Ingenieurstudierender – Einflüsse von Vorkurs und Tests im Projekt Rechenbrücke

Buchsteiner, J., Kallweit, M.: Professionalisierung des Helpdesk Mathematik

Podgayetskaya, T., Derr, K. Hübl, R.: Betreuungsangebote in einem Online Vorkurs Mathematik: Modularisierung als Antwort auf heterogene Studierendenschaft?

Link, F.: Best practice 2.0 – Von der Schwierigkeit von guten Beispielen zu lernen

Neugebauer, C. Winter, K.: Entwicklung zielgruppenadäquater diagnostischer Testitems für Online-Assessments

Literatur

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber. S., Wassong, T. (Hrsg.). (2014). Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., Sommer, D. (2013): Die Entwicklung der Schwund und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen, Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010, HIS: Forum Hochschule.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H., Prediger, S. (2015): Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik, Wiesbaden: Springer Spektrum.

Tall, D. (1991): Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer.

Tanja HAMANN, Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

Sektion: Mathematik. Unterricht. Geschichte

Die Verbindung von Mathematik und Geschichte bietet zahlreiche und äußerst vielfältige Fragestellungen und Themenfelder für die Mathematikdidaktik. Eine der wesentlichen Fragen hier ist die danach, in welcher Form – nach welchen Konzepten, mit welchen Methoden, unter Einsatz welcher Materialien – die Geschichtlichkeit der Mathematik Eingang in den Unterricht finden kann und welchen besonderen Wert Mathematikgeschichte für das Lernen von Mathematik dann haben kann; diese Fragen lassen sich auch auf die Philosophie der Mathematik übertragen, die im Allgemeinen ebenfalls eine historische Komponente enthält und daher hier ausdrücklich eingeschlossen wird. Notwendige Voraussetzung für die Einbindung von Mathematikgeschichte in Unterrichtsprozesse ist, wie bei anderen Inhalten auch, Forschung auf diesem Gebiet, so dass sich auch für die Didaktik zunächst einmal genuin mathematikhistorische Fragestellungen ergeben.

Eine andere Perspektive, die die didaktische Verbindung von Mathematik und Geschichte eröffnet, ist die auf die historische Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik bzw. – allgemeiner gesprochen – mathematischer Bildungsprozesse und -konzepte. In allen Fällen bieten geschichtliche wie auch philosophische Betrachtungen Reflexionsanlässe und ermöglichen somit ein vertieftes Verständnis, sowohl der Mathematik als auch des Mathematikunterrichts.

Die Sektion, die es in dieser Form zum ersten Mal gab, hatte neben der Zusammenführung der unterschiedlichen Vorträge entsprechend das Ziel, einen Überblick über eben diese Breite der Aspekte, Fragestellungen und Forschungsarbeiten zu Themen, die Mathematikunterricht mit Geschichte verbinden, zu geben; und in der Tat bildeten die zugehörigen Vorträge genau diese Vielfalt sehr gut ab[11].

Claudia BÖTTINGER stellte vor, wie im Rahmen des Projekts „MINT auf Schlössern" – das sich an mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler wendet – die Mathematik genutzt wird, um mit ihrer Hilfe die historische Bedeutung eines Schlosses zu erschließen. Konkret enthielten die Erkundungsaufträge dabei u. a. Aufgaben zum Messen, Kartieren und Rechnen mit Münzen sowie Abgaben (Schloss Borbeck, auf dem das Programm stattfand, war im Mittelalter zuständig für Münzpressung und Ver-

[11] Vgl. auch die Beiträge von Sebastian Schorcht und Shafie Shokrani, die aus organisatorischen Gründen nicht Teil der Sektion waren, wenngleich sie inhaltlich dazu gehören, sowie den Bericht des Arbeitskreises „Mathematikgeschichte und Unterricht".

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

waltung von Abgaben). Offen und somit ein Desiderat für die Forschung blieb die Frage nach einer theoretischen Beschreibung der Fähigkeit, mathematische Ergebnisse aus historischer Sicht zu interpretieren.

Darum, wie sich gesellschaftlicher Einfluss über die Jahrzehnte in Rechen- und Mathematikschulbüchern niederschlägt, ging es im Vortrag von Jennifer POSTUPA. Sie untersucht Schulbücher aus verschiedenen Epochen quantitativ, um einen Vergleich der zeitlichen Abschnitte zu ermöglichen, und stellte im Rahmen der Sektion erste Ergebnisse dazu vor, welche außermathematischen Aspekte (z. B. ökonomische Fragen) wie (z. B. im Hinblick auf die Art der Präsentation) und mit welchem Ziel (z. B. Meinungsbildung) über die Bücher jeweils Eingang in den Mathematikunterricht gefunden haben.

Mit dem Ziel einer didaktik-historischen Einordnung der sogenannten „Mengenlehre"-Reform in der Grundschule präsentierte Tanja HAMANN einige zentrale Ideen der Reformer und verglich diese – angeregt durch widersprüchliche zeitgenössische Bewertungen – mit Inhalten und didaktisch-methodischen Prinzipien, die Konzepten für den vorherigen Rechenunterricht zugrunde lagen. Sie stellte dabei fest, dass die wesentliche Neuerung weniger in den didaktischen wie methodischen Ideen als in Inhalten und Gesamtkonzept der Neuen Mathematik für die Grundschule zu finden sind.

Einen stärker grundlagenorientierten, reflexiv-philosophischen Blick auf die Mathematik bot Martin RATHGEB in seinem Vortrag, in dem er der Frage nachging, inwiefern sich aus George Spencer-Browns *Laws of Form* – ein Werk, in dem Spencer-Brown eine eigene Algebra nach eigens definierten logischen Regeln und somit ein Beispiel für Mathematik „in a nutshell" definiert – etwas über Mathematik, das Beweisen bzw. speziell das Beweisen per Fallunterscheidung lernen lässt.

Sektionsvorträge

Böttinger, C., Kaulvers, J.: Mit mathematischen Methoden ein Schloss erkunden – Möglichkeiten und Grenzen

Hamann, T.: Die Neue Mathematik in der Grundschule – Mengenlehre statt Rechnen?

Postupa, J.: Mathematikschulbücher – mehr als nur fachliche Inhalte

Rathgeb, M.: Können wir von Kreisen das Rechnen und Beweisen lernen? Experimente zur Entweder-Oder-Unterscheidung

Sebastian KUNTZE, Anika DREHER, Marita FRIESEN, Ludwigsburg

Situierte Erhebungsformen von Aspekten fachdidaktischer Lehrerinnen- und Lehrerexpertise

Geht man davon aus, dass sich fachdidaktisch relevante Expertisemerkmale von Mathematiklehrkräften im Umgang mit konkreten Unterrichtsinhalten oder in Bezug auf Unterrichtssituationen artikulieren, so liegt es nahe, für die empirische Untersuchung solcher Expertisemerkmale situierte Formate zu wählen. Verschiedene Untersuchungsdesigns können exemplarisch verdeutlichen, welche Möglichkeiten situierte Erhebungsformate bieten und welche Herausforderungen in diesem Zusammenhang entstehen.
Als Expertisemerkmale von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften kommen insbesondere sowohl Komponenten von Professionswissen (z.B. Shulman, 1986; Kuntze, 2012) sowie Sichtweisen und Überzeugungen in Frage, als auch Kompetenzfacetten wie Noticing (Sherin, Jacobs & Philipp, 2011) oder Analysekompetenzaspekte (z.B. Kuntze, Dreher & Friesen, akzeptiert). Auf derartige Expertisemerkmale kann jeweils mit situierten Erhebungsformen fokussiert werden.

Bezüglich solcher Erhebungsformen findet in der Forschung nach wie vor eine dynamische Entwicklung statt, in deren Rahmen gegenwärtig auch international zahlreiche empirische Studien entstehen. Die hier vorgestellte moderierte Sektion vereint daher eine exemplarische Auswahl einschlägiger Studien, anhand derer nicht zuletzt die Reichhaltigkeit und Unterschiedlichkeit entsprechender Ansätze deutlich werden kann.

Einen Überblick über Charakteristika solcher Studien gibt Sebastian Kuntze in seinem Vortrag über Expertisemerkmale von Mathematiklehrkräften und anforderungshaltige Situierungen, in dem insbesondere erörtert wird, welche Gestaltungsmöglichkeiten sich im Zusammenhang mit situierten Erhebungsformen bieten und welchen möglichen Schwierigkeiten die zugehörigen Untersuchungsdesigns begegnen müssen. Beispielartig werden drei eigene Studien bezüglich verschiedener Kriterien diskutiert. In ähnlicher Weise könnten auch andere Studien hinsichtlich ihrer Designs und der Passung zugrunde gelegter Konstrukte reflektiert werden.

Ein Beispiel für eine Studie, die auf fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen fokussiert, wird von Marita Friesen, Sebastian Kuntze und Markus Vogel beschrieben. In dieser Studie werden Situierungen in Form einer vignettenbasierten Erhebung anhand von Text-, Comic- und Videoformaten genutzt. Im Rahmen dieses Teilprojekts des Promotionskollegs „Effektive Kompetenzdiagnose in der Lehrerbildung“ (EKoL)“ werden Lehramtsstudierende, Lehramtsanwärter und praktizie-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

rende Lehrkräfte befragt, so dass in den Teilstichproben unterschiedliche Unterrichtserfahrung und Expertisegrade zu erwarten sind.
Julia Ollesch, Markus Vogel und Tobias Dörfler stellen eine vignettenbasierte Untersuchung vor, die – ebenfalls in EKoL – professionelles Wissen zum Computereinsatz im Fach Mathematik in den Blick nimmt. Die Studie verwendet eine spezielle Vignettenform, die sich aus einführenden Videoszenen und Bildschirmmitschnitten zusammensetzt. Insbesondere die Frage zu Expertenratings steht bei diesem Beitrag mit im Vordergrund.
Anika Dreher und Sebastian Kuntze thematisieren Rückschlüsse auf fachdidaktisches Kriterienwissen von Lehrkräften, die auf der Basis eines aufgabenbezogenen Befragungsformats gezogen werden können. Diese Studie wählt als Situierung das Diagnostizieren des Verständnisses des Bruchzahlbegriffes durch die befragten Lehrkräfte und untersucht Aufgaben, die die Lehrkräfte hierzu nannten. Christine Streit, Christof Weber und Christian Rüede stellen schließlich Ergebnisse zur diagnostischen Kompetenz von Experten und Novizen vor, wobei Unterschiede bei der Beurteilung von Schülerdokumenten im Vordergrund stehen. Mithilfe von Vignetten wird exploriert, wie Experten und Novizen Schülerdokumente lesen und welche Konsequenzen sie für die Weiterarbeit daraus ableiten. Neben einer theoretischen Einordnung werden das methodische Vorgehen und erste Ergebnisse erläutert. Insgesamt zeigen die Beiträge der moderierten Sektion, dass sich bei der Untersuchung professionellen Wissens, fachdidaktischer Kompetenzkonstrukte oder von Noticing Methoden anbieten, die auf Situationskontexte des Klassenraums referieren oder eine inhaltliche Situierung z.B. an konkreten Aufgabenstellungen wählen. Der Vorteil, mit solchen Erhebungsformaten näher an den Bereich fachdidaktisch relevanten Handelns und Reagierens heranzukommen geht mit untersuchungsmethodischen und auch theoretischen Herausforderungen einher, die abgestimmt auf die jeweiligen Fragestellungen berücksichtigt werden müssen. Dies wird in den Beiträgen der moderierten Sektion in einer großen Bandbreite deutlich.

Literatur

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 273–292.

Kuntze, S., Dreher, A., & Friesen, M. (akzeptiert). Teachers' Resources in Analysing Mathematical Content and Classroom Situations – The Case of Using Multiple Representations. *Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 2015)*.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Sherin, M., Jacobs, V., Philipp, R. (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes*. New York: Routledge.

Silke LADEL, Saarbrücken & Christof SCHREIBER, Gießen

Sektion ‚PriMaMedien‘

Die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht in der Primarstufe‘ tagt seit 2007 regelmäßig und ist Teil des Arbeitskreises Grundschule der GDM. Die Mitglieder der Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Dies soll auch der Kern dieser selbstmoderierten Sektion sein.

Die moderierte Sektion war gut besucht. Für die GDM 2015 in Basel konnten als Vortragende in der moderierten Sektion Daniel Walter (Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet-Apps), Roland Gunesch (Nutzung von Video-Vorlesungsaufzeichnungen durch Studierende: eine Studie) Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp (Dezimalbrüche und Stellenwerttafeln) gewonnen werden.

Die Vorträge im Einzelnen

Daniel Walter interessiert sich beim Einsatz von Tablet-Apps speziell für die Nutzung durch rechenschwache Kinder. Diese weisen häufig ein einseitig ordinales Zahlverständnis auf, offenbaren Defizite hinsichtlich der strukturierten Darstellung von Mengen und sind zumeist nicht in der Lage, verschiedene Repräsentationsebenen zu vernetzen. Digitale Medien, insbesondere Tablet-Apps, eröffnen in diesen Bereichen neue Fördermöglichkeiten. Wie rechenschwache Kinder Tablet-Apps nutzen und wie sich theoretisch erdachte Mehrwerte digitaler Medien (Multi-Touch – MELRs - Strukturierungshilfen) auf das Mathematiklernen auswirken, wurde bisher kaum erforscht. In Walters Beitrag wurden das Design sowie ausgewählte Ergebnisse einer qualitativen Interviewstudie vorgestellt, die auf die Inhalte des Arithmetikunterrichts des ersten Schuljahres abzielen.

Der Vortrag von Roland Gunesch handelte von Vorlesungsaufzeichnungen auf Video, die bei Hochschul-Studierenden sehr beliebt sind. Er stellte sich

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

dabei folgende Fragen: Wie setzen die Studierenden solche Videos tatsächlich ein? Mit welchen Zielen und Lernstrategien? Sehen sie die Videos nach jeder Vorlesung, oder blockweise vor der Klausur an? Welche Stellen wiederholen sie (durch Zurückspulen)? Wie nutzen Studierende Skript und Videos zur Vorlesungsnachbereitung? Gunesch konnte durch speziell konzipierte Umfragen interessante Einblicke geben.

Silke Ladel und Ulrich Kortenkamp gehen bei der Nutzung der interaktiven Stellenwerttafel über die Darstellung von ganzen Zahlen hinaus. Sie verwenden diese auch für die Repräsentation und Manipulation von Dezimalbrüchen (oder Systembrüchen). Im Vortrag wurde eine Erweiterung der i-Pad-App vorgestellt, die gemeinsam mit der Uni Bremen (Bikner-Ahsbahs & Behrens) für den Einsatz in heterogenen und integrativen Lerngruppen vorgesehen ist. Für die Forschung unterstützt sie die Erstellung von Tätigkeits-Protokollen.

Wichtig für künftige Angebote für die moderierte Sektion ist die vorherige Anmeldung über die Sprecher der Arbeitsgruppe, damit ein passendes Angebot bereitgestellt werden kann.

Sektionsvorträge

Gunesch, R.: Nutzung von Video-Vorlesungsaufzeichnungen durch Studierende: eine Studie

Ladel, S. & Kortenkamp, U.: Dezimalbrüche und Stellenwerttafeln

Walter, D.: Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet- Apps

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN

Mathematik und Sprachkompetenz

Die Beziehungen zwischen Mathematik, Sprache, Kultur, sprachbezogenen Kompetenzen und Sprachwissenschaften und die damit verbundenen Problemlagen bildeten den Themenbereich der Sektion.

In einem Beitrag zu schriftlichen Schülerdokumentationen stellte Florian Schacht Ergebnisse einer Untersuchung zu Zusammenhängen zwischen der Nutzung digitaler Werkzeuge und dem sprachlichen Handeln im Mathematikunterricht vor. Auf empirischer Basis wurden werkzeugsprachliche Kategorien herausgearbeitet. So nutzen Schülerinnen und Schüler zur Dokumentation ihres Bearbeitungsweges z.T. explizite Verweise zum Werkzeug, etwa unter Bezugnahme auf die Menüführung, die gedrückten Tasten oder durch Nutzung der spezifischen Syntax des Werkzeugs. Neben solchen werkzeugsprachlichen Kategorien wurden verschiedene unterrichtliche Szenarien diskutiert, die jeweils spezifische normative Anforderungen an sprachliches Handeln stellen und vor deren Hintergrund die Nutzung einer solchen werkzeugbezogenen Sprache hinsichtlich ihrer Angemessenheit beurteilt werden kann.

Der Titel des Vortrags von Selina Pfenniger und Helmut Linneweber-Lammerskitten „Wie entscheide ich mich?“ lässt sich unter zwei Aspekten betrachten (i) in Bezug auf das Resultat der Entscheidung, (ii) in Bezug auf den Weg der Entscheidungsfindung. Zu beiden Interpretationen bietet die Spieltheorie ein Instrument mit dem rationale und begründbare Lösungen gefunden werden können. Der Inhalt ist deshalb geeignet um Argumentationskompetenzen zu fördern. Im Mathematikunterricht werden üblicherweise gegebene Sachverhalte begründet. Der Mehrwert im Bereich des Argumentierens entsteht dadurch, dass sich mit der Spieltheorie ein zweiter Handelnder mit seiner Strategiewahl einbeziehen lässt. Eine Voruntersuchung hatte zum Ziel mit einer ersten Lernumgebung den Inhalt in der Schule einzubringen und die Argumentationskompetenz damit zu fördern.

Im Beitrag „Mathematikdidaktische Fachsprache von Studierenden bei der Analyse von Schülerlösungsprozessen zu kompetenzorientierten Aufgaben“ diskutierten Michael Besser, Denise Depping, Timo Ehmke und Dominik Leiss im Rahmen des Forschungsprojekts LEVEL einen ausgewählten Aspekt diagnostischen Wissens und Könnens von Mathematik-Lehramtsstudierenden als spezifische Facette fachdidaktischer Expertise. Die Auseinandersetzung mit der Verwendung mathematikdidaktischer Fachsprache von Studierenden bei der Analyse von Schülerlösungsprozessen erfolgte hierbei unter Rückgriff auf einen neu entwickelten Paper-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Pencil-Expertisetests, welcher fachdidaktisches Diagnosewissen zum mathematischen Modellieren, zum mathematischen Problemlösen sowie zum formalen technischen Arbeiten erhebt. Eine detaillierte Betrachtung der schriftlichen Antworten der Studierenden innerhalb dieses Paper-Pencil-Tests mit Blick auf die Verwendung mathematikdidaktischer Fachtermini ermöglichte dabei eine kritische Reflexion des (fachdidaktischen) Begriffsverständnisses von Studierenden zu spezifischen Ideen eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts.

Im Rahmen des Projektes „Umbrüche gestalten Sprachenförderung und -bildung als integrale Bestandteile innovativer Lehrerbildung in Niedersachsen“ entwickelten Wissenschaftler aus der Mathematikdidaktik und dem DaZ-Bereich zusammen Konzeptionen und Materialien für verschiedene Veranstaltungen (fachdidaktisches Seminar, Überblicksvorlesung zur Mathematikdidaktik) im Rahmen der Lehrerausbildung im Fach Mathematik, welche im WS 14/15 durchgeführt bzw. evaluiert wurden. Im Vortrag von Barbara Schmidt-Thieme „Wie viel Sprache steckt im Fach Mathematik?“ wurden konzeptionelle Fragen (z.B. implizite vs. explizite Vermittlung, notwendiges sprachliches Wissen von Hochschuldozenten) wie erste Evaluationsergebnisse vorgestellt.
In seinem Beitrag „Mathematische Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz“ stellte Helmut Linneweber-Lammerskitten anhand eines Videoclips aus dem Projekt VITALmathLIC mathematikdidaktische und sprachwissenschaftliche Aufbauprinzipen von kurzen Videoclips vor, die auf die Förderung der Kompetenzbereiche „Darstellen & Kommunizieren“ und „Argumentieren und Begründen“ ausgerichtet sind. Die etwa 3-minütigen Videoclips zeigen einen interessanten mathematischen Zusammenhang und einen sich daraus ergebenden fiktiven Dialog zwischen Lernenden. Die Clips sind so aufgebaut, dass sie zu einem gemeinsamen Experimentieren und Weiterdenken anregen, die dazu nötige mathematische Einführung geben und sprachlich-kommunikative Mittel für den Dialog in der Schülergruppe bereit stellen.

Sektionsvorträge

Schacht, F.: „Ich drücke menu-4-1-4“. Schülerdokumentationen bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen

Pfenniger, S., Linneweber-Lammerskitten, H.: Wie entscheide ich mich?

Besser, M., Depping, D., Ehmke,T., Leiss, D.: Mathematikdidaktische Fachsprache von Studierenden bei der Analyse von Schülerlösungen zu kompetenzorientierten Aufgaben

Schmidt-Thieme, B.: Wie viel Sprache steckt im Fach Mathematik?

Linneweber-Lammerskitten, H.: Mathematische Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz

Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Freiburg Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Flexibles Rechnen erfassen und entwickeln

Flexibilität beim Rechnen und algebraischen Denken gelten seit einigen Jahren als zentrales Ziel des Mathematikunterrichts (Lorenz, 1997; Selter, 2009; Threlfall, 2002; Torbeyns et al., 2009). Dabei erstreckt sich die Zeitspanne der Förderung von der ersten Klasse bis in die Sekundarstufe.

Das Konstrukt „Flexibilität beim Rechnen oder algebraischen Denken" ist in der Literatur allerdings nicht einheitlich definiert. Im englischsprachigen Raum finden sich die Bezeichnungen „flexibility" und „adaptivity" (Verschaffel et al., 2009, 337). Mit „flexibility" wird nahezu einheitlich der Wechsel zwischen den strategischen Werkzeugen verbunden; das Verständnis von aufgabenadäquatem Handeln ist jedoch sehr unterschiedlich und es lassen sich drei verschiedene Ansätze herausarbeiten (Rechtsteiner-Merz, 2013): Aufgabenadäquates Handeln als Adäquatheit

- von Lösungsweg und Aufgabencharakteristik,
- von Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit oder
- des Referenzrahmens.

Wird aufgabenadäquates Handeln mit der Aufgabencharakteristik verbunden, so gehen die Autoren davon aus, dass die Art der Aufgabe exakt einen bestimmten Lösungsweg nahe legt (Blöte, Klein & Beishuizen, 2000; Schipper, 2005). Definitionen, die Adäquatheit im Zusammenhang mit Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit sehen nehmen die individuellen Fähigkeiten des Lösenden in den Blick: Die genutzte Strategie wird dann als aufgabenadäquat bezeichnet, wenn sie sich für den Lösenden als die schnellste erweist (Verschaffel et al., 2009). Wird unter aufgabenadäquatem Handeln der Referenzrahmen betrachtet, so steht ebenfalls die individuelle Vorgehensweise des Lösenden im Mittelpunkt: Allerdings kommt es bei dieser Definition darauf an, ob beim Lösen auf Zahl- und Aufgabenmerkmale oder auf Verfahren zurückgegriffen wird (Rathgeb-Schnierer, 2011; Threlfall, 2009), nur im ersten Fall liegt aufgabenadäquates Handeln vor. Auch in den Vorträgen der Sektion spiegelte sich durchaus ein unterschiedlicher Blick auf Flexibilität und Aufgabenadäquatheit wider und sie zeichneten sich durch eine große Bandbreite bezogen auf die Klassenstufen aus:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Jan Block stellte einen Teilaspekt seines Forschungsprojekts vor, in dem er der Frage nachgeht, inwieweit Schülerinnen und Schülern der 9. Klasse Terme sinnvoll variieren und deren Ableitungen einschätzen können.

- Michael Gaidoschik und Anne Fellmann befassten sich mit einer zentralen Voraussetzung für Flexibilität: dem Ablösen vom zählenden Rechnen. In diesem Zusammenhang warfen sie die Frage auf, ob das Alles- und Weiterzählen beim Rechnenlernen so stark betont und gefördert werden sollte.

- Aiso Heinze präsentierte Ergebnisse aus dem Forschungsprojekt Tiger, in dem zwei Unterrichtskonzepte (Strategielernen und Zahlenblickschulung) in einer Experimentalstudie miteinander verglichen wurden.

- Elisabeth Rathgeb-Schnierer stellte die Ergebnisse einer Studie aus Deutschland und den USA vor, in der das Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und -beziehungen als Indikator für Flexibilität untersucht wurde.

Sektionsvorträge

Block, J.: Flexibles algebraisches Handeln bei quadratischen Gleichungen durch Aufgaben zum Variieren erfassen und entwickeln

Gaidoschik, M. & Fellmann, A.: Zählendes Rechnen im 1. Schuljahr: (Vermutlich) weder notwendig noch förderlich

Grüßing, M., Schwabe, J. Heinze, A. & Lipowsky, F.: Anderer Unterricht – andere Rechenstrategien? Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsstrategien

Rathgeb-Schnierer, E.: Welche Aufgabenmerkmale erkennen und nutzen Grundschulkinder? Ergebnisse einer Studie zur Erfassung von Flexibilität

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rechtsteiner@ph-weingarten.de

Jürgen ROTH, Landau, Katja LENGNINK, Gießen

Sektion „Lehr-Lern-Labore Mathematik“

An immer mehr Standorten gibt es außerschulische Lernorte Mathematik mit denen in der Regel mehrere Ziele verfolgt werden.

1. Schülerlabor Mathematik

Schülerlabore bzw. Lernwerkstätten bieten ein attraktives mathematisches Angebot zum forschenden Lernen anhand von enaktiv handhabbaren Materialien und zum Teil auch computergestützten Simulationen für Schüler/innen. Es geht in der Regel darum, bei Schüler/inne/n das Interesse an Mathematik zu wecken und/oder zu fördern, ihnen an mathematikhaltigen Phänomenen authentisch zu vermitteln, was Mathematik kennzeichnet und was mathematisches Arbeiten bedeutet, sowie die Erkenntnis zu ermöglichen, dass Mathematik deutlich mehr ist als das Abarbeiten von Kalkülen oder Algorithmen (vgl. Baum, Roth, Oechsler 2013).

2. Lehr-Lern-Labor

Wenn diese Schülerlabore darüber hinaus auch dazu dienen, eine theorie- und forschungsbasierte sowie praxisnahe Ausbildung von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik zu ermöglichen, dann sprechen wir in Abgrenzung zu reinen Schülerlaboren von *Lehr-Lern-Laboren Mathematik*. Studierende arbeiten hier idealerweise im Sinne einer zyklischen fachdidaktischen Entwicklungsforschung. Sie sammeln zunächst Erfahrungen mit Laborlernumgebungen, konzipieren und erstellen auf dieser Basis theorie- geleitet neue Lernumgebungen und erproben diese mit Schüler/inne/n. Bei der Erprobung betreuen Lehramtsstudierende Schüler/innen und diagnostizieren deren Arbeit. Die Ergebnisse fließen dann idealerweise wieder in die Weiterentwicklung der Lernumgebung ein. Hier können Lehramtsstudierende im Sinne des forschenden Lernens im Idealfall auch in mathematik- didaktische Forschungsprojekte im Rahmen des Lehr-Lern-Labors eingebunden werden. Zudem reflektieren sie die eigene Arbeit mit den Schüler/innen, was zur Professionalisierung im direkten Sinn beiträgt.

3. Forschungsumgebung

Schülerlabore sind nicht zuletzt ideale Forschungsumgebungen für fachdidaktische und bildungswissenschaftliche empirische Forschung. Einerseits kommen Schulklassen oder Schüler/innen-Gruppen in das jeweilige Labor, wodurch die Praxisrelevanz sichergestellt wird. Andererseits können in der Laborumgebung sehr gezielt Einflussvariablen für den Lernprozess variiert und kontrolliert werden. So lassen sich theoriegeleitete und experimentelle Untersuchungen unter

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Laborbedingungen, aber mit deutlichem Praxisbezug umsetzen. Darüber hinaus ist die Datenaufnahme (z. B. die Videoaufzeichnung von Gruppenarbeitsphasen) mit zum Teil erheblich weniger Aufwand verbunden, als im schulischen Unterricht. Aus diesen und weiteren Gründen ist die Arbeit in und an Lehr-Lern-Laboren auch integraler Bestandteil der mathematikdidaktischen Forschung am jeweiligen Standort.

4. Lehr-Lern-Labor-Standorte

In der Sektion wurden Konzepte aus folgenden Standorten vorgestellt:
– LernWerkstatt Mathematik, Gießen
www.uni-
giessen.de/cms/fbz/fb07/fachgebiete/mathematik/idm/lernwerkstatt/ –
Schülerlabor Mathematik, Karlsruhe
www.math.kit.edu/didaktik/seite/schuelerlabor/
– Mathematik-Labor „Mathe ist mehr", Landau
www.mathe-labor.de
– Mathe für kleine Asse, Münster
wwwmath.uni-muenster.de/42/portal/mathe-fuer-kleine-asse/
– MatheWerkstatt, Siegen
www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/mathewerkstatt/
– MATHEMATIK-Labor, Würzburg
www.mathe-labor.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de

Sektionsvorträge

Roth, J.: Lehr-Lern-Labor Mathematik – Lernumgebungen (weiter-) entwickeln, Schülerverständnis diagnostizieren

Lengnink, K.: Begriffe bilden im Geometrieunterricht – Eine Reflexion von Lehr-Lernprozessen

Benölken, R., Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse – Ein Lehr-Lern-Labor an der Universität Münster

Dittrich, E.: Mathematik erleben, entdecken und begreifen außerhalb des Schulunterrichts – Fachdidaktik und Schülerlabor

Beck, J., Mungenast, S., Baum, S., Weigand, H.-G.: Die Drei-Phasen-Idee des Mathematiklabors der Universität Würzburg – Konzeption, Durchführung u. Weiterentwicklung Helmerich, M., Hoffart, E.: Mathematik rund um meinen Körper – ein Praxisbericht aus der MatheWerkstatt zum differenzierten Lernen

Literatur

Baum, S., Roth, J. & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik – Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *Der Mathematikunterricht, 59/5*, S. 4-11

Hans-Stefan SILLER, Koblenz, Martin BRACKE, Kaiserslautern

Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Die Beiträge der Sektion „Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht“ zeigen Möglichkeiten einer umfassenden und umfangreichen Diskussion mit Hilfe mathematischer Werkzeuge Vorgänge in der realen Welt zu untersuchen und in gleicher Weise zu reflektieren. Damit wird der bereits im letzten Jahr (vgl. Siller & Bracke, 2014, S. 85) formulierte Wunsch über „die *Diskussion und Reflexion über die Natur der Modelle sowie über vorgenommenen Modellierungen*, *Veranschaulichung des bewussten Konstruierens der Modelle für die Beschreibung und Deutung realitätsbezogener Phänomene*, *Prüfung von Modellannahmen auf deren Tragfähigkeit allenfalls Verwerfen ungeeigneter Modellannahmen bzw. Aufzeigen von Modellgrenzen* sowie *systematische Trennung zwischen Betrachtungen in der realen Erfahrungswelt und der Modellwelt“* berücksichtigt und für schulische Anlässe aufbereitet.

Der Prozess des mathematischen Modellieren ermöglicht es, in realen und sinnhaften Kontexten Mathematik aktiv zu betreiben (vgl. Siller, 2015, S. 2). Anhand real existierender Probleme (vgl. Roeckerath, Frank & Hattebuhr, Grafenhofer & Hupp, Bracke und Siller & Kirfel in dieser Sektion) werden Fragestellungen formuliert und mathematisch wichtige und relevante Aspekte realisiert und implementiert (vgl. Bruder, 2001). Vom konkreten Problem ausgehend sind mathematische Begriffe, Werkzeuge und Abläufe besser fassbar und verständlicher – ganz dem Zitat Blomhojs und Jensens (2003, S. 126) folgend: „By mathematical modelling [...] we mean being able to autonomously and insightfully carry through all aspects of a mathematical modelling process in a certain context.“

Den Beiträgen der Sektion gemeinsam ist dabei die Art der Darstellung hinsichtlich des Detailgrades: Der Schwerpunkt – auch in den anschließenden Diskussionen – liegt nicht in sehr konkreten und detailliert ausgeführten Beschreibungen der Lösungswege oder in Rezepten („Anleitungen“) für Lehrkräfte. Vielmehr wird das Konkrete, d.h. das für Schülerinnen und Schüler Erlebbare, in den Fokus der Aufmerksamkeit gestellt. Auftretende Parameter müssen innerhalb der Problemstellung (mehrmals) geordnet, zusammengefasst oder gegeneinander abgegrenzt werden (vgl. Siller, 2015, S. 2), sodass letztlich ein gültiges Modell entsteht, das durch allfällige Validierung mit dem realen Problem abgeglichen wird (vgl. Siller & Maaß, 2009). Wenn Lehrkräfte als Begleiter eines Modellierungsprozesses den Schülerinnen und Schülern Raum und Zeit für eigene Erfahrungsprozesse

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bietet, so scheinen Motivation und Tiefe der möglichen Lernerfahrungen größer zu werden. Auf der anderen Seite tritt die Bedeutung detailliert ausgearbeiteter Lösungsansätze in den Hintergrund: Sie eignen sich kaum bei der Unterstützung individueller Lern- und Forschungsprozesse, sind in vielen Fällen sogar kontraproduktiv.

Die Diskussionen der Sektionsbeiträge zeigt, dass die in Siller & Bracke (2014, S. 86) formulierte These auch dieses Jahr durch die Sektionsbeiträge weiter gestützt wird:

Modellbilden besitzt eine allgemeinbildende gesellschaftliche Relevanz über die Mathematik und den Mathematikunterricht hinaus, eignet sich als Strukturierungsmaßnahme im bzw. für den Mathematikunterricht und kann v.a. im projektorientierten Unterricht umgesetzt werden.

Sektionsvorträge

Roeckerath, C., Frank, M. & Hattebuhr, M.: Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun? – Projekttag des Education-Lab CAMMP der RWTH Aachen

Roeckerath, C., Frank, M. & Hattebuhr, M.: Optimierung der Spiegel in einem Solarkraftwerk – Projekttag des Education-Lab CAMMP der RWTH Aachen

Grafenhofer, I. & Hupp, I.: Joghurtverpackungen unter der mathematischen Lupe

Bracke, M.: Computer erkennen Laubblätter – Das Produkt als Motivation

Siller, H.-St. & Kirfel, C.: Graphikprogramme als Modellierungsanlass?

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 123–234). Münster: Waxmann.

Blomhøj, M.; Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. In *Teaching Mathematics and its applications*. 22 (3), S. 123–139.

Bruder, R. (2001). Mathematik lernen und behalten. In Heymann, H.-W. (Hrsg.), *Lernergebnisse sichern*. Pädagogik, 53 (2001), H. 10, S. 15–18.

Siller, H.-St., Bracke, M. (2014). Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht. In Roth, J.; Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM, S. 85–86.

Siller, H.-St., Maaß, J. (2009). Fußball EM mit Sportwetten. In Brinkmann, A., Oldenburg, R. (Hrsg.), *ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht*. Band 14, Hildesheim: Franzbecker, S. 95–122.

Siller, H.-St. (2015). Realitätsbezug im Mathematikunterricht. In Siller, H.-St. (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht*, 5/2015, S. 2 - 7.

Hans-Stefan SILLER, Koblenz, Regina BRUDER, Darmstadt,
Torsten LINNEMANN, Basel, Tina HASCHER, Bern

Kompetenzstufen- und Kompetenzentwicklungsmodelle

Die Diskussion um Kompetenzstufenmodellierung im Zuge der Kompetenzorientierung ist noch immer Teil der (internationalen) mathematikdidaktischen und bildungswissenschaftlichen Diskussion. Insbesondere in internationalen Vergleichsstudien zum Mathematikunterricht, werden anhand von Kompetenzstufungen Anforderungen definiert, die eine inhaltliche Interpretation der Testleistungen ermöglicht. Es wird davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler, welche die Anforderungen einer bestimmten Kompetenzstufe erfüllen, auch in der Lage sind, Anforderungen darunterliegender Kompetenzstufen zu erfüllen (vgl. Klieme, Neubrand, & Lüdtke, 2001; Blum et al., 2004). Anforderungen höherer Kompetenzstufen können dagegen nicht a priori erfüllt werden. Kompetenzstufenmodelle bieten damit auch eine Operationalisierungsgrundlage zur Aufgabenentwicklung bzw. ermöglichen die Einstufung vorhandener Lern- und Testaufgaben. Aus fachdidaktischer Perspektive stellen solche Kompetenzmodellierungen eine besondere Herausforderung dar. Für die PISA-Testungen halten Prenzel, Sälzer, Klieme, und Köller (2013, S. 40) fest: „Kompetenzstufen in PISA sind [...] eine inhaltliche Interpretation der Tests und eine Form der Übersetzung von Punkten in anschauliche Kompetenzbeschreibungen der Schülerinnen und Schüler." In den Kompetenzmodellen des deutschsprachigen Raums (AECC, 2008; HarmoS, 2011; KMK, 2012) werden Inhaltsbereiche, allgemeine mathematische Kompetenzen und Kompetenzniveaus betrachtet. Die Kompetenzniveaus sind eher vage formuliert – und lassen sich am ehesten anhand der empirischen Aufgabenschwierigkeit beschreiben Es erscheint daher notwendig, die Veränderung und Entwicklung der Kompetenzen zu präzisieren (siehe auch Schneeberger, 2009). Modellierung von Kompetenzen erfordert einerseits eine Definition und andererseits eine Präzisierung der Kompetenzbereiche (Schecker & Parchmann, 2006, S. 48). Einen weiteren wichtigen Punkt gilt es zu berücksichtigen: Es bedarf verschiedener Typen von Modellen, da *ein* Kompetenzstufenmodell nicht alles leisten kann. Ab- hängig vom Einsatzbereich, beispielsweise in Lehr-Lern- oder Prüfungssituationen, sind sowohl unterschiedliche Voraussetzungen als auch unterschiedliche Zielsetzungen zu berücksichtigen. Daraus ergibt sich aus unserer Sicht die Forderung, bei der Setzung der jeweiligen Stufen im Kompetenzmodell die empirische Schwierigkeit nicht als Maß für die Stufung zu verwenden, sondern diese auf Basis einer normativen Setzung zu formulieren (vgl. Siller et al., 2015), die auf fachdidaktischen und bildungswissenschaftlichen Vorarbeiten beruht.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Durch ein Kompetenzstufenmodell wird eine sachliche Bezugsnorm „definiert“, die im Fall der Zertifikatsvergabe über die individuelle Bezugsnorm zu setzen ist. Nicht nur Lehrpersonen, sondern auch die Abiturientinnen und Abiturienten können sich an inhaltlich definierten Kompetenzniveaus orientieren, die als Ankerpunkte curriculare Vorgaben beinhalten und mittels einer verbalen Kompetenzausprägung verständig – als Ergänzung zu einem bestehenden Beurteilungsmodell – zur Verfügung stehen. Aus der fachdidaktischen Perspektive muss daher auch die Frage „Welche Entwicklungsstufen sind unterscheidbar und können in didaktischen Modellen abgebildet werden?“ (vgl. Bruder et al., 2014) gestellt werden.

Literatur

AECC (Hrsg.) (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ – Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*. Klagenfurt: Institut für Didaktik der Mathematik. Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität.

Bruder, R., Bergmann, L., Krüger, U.-H. (2014): LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-V erlag

Biehler, R.; Leuders, T. (2014). Kompetenzmodellierungen für den Mathematikunterricht. R. Biehler, S. Hußmann, P. Scherer (Hrsg.), *Journal für Mathematikdidaktik*. Band 35, Heft 1, Heidelberg: Springer.

HarmoS (2011). Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. Freigegeben von der EDK-Plenarversammlung.

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungenbeschluesse/2012/20121018-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [21.02.2015].

Klieme, E. et al (2004). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – eine Expertise*. Berlin: BMBF.

Prenzel, M., Sälzer, Ch., Klieme, E., & Köller O. (Hrsg.) (2013). *PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland*. Münster: Waxmann.

Schecker, H. & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für die Didaktik der Naturwissenschaften*, 12, 45-66.

Schneeberger, Martin (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog – Der Erwerb von Mathematisierkompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis*. Internationale Hochschulschriften, Band 529, Münster/New York: Waxmann.

Siller, H.-St.; Bruder, R.; Linnemann, T.; Hascher, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E. (2015). Competency level modelling for school leaving examination. CERME 9, TWG 17, Collected papers - http://www.cerme9.org/products/wg17/, S. 194–205

4 Beiträge zu den Einzel- und Sektionsvorträgen

Christoph ABLEITINGER, Wien

Übungsaufgaben zur Überwindung der zweiten Diskontinuität in der gymnasialen Lehrerbildung

Während die erste Diskontinuität in der gymnasialen Lehrerbildung – also der Übergang von der Schule an die Universität – in den letzten Jahren bereits große Beachtung in der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung gefunden hat, wurde der zweiten Diskontinuität bislang weit weniger Aufmerksamkeit geschenkt (vgl. etwa den Sammelband zur doppelten Diskontinuität: Ableitinger, Kramer und Prediger 2013, bzw. Biehler 2014, Luk 2005).

Gemeint ist mit der zweiten Diskontinuität die Schwierigkeit vieler Absolventinnen und Absolventen, ihre an der Universität erfahrene fachliche, aber auch fachdidaktische Ausbildung für ihre bevorstehende Berufstätigkeit nutzbar zu machen. Dass der dafür nötige Transfer in aller Regel nicht von alleine passiert, sondern bestenfalls durch gezielte Intervention, zeigen die Erfahrungen in der Lehrerausbildung, aber auch zahlreiche Gespräche mit Junglehrkräften, die sich durch das Studium oft nur unzureichend auf die Erfordernisse im Schulalltag vorbereitet fühlen.

Im vorliegenden Beitrag soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie Übungsaufgaben dazu genutzt werden können, eine Brücke zu schlagen zwischen den Inhalten der fachlichen und fachdidaktischen Lehre einerseits und den Erfordernissen im Schulunterricht andererseits.

1. Veranstaltungen zur Schulmathematik an der Universität Wien

Im seit dem Wintersemester 2014/15 gültigen Bachelorcurriculum für das Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Wien findet sich ein durchgängiges Prinzip, das eine stärkere Verzahnung der fachinhaltlichen Ausbildung mit der fachdidaktischen Reflexion dieser Inhalte vorsieht. Das Konzept ist so angelegt, dass im auf eine Fachveranstaltung folgenden Semester eine sogenannte „Schulmathematik"-Veranstaltung (bestehend aus einer zweistündigen Vorlesung und einer einstündigen Übung) zum entsprechenden Thema zu absolvieren ist, die auf die Fachveranstaltung möglichst engen Bezug nehmen soll. So findet man beispielsweise im zweiten Studiensemester die Fachveranstaltung „Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt", im dritten Semester dann die (den ECTS-Punkten nach sowohl der Didaktik als auch dem Fach zugeordneten) Veranstaltung „Schulmathematik Geometrie und Vektorrechnung". Analog gibt es ein entsprechendes Tandem auch für die Analysis und die Stochastik (Studienplan 2014). Im noch fertig zu entwickelnden Master-Curriculum wird es al-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ler Voraussicht nach auch ein Tandem zur Angewandten Mathematik geben. Was sollen diese Schulmathematik-Vorlesungen (nach Ansicht des Autors) leisten?

- Sie sollen Bezüge herstellen zwischen den hochschulmathematischen Inhalten und jenen in der Schulmathematik.
- Diese Bezüge sollen in zweierlei Richtungen genutzt werden: Die hochschulmathematische Perspektive soll dazu beitragen, Inhalte der Schulmathematik tiefer zu verstehen (Schulmathematik von einem höheren Standpunkt), und die Schulmathematik soll dafür herangezogen werden, anschauliche Grundlagen für Begriffe, Strukturen und Verfahren der Hochschulmathematik zu liefern.
- Es sollen in den Vorlesungen allgemeine mathematikdidaktische Konzepte vorgestellt und auf einzelne Teilgebiete der Schulmathematik herunter gebrochen werden, im Sinne von: Welche Ausprägung haben diese Konzepte für das Teilgebiet konkret?
- Sie sollen den Erwerb von Diagnose- und Förderkompetenzen (Erkennen typischer Schüler-Fehlvorstellungen zu Inhalten einzelner Teilgebiete inkl. passender Interventionen) ermöglichen.
- Es sollen Methoden zur Unterrichtsplanung und -gestaltung und deren Umsetzung präsentiert werden.

2. Rolle und Chance der Übungen

Die Übungen zu den Schulmathematikvorlesungen bieten im Hinblick auf die Überwindung der zweiten Diskontinuität nun eine große Chance. Übungsaufgaben sind – das kennt man auch von den Übungsaufgaben zu Fachveranstaltungen – meist ein geeignetes Mittel zur kognitiven Aktivierung der Studierenden. Sie müssen sich intensiv mit den Aufgabenstellungen auseinander setzen, insbesondere dann, wenn es darum geht, Transfer- oder Reflexionsleistungen zu erbringen.

Als Lehrveranstaltungsleiter einer Schulmathematik-Veranstaltung kann man unterschiedliche Zielrichtungen mit den an die Studierenden gestellten Aufgaben verfolgen. Im Anschluss sei eine Klassifizierung von Aufgabentypen versucht, die die dabei gegebene Bandbreite deutlich machen soll:

- Aufgaben zur Illustration mathematikdidaktischer Theorien, Konzepte und Werkzeuge
- Aufgaben zur Nutzung des Computers im Unterricht (inkl. Reflexion über Chancen und Risiken)

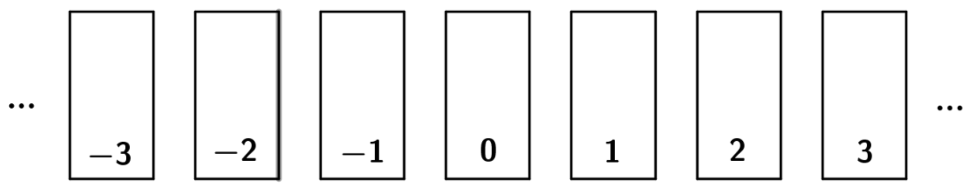
- Aufgaben, die den Blick vom hochschulmathematischen Standpunkt aus auf die Schulmathematik lenken
- Aufgaben, die eine didaktische Analyse von Schulbuchinhalten anregen
- Aufgaben, die Vermittlungskompetenzen schulen
- Diagnoseaufgaben (evtl. inkl. Entwicklung geeigneter Fördermaßnahmen)
- Aufgaben zur Erstellung von Prüfungsaufgaben
- Aufgaben zur Erstellung von Arbeitsaufträgen/Lernumgebungen

3. Zwei Beispielaufgaben zur Illustration

Aufgabe 1 (soll den Blick vom hochschulmathematischen Standpunkt aus auf die Schulmathematik lenken): Vergleichen Sie die folgenden Beweise für die Produkt- bzw. Quotientenregel aus zwei unterschiedlichen Schulbüchern! Notieren Sie alle Unterschiede zwischen den jeweiligen Beweisen! Entscheiden Sie jeweils, ob die Unterschiede prinzipieller Natur sind oder nur die Notation betreffen! Welche Beweise würden Sie für den Schulunterricht auswählen? Begründen Sie Ihre Wahl!

Auf die im Anschluss an die Aufgabenstellung abgedruckten Schulbuchbeweise wird hier aus Platzgründen verzichtet. Es geht in dieser Aufgabe zunächst darum, einen analytischen, fachlichen Blick auf schulmathematische Inhalte zu werfen. Des Weiteren soll die Aufgabe aber auch verdeutlichen, dass Aussagen auf unterschiedliche Arten bewiesen werden können und für den Schulunterricht eine (didaktisch begründete) Auswahl zu treffen ist. Schließlich dient die Aufgabe auch dazu, über Schulbuchinhalte zu reflektieren, also eine Haltung bei den Studierenden hervorzurufen, die auch später als Basis für die Unterrichtsvorbereitung unverzichtbar ist.

Aufgabe 2 (zur Erstellung von Arbeitsaufträgen/Lernumgebungen für die Lernenden, Idee aus Böer 2008): Auf dem Klassenboden werden große Papierbögen ausgelegt, auf denen die Zahlen von z. B. die Zahlen z.B. -10 bis +10 abgebildet sind (siehe Abbildung).



Auf diese Zahlen dürfen die Schülerinnen und Schüler nun treten – vorwärts, rückwärts, in kleinen und in großen Schritten! Entwickeln Sie ausgehend von dieser Idee einen Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler zur Einführung der negativen Zahlen im Unterricht! Überlegen Sie dazu zuerst, welche der in der Vorlesung genannten Grundvorstellungen und Rechenregeln die Lernenden entwickeln sollen und entwerfen Sie danach ein entsprechendes Arbeitsblatt!

In dieser Aufgabe soll es darum gehen, auszuloten, wie weit ein vorgegebener Kontext „trägt", bzw. ab wann er aufgesetzt und übertrieben wirkt. Die Studierenden sollen sich außerdem darüber Gedanken machen, wie man Arbeitsaufträge schülergerecht formulieren und wie man ein solches raum- und zeitintensives Experiment im Unterricht organisieren kann. Das Nutzen eines roten Fadens für eine gesamte Unterrichtssequenz kann zudem ein nützliches Leitbild auch für andere Themen des Mathematikunterrichts werden.

4. Befragung unter den Studierenden

Im Anschluss an eine im Wintersemester 2014/15 abgehaltene Schulmathematikveranstaltung wurden 51 Studierende um ihre Einschätzung gebeten, welchen Beitrag die Übungsaufgaben zur Überwindung der zweiten Diskontinuität leisten können. Ein interessantes Ergebnis ist, dass die angehenden Lehrkräfte vor allem die Aufgaben zum Erwerb von Vermittlungskompetenz als besonders wichtig für eine Schulmathematikübung (2,6 auf einer Skala von 0 bis 3), jene, die die Schulmathematik von einem höheren Standpunkt aus beleuchten aber vergleichsweise weniger wichtig (1,8) einschätzen. Auch bei der Frage nach der Bedeutsamkeit der einzelnen Aufgabentypen für die spätere Tätigkeit als Lehrkraft verzeichneten jene zur Schulung der Vermittlungskompetenz den höchsten Wert (2,7), allerdings dicht gefolgt von Aufgaben zur Erstellung von Prüfungsaufgaben (2,5) und Aufgaben zur Erstellung von Arbeitsaufträgen (2,4).

Literatur

Ableitinger, Ch., Kramer, J. & Prediger, S. (2013). Zur doppelten Diskontinuität in der gymnasialen Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R. (2014). Transitions in Learning Mathematics as a Challenge for People and Institutions. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Hrsg.), Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education (S. 127-134). Dordrecht: Springer.

Böer, H. (2008). Mathelive 7. Mathematik für die Sekundarstufe I. Stuttgart: Klett.

Luk, H. S. (2005). The Gap between Secondary School and University Mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(2-3), S. 161-174.

Studienplan (2014). http://www.univie.ac.at/mtbl02/2006_2007/2006_2007_159.pdf Universität Wien, gesehen am: 04.02.2015.

Ergi ACAR BAYRAKTAR, Frankfurt am Main

Das mathematische Support System (MLSS) im einen familialen Diskurs

1. Theoretischer und analytischer Rahmen

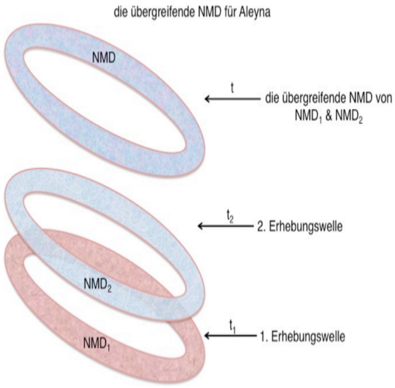
Im Rahmen der Studie „erStMaL-FaSt (early Steps in Mathematics Learning-Family Study“ werden Kinder im Kindergartenalter in ihrer Familie in mathematischen Situationen beobachtet (Acar Bayraktar & Krummheuer 2011) und im Hinblick auf die Wirkungsweise einer interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung (Krummheuer 2011) analysiert. Das theoretische Interesse dieses Aufsatzes richtet sich auf die Rekonstruktion von Aspekten der situativen Genese eines „Mathematics Learning Support Systems“ (MLSS), hier insbesondere im Hinblick auf die Unterstützung einer raumgeometrischen Denkentwicklung. Das Interesse ordnet sich dem Begriff der„interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD; s. Krummheuer 2011) unter und fokussiert auf ein Kind im Kindergartenalter aus einer bilingual türkisch-deutschen Familie, in der Interaktionssituationen zu von uns vorgegeben Spielen mit mathematischem Gehalt beobachtet werden (Acar Bayraktar & Krummheuer 2011). Eine „NMD“ besteht aus den kulturspezifischen, von einer Gruppe oder Gesellschaft bereitgestellten Lernangeboten (Allokationsaspekt), einem realen Interaktionsprozess der emergierenden Situationen (Situationsaspekt) und dem individuellen Beitrag des interessierenden Kindes (Aktionsaspekt) (Krummheuer & Schütte 2014). In diesem Rahmen wird MLSS als ein interaktionales System verstanden, das gegebenenfalls in der Interaktion zwischen den Eltern und ihren Kindern in der konkreten Situation emergiert (Krummheuer & Acar Bayraktar 2011). Der vorliegende Aufsatz geht auf die folgenden Fragen ein: Wie emergiert in familialen Interaktionssystem ein MLSS für die Entwicklung der Raumvorstellung beim Kind? Wie funktioniert ein solches MLSS? Wie verändert ein solches MLSS sich im Zuge der kindlichen Entwicklung?

2. MLSS in der Familie Ak

Um diese Fragen zu beantworten, sind zwei Sequenzen von der Familie Ak ausgewählt worden, bei denen es um die Spiel- und Erkundungssituation „Bauherr01“und „Bauherr02“ geht. Das erste Fallbeispiel stammt aus der ersten Erhebungswelle (1.EW) und das zweite ist zweiten Erhebungswelle (2.EW).. Ziel beider Spiele ist, das Gebäude auf einer gezogenen Spielkarte genau nachzubauen und dadurch den Unterschied zwischen den zweidimensionalen Abbildungen und den dreidimensionalen Körpern zuerkennen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Unser Fokus-Kind heißt Aleyna. Sie ist ein Einzelkind. In 1.EW spielt sie mit Ihrer Mutter (Acar 2011, Acar Bayraktar 2012). In 2. EW ist sie die Spielpartnerin von ihrem Vater, während ihre Mutter als Zuschauer teilnimmt (Acar Bayraktar 2014). Beide Situationen sind schon in vorherigen Jahren präsentiert, und detailliert analysiert worden sind (Acar 2011, Acar Bayraktar 2012, 2014). Hier wird übergreifend die MLSS in der Familie Ak dargestellt. In beider ausgewählten Sequenzen baut Aleyna die Figuren auf den ausgezogen Karten nach. Die entstanden Körpern entsprechen offensichtlich nicht vollständig den Vorgaben. Vater und Mutter führen als Argumente die Anzahlen der Klötzchen in Teilen der Korpusse mit den Figuren auf den Spielkarten an. Hiermit bieten sie „arithmetisch-analytische" Sichtweisen oder „Rahmungen" (Goffman 1980, S.15; Krummheuer 1992, S.24ff.) in beiden Sequenz an. Die raumgeometrische Betrachtungsweisen werden in den Hintergrund gedrängt. Jedenfalls werden Alyenas Partiziptionsoptionen auf solche arithmetisch-analytische Herangehensweise hingelenkt (s. hierzu den Begriff des Partizipationsspielraums" bei Brandt 2004). Andererseits ihre Eltern interessieren sich nur für Aleyna als ihren, dass die Partizipationsspielräume der Eltern ins Aleynas Partizipationsspielraum setzen. Deshalb schreiben die Eltern Aleyna die Rolle „Zentrale Beteiligte" zu (Lave & Wenger 1991). In der Materialauseinandersetzung ergibt sich der Eindruck, dass die Erfahrungen in beiden Sequenz in anderen Bildungsbereichen stattfinden und die arithmetischen supportiven Effekte sich in interaktiven Aushandlungsprozessen zwischen Eltern und Aleyna befinden. Es scheint, dass Aleyna in beiden Szenen im Sinne einer NMD Entwicklungschancen nutzt. Diese Entwicklungschancen beziehen sich dabei eher auf einige Teilfähigkeiten des Zahlbegriffs, wie „Zahlwortreihe aufsagen", „Objekte abzählen", „andere Anordnungen erfassen", „Mengen ordnen und vergleichen" (Schuler 2013). Unter Berücksichtigung des miteinander verwobenen analytischen und räumlichen Denkens (Obersteiner 2012) kann sie nachträglich die Unvollständigkeit nachgebauter Bauten erkennen und eher geometrische Argumente mit ihren Eltern entwickeln. In dieser Hinsicht erkundet Aleyna verschiedene Möglichkeiten des Nachbauen und erfährt arithmetisch-analytische Besonderheiten im expliziten Sinn, so dass sie die Rolle „aktive Lernerin" übernimmt. Im Fortgang der Interaktion entwickelt sich die NMD jedoch wieder in Richtung zu einer arithmetisch-analytischen Themenentwicklung. Insgesamt entsteht für Aleyna ein schwaches MLSS in räumlicher Geometrie und ein stärker ausgeprägtes MLSS in Arithmetik. Dadurch Aleyna lernt mehr die numerischen Aspekte von einer geometrischen Konstruktion und weniger die räumlichen. Die übergreifende interaktionale Nische zur mathematischen Denkentwicklung in der Familie Ak (NMD) gestaltet sich folgendermaßen:



NMD (Fam. Ak)	Inhaltskomponente	Kooperationskomponente	Vermittlungskomponente
Aspekt: Allokation	„Raumgeometrie" Spiel: Bauherr 01 und 02	Spiel von Aleyna und ihrer Eltern	Theorien zur Entwicklung räumlicher Fähigkeiten Theorien zur Rahmung
Aspekt: Situation	• interaktive Aushandlungen von Teilen des Korpus • Deutungen unter verschiedenen Rahmungen • Dissens über die Fehlerhaftigkeit beider Korpusse	Zentrale Beteiligte	• Fokus auf die Arithmetik • arithmetisch-analytische Rahmung • raumgeometrische Besonderheit der nachgebauten Korpusse • Balance zwischen Mutter&Vater
Aspekt: Aktion	• Erkundung verschiedener Möglichkeiten des Nachbauen • Explizite Erfahrung über arithmetisch-analytische Besonderheit	Aktive Lernerin	• arithmetische Aktivitäten • starke Lernchancen in der Arithmetik • schwache Lernchancen in der Raumgeometrie

Abb. 1: Die übergreifende interaktionale Nische zur mathematischen Denkentwicklung in der Familie Ak und ihre detaillierte Ausformung

Aus räumlich geometrischer Sicht emergieren unbefriedigende Spielprozesse in beiden Sequenzen. Wenn die Eltern die interaktiven Aushandlungsprozesse mit Aleyna in räumlich geometrischer Sicht weiterführen würden, könnte statt einer vorherrschenden arithmetisch-analytischer Rahmung eine Förderung hinsichtlich der unterstellbaren geometrisch-ganzheitlichen Rahmung eintreten. Es findet jedoch eine sachliche Lernunterstützung vorwiegend in Arithmetik statt. Jedoch profitiert Aleyna von einer solcher Rahmung in der Weise, dass sie verschiedene Möglichkeiten den Nachbauen erkunden kann und hierbei auch raumgeometrische Erfahrungen machen kann. In diesem Sinn wird das Supportsystem in der Familie Ak durch Aleyna und ihrer Eltern zusammen realisiert. Dieses Supportsystem in der Familie Ak, grau hinterlegt, befindet sich in der detaillierten Ausformung der übergreifenden interaktionalen Nische zur mathematischen Denkentwicklung (sieh. Abb.1).

3. Ausblick

Das ausgewählte Kind, Aleyna, ist ein repräsentatives Beispiel, das von der Rahmung der Eltern profitiert und dadurch zusammen mit ihren Eltern ein Supportsystem entsteht. Allerdings werden verschiedene Rahmungen bei den Eltern in der erStMaL-FaSt mehrmals beobachtet. Daher soll weiter untersucht werden, wie die Kinder mit verschiedenen sachlichen Rahmungen umgehen, davon profitieren und dadurch ein produktives MLSS entsteht.

Literatur

Acar, E. (2011). Mathematiklernen in einer familialen Spielsituation. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Berichtband von der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik in München 2011* (pp.43-46). WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. (2012). Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung" im familialen Kontext. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Berichtband von der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik in München 2012 (pp.65-68). WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. (2014). Interaktionale Nische der mathematischen Raumvorstellung bei den Vorschulkindern im familialen Kontext. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Berichtband von der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik in Koblenz 2014 (pp.93-96). WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. & Krummheuer, G. (2011). Die Thematisierung von Lagebeziehungen und Perspektiven in zwei familialen Spielsituationen. Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung" im familialen Kontext. In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) *Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd.1),* (S. 135-174), Münster: Waxmann.

Goffman, E. (1980). *Rahmen-Analyse: ein Versuch über die Organisation von Alltagserfahrungen*. Frankfurt am Main : Suhrkamp.

Krummheuer, G. (2011). Was man von elf Kindern alles über mathematische Denkentwicklung lernen kann. Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung" (NMD) In B. Brandt, R. Vogel, & G. Krummheuer (Eds.) *Die Projekte erStMaL und MaKreKi Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education" (Bd. 1),* (S. 25-90), Münster: Waxmann.

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit "Format" : Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie ; diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts* . Weinheim : Dt. Studien-Verlag.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim, Beltz.

Krummheuer, G. &, Schütte,M. (2014) Das Wechseln zwischen mathematischen Inhaltsbereichen – Eine Kompetenz, die nicht in den Bildungsstandards steht. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 7(1),* 126-128. ISSN 1865-3553.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge University Press, ISBN 0-521-42374-0.

Schuler, S. (2013): Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster: Waxmann.

Kay ACHMETLI, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Förderung von Grundvorstellungen und der Flexibilität mithilfe multipler Lösungen

Die Behandlung von multiplen Lösungen im Unterricht gilt als Qualitätskriterium für einen kognitiv aktivierenden Unterricht und ist schon lange ein wichtiges Thema in den didaktischen Diskussionen über vernetzte, gehaltvolle und nachhaltige Lernprozesse (Neubrand, 2006). Im DFG-Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) wird die Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von realitätsbezogenen Aufgaben untersucht. Theoretisch können multiple Ergebnisse, welche in der ersten Projektphase untersucht wurden, und multiple mathematische Lösungswege unterschieden werden (Schukajlow & Krug, 2014). Innerhalb des Inhaltsbereichs „Lineare Funktionen“ werden in der zweiten Projektphase zwei mathematische Lösungswege fokussiert, welche zwei wesentliche Aspekte im Umgang mit Funktionen (Vollrath, 1989; vom Hofe, 2003) betonen. In Anlehnung an die Differenzierung verschiedener Lösungswege von Hußmann und Laakmann (2011) sowie Krämer, Schukajlow und Blum (2012) wird ein numerischer Lösungsweg mithilfe einer Tabelle (primär Zuordnungsaspekt) und ein inhaltlicher Lösungsweg mittels Differenzenbildung (primär Kovariationsaspekt) vermittelt.

Multiple Lösungen, Adaptivität und Flexibilität

Neben einigen theoriegeleiteten Vermutungen (siehe Zusammenfassung bei Schukajlow und Blum (2011)), die für die Behandlung von multiplen Lösungen sprechen, gibt es nur wenige experimentelle Studien, die diese Vermutungen untersucht haben. Beispielsweise konnten Große und Renkl (2006) sowie Rittle-Johnson and Star (2007, 2009) Vorteile von Lernumgebungen, in denen mehrere Lösungsmethoden zu einer innermathematischen Aufgabe behandelt und gegenübergestellt werden, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nach einander und an verschiedenen innermathematischen Aufgaben behandelt wird, aufzeigen. Schukajlow und Krug (2013a, 2013b, 2013c, 2014) haben einen positiven Einfluss der Behandlung multipler Lösungen auf die Selbstregulation, Planung, Kontrolle, Präferenz für offene Aufgaben und das Interesse von Lernenden festgestellt sowie die Anzahl der Lösungen und das Kompetenzerleben als wichtige Faktoren identifiziert, welche die Effekte von multiplen Lösungen auf Leistungen vermitteln (Schukajlow, Krug, & Rakoczy, eingereicht). Des Weiteren konnten Rittle-Johnson und Star (2009) sowie Große und Renkl (2006) positive Effekte von multiplen Lösungen auf die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Flexibilität und Effektivität von Lösungswegen feststellen. Die Flexibilität bei der Auswahl passender Lösungswege ist ein wichtiger Teil des Fachwissens und somit – ebenso wie die Förderung der Adaptivität – ein zentraler Aspekt des Mathematikunterrichts (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009).

Für die weiteren Analysen möchten wir zwischen Flexibilität und Adaptivität unterscheiden (siehe Verschaffel, Luwel, Torbeyns und Van Dooren (2009)). Flexibilität wird als die Fähigkeit operationalisiert, verschiedene (multiple) Strategien (Lösungswege) verwenden zu können und zwischen diesen zu wechseln. Adaptivität wird als die Fähigkeit beschreiben, eine passende Strategie in Bezug auf das Individuum (personelle Adaptivität), die Anforderung und/oder Kontextmerkmale zu wählen.

Forschungsfragen

Es wird den folgenden Fragestellungen nachgegangen:

- Sind Lernende, die zwei Lösungswege kennengelernt haben, im Unterricht bzw. im Nachtest flexibel?
- Ist die Flexibilität im Unterricht bzw. im Nachtest prädiktiv für die Leistungsentwicklung der Schüler?

Methode

Insgesamt vier Schulen mit jeweils drei 9. Klassen (N=307) haben an der Untersuchung teilgenommen. Jede Klasse wurde parallelisiert bezüglich Leistung und Geschlecht auf zwei gleich große Gruppen aufgeteilt und entsprechend einer Bedingung (multiple mathematische Lösungswege, numerischer Lösungsweg, inhaltlicher Lösungsweg) unterrichtet. In allen drei Bedingungen wurde auf Basis der empirisch erprobten, selbständigkeitsstimulierenden „operativ-strategischen" Lehr-Lernmethode vier Stunden lang unterrichtet. Die Schüler der Bedingung der multiplen mathematischen Lösungswege haben die gestellten Aufgaben mit zwei Lösungswegen und Lernende der beiden anderen Bedingungen mit jeweils einem Lösungsweg bearbeitet. Der Unterricht wurde von sechs erfahrenen Lehrkräften erteilt, die vor der Unterrichtseinheit geschult wurden. Jede Lehrkraft hat die gleiche Anzahl der Gruppen in entsprechenden Bedingungen an einer Schule unterrichtet, so dass der Einfluss der Lehrerpersönlichkeit in allen Bedingungen identisch war. Gerahmt waren diese vier Unterrichtsstunden von einem 90-minütigen Vor- bzw. Nachtest. Für eine ausführliche Beschreibung des Designs der experimentellen Studie sei an dieser Stelle auf Achmetli, Schukajlow und Krug (2014) verwiesen. Mittels der Vermittlung multipler mathematischer Lösungswege wurde die Flexibilität der Schüler in der entsprechenden Bedingung trainiert. Ferner hatten sie die Möglichkeit in der letzten Unterrichtsstunde die Aufgaben mit nur einem Lösungsweg zu bearbeiten, welchen sie entsprechend ihrer persönlichen Präferenzen wählen und somit personell-adaptiv sein konnten.

Die Flexibilität im Unterricht haben wir anhand der letzten beiden Aufgaben gemessen. Um die Flexibilität im Nachtest zu analysieren wurden Aufgaben identifiziert, die strukturell ähnlich zu den Unterrichtsaufgaben sind. Dadurch war es möglich, die Variation der gewählten Lösungswege auf die Flexibilität zurückführen.

Ergebnisse und Zusammenfassung

Zur Kontrolle des Treatments wurden alle Unterrichtsstunden gefilmt, es war immer mindestens ein Mitarbeiter in jeder Unterrichtsstunde anwesend und die Anzahl der entwickelten Lösungen wurde von zwei unabhängigen Ratern mit sehr guter Übereinstimmung kodiert. Wie intendiert erstellen fast alle Schüler in der Bedingung der multiplen mathematischen Lösungswege zwei oder mehr Lösungen, während in den beiden anderen Bedingungen nur selten mehr als ein Lösungsweg erstellt wurde.

Die Analyse der Schülerlösungen im Hinblick auf Flexibilität im Unterricht bzw. im Nachtest ergibt ein eindeutiges Bild. Häufig zeigen Schüler keine Flexibilität. Das heißt sie wählen nur einen Lösungsweg, auch wenn sie vorher beide Lösungswege kennengelernt und geübt haben. Sie sind somit eher personell-adaptiv und haben offenbar eine Präferenz für einen bestimmten Lösungsweg entwickelt. Man kann allerdings festhalten, dass Schüler, die im Unterricht bzw. im Nachtest die Aufgaben flexibel bearbeiten eine signifikant höhere Leistungsentwicklung haben als Schüler, die stets nur einen Lösungsweg präferieren.

Da also Flexibilität einen signifikant positiven Einfluss auf die Leistungsentwicklung hat, stellt sich abschließend die Frage, welche Maßnahmen – neben der Vermittlung von multiplen mathematischen Lösungswegen – zusätzlich ergriffen werden sollten, um die Flexibilität zu fördern.

Literatur

Achmetli, K., Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Effects of prompting students to use multiple solution methods while solving real-world problems on students' self-regulation. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 2, pp. 1-8). Vancouver, Canada: PME.

Große, C. S., & Renkl, A. (2006). Effects of multiple solution methods mathematics learning. Learning and Instruction, 16(2), 122-138.

Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion-viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln: na.

Krämer, J., Schukajlow, S., & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. Mathematica Didactica, 35, 50-72.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (pp. 162-177). Berlin: Cornelsen.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561-574.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. Journal of Educational Psychology, 101(3), 529-544.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser, & P. Bender (Eds.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens (pp. 249-267). Münster: LIT Verlag.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013a). Considering multiple solutions for modelling problems - design and first results from the MultiMa-Project. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 15 Proceedings) (pp. 207-216). Heidelberg: Springer.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013b). Planning, monitoring and multiple solutions while solving modelling problems. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 177-184). Kiel, Germany: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013c). Uncertainty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1429-1438). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. Journal for Research in Mathematics Education, 45(4), 497-533.

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (submitted). Effects of Prompting Multiple Solutions for Modelling Problems on Students' Performance.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. European Journal of Psychology of Education, 24(3), 335-359.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10(1), 3-37.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik Lehren(118), 4-8.

Moritz ADELMEYER, Zürich

Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ – ein noch heute lesenswertes Lehrbuch

Einleitung

Der Basler *Leonhard Euler* (1707 – 1783) gilt als einer der wissenschaftlich produktivsten und bedeutendsten Mathematiker des 18. Jh. Weniger bekannt sind seine Verdienste um die Lehre der Mathematik. Er hat ein Dutzend Lehrbücher verfasst, darunter die zweiteilige, rund 600-seitige *Vollständige Anleitung zur Algebra* [1]. Der deutsche Erstdruck erschien 1770 in St. Petersburg.

Das Historische Museum Basel schreibt zu Eulers „Algebra“ [2]: *Um Klarheit und Einfachheit bemüht, stellt dieses Buch in handlichem Format eines der ersten Lehrbücher im modernen Sinn dar und prägt die Didaktik des Mathematikunterrichtes bis heute*.

Teil I der „Algebra“ beginnt mit den Grundrechenarten, handelt dann von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen und endet mit Folgen und Reihen. Teil II behandelt lineare, quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen und wendet sich dann der Zahlentheorie zu.

Dieser Beitrag hat folgende Ziele: Einen Tribut an Euler und Basel zollen, Aufmerksamkeit für Eulers Lehrtätigkeit wecken, einen Einblick in Eulers „Algebra“ geben, eine didaktische Einschätzung der „Algebra“ vornehmen, den Einsatz der „Algebra“ im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrerausbildung anregen.

Zu diesem Beitrag gibt es eine Broschüre [3]. Was hier zusammenfasend beschrieben wird, ist darin ausführlich dargestellt. Die im Folgenden diskutierte Passage aus Eulers „Algebra“ ist in voller Länge abgedruckt. Zu Vergleichszwecken ist zudem eine entsprechende Passage aus einem in der Schweiz im 19. Jh. verwendeten Algebralehrmittel wiedergegeben.

Eulers Einführung in Gleichungen in der „Algebra“

Die beiden Teile der „Algebra“ sind in längere Abschnitte unterteilt, diese wiederum in kürzere Kapitel und letztere schliesslich in einzelne Paragraphen. Abschnitt 1 von Teil II handelt *Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung*. Im Folgenden wird ein Blick auf dessen Kapitel 1 geworfen. Es ist sechs Seiten lang und in zehn Paragraphen gegliedert.

In den Paragraphen 1 – 4 beschreibt Euler in allgemeinen Worten das Wesen von Gleichungen. Paragraph 1 lautet wie folgt [4]:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

I.

Die Hauptabsicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematik ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekannt gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Daher die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde, wie man aus bekannten Größen unbekannte ausfindig machen könne.

In Paragraph 5 gibt Euler ein erstes Beispiel: *20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage, wie viele Männer und Weiber daselbst gewesen?* Gr. bzw. Rthlr. stehen für Groschen bzw. Reichsthaler, wobei 1 Rthlr. gleich 24 Gr. entspricht.

Euler löst die Aufgabe in folgenden Schritten: *Anzahl Männer = x, Anzahl Weiber = 20 – x, Verzehr der Männer = 8 x Gr., Verzehr der Weiber = 140 – 7 x Gr., Verzehr insgesamt = 140 + x Gr., Gleichung 140 + x = 144, Lösung x = 4.* Jeder Schritt wird von Euler erläutert.

In Paragraph 6 folgt ein zweites Beispiel: *20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, dass ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müssen, wie viele waren es Männer und Weiber?*

Die Lösungsschritte lauten: *Anzahl Männer = x, Anzahl Weiber = 20 – x, Verzehr eines Manns = 24 / x Fl., Verzehr eines Weibs = 24 / (20 – x) Fl., Gleichung 24 / x – 1 = 24 / (20 – x).* Weiter schreibt Euler dann: *Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muss, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bei der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen, dass x = 8 sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet 24 / 8 – 1 =24 / 12 das ist 2 = 2.*

Im Paragraph 7 fasst Euler die Vorgehensweise zusammen: *Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, dass man die unbekannten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die ganze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelöset, und daraus der Werth der unbekannten Zahlen gefunden werden soll…*

Im Paragraph 8 reflektiert Euler das allgemeine Vorgehen beim Gleichungslösen: *Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem anderen gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahl heraus zu bringen, müssen öfters sehr viele Verwandlungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, dass wann zwey Grössen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, ...*

In den Paragraphen 9 und 10 gibt Euler einen Ausblick auf die weiteren Kapitel. Dazu unterscheidet er zwischen Gleichungen mit einer bzw. mehreren Unbekannten und zwischen Gleichungen ersten bzw. höheren Grades.

Charakteristika von Eulers Einführung in Gleichungen

Zum Aufbau: Euler gibt zunächst eine ausführliche Hinführung zum Thema, dann zwei eingehend erläuterte Beispiele und zuletzt eine Vororientierung über Auflösungsregeln und Gleichungstypen.

Zur Sprache: Euler verwendet überwiegend Umgangssprache, nur wenig Fach- und Formelsprache. Die Grundvorstellungen und Lösungsschritte sind sorgfältig und explizit ausformuliert.

Zur Zielsetzung: Euler richtet das Augenmerk auf das Wesen von Gleichungen, nicht auf deren Auflösung. Konzeptionelles Verständnis steht im Vordergrund, nicht die Rechentechnik.

Zu den Beispielen: Euler wählt einfache und doch genug reichhaltige Textaufgaben. Variablen stehen bei Euler für konkrete Grössen und nicht für abstrakte Symbole. Die zum Aufstellen der Gleichungen nötigen Fertigkeiten im Umgang mit Termen sind aus Teil I der Algebra bekannt. Es treten noch keine Gleichungsauflösungsschritte auf. Das erste Beispiel ist so angelegt, dass die Lösung abgelesen werden kann. Im zweiten Beispiel wird die Lösung angegeben und überprüft. Das zweite Beispiel ist eine Variation des ersten Beispiels. Das Aufstellen der Gleichung ist im zweiten Beispiel fast so einfach wie im ersten, die Auflösung dagegen wäre bedeutend schwieriger. Es müsste eine quadratische Gleichung gelöst werden.

Einschätzung von Eulers Einführung in Gleichungen

Eulers Einführung in Gleichungen enthält viele didaktische Elemente, die noch heute als wichtig erachtet werden: Sie ist abgestimmt auf die Vorkenntnisse, einfach und konkret gehalten, konzeptionell orientiert, exemplarisch illustriert und eingehend kommentiert.

Daneben weist Eulers Einführung in Gleichungen aus heutiger didaktischer Sicht auch Mängel auf: Sie ist eng vorstrukturiert, regt nicht zum eigenständigen Handeln an und ermöglicht kein entdeckendes Lernen.

Eulers „Algebra“ im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrerausbildung

In Eulers „Algebra“ gibt es viele Passagen, die ergänzt mit Aufgaben zur aktiven Auseinandersetzung und Verarbeitung noch heute im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Dies bestätigen Erfahrungen, welche der Autor an Schweizer Gymnasien gemacht hat.

Für die Mathematiklehrerausbildung kann es interessant und anregend sein, Eulers Herangehensweise didaktisch zu hinterfragen und mit Darstellungen in heutigen Lehrmitteln zu vergleichen.

Fazit

Leonhard Euler war nicht nur ein ungemein produktiver und bedeutender Wissenschaftler, sondern er war auch ein erfolgreicher Lehrbuchautor. Seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erlebte zahlreiche Auflagen und wurde in viele Sprachen übersetzt.

Wer Eulers „Algebra“ studiert, wird feststellen, dass dieses Lehrwerk in fachlicher und didaktischer Hinsicht noch heute lesenswert ist und Originalpassagen ohne Weiteres im Unterricht eingesetzt werden können.

Euler hat zu fast allen damals bekannten mathematischen Gebieten Wichtiges beigetragen und zudem neue Gebiete geschaffen. Daher gilt für Fachmathematiker noch heute der Laplace zugeschriebene Ausspruch:

Lisez Euler, lisez Euler, c’est notre maître à tous.

Dies lohnt sich auch für Lehrpersonen und ihre Schüler/innen sowie Fachdidaktiker/innen und ihre Studierenden.

Dank

Der Autor dankt seiner Partnerin Hélène Berther für die grosse Unterstützung bei der Vorbereitung dieses Beitrags.

Anmerkungen

[1] Unter eulerarchive.maa.org ist Eulers „Algebra“ in einer Reclam-Ausgabe von 1920 online verfügbar. Teil I trägt die Katalognummer E387, Teil II die Nummer E388. Die deutsche Erstausgabe von 1770 ist in Band 1 der „Leonardi Euleri Opera Omnia“ wiedergegeben (Teubner Verlag, 1911).

[2] www.hmb.ch/de/sammlung/malerei-und-grafik/103585-vollstaendige-anleitung-zur-algebra.html (05.09.15).

[3] Die Broschüre kann als PDF-File beim Autor bezogen werden. Seine Mailadresse lautet moritz.adelmeyer@kme.ch.

[4] Der folgende Scan und die folgenden Zitate stammen aus der deutschen Zweitausgabe der „Algebra“ von 1771, von welcher der Autor ein Exemplar besitzt.

Henrike ALLMENDINGER, Basel

Von Sternen und Schlangen – Metaphern beim Erlernen von Mathematik

„The essence of metaphor is understanding and experiencing one kind of thing in terms of another.“ (Lakoff/Johnson 1980, S. 5)

Im allgemeinen Sprachgebrauch stellen Metaphern Wortwendungen dar, die eine Doppel- oder Mehrdeutigkeit aufweisen. Meist werden Metaphern als Phänomen der literarischen Sprache aufgefasst (vgl. Ortony 1993, S. 1f). Dem entgegen steht die, u.a. von Lakoff und Johnson (1980) vertretene Auffassung, Metaphern seien alltägliche Sprachbilder und Redewendungen, die als Träger emotionaler und kognitiver Strukturen fungieren. Gerade in der Wissenschaft werden Begriffe und Bezeichnungen häufig aus anderen Kontexten entlehnt – beispielsweise Baum, Gruppe, Filter, … – diese haben in erster Linie konzeptuelle Funktion haben (vgl. Raschauer 2013) erzeugen damit aber auch eine bestimmte Anschauung und stiften Erkenntnis stiften. Ihnen kommt dadurch theoriekonstituierende Rolle zu:

„Metaphern sind eine besondere Form anschaulichen Denkens und in gewissen theoretischen Kontexten deshalb nicht ersetzbar, weil sie die notwendige Versinnlichung des Gegenstandes garantieren.“ (Gessinger 1992, S. 92)

Metaphern begleiten und strukturieren nicht nur unser gesamtes Denken, Handeln und Sprechen im Alltag und in der Wissenschaft. Sfard hebt hervor, dass unterschiedliche Metaphern zu unterschiedlichem Denken und Handeln führen können (vgl. Sfard 1998, S. 5). Die Wahl einer Metapher wird damit zu einer folgenreichen aber auch mächtigen didaktischen Entscheidung. Sprachbilder können damit bewusst eingesetzt auch fern des fachlichen – hier fachmathematischen – Vokabulars als didaktisches Werkzeug eingesetzt werden.

Im folgenden werde ich mich auf auf solche Metaphern konzentrieren, die keine etablierten Fachbegriffe darstellen, wie sie etwa Klein (1908) in seiner Vorlesung *Elementarmathmatik vom höheren Standpunkt* einsetzt. An diesen Beispielen lassen sich die von Peyer und Künzli (1999) herausgearbeiteten didaktischen Funktionen von Metaphern speziell für die Mathematik illustrieren und erweitern. Dabei werde ich keine explizite Unterscheidung zwischen Metaphern und Analogien machen, sondern letztere als spezielle Metaphern betrachten, die den metaphorischen Gehalt offenlegen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Beispiel: Kettenbrüche

Klein bespricht (regelmäßige) Kettenbrüche. Jede positive reelle Zahl ω lässt sich als Kettenbruch darstellen:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \cdots}}, \; n_{0,} n_{1,} n_{2,} \ldots \in N.$$

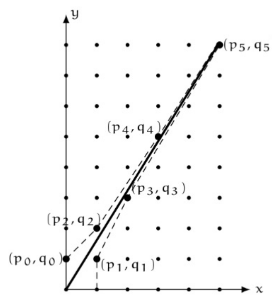
Bei rationalem ω ist die Folge der $n_{1,}$endlich, bei irrationalen Zahlen hingegen unendlich (vgl. Klein 1908, S. 46). Die Brüche, die entstehen, wenn man die Kette nach endlich vielen Schritten abbricht, ergeben besonders gute Näherungswerte:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \; n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \; \ldots$$

Unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer als q_r ist, liefert $\frac{p_r}{q_r}$ die beste Approximation von ω (vgl. Klein 1908, S. 46f).

Zunächst nutzt Klein für diesen Sachverhalt eine geometrische Deutung – Klein betrachtet statt der positiven reellen Zahl ω die Ursprungsgerade mit Steigung ω im ersten Quadranten eines Koordinatensystems mit einer Markierung an jeder Stelle mit ganzzahligen Koordinaten, einem sogenannten Punktegitter.

Abbildung: (Klein 1908, S. 48)



Das Punktegitter vergleicht Klein mit dem Anblick des *Sternenhimmels*, genauer der *Milchstraße*, und will durch diese Metapher hervorheben, wie bemerkenswert es ist, dass der Leitstrahl einer irrationalen Zahl (sprich eines nicht abbrechenden Kettenbruchs) keinen einzigen Punkt des Gitters trifft (vgl. Klein 1908, S. 48f).

In dieser geometrischen und metaphorisch ergänzten Deutung lässt sich nun eine Beziehung zu der Kettenbruchentwicklung herstellen, die Klein wieder mit Hilfe alltäglicher Assoziationen formuliert:

„Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt [...] und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahls mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte (p_r, q_r), welche die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die Nähgerungsbrüche mit geradem, zu den rechten die mit ungeradem Index.“ (Klein 1908, S. 48)

Was leisten die Metaphern und Vergleiche in diesem Beispiel?

Im vorgelegten Beispiel fungieren die Metaphern als *Verständigungsbrücke*, indem sie vom Bekannten (Spielbrett, Sternenhimmel) eine Analogie zu dem möglicherweise unbekanntem Punktegitter herstellen. Dadurch dienen sie gleichermaßen der *Veranschaulichung.* Der metaphorische Vergleich mit dem Sternenhimmel leistet dabei mehr als die geometrische Darstellung (vgl. Abbildung) alleine, welche die dem Sachverhalt innewohnende Unendlichkeit nur andeuten kann und führt dabei potentiell zu einem *Verständnisaufbau,* indem er zur Reflexion anregt: Ist es etwas besonderes, dass es unendlich viele Leitstrahlen gibt, die kein einzigen Punkt auf dem Punktgitter treffen? Die enaktiv anregende Beschreibung der Näherungswert-Bestimmung im Punktgitter mittels Aufspannen von Schnüren betont zudem den *Prozess (mathematischen) Handels.* Die Mathematik wird als dynamisches und nicht statisches System vorgestellt. Wie auch in folgendem Beispiel, in dem die Taylorschen Näherungspolynome der Sinus-Funktion als lebendige Objekte Schlangen-ähnlich dargestellt werden:

„Besonders anschaulich sehen Sie bei sin x, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.“ (Klein 1908, S. 144)

Damit werden den Metaphern hier, in der vorgestellten Begrifflichkeit, eine theoriekonstituierende Bedeutung zugeschrieben. Ob diese bei Klein aus didaktischen Überlegungen heraus intendiert ist oder ob bei ihm die Metaphern dem rhetorischer Schmuck dienen, lässt sich anhand der Vorlesungsmanuskripte nicht beurteilen. Wie Peyer und Künzli (1998, S. 177) hervorheben, kann man aber in jedem Fall vom Gebrauch der Metaphern auf bestimmte Auffassungen und Denkhandlungen oder Schwerpunkte des Autors schließen.

Neben der inhaltlichen *verstehensorientierten* Dimension von Metaphern spielt sicher auch deren *emotionale* Dimension eine Rolle für das Erlernen von Mathematik. Metaphern haben – in ihrer ursprünglichen und literarischen Ausprägung – als rhetorischer Schmuck eine erfreuende und auflockernde Wirkung und können die Motivation fördern und die Einstellung auf den mathematischen Gegenstand prägen. Besonders bei ontologischen Metaphern, wie sie Lakoff und Johnson (1980) in ihrer Klassifikation beschreiben, bei denen ein abstrakter Begriff „vergegenständlicht" wird – oder sogar personifiziert wird, können einen persönlichen Bezug zum Gegenstand fördern. Sie können ihn aber auch je nach Art der Wertung erschweren. Ein prägnantes Beispiel findet man bei Klein, wenn er Funktionstypen klassifiziert:

„Da hat man dann die merkwürdigen Funktionstypen gefunden, welche die unangenehmsten Singularitäten ‚zu einem scheußlichen Klumpen geballt' enthalten. Es handelt sich hier vorallem darum, zu untersuchen wie weit die für ‚vernünftige' Funktionen geltenden Sätze bei solchen Abnormitäten noch erhalten bleiben." (Klein 1908, S. 220)

Insgesamt zeigt sich an den Beispielen, dass Metaphern bewusst eingesetzt die Möglichkeit eröffnen auf eine ansprechende, motivations-fördernde Art und Weise eine Anschauung und ein Verständnis zu erzeugen und eine dynamische Sicht auf die Mathematik fördern können. Gleichzeitig zeigt sich die große Verantwortung, die einem Lehrer zu teil wird, wenn er durch die Wahl der Metaphern die Einstellung und das Denken über einen mathematischen Gegenstand nachhaltig beeinflussen kann.

Literatur

Gessinger, Joachim (1992): Metaphern in der Wissenschaftssprache. In: T. Bungarten (Hrsg.): Fachsprachenforschung: Sprache in der Wissenschaft und Technik, Wirtschaft und Rechtswesen. Tostedt: Attikon, S. 29-56

Klein, F. (1908): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Band I: Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin: Springer.

Lakoff, George und Johnson Mark (1980): *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.

Ortony, Andrew (1993): Metaphor and thought.Cambridge: Cambridge University Press.

Peyer, Ann und Künzli, Rudolf (1999): Metaphern in der Didaktik. In: Zeitschrift für Pädagogik 45 (2). S. 177–194.

Raschauer, Martin (2013): Metaphern in der Mathematik – die Bildlichkeit des abstrakten Denkens. Magdeburg: Universitätsbibliothek.

Sfard, Anna (1998): Two metaphors of learning and the dangers of using just one. In: Educational Researcher 27 (2). S. 4–13.

Gabriella AMBRUS, Budapest

Offenheit und Realität – über eine Untersuchung unter ungarischen (Lehramts-) Studenten

Modellierungsaufgaben und ihre Varianten bieten gute Möglichkeit für die Anwendung von realen bzw. märchenhaften Situationen in verschiedenen Klassen sowie für didaktische Untersuchungen. Am Beispiel einer „vielseitigen“ Aufgabe wurde schon diese Frage näher betrachtet (Ambrus, 2014). In dem vorliegenden Beitrag werden weitere Untersuchungen mit dieser Aufgabe vorgestellt.

1. Die Aufgabe

Die Originalaufgabe erschien in einem Arbeitsheft für Grundschulkinder (Ambrus, G. 2010):

Kleider der Königin: Seit die junge Königin in das Schloss eingezogen ist, hat sie sich jede Woche ein neues Kleid nähen lassen. Seit wieviel Tagen wohnt sie im Schloss, wenn sie schon 35 neue Kleider hat?

Wenn angenommen wird, dass die Königin immer am Montag ihr Kleid bekommt und sie an einem Sonntag angekommen ist, so kann sie seit 245+1 (2,3,4,5,6) Tagen im Schloss wohnen.

Die Aufgabe ist offen und kann auch als Modellierungsaufgabe eingestuft werden (Blum & Leiß, 2006).

Die folgende, etwas geänderte Formulierung ist für die Jahrgänge ab 6. Klasse realistischer. *Taschengeld: Seit Pisti und seine Familie in eine neue Wohnung eingezogen sind, bekommt er wöchentlich sein Taschengeld, 1000 Forint, und er legt das seitdem immer beiseite. Seit wieviel Tagen lebt er dort, wenn er schon so 35000 Forint gesammelt hat?*

Zu der Lösung der Aufgabe braucht man nur Kenntnisse aus der Grundschule (Klasse 3) aber wegen ihrer Offenheit sind Lösungen auf unterschiedlichem Komplexitätsniveau denkbar. *So ist sie lösbar und interessant für fast alle Altersgruppen (für die erste und zweite Klasse mit etwas Modifikation bezüglich der angegebenen Zahlen).*

Das Bestimmen und Ordnen der möglichen Bedingungen sowie das Erstellen der dazugehörigen Aufgabe sind schon komplexe Arbeitsschritte auch für Gymnasiasten. *„Woche“ ist als eine Kalenderwoche aufgefasst. Zur Lösungen vgl. (Ambrus, G. 2014)*

Da die Lösung der Aufgabe wenige Vorkenntnisse bedarf und die Situationen leicht vorstellbar sind, *so ist diese Aufgabe (evtl. mit Hilfe der beiden*

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Varianten) geeignet für die Anwendung in der didaktischen Forschung zur Untersuchung verschiedener Forschungsfragen für ein breites Skala von Altersgruppen.

2. Untersuchung

Unter SchülerInnen bzw. StudentInnen wurde die folgende Frage untersucht: *Inwieweit können sie die „Offenheit" der Aufgabe wahrnehmen, da* Die Offenheit der Aufgabe bedeutet oft ein großes Problem (vgl. auch Schukajlow, 2011).

Eine Lösung ist als „offen" zu betrachten, wenn dabei der Gedanke (evtl. ungenau und fehlerhaft) erscheint, dass die Aufgabe auch mehrere richtige Lösungen hat/haben kann, die von den Bedingungen abhängen.

Durchführung der Untersuchung:

Die Beteiligten hatten jeweils den Arbeitsauftrag, die Königinaufgabe/Taschengeldaufgabe in Einzelarbeit zu lösen, sie hatten weder vor noch während der Bearbeitung irgendeine Hilfe bekommen und sie konnten anonym arbeiten.

Sie durften arbeiten, so lange sie wollten. Durchschnittlich haben sie etwa 10 Minuten lang gearbeitet und haben sich anschließend als fertig gemeldet.

Nach der Abgabe der Arbeitsblätter wurde ein möglicher korrekter Lösungsansatz der Aufgabe besprochen.

Die Untersuchungen wurden in Deutschland, in Finnland und in Ungarn durchgeführt, unter 85 SchülerInnen der Klassenstufe 3 sowie 216 SchülerInnen der Klassenstufe 4.

Auswertung: Danach, ob die Aufgabe als offen oder als geschlossen aufgefasst wurde, überdies wurde eine ausführliche Fehleranalyse unternommen. *Ergebnisse:* Von den 301 Schülerlösungen zeigten lediglich 38 zumindest in Ansätzen die Erkenntnis der Offenheit der Aufgabe auf.

Die Königinaufgabe wurde auch in einigen Klassen der Klassenstufe 5 bzw. 6 gelöst, aber die Resultate bezüglich des Erkennens der Offenheit waren ähnlich wie vorher. *So kann interessant sein die Aufgabe in höheren Klassenstufen zu untersuchen. Da sich die Qualität der Lösungen anscheinend nicht Klassenstufe zu Klassenstufe ändert, können bei der Auswertung der Lösungen sogar „breitere" Altersgruppen (nicht nur Klassen) betrachtet werden.*

In den höheren Klassen (ab Klassenstufe 6 bis 1. Semester an der Uni) wurden die Untersuchungen mit der Variante „Taschengeld" zwischen

2010 und 2014 unter ungarischen TeilnehmerInnen durchgeführt. Für die Klassen 6-7 in einer Schule einer ungarischen Kleinstadt (101 SchülerInnen). Für die Klassen 9-12 in einem („normalen“) Gymnasium in Budapest und unter TeilnehmerInnen einer Veranstaltung an der Eötvös-Loránd-Universität in Budapest (45 SchülerInnen). Die beteiligten StudentInnen studierten im 1. Semester an der Eötvös-Loránd-Universität (BiologiestudentInnen und MathematikstudentInnen, 136 StudentInnen). *Die Durchführung lief wie vorher bei den Grundschulkindern beschrieben ab.*

Hypothese: *In höheren Klassen können die SchülerInnen /StudentInnen die “Offenheit“ leichter erkennen, da es um eine für sie leichter vorstellbare Situation geht und die verlangten Berechnungen ihnen gewiss nur noch eine Routineaufgabe bedeuten.*

Die Auswertung der Lösungen geschah nach Offenheit, wie oben erwähnt. Im Folgenden werden die Ergebnisse angegeben, wobei die erste Zahl die Anzahl der jeweiligen SchülerInnen bzw. StudentInnen bedeutet, die die Aufgabe als offen bearbeiteten, die zweite die Gesamtanzahl der genannten Gruppe, die die Aufgabe gelöst hat.

Klasse 6/7, 2/101; Klasse 9/10, 4/22; Klasse 11/12, 9/23. Fach Biologie, 10/50, Fach Mathematik 31/38; Fach Lehramt Mathematik 34/48.

3. Diskussion

Die Ergebnisse der Untersuchung können nicht als repräsentativ betrachtet werden. Die Resultate der Klassenstufen von 6 bis 12 zeigen eine leichte „Besserung”, letztere sind den Resultaten der Biologie- studentInnen ähnlich. Eine markante Änderung ist bei den Mathematikstudenten zu sehen, aber die Resultate 31/38 bzw. 34/48 zeigen, dass nicht einmal bei ihnen das Wahrnehmen der Offenheit selbstverständlich ist.

Das Interesse an bzw. eine gute Leistung in Mathematikscheint für das Erkennen der Offenheit als wichtig (obwohl die Aufgabe nicht ausgesprochen „mathematisch“ ist). Ich verweise hier auf eine Untersuchung unter Sechsklässler, (vgl. Csíkos et al. 2011, von möglichen Antworten (3) zu Textaufgaben werden die realistischen eher von SchülerInnen gewählt, die in Mathematik bessere Noten haben.)

Im Hintergrund der Ergebnisse (bes. gilt dies für die SchülerInnen und die BiologiestudentInnen) können auch Probleme der Aufgabenkultur und -behandlung im MU stehen. Und dies hängt notwendigerweise mit der *Tätigkeit der LehrerIn* (Aufbau des Lehrmaterials, Typen und Bearbeitung der Aufgaben, Routineaufgaben und Probleme in der Stunde, Erörterung von Ideen der SchülerInnen bezüglich Aufgaben/Hausaufgaben usw.) und mit ihren eigenen Vorstellungen/Kenntnissen über geschlossene und offene Aufgaben zusammen. Daher habe ich zwischen 2010 und 2013 eine Untersuchung auch unter LehreInnen in Weiterbildungskursen unternommen (gleiche Bedingungen wie vorher). Unter 80 LehrerInnen haben 57 die Offenheit erkannt, was die Ergebnisse von SchülerInnen und StudentInnen auch etwas erklärt.

4. Ausblick

In dem Fall der „Königinaufgabe“ ist das Resultat 35x7, das so oft geschrieben wird, t eine mögliche Lösung, und somit akzeptabel – problematisch ist eher, dass die Offenheit der Aufgabe und damit die weiteren Lösungsmöglichkeiten nicht wahrgenommen wurden.

Es kann noch untersucht werden, welche Fehlertypen bei einer geschlossenen oder einer offenen Auffassung der Königinaufgabe auftreten können und wie man dem Fehler „entgegenwirken“ kann. Es wäre auch angebracht die Untersuchung über das Wahrnehmen der Offenheit bei der „Taschengeldaufgabe“ noch weiterzuführen (größere Anzahl von SchülerInnen aus Ungarn und evtl. aus anderen Ländern) um genauere Konsequenzen ziehen und Zusammenhänge (mit Leistung in Mathematik, Interesse an Mathematik, Jahrgang, Geschlecht usw.) sehen zu können.

Literatur

Ambrus, G. (2010). *A hétköznapok matematikája* (Mathematik aus dem Alltag). Munkafüzet 3 (Arbeitsheft 3). 25, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó

Ambrus, G. (2014). Varianten von Modellierungsaufgaben für verschiedene Altersgruppen. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 105-108, J. Roth & J. Ames (Hrsg.) Koblenz, Springer Verlag

Blum, W. & Leiß, D. (2006). „Filling up”- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: *Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Guixol

Csíkos, Cs., Kelemen, R., Verschaffel, L. (2011). Fifth-grade students’ approaches to and beliefs of mathematics problem solving: a large sample Hungarian study. *ZDM*, 43, 561-571, Springer

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur.* Münster, Waxmann

Stefanie AREND, Oldenburg

Der Stetigkeitsbegriff mittels ε-δ-Definition im Übergang von Schule zu Hochschule: Verstehensprozesse von Studierenden

1. Forschungsinteresse

Stoffdidaktische Themen werden in der modernen mathematikdidaktischen Literatur immer seltener (Götz 2014), dabei kann die daran anknüpfende strukturgenetische didaktische Analyse (Wittmann 2012) eines mathematischen Begriffes einen wesentlichen Beitrag beim Nachvollziehen von Fehlvorstellungen oder naiver Handhabung Lernender leisten. Denn „[…]Unklarheiten, Fehler, Irrwege, Missverständnisse usw. treten dabei in natürlicher Weise auf" (Wittmann 2012), womit ein Blick vom höheren Standpunkt aus zur Klärung von Problemen hinzugezogen werden sollte. Im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrags und dem damit verbundenen Promotionsprojekt steht vor diesem Hintergrund die ε-δ-Definition der Stetigkeit. Diese weist einen noch recht jungen Entwicklungsprozess auf, der maßgeblich mit Cauchys Cours d'Analyse (1821) einsetzt. Der Entstehungsprozess gipfelt dann in der logisch-komplexen Definition von Weierstrass in den 1850er Jahren (Kleiner 2012). Die ε-δ-Definition ist heute für höhere Mathematik in topologischen Räumen unumgänglich und damit Teil des analytischen Kanons geworden. Verbunden mit diesem Ansatz soll auf einer deskriptiven Ebene die Analyse studentischer Bearbeitungen im Umgang mit der ε-δ-Definition unter einem normativ postulierten verstehensorientierten Umgang unter folgender Leitfrage im Fokus stehen: Welche Verstehensprozesse von Mathematikstudierenden sind bezüglich der ε-δ-Definition von Stetigkeit auszumachen?

Dabei interessieren sowohl die Schwierigkeiten, als auch das individuelle Potenzial. Im Fokus dieses Beitrages steht dann aber zunächst die Frage: Wie gehen Studienanfänger mit der ε-δ-Definition um und welche Verhaltensmuster sind bei der Handhabung erfolgreicher als andere?

Studierende der Mathematik werden zu Beginn ihres Studiums in ihrem individuellen Lernprozess zumeist das erste Mal mit einer deduktiven Herangehensweise an einen Begriff konfrontiert und es liegt auf der Hand, dass dieser Einstieg mit den Lernvoraussetzungen aus der Schule (über-) fordern kann. So blickt der Lehrende an der Universität jedes Jahr erneut in die fragenden Gesichter der Studentenschaft, wenn es heißt: er wähle sich sein δ in Abhängigkeit von ε.

2. Untersuchungsdesign

Vor dem Hintergrund dieser Problematik wurde für die Untersuchung ein anderthalbwöchiger Brückenkurs zum Thema„Stetigkeit mittels ε-δ-Definition" konzipiert und mit 18 Studierenden durchgeführt. Die Teilnehmer standen dabei am Beginn ihres Studiums. So wurde versucht die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Präsenz des Gegenstandes, wie auch ein Optimum des Verständnisses bei den Teilnehmenden zu gewährleisten.

Der Begriff des Verstehens wird hier aus der Sicht einer Philosophie der Orientierung so erfasst, dass man etwas mit der ε-δ-Definition anfangen kann (Stegmaier 2011). Im Brückenkurs geht es um die Auseinandersetzung mit aus der Realität angeregten (un-) stetigen Funktionen mittels dynamischer Geometriesoftware. Die Studierenden entwickeln dann selbst eine Version der ε-δ-Definition, die dann ähnlich einer Gedichtinterpretation aus dem Deutschunterricht im Detail analysiert wird. Dann werden auch erste „typische" Stetigkeitsbeweise geführt. Im Anschluss an den Kurs finden aufgabenbasierte Einzelinterviews statt. Die Aufgaben legen den einen Schwerpunkt dabei auf das Abtesten von bestehenden Vorstellungen von (Un-)Stetigkeit; den anderen auf einen verstehensorientierten Umgang mit der Definition. Zusätzlich zu den schriftlichen Notizen werden die Interviews transkribiert.

3. Ausgewählte Ergebnisse

In einer der Untersuchungsaufgaben geht es darum mittels der ε-δ-Definition einen Nachweis der Stetigkeit für die reelle Funktion f(x)=4 zu formulieren. Durch die konstruierte Problematik wird die Handhabung des Instrumentes selbst fokussiert und versucht den Umformungsprozess in den Hintergrund zu stellen. So kann der Schwerpunkt auf einen verstehensorientierten Umgang gesetzt werden. Studentin Anna führt aus:

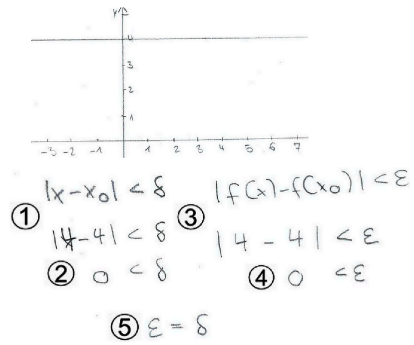


Abb. 1: Notizen Anna

A: Ja, also ich hab erstmal die Funktion skizziert, damit man sich das erstens besser vorstellen kann (Deutet auf Skizze.), das ist ja einfach nur ne Gerade bei 4. Dann habe ich das eingesetzt, also hier (Deutet auf ①.), für x habe ich 4 genommen und dann auch hier diesem Bereich (Deutet in Skizze auf Graphen im Bereich um $x = 0$ herum.), also für x_0 auch 4.

A: Und dann kam 0 (Deutet auf ②.) muss kleiner sein als δ. Und das gleiche hab ich dann hier (Deutet auf ③.) nochmal gemacht, also man muss ja $f(x) - f(x_0)$ einsetzen und da hat man ja wieder $4 - 4$ und das ist auch Null. Also muss $\varepsilon = \delta$ (Deutet auf ⑤.) sein und das hatten wir ja auch auf dem ersten Zettel schon gesehen, dass, wenn man eine Gerade hat, dass $\varepsilon = \delta$ sein muss. Und somit ist die Funktion stetig.

Anna erläutert zuerst ihre Skizze des Funktionsgraphen (Z.159f.), auf die sie im weiteren Argumentationsprozess keinen Bezug mehr nimmt. Zwar spricht sie „nur" von einer Geraden bei Vier (Z.160), vermutlich erkennt sie aber, dass es sich um eine konstante Funktion handelt, da sie korrekt zeichnet. Im weiteren Verlauf konkretisiert sie die beiden Aussagenteile, die sie der Definition entnimmt, durch Einsetzen (Z.161,163) und Ausrechnen (Z.167). Als

Strategie kann hier ein linear orientierter Einsetzungsprozess festgehalten werden. Anna versucht dabei jede Variable durch Zahlen zu ersetzen. Es ist nicht klar, weshalb die Studentin für x und x_0 jeweils den Wert Vier wählt. Jedoch lässt diese Tatsache eine Verwechslung von Argument und Funktionswert vermuten. Hinzu kommt die Verwirrung durch einen Wechsel der Semantik von x und x_0, den sich die Studentin wohl damit erklärt, dass x_0 dem Funktionswert an der Stelle Null entspricht (Z.162f.). Ihr daran anschließender „lokaler Schluss", dass mit $0<\delta$ und $0<\varepsilon$ dann $\varepsilon=\delta$ gelten muss ist nicht nachvollziehbar. Das weist zum einen darauf hin, dass die Studentin wenig Verständnis für die Abhängigkeit der beiden Variablen hat, zum anderen auch darauf, dass hier nicht im Gesamtzusammenhang der Definition gedacht wird. Die Bestätigung ihres Ergebnisses, die sie darin sucht, dass bei einer Gerade stets $\varepsilon=\delta$ gelten muss (Z.171), eröffnet dann einen Blick auf ihre fehlerhaften Vorstellungen und macht deutlich, dass zum Beispiel ein Zusammenhang zum Anstieg der Funktion gar nicht erkannt wird. Die Studentin hantiert hier hilflos mit der Definition. Das ist vor dem Hintergrund ihrer eigenen Lerngeschichte mehr als nachvollziehbar. So reduziert sie die Handhabung der Definition auf eine fast zwanghafte Wahl, die Klarheit bringen soll; ihr selbst im Gesamtzusammenhang der Definition aber gar nichts bringt.
In einer weiteren Bearbeitung dieser Aufgabe zeigt sich, dass Studentin Bärbel die Skizze des Funktionsgraphen immer wieder in ihre Überlegung mit einbezieht. Sie interpretiert die Tatsache, dass $|f(x)-f(x_0)|=0$ damit, dass der Abstand der Funktionswerte einer konstanten Funktion immer Null entspricht und begründet die erkannte flexible Wahl von δ mit der besonderen Eigenschaft der Funktion. Ein entscheidender Unterschied zu der Herangehensweise bei Anna ist, dass die Studentin „globale Schlüsse" zieht und sowohl auf die Voraussetzungen der Definition als auch die Besonderheit der Funktion selbst Bezug nimmt. Zwar endet auch ihre Bearbeitung mit einer Wahl, diese ist jedoch betont exemplarisch mit $\delta=\varepsilon$ getan. Als erster induktiver Schluss lässt sich festhalten, dass Anna, die eher linear an die Bearbeitung herangeht und Bestandteile der Definition isoliert betrachtet weniger erfolgreich ist als Bärbel, die einzelne Bestandteile der Definition bei ihrer Anwendung strukturiert und überprüfend nutzt. Zweifellos stellen diese ersten Eindrücke keine Allgemeingültigkeit dar. Jedoch geben sie einen Hinweis auf individuelle Hürden, aber auch Handhabungsprozesse.

4. Konsequenzen

Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse erscheint eine Grundvorstellung von (Un-)Stetigkeit auch für den Umgang mit der ε-δ-Definition beinahe apodiktisch. Dabei stellt die gängige Vorstellung vom „durchzeichenbaren" Graphen aber kein adäquates Mittel zur Verfügung, da sie verfälscht, anstatt zu helfen; ebenso die vorherrschende Vorstellung der Sprungstelle beim unstetigen Graphen. Oszillierende „sin(1/x)-Funktionen“ hingegen stehen zur Verfügung um den Begriff der Stetigkeit weiter zu schärfen und sollten als Teil der Vorerfahrungen ernst genommen werden (Götz 2014). Grundvorstellungen sollen eine gute Basis bieten, anstatt im Zuge der Präzisierungen revidiert werden zu müssen, denn nur dann kann Sinn und Handhabung durchdrungen werden. Somit soll mit diesem Beitrag nicht die reine Behandlung eines formal wie logisch anspruchsvollen Begriffs insistiert werden, dessen Struktur selbst zur Verständnishürde wird. Viel eher geht es darum aufzuzeigen wie nachvollziehbar ein defizitärer Umgang mit der ε-δ-Definition der Stetigkeit ist, wenn weder innermathematische noch anwendungsbezogene Vernetzungsmöglichkeiten da sind (Brinkmann 2011) und das Gerüst in seiner Komplexität nur für sich steht. Ist dann nicht auch die aufgezeigte Tendenz einzusehen, dass Studierenden eine Grundeinsicht entwickeln, die als Handlungskompetenz beschrieben werden kann, die Wissen und Imagination (Götz 2014) in den Hintergrund stellt? Denn wenn schon die historische Entwicklung der ε-δ-Definition nicht geradlinig verläuft, wie soll es dann die Lerngeschichte des individuell Lernenden? Ein Appell soll sein zuerst vor dem Hintergrund einer historisch-genetischen Annährung verstehensorientiert an Definitionen heranzutreten oder Begriffe im Rahmen von gezielten Übungsaufgaben oder Recherchearbeiten in den Anfängerveranstaltungen aus verschiedenen Perspektiven zu beleuchten. Das bewirkt ein tieferes Durchdringen mathematischer Präzisierungen und schärft den kulturhistorischen Blick auf die Mathematik selbst.

Literatur

Brinkmann, A., Maaß, J. & Siller, H.-St. (2011): *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht (B1)*. München: Aulis Verlag.

Götz, Stefan. (2014). "Was kann Stoffdidaktik heutzutage (noch) leisten?" Vortrag der 48. Tagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 10.3.2014, Landau. http:// 2014.gdm-tagung.de/download/goetz_hauptvortrag_ 2014_ GDM.pdf, 16.02.2015.

Kleiner, Israel. (2012). *Excursions in the History of Mathematics.* New York: Springer.

Stegmaier, Werner (2011). Orientierung durch Mathematik. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G. & Rathgeb, M. (Hg.): *Mathematik verstehen - Philosophische und Didaktische Perspektiven.* (S.15-25). Wiesbaden: Vieweg-Teubner Verlag.

Wittmann, E.Ch. (2012). Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G.N., Selter, Ch. & Wittmann, E.Ch. (Hg.): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben.* (S. 263-279). Stuttgart: Klett.

Mathias BAERTL, Offenburg

Kurzes Tutorium Statistik – Kurzvideos auf YouTube

Zusammenfassung

Sowohl Angebot als auch Nachfrage nach Videos mit Lehrinhalt verzeichnen aktuell ein nahezu explosionsartiges Wachstum; MOOCs machen dabei jedoch nur einen geringen Anteil aus. Während Studierende einen positiven Effekt von Lehrvideos auf den eigenen Lernerfolg wahrnehmen, ist dieser bei objektiver Prüfung jedoch oft nicht nachweisbar. Für Dozenten eröffnet dies ein Spannungsfeld, für dessen Lösung dieser Beitrag die im Selbstversuch erprobte Möglichkeit der Produktion von Kurzvideos und deren Veröffentlichung auf YouTube vorstellt.

Lehrvideos – Angebot und Nachfrage

Die Erscheinungsformen von Videos mit Lehrinhalten sind in vielerlei Hinsicht extrem heterogen; Ansichten darüber, was unter dem Begriff „Lehrvideo“ zu verstehen ist, können erheblich auseinanderdriften. Die wissenschaftliche Literatur sowie die Presse widmen aktuell einen Großteil der Aufmerksamkeit den Massive Open Online Courses (MOOC). Der Terminus „MOOC“ kann zwar keinesfalls als einheitlich definiert gesehen werden (zu einer Auseinandersetzung mit der Begrifflichkeit vgl. Spector, M. (2014), S. 386 f.), allerdings gilt für die Mehrheit der als MOOC gehandelten Produkte, dass es sich um online verfügbare akademische Angebote handelt, in denen eine Serie von Lehrvideos meist eine zentrale Rolle einnimmt, welche jedoch durch Begleitmaterial ergänzt wird. Die Seite „Class Central“, ein sehr umfassendes Verzeichnis aktuell laufender MOOCs, beziffert die Anzahl angebotener Kurse für Januar 2013 auf etwa 108, im Dezember 2014 hingegen bereits auf etwa 2.400. Zur Zahl der Lehrvideos werden keine Schätzungen angegeben; wenn man jedoch von zwischen 10 bis 30 Videos je Kurs ausgeht, ergäbe sich eine Zahl im Bereich von 24.000 bis 72.000. Class Central gibt an, dass sich bis Ende 2014 etwa 16 bis 18 Millionen Studierende zur Teilnahme an MOOCs registriert haben. Unabhängig davon stellen viele Hochschulen Vorlesungsaufzeichnungen bereit, welche der praktischen Ausgestaltung nach durchaus als MOOC gelten könnten. Ob man diese als MOOC werten sollte ist hingegen im Einzelfall zu bewerten, allein weil der Zugang oft, wenn auch nicht zwangsläufig, auf immatrikulierte Studierende beschränkt ist. Weiter bieten Hochschulen ihren Studierenden häufig Tutorials (z.B. eine Videosequenz zum Bruchrechnen) an, welche oft aber weder dem Zweck nach noch hinsichtlich ihrer Zugänglichkeit in die Kategorie MOOC fallen würden. Zah-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

len zum Angebot und zur Nutzung finden sich vereinzelt (vgl. z.B. Pedrotti, M. et al. (2014), S. 81 f. zu Zahlen an der Ludwig-Maximilians-Universität München oder Meinhard, D. et al. (2014), S. 56 f. für die Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf) und weisen auf ein steigendes Angebot sowie eine rege Nutzung hin. Zuverlässige hochschulübergreifende Gesamtzahlen lassen sich jedoch bislang nicht angeben.

Die weitaus größte Zahl an Lehrvideos – angefangen bei einzelnen Tutorials bis hin zu kompletten Abhandlungen – findet sich allerdings außerhalb von lehrfokussierten Plattformen auf YouTube: YouTube EDU, ein YouTube-Sammelkanal, gibt die Zahl an (qualitativ hochwertigen) Lehrvideos mit über 700.000 an. YouTube EDU wird zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Beitrags von mehr als 10 Millionen Nutzern abonniert; Besuche von als „Education“ markierten YouTube-Kanälen reichen bis in den einstelligen Milliardenbereich. Wenngleich die Ursprünge von MOOCs mit YouTube in Verbindung gebracht werden können, YouTube sicher eine der freiesten Formen der Bereitstellung darstellt und man Videos aus MOOCs auch auf YouTube findet, so werden die auf YouTube bereitgestellten Lehrinhalte doch selten in die Kategorie MOOC eingeordnet.

Diese kurzen Betrachtungen verdeutlichen trotz ihrer zwangsläufigen Vagheit zwei Dinge: zum einen machen die typischerweise als MOOC bezeichneten Angebote innerhalb der Gesamtheit aller online-Lehrvideos nur einen geringen Anteil aus. Es scheint daher empfehlenswert, die momentan starke Fokussierung der Wissenschaftsgemeinde auf MOOCs zu lockern und auf die Bereiche hochschulinterne Angebote sowie YouTube auszuweiten. Unabhängig davon wird trotz des Fehlens konkreter Daten im Zeitablauf offensichtlich, dass über die letzten Jahre im Bereich Lehrvideos sowohl Angebot als auch Nachfrage ein erhebliches Wachstum verzeichnen konnten.

Der Nutzen von Lehrvideos

Man schreibt Lehrvideos verschiedene Vorteile zu, die zunächst schlicht mit der elektronischen Dokumentation eines Vortrags in Verbindung zu bringen sind (z.B. Orts- und Zeitunabhängigkeit der Nutzung, die dadurch entstehende Möglichkeit zum „Lernen im eigenen Tempo“, Möglichkeit der Selbstreflexion für den Dozenten etc.; vgl. hierzu Meinhard, D. et al. (2014)). Im Video können darüber hinaus jedoch Bild und Ton zur Erzielung bestimmter Effekte in einer Weise verwendet werden (z.B. Zeitraffer, animierte Metaphern, Vermittlung von Emotionen etc., vgl. hierzu Koumi, J. (2006)), die im Kanon der im Unterricht einsetzbaren Medien einzigartig sein dürfte. Derartige Eigenschaften geben Anlass zu der Hoffnung, dass sich die Nutzung von Videos in der Lehre letztlich auch positiv auf den Lernerfolg auswirkt.

Wissenschaftliche Untersuchungen zu dieser Frage zeichnen jedoch ein durchwachsenes Bild. Eine einen Zeitraum von mehr als zehn Jahren und über 1.000 empirische Untersuchungen abdeckende Metastudie des U.S. Department of Education zum online-Lernen kommt zu dem Schluss, dass bisher kein positiver Einfluss des Videoeinsatzes (auch bei Nutzung verbundener Quizz-Elemente) auf die Lernleistung von Schülern nachgewiesen werden kann (vgl. Means, B. et al. (2010)). Dieses ernüchternde Resultat stünde sicherlich im Kontrast zur stark wachsenden Nutzung, wenn nicht mittlerweile als relativ gesichert gelten könnte, dass der Konsum von Lehrvideos tendenziell zu einer Überschätzung des eigenen Lernerfolgs führt (vgl. Szpunar, K. et al. (2014), S. 161): der Konsum eines Lehrvideos scheint die Illusion zu wecken, schnell und relativ anstrengungsfrei relevante Inhalte gelernt zu haben und erfährt vermutlich aus diesem Grund eine stets wachsende Beliebtheit.

Wenn diese Beobachtungen und Schlussfolgerungen zutreffend sind, so stehen Lehreinrichtungen und Dozenten vor dem Dilemma, bei Schülern und Studierenden mehr und mehr auf eine Erwartungshaltung nach einem durchaus aufwendig herzustellenden Produkt zu treffen, welches zwar attraktiv wirkt, gleichzeitig unter Umständen aber sogar negative Auswirkungen auf den Lernerfolg haben kann. Dies legt die Empfehlung nahe, Lehrvideos nur ergänzend zu nutzen oder zumindest in Rahmenbedingungen einzubetten, welche eine (Selbst-)Korrektur eventueller Fehleinschätzungen des eigenen Lernfortschritts gestatten (ebd., S. 161 ff.).

Kurzes Tutorium Statistik

Angesichts aktueller Forschungsergebnisse zum Thema Lehrvideos ist die Abgabe einer generellen Nutzungsempfehlung sicher verfehlt. Möchte man als Dozent dennoch auf die wachsende Nachfrage reagieren, so könnte man den Zusatznutzen im Bereich der Zielgruppenmotivation und einer Erhöhung der Akzeptanz des unterrichteten Faches suchen. Wenngleich die Möglichkeit besteht, Videos aus dem ebenfalls steigenden Angebot gezielt auszuwählen, so hat sich der Autor dieses Beitrags quasi im Selbstversuch dafür entschieden, Kurzvideos begleitend zur eigenen Vorlesung Statistik selbst zu produzieren. Im Sinne der Motivierungsfunktion wird dabei der Schwerpunkt der Videos darauf gelegt, den Nutzen und die Alltagstauglichkeit statistischer Verfahren anhand einfacher Kurzgeschichten zu erläutern. Die Videos sind auf YouTube unter dem Kanalnamen „Kurzes Tutorium Statistik“ frei verfügbar, werden aber in den elektronischen Materialien zur Vorlesung themenspezifisch verlinkt.

Als eine der wesentlichsten Erfahrungen und als Zwischenfazit soll hier erwähnt werden, dass die gewählte Vorgehensweise bislang mit ausschließlich erfreulichen Erlebnissen verbunden ist: die Annahme sowohl durch eigene Studierende als auch durch anonyme YouTube-Nutzer und deren Rückmeldungen sind enorm positiv (der Kanal wurde bislang mehr als 80.000 mal besucht, die Videos über 1.000 mal positiv (und nur 12 mal negativ) bewertet und über 150 mal kommentiert). Für den Dozenten resultiert aus der Selbstvorgabe, die Videos möglichst kurz zu halten, der Zwang, sehr detailliert über die Darbietung des Stoffes nachzudenken, was indirekt dazu führt, dass auch die Vorlesungen selbst prägnanter werden. Im Bereich der Wirkungsmessung zeigen sich hingegen deutliche Grenzen: es zeichnet sich ab, dass die ursprünglich angestrebte Messung der direkten oder indirekten Videowirkung auf den Lernerfolg im laufenden Lehrbetrieb aufgrund zahlreicher Störgrößen nicht möglich ist. Die weiterführende Forschung wird sich daher – ebenfalls unter der Prämisse, dass Videos primär eine motivierende Funktion wahrnehmen sollten – auf die Frage konzentrieren, welche Faktoren über die Beliebtheit eines Videos entscheiden.

Literatur

Koumi, J. (2006). Designing video and multimedia for open and flexible learning. Abingdon, New York: Routledge.

Means, B., Toyama, Y., Murphy, R., Bakia, M. & Jones, K. (2010). Evaluation of evidence-based practices in online learning: Meta-analysis and review of online learningstudies. U.S. Department of Education.

Meinhard, D., Clames, U. & Koch, T. (2014). Zwischen Trend und Didaktik – Videos in der Hochschullehre. In Zeitschrift für Hochschulentwicklung, Jg. 9 / Nr. 3, April 2014 (S. 50-64).

Pedrotti, M., Aulinger, J. & Nistor, N. (2014). Vorlesungsaufzeichnungen zur Unterstützung der Lehramtsausbildung an der LMU München. In Zeitschrift für Hochschulentwicklung, Jg. 9 / Nr. 3, April 2014 (S. 74-84).

Spector, M. (2004). Remarks on MOOCS and Mini-MOOCs. In Educational Technology Research and Development, Volume 62, Issue 3, June 2014 (S. 385-392). Springer Link.

Szpunar, K., Jing, H. & Schacter, D. (2014). Overcoming overconfidence in learning from video-recorded lectures: Implications of interpolated testing for online education. In Journal of Applied Research in Memory and Cognition, No. 3, 2014, (S. 161-164). Elsevier.

Sabine BAUM, Johannes BECK, Sebastian MUNGENAST, Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Die Drei-Phasen-Idee des Mathematiklabors der Universität Würzburg

1. Konzeption

Das Mathematiklabor der Universität Würzburg ist ein Lehr-Lernlabor, in dem sich Schülerinnen und Schüler an einem außerschulischen Lernort selbstständig an entsprechend angelegten Stationen mit mathematischen Inhalten auseinandersetzen. Die Konzeption der Stationen beruht dabei auf drei Phasen oder der sog. *Drei-Phasen-Idee*: *Experimentieren*, *Mathematisieren* und *Simulieren* (vgl. Appell, Roth & Weigand 2008). Normalerweise arbeiten die Lernenden für 3 Stunden an *einer* Station.

2. Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren

Beim *Experimentieren* werden anhand von Realmodellen (etwa Fahrrad oder Scheibenwischer) Funktionsweisen erforscht, Erfahrungen gesammelt und Eigenschaften des Objekts entdeckt. Dabei sammeln Schülerinnen und Schüler einerseits erste Einsichten in Bestandteile, relevante Größen und Funktionsweise des Modells, generieren und formulieren andererseits aber auch Vermutungen über die Sachsituation und bereiten die *Mathematisierung* vor. In dieser zweiten Phase werden dann Erfahrungen mit den Modellen aufbereitet, systematisiert und es werden mathematische Darstellungen und analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht also um das Auffinden und Darstellen der mathematischen Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen, evtl. die Überprüfung von Hypothesen und insbesondere das problemlösende Arbeiten. So gelangen Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Rechnungen und unter Verwendung von Graphiken und Skizzen zu Ergebnissen und stellen weitere Überlegungen dazu an, wie man Vermutungen überprüfen oder begründen könnte. Gestützt auf die erkannten Prinzipien und die mathematische Durchdringung der Phänomene werden (vorgegebene) *Computersimulationen* der Konfigurationen systematisch variiert. Dadurch sollen Erfahrungen mit realen Modellen vertieft, die Angemessenheit der Mathematisierung geprüft, neue Einsichten gewonnen und die Erkenntnisse vernetzt werden. So ermöglichen es Simulationen der Realmodelle beispielsweise Grenzfälle, die in der Realität so nicht betrachtet werden können, umzusetzen und dynamisch zu erkunden. Zum Beispiel können beim Einparkvorgang die Abmessungen des Fahrzeugs per Schieberegler verändert werden. Die im Mathematiklabor vorhandenen Simulationen wurden von Studierenden im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Rahmen von Haus- oder Zulassungsarbeiten (meist mit dem Programm „GeoGebra“) erstellt. Des Weiteren können die Ergebnisse der Mathematisierungsphase überprüft, bewertet und ggf. neu berechnet werden.

3. Stationsaufbau

Bei der Bearbeitung der Stationen werden die Schülerinnen und Schüler durch ein *Aufgabenheft* angeleitet. Dies ermöglicht in einem vorgegebenen Rahmen ein weitgehend selbstständiges Arbeiten. Bei schwierigeren Aufgaben lassen sich im bereitliegenden *Hilfeheft* Tipps und Lösungshinweise nachschlagen. Die Hilfehefte der Stationen sind nach dem Prinzip der *gestuften Hilfen* (vgl. Zech 1998) aufgebaut. Begonnen wird dabei mit den allgemein-strategischen Hilfen, die dann auf die jeweilige Situation bzw. das Problem hin konkretisiert werden.

Die Schülerinnen und Schüler werden durch Lehramts-Studierende betreut, die in einem begleitenden Seminar auf diese Tätigkeit vorbereitet wurden. Sie geben Motivationshilfen und beantworten aufkommende Fragen über den Inhalt des jeweiligen Hilfehefts hinaus.

4. Durchführung

Das Angebot des Mathematiklabors richtet sich derzeit an Schulklassen der 9. bis 12. Jahrgangsstufen, die die Räumlichkeiten des Labors im MIND-Center der Universität Würzburg für jeweils drei Stunden besuchen. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten hierbei in Dreiergruppen für die gesamte Dauer des Aufenthalts an je einer Station. Als Teil des selbstbestimmten Arbeitens steht es ihnen dabei frei, wie und welche Pausen sie einplanen. Das vorrangige Ziel einer Station ist es nicht, in den drei Stunden die Station vollständig zu bearbeiten, vielmehr sollte die intensive Beschäftigung mit der in den Situationen verborgenen Mathematik im Vordergrund stehen.

5. Lehre

Jedes Semester wird ein Seminar mit dem Titel „Arbeiten im Mathematiklabor“ für Studierende des Lehramts für Gymnasium und Realschule angeboten. Studierende gewinnen im Rahmen dieses Seminars sowohl Einblicke in die didaktische Konzeption des Labors als auch Praxiserfahrung bei der Betreuung von Schulklassen. Beispielsweise wird die Frage, welche Hilfestellungen sich anbieten, um Schwierigkeiten und Probleme auf Seiten der Lernenden zu überwinden, zunächst theoretisch unter Verwendung des Konzepts der gestuften Hilfen beantwortet. Dieses Theoriewissen wird dann in der Praxis erprobt und reflektiert. Umgekehrt lassen sich auch die

Auswirkungen des eigenen Handelns bei der Betreuung der Stationen unmittelbar beobachten und bewerten.

6. Schülerakademie

Als Partner der „Schülerakademie MainRhön“ bietet das Mathematiklabor derzeit im Rahmen der Begabtenförderung einer Gruppe motivierter Schülerinnen und Schülern der 8. und 9. Klasse die Möglichkeit, die Lernangebote des Labors zu nutzen. Die Gruppe besucht dabei das Mathematiklabor etwa einmal pro Monat für ca. fünf Stunden. Begleitend dazu trifft sich zweimal im Monat – jeweils samstags – die Gruppe, um die nötigen fachlichen Grundlagen für die eigenständige Bearbeitung der Stationen zu legen. Im zweiten Kurshalbjahr 2014 haben die Schülerinnen und Schüler dabei selbst eigene „Mini-Stationen“ entwickelt, wobei auch methodische Überlegungen hinsichtlich der Bearbeitung der Station eine Rolle spielten. Von den Schülern entworfene Stationen: *Pythagoräische Zahlentripel*, *Springbrunnenparabeln*, *Bienenwaben / Parkettierung* und *Peripheriewinkelsatz*. Dieses Projekt wurde 2014 durch einen Sponsorenpreis gewürdigt.

7. Weiterentwicklung

Das 3-Phasen-Konzept des Mathematiklabors basiert auf der Hypothese, dass die Modellierung von realen Situationen und auftretende mathematische Zusammenhänge besser verstanden werden, wenn Lernende mit realen Modellen und/oder digitalen Simulationen dieser Modelle arbeiten und experimentieren. Dafür gibt es durchaus empirische Bestätigungen (Baum et.al. 2013, Roth & Weigand 2013). Es ist aber auch hinlänglich bekannt, dass eine einmalige isolierte Arbeit an einem außerschulischen Lernort wenig Nachhaltigkeit besitzt, wenn dort praktizierte Tätigkeiten im Schulunterricht nicht aufgegriffen und weiterentwickelt werden.

Welche Modifikationen sind nun erforderlich, wenn im Mathematiklabor entwickelte Stationen in den Mathematikunterricht integriert werden sollen? In einem ersten Schritt entwickeln wir – an der Universität Würzburg – hierzu Lerneinheiten, die Schülerinnen und Schüler vor und nach dem Besuch des Mathematiklabors im Mathematikunterricht behandeln sollen. Bei der *Vorbereitung des Besuchs* werden die Schülerinnen und Schüler dabei mit den Ideen des Experimentierens, Modellierens und Simulierens durch das Bearbeiten eines kleinen Projekts, Problems oder einer *Mini-Station* vertraut. Ein derartiges Problem ist etwa das Bestimmen des maximalen Volumens einer Schachtel, die aus einem DIN-A4-Blatt gebastelt werden soll (vgl. Weigand & Weth 2002). Dieses Problem lässt sich experimentell lösen, darüber hinaus werden die Lernenden aber auch mit Geogebra-Simulationen vertraut. *Nach dem Besuch* des Mathematiklabors sollen die Schülerinnen und Schüler in einer weiteren Unterrichtseinheit Begriffe und Methoden wiederholen, die sie beim Arbeiten an ihrer Station im Mathematiklabor kennen gelernt haben. Da die Arbeit im Labor allerdings für Mitglieder einer Schulklasse an unterschiedlichen Stationen erfolgt, gestaltet sich eine derartige Wiederholung aufgrund der vorhandenen Heterogenität nicht so einfach. Im Moment entwickeln wir Unterrichtseinheiten, die das Arbeiten mit linearen, quadratischen und trigonometrischen Funktionen sowie deren Darstellungen in den Mittelpunkt stellen, da diese bei vielen Stationen im Mathematiklabor eine Rolle spielen. Ob diese Konzeption allerdings erfolgreich sein wird, auch im Hinblick auf eine Langzeitwirkung, wird in weiteren empirischen Untersuchungen zu klären sein.

Literatur

Appell, K., Roth, J., Weigand, H.-G. (2008). Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren - Konzeption eines MATHEMATIK-Labors, in: Vasarhelyi, E (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM-Verlag, 315-318

Roth, J., Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2013). Schülerlabore Mathematik. *Der Mathematikunterricht 59*, Heft 5

Baum, S., Roth, J., Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik – außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen.) (German), *Der Mathematikunterricht 59*, No. 5, 4-11.

Weigand, H.-G., Weth, Th. (2002). Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg u. Berlin: Spektrum

Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik – theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik, 9. Auflage, Beltz: Weinheim, 315-319

Silvia BECHER und Rolf BIEHLER, Universität Paderborn

Welche Kriterien legen Lehramtsstudierende (Gym) bei der Bewertung fachmathematischer Veranstaltungen zu Grunde?

In der Literatur lassen sich zur Bewertung des fachwissenschaftlichen Studiums von Lehramtsstudierenden nur wenige empirische Befunde finden. In der Fragenbogenstudie von Studienanfängern (Gym) in Baden- Württemberg (n=155), sollten die einzelnen Komponenten des Lehramtsstudiums nach Wichtigkeit auf einer Likertskala eingestuft werden. Das Fachstudium wurde dabei am schlechtesten bewertet (Cramer; Horn; Schweitzer 2009). Auch eine retrospektive Befragung von Referendaren für die Sekundarstufe 2 (n=176) kam zu dem Ergebnis, dass das Niveau der fachwissenschaftlichen Ausbildung als zu hoch und zu schwach mit dem Berufsziel verbunden, eingeschätzt wird (Bungartz; Wynands 1998). Beide Studien sind quantitative Fragebogenstudien, bei denen die Kriterien, die die Befragten bei der Beurteilung anlegen, nicht erfasst werden.

Daten

Um diese Kriterien zu erfassen haben wir in der Veranstaltung „Didaktik der Sekundarstufe II (Teil 1)“ in Anlehnung an Törner (1999) als Übungsaufgabe fünf Fragen zu der Beziehung der Studierenden zur Analysis gestellt (Becher 2014). Wir haben 23 Aufsätze von BA-Lehramtsstudierenden Gym sowie 8 Aufsätze von BA-Lehramtsstudierenden BK (5. Semester (n=30),3. Semester (n=1)) ausgewertet. Diese Studierenden haben bereits einige Fachveranstaltungen gehört, jedoch erst eine Didaktikveranstaltung (Geometrie), und auch das Praxissemester steht ihnen noch bevor. Die sieben Aufsätze von Lehramtsstudierenden auf Staatsexamen wurden aufgrund der unterschiedlichen Erfahrungen (Praktika, Ende des Studiums, etc.) nicht einbezogen. Bei der Auswertung konzentrieren wir uns hier aus Platzgründen auf die folgenden zwei Fragen, welche sich auf die Verbindung der Fachveranstaltung und dem späteren Beruf beziehen, konzentriert:

1. Worin sehen Sie den Nutzen der Analysisvorlesung für Ihren späteren Beruf als Lehrer?
2. Welche neuen Impulse nehme ich aus den von mir bisher erlebten universitären Analysisveranstaltungen für meinen eigenen Unterricht mit?

Erste Auswertung auf der Basis der Grounded Theory

Eine erste Auswertung erfolge im Sinne der Grounded Theory (Vgl. Strauss; Corbin 1996). Dabei sollte untersucht werden, was die Studierenden unter dem „höheren Standpunkt“ verstehen und welche Relevanz für welche As-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

pekte der Lehrertätigkeit gesehen wird. In Anlehnung an Krauss, Baumert und Blum (Vgl. Krauss et. al 2008) wurde die folgende Einteilung von mathematischen Wissen als Grundlage genommen: 1. „Beherrschung des Schulstoffs auf dem jeweils unterrichteten Niveau“ welches wir als „Schulwissen“ bezeichnen, 2. „Tieferes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums“ welches wir als „Höheren Standpunkt“ bezeichnen. 3. „Reines Universitätswissen“ womit Wissen gemeint ist, welches über 1. und 2. hinausgeht.

Ergebnisse der ersten Auswertung

Die Studierenden nannten zwei Aspekte zum Nutzen der Fachausbildung, die man dem **„Schulwissen“** zuweisen würde:

Funktionen für das „Schulwissen“	*Anzahl der Nennungen*
Üben und Lücken füllen von Schulwissen	7
Keine sinnvolle Funktion	1

Dabei werden unter „keine sinnvolle Funktion“ Aussagen gefasst, die negativ anmerken, dass keine Wiederholung der Schulmathematik stattfindet.
In dem Wissensbereich „**Universitätswissen**“ werden folgende Funktionen der Fachausbildung genannt:

Funktionen als „Universitätswissen“		*Az*
direkter Praxisbezug	- Ausblicke geben können - Lernschwierigkeiten von Schülern verstehen - Lehrplanänderungen bewältigen können	3 3 4
Kein direkter (oder indirekter) Praxisbezug	- Mathematik als deduktives System kennenlernen - Allgemeine mathematische Kompetenz entwickeln	3 4
Soziale Funktion	- Fächerrepräsentant allgemein	1
	- Fächerrepräsentant gegenüber SuS	5
	- Fächerrepräsentant gegenüber LuL	1
(Teilweise) keine sinnvolle Funktion	(Uniwissen wird hier bspw. als zu komplex und (teilw.) „zu hoch“ angesehen)	9

Weitere Funktionen der fachmathematischen Ausbildung werden im Nutzen eines **„höheren Standpunktes“** gesehen. Dieser ist sehr facettenreich, bei dem manchmal der „Praxisbezug“ explizit dazu genannt wird.

Funktionen als Mathematik vom „höheren Standpunkt“		
Oberkategorie	*Unterkategorie*	*AZ*
Begriffe präzisiert kennen lernen	- mit Praxisbezug	16
	- ohne Praxisbezug	1
Beweise zur tieferen Begründung	- Schulmathematik wird bewiesen	6
	- Beweise helfen um zu verstehen, warum etwas gilt	6
Zusammenhänge herstellen können	- mit Praxisbezug	8
	- ohne Praxisbezug	2
Schulmathematik mehr an Unimathematik anlehnen können	Uniwissen an SuS weitergeben	
	- allgemein	5
	- um Beweisbedürfnis zu erzeugen	5
	- zur Motivation	4
	- zur Univorbereitung	4
bessere Schülerorientierung wird ermöglicht	- Diagnose	1
	- begabte SuS fördern	4
	- Studienberatung	1
	- Beantwortung von Schülerfragen zum Schulstoff	4
	- Beantwortung von Schülerfragen über Schulstoff hinaus	9
	- Beantwortung von Schülerfragen nicht nötig	1
Elementarisierungsfähigkeit wird gefördert		1
Fachwissen wird erst durch didaktisches Wissen wirksam		1
Allgemeine Funktion ohne nähere Angaben	- Unterrichtsplanung, Begründung für Unterrichtsstoff, Hilfe um Wissen zu vermitteln	

Zweite Analyse auf der Basis einer Jobanalyse der Lehrtätigkeit

Die Aufsätze wurden in einem zweiten Durchgang unter der Fragestellung: „Welche fachwissenschaftsrelevanten Lehrerrollen und -funktionen nehmen Studierende bereits wahr?“ analysiert. Die Jobanforderungskategorien, wie sie Prediger (2013) herausarbeitet, wurden dabei als Kategorien gewählt. Die Auswertung der studentischen Aussagen zum Nutzen der Fachausbildung zeigt dabei keine Übereinstimmungen, was auf ein wenig ausdifferenziertes Bild der zukünftigen Lehrertätigkeit hinweist.

Schlussfolgerungen

Es zeigt sich, dass die Studierenden sehr differenziert und vielfältig auf die Nutzenfrage antworten. Man muss sicherlich bedenken, dass durch die Fragestellung und auch durch die Personalisierung der Aufsätze negative Äußerungen seltener geäußert werden, als bei einer anonymen Befragung. Gleichzeitig zeigt die zweite Analyse, dass viele Aspekte der Funktion des Fachwissens aus fachdidaktischer Sicht von den Studierenden zu diesem Zeitpunkt nicht erwähnt werden (z.B. das Analysieren und Bewerten von Schulbuchzugängen). Die bei der ersten Analyse vorgestellten Kategorien sollen einerseits noch weiter verfeinert werden, andererseits in ein Interviewkonzept eingehen, damit bei Studierenden tiefer hinsichtlich der Nutzenbewertung nachgefragt werden kann. Ferner sollen sie explizit mit Beispielen und Kategorien konfrontiert werden, wie sie bei Prediger (2013) vorgeschlagen werden.

Literatur

Becher, S. (2014). Einstellungen von Lehramtsstudierenden (Gym) zur fachmathematischen und (fachdidaktischen) universitären Ausbildung. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (Band 1, S.141-144). Münster: WTM-Verlag.

Bungartz, P. & Wynands, A. (1998): Wie beurteilen Referendare ihr Mathematikstudium für das Lehramt Sekundarstufe II? http://www.math.uni-bonn.de/people/wynands/Referendarbefragung.html (Zugriff am 20.02.2015)

Cramer, C., Horn, K., & Schweitzer, F. (2009). Zur Bedeutsamkeit von Ausbildungskomponenten des Lehramtsstudiums im Urteil von Erstsemestern. Erste Ergebnisse der Studie "Entwicklung Lehramtsstudierender im Kontext institutioneller Rahmenbedingungen" (ELKiR). *Zeitschrift für Pädagogik*, 55(5), 761-780.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4), 233-258.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In Ableitinger et. al (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151-168). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Törner, G. (1999). Analyse von narrativen Elementen und der Zusammenhang mit Vorstellungen über den Analysisunterricht. In Neubrand, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999*. (S.543 – 546). Hildesheim: Franzbecker.

Strauss, A. L., Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz, PsychologieVerlagsUnion.

Johannes BECK, Würzburg

Schülererklärungen in Lösungsdokumentationen beim Einsatz von CAS in Prüfungen

Der Einsatz digitaler Technologien wie Computeralgebrasysteme (CAS) bringt Veränderungen für den Mathematikunterricht mit sich. Durch die vielfältigen Funktionen eines CAS-Rechners führen die Schülerinnen und Schüler andere Tätigkeiten als im herkömmlichen Unterricht aus. Das gilt insbesondere auch beim Problem- oder Aufgabenlösen. Eine sich daraus ergebende Konsequenz ist, dass darüber nachgedacht werden muss, wie die Lösungen bzw. der Lösungsvorgang / Lösungsweg von Aufgaben dokumentiert werden soll. Gerade für Prüfungen stellt dies eine neue Herausforderung sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehrende dar.

Sinn von Lösungsdokumentationen

Der Sinn von Lösungsdokumentationen besteht zunächst einmal darin, die Vorgehensweise beim Lösen einer Aufgabe für andere nachvollziehbar aufzuschreiben. Damit liegt in Prüfungen eine Kommunikationssituation vor, in der Lernende als Sender, Lehrende als Empfänger und die schriftlich fixierte Dokumentation als Kanal für die Nachricht (etwa mathematisches Wissen) angesehen werden können.

Zunächst sollen einige im Folgenden verwendete Begriffe kurz erklärt werden. Unter *Lösung* wird der von Schülerinnen und Schülern ausgeführte Vorgang des Lösens verstanden. Bei diesem sind sowohl kognitive Prozesse („im Kopf“) als auch händische Tätigkeiten – etwa das Bedienen eines Taschencomputers – beteiligt. Die *Lösungsdokumentation* / *Dokumentation* sind schriftlich fixierte Hinweise, die es einem Leser ermöglichen sollen, den *Lösungsprozess* nachvollziehen bzw. rekonstruieren zu können. Im traditionellen – d. h. „CAS-freien Unterricht“ – stimmen die ausgeführten Tätigkeiten weitgehend mit den dokumentierten Schritten überein. Dagegen werden beim CAS-Einsatz viele Tätigkeiten im Gerät ausgeführt bzw. an das Gerät ausgelagert, und der Lösungsprozess muss auf eine andere Art dokumentiert und rekonstruierbar werden.

Eine im Oktober 2014 durchgeführte Umfrage unter Lehrerinnen und Lehrern hat ergeben, dass es diesbezüglich tendenziell zwei gegensätzliche Positionen gibt. Die einen befürworten die Notation von CAS-Befehlen auch in Rechnersprache, um das Verständnis der Dokumentation zu erleichtern. Die andere Gruppe lehnt dies mit dem Verweis darauf, dass es darum geht, Mathematik und keine Rechnerbefehle aufzuschreiben.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

In Prüfungen stellen Lösungsdokumentationen bzw. die geschriebene Dokumentation – nach dem obigen Sender-Empfänger-Modell – einen Kanal dar, auf dem die Nachricht vom Sender zum Empfänger transportiert wird, Da Nachfragen nicht möglich sind, muss der Sender gewährleisten, dass die Nachricht verstanden wird, d.h. er muss dafür Sorge tragen, dass er seinen Lösungsweg verständlich *erklärt*.

Deskriptives Raster

Es stellt sich zunächst einmal die Frage, wie Schülerinnen und Schüler überhaupt in Prüfungen mit CAS ihre Lösungen dokumentieren. Dann lässt sich fragen, wie man diese Dokumentationen beschreiben kann, um sie einordnen oder kategorisieren zu können Eine zentrale Kategorie sind dabei *verbalisierte Erklärungen*.

Auf Grundlage von theoretischen Überlegungen aus der sprachwissenschaftlichen Textanalyse wurde ein vorläufiges deskriptives Modell erstellt, das im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring anhand von authentischen Schülerlösungen angepasst wird. Dabei können zwei Dimensionen unterschieden werden (Abb. 1).

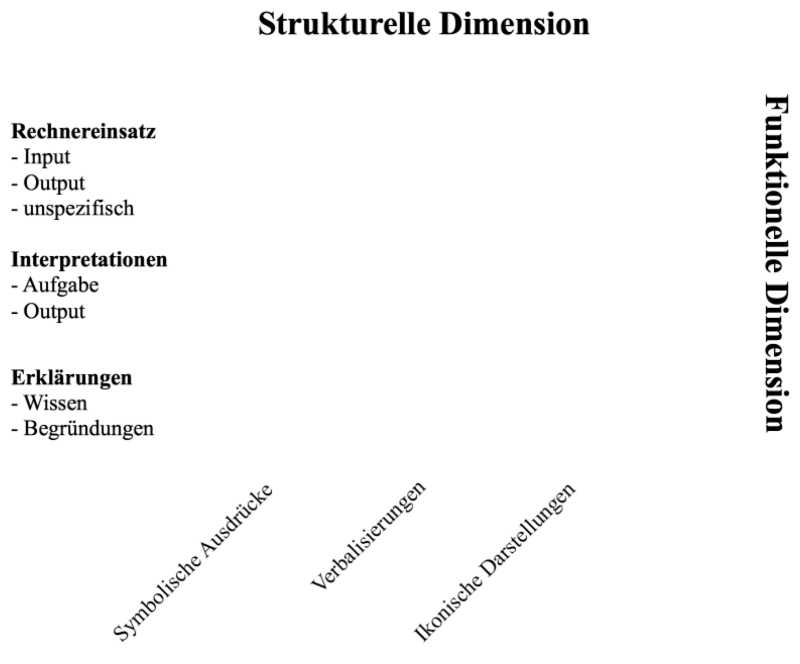


Abbildung 1

Die *strukturelle Dimension* beschreibt, mit welchen Darstellungsmitteln Schülerinnen und Schüler dokumentieren. Diese können symbolische Ausdrücke in einer Formelsprache (mathematische, rechnereigene oder Mischformen), Verbalisierungen und ikonische Darstellungen umfassen. Die *funktionelle Dimension* beschreibt, welchem Zweck ein Element dient, d.h. was damit eigentlich dokumentiert und auf welchen Schritt des Lösungsvorgangs damit verwiesen wird. Zentral dabei sind die Dokumentation des Rechnereinsatzes, Interpretationen z.B. der Aufgabe oder von Rechnerausgaben sowie Erklärungen. Letztere sollen als Oberbegriff auch das Darlegen von Wissen und Begründungen umfassen. Die Kategorien der funktionellen Dimension greifen die Hinweise des RIPA-Schemas auf (vgl. Ball & Stacey, 2003).

Begreift man Mathematik als Sprache, so umfasst die strukturelle Dimension die *Syntaktik* der Mathematik. Eine Gleichsetzung von struktureller Dimension und Syntaktik (der Mathematik) ist jedoch nicht sinnvoll, da in Lösungsdokumentationen nicht nur die mathematische Sprache (verstanden als System von Zeichen mit Form, Bedeutung und Verwendung), sondern auch „normale" Sprache (Maier & Schweiger, 1999; Lechner, 2000) auftritt.

Datenerhebung und erste Ergebnisse

Ausgewertet werden derzeit 36 anonymisierte Abiturbearbeitungen des bayerischen CAS-Abiturs 2014. Die Dokumentationen entstammen vier Gymnasien, d.h. auch vier von verschiedenen Lehrern unterrichteten Klassen. Es wurden jeweils neun Bearbeitungen eingesandt, von denen jeweils *vor* der Korrektur auf Grund der Lehrereinschätzung drei „gute", „mittlere" und „weniger gute" Leistungen zu erwarten waren. Ein zweiter Auswertungsdurchgang soll mit Lösungen aus dem bayerischen CAS-Abitur 2015 erfolgen.

Zunächst fiel bei der Analyse der Dokumentationen auf, dass bzgl. der Notation von CAS-Befehlen innerhalb der Klassen große Homogenität herrscht. In drei der Klassen wurden CAS-Befehle in den Dokumentationen notiert, während in nur einer Klasse diese gänzlich fehlten. Erklärt werden kann diese Beobachtung durch die persönliche normative Setzung der Lehrkraft während des vorangegangenen Schuljahres, die sich auch in der Lehrerumfrage angedeutet hat.

Aus der Analyse der Schülerdokumente ergab sich weiterhin die Beobachtung, dass Lösungen, bei denen auf verbalisierte Erklärungen verzichtet wurde, wesentlich schwerer nachzuvollziehen waren. Ein Zusammenhang zwischen vorab eingeschätzter Leistung und dem Vorhandensein von verbalisierten Erklärungen konnte bislang noch nicht genauer untersucht werden. Es ergab sich jedoch der Eindruck, dass gerade tendenziell schlechtere Schüler öfter ihr Vorgehen wörtlich erklären.

Erklären

Für schriftliche Lösungsdokumentationen sind in Prüfungen für Erklärungen besonders relevante Elemente „primär sprachliche Ausführungen“, das Ziel, dass der Leser „Zusammenhänge erkennen [soll]“, sowie ein hoher Grad an Fachsprachlichkeit (Jörissen / Schmidt-Thieme 2015). Zusätzlich erweitern ergänzende Erklärungen die übermittelte Information, wodurch sie einerseits unter Umständen Redundanz erzeugen, andererseits dadurch aber Missverständnissen im Kommunikationsprozess vorbeugen bzw. beheben können.

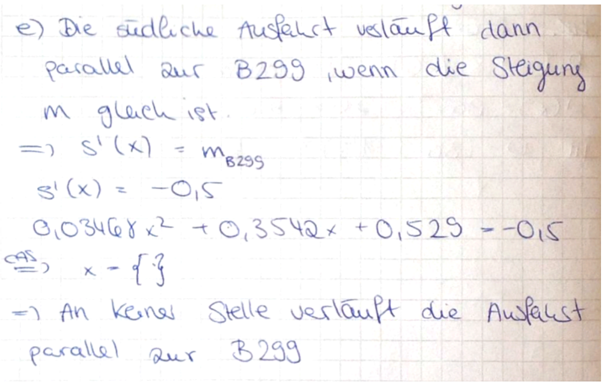


Abbildung 2

Im Beispiel (Abb. 2) erklärt der Schüler die Lösung der Aufgabe verbal in einem Satz zu Beginn der Bearbeitung. Dass dabei sprachliche Ungenauigkeiten auftreten, ist an dieser Stelle nicht so entscheidend, da die Information des Textes zusätzlich in mathematischer Formelsprache gegeben wird. Auch das Ergebnis, welches der unspezifisch angezeigte CAS-Einsatz liefert, wird zusätzlich verbal in Bezug auf die Aufgabe interpretiert.

Schülerinnen und Schüler müssen ein Gespür dafür entwickeln, was eine dem jeweiligen Zweck angemessene Lösungsdokumentation ist und wo ggf. zusätzliche Erklärungen nötig sind. Diese Entwicklung zu fördern, stellt eine nicht zu unterschätzende didaktische Herausforderung dar.

Literatur

Ball, L., Stacey, K. (2003). What Should Students Record When Solving Problems with CAS? – Reasons, Information, the Plan, and Some Answers. In James T. Frey ea. *Computer Algebra Systems in Secondary Mathematics Education* (S.289-303). Reston: NCTM.

Jörissen, S., Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen, Formalisieren und Kommunizieren. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum.

Lechner, J. (1999/2000). Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten. Verfügbar unter http://www.acdca.ac.at/projekt3/a303grundwissen.pdf [01.03.2015]

Maier, H., Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Verfügbar unter http://www.math.uni-muenster.de/reine/u/mollerh/data/MaierSchweig11.pdf [01.3.2015]

Ramona BEHRENS, Würzburg

Formulieren von mathematischen Fragestellungen – unterstützt durch Taschencomputer

Das Stellen von Fragen und Variieren von gegebenen Situationen ist ein wichtiger Aspekt im Mathematikunterricht. Unter der Kompetenz Problemlösen ist in den KMK-Bildungsstandards (2003) für den mittleren Schulabschluss neben der Bearbeitung vorgegebener Probleme auch das selbstständige Formulieren von Problemen ein bedeutsamer Punkt. So sehen das auch Bruder & Collet: „Ein Problem lösen zu wollen, heißt nichts anderes, als sich immer wieder geeignete Fragen zu stellen“ (2011, S. 23). Das Finden von Fragen ist auf unterschiedliche Weisen in die Tätigkeiten des Problemlösens eingebettet. Zum einen ist es beim Problemlösen hilfreich, neue Probleme zu erzeugen, so dass ein tieferes Verständnis des Themenbereichs erlangt werden kann. Aus der Lösung eines Problems können sich neue Fragen ergeben, die analysiert werden müssen, um die Bedeutung des eigentlichen Problems zu verstehen. Zum anderen können Variationen des Problems helfen, eine Lösungsidee für das Problem zu finden (vgl. auch Brown & Walter 1983, S. 1 f.).

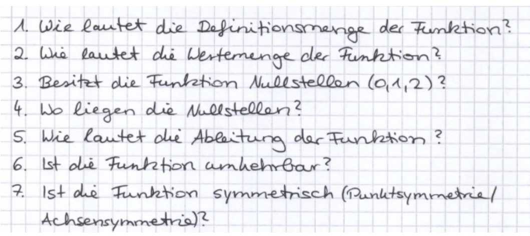
In der englischsprachigen Literatur wird mit “Problem Posing“ einerseits das Erzeugen von neuen Aufgaben und andererseits die Umformulierung bzw. Veränderung gegebener Aufgaben verstanden, so dass eine neue Variante dieser Aufgaben entsteht. Aus diesem Grund kann das Variieren von Aufgabenstellungen sowohl vor der Bearbeitung einer Aufgabe, als auch während der Bearbeitung sinnvoll sein (vgl. Silver 1994, S. 191 f.). Zum Problemlöseschritt „Ausdenken eines Plans“ gibt Pólya den Hinweis eine ähnliche Aufgabe zu suchen, deren Lösung bei der aktuellen Aufgabe helfen könnte (vgl. Pólya 1949). Dabei kann die gelöste Aufgabe auch umformuliert werden, indem Bedingungen verändert werden, so dass neue verwandte Aufgaben entstehen. Das Formulieren von Aufgaben kann auch unabhängig vom Problemlösen auftreten, wenn es das Ziel ist, ausgehend von einer gegebenen Situation oder Erfahrung eine Aufgabe zu erzeugen (vgl. u. a. Silver 1994, S. 191 f.).

Im Allgemeinen werden drei Typen von “Problem-Posing“-Situationen unterschieden, wobei die Unterscheidung danach erfolgt, in welchem Maße die neue Aufgabe von einer Ausgangsaufgabe abhängt (Schupp 2002, S. 10). Bei freien “Problem-Posing“-Situationen geht es um das Erstellen von Aufgaben, ohne dass eine spezielle Situation vorgegeben ist. Dabei sollen die Lernenden z. B. eine Situation aus dem Leben nehmen, die mit Mathematik verknüpft werden kann und daraus eine Aufgabe formulieren. Bei

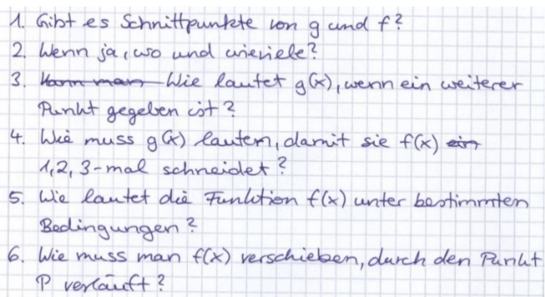
In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

halbstrukturierten “Problem-Posing“-Situationen wird eine offene Situation gegeben und die Lernenden erhalten den Auftrag diese mithilfe ihres Vorwissens und ihren Fähigkeiten durch das Finden von mathematischen Fragen zu erkunden. Hingegen werden bei ganzstrukturierten „Problem-Posing“-Situationen erst Initialaufgaben gelöst und dann neue Fragestellungen entwickelt, indem die Fragen umformuliert oder Bedingungen der Aufgabe weggelassen werden (vgl. Abu-Elwan 2002, S. 59 f.). Brown und Walter geben Beispiele für halbstrukturierte “Problem-Posing“-Situationen und zeigen ein Vorgehen zur Formulierung von Fragestellungen auf. Es werden offene Situationen vorgegeben, beispielsweise die Gleichung $a^2+b^2=c^2$, zu denen Fragen entwickelt werden sollen. Im ersten Schritt geht es um das Erfassen der in der Situation gegebenen Elemente und ihrer Eigenschaften, etwa hierbei die Variablen sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden. Dann werden die Eigenschaften der Elemente mithilfe der Frage verändert: Wenn die Elemente nicht diese Eigenschaft hätten, welche könnten sie dann haben? Diese Strategie zur Variation einer Situation und somit zum Formulieren von Fragestellungen nennen Brown und Walter “What-If-Not-Strategy“. Eine mögliche Veränderung des obigen Beispiels wäre dann: Für welche Zahlenwerte ist die Ungleichung: $a^2+b^2<c^2$ richtig? (vgl. Brown & Walter 1983, S. 44 ff.). Ein Beispiel für ganzstrukturierte Situationen ist „Zerlege ein Quadrat in 4 Teilquadrate“. Zunächst soll die Aufgabe gelöst und dann einzelne Elemente dieser Aufforderung variiert werden. Dabei ist es wichtig, dass insbesondere auch heuristische Strategien explizit gemacht und angewandt werden, die nicht nur beim Variieren, sondern auch beim Problemlösen hilfreich sind. In Bezug auf die oben genannte Aufgabe wäre eine mögliche Variationsstrategie das geringfügige Ändern durch Zerlegen des Quadrats in eine andere Anzahl an Teilquadraten (vgl. Schupp 2002, S. 21, S. 31, S. 99 ff.). “Problem Posing“ umfasst ein weites Feld bezüglich der Generierung und Umformulierung von (neuen) Aufgaben. Im Rahmen des hier beschriebenen Forschungsprojekts werden insbesondere das Stellen von Fragen zu vorgegebenen Situationen und das Variieren dieser Situationen betrachtet. Beim Formulieren von Fragestellungen und Variieren von Situationen kann der Taschencomputer eine Unterstützung bieten. Neben der Veranschaulichung von Situationen mithilfe des Graphikmenüs können Dynamisierungen der Situationen helfen, diese aus einem anderen Blickwinkel zu sehen. Durch die Verwendung des Taschencomputers können Variationen durch Austausch von Objekten oder Veränderung von Werten einfach durchgeführt werden. Im Bereich Funktionen können Auswirkungen von Parameterveränderungen oder Eigenschaften von Funktionstypen untersucht werden (vgl. Behrens 2014).

In diesem Projekt wird der Frage nachgegangen, welche Strategien Schülerinnen und Schüler beim Stellen und Variieren von mathematischen Fragen zu gegebenen Situationen aus dem Bereich Funktionen verwenden. Dabei ist insbesondere von Interesse, ob die Lernenden, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer verwenden, diesen auch beim Formulieren und Variieren von mathematischen Fragestellungen einsetzen und wofür sie diesen dann in diesem Rahmen verwenden. Mit Taschencomputer sind in diesem Zusammenhang graphikfähige Taschenrechner bzw. Graphikprogramme mit Computer-Algebra-System gemeint. Des Weiteren soll untersucht werden, ob sich spezifische Schwierigkeiten und Lernchancen beim Formulieren von Fragestellungen und Variieren einer gegebenen Situation zum Bereich Funktionen feststellen lassen. An einer empirischen Untersuchung nahmen elf Dreiergruppen aus der 10. bzw. 11. Klasse aus drei Gymnasien teil, die mit einer derartigen Aufgabenstellung bisher keine Erfahrung hatten. Jede Gruppe hatte 45 Minuten Zeit. Taschencomputer durften verwendet werden. In der Untersuchung hat jede Gruppe eine von vier halbstrukturierten Situationen zum Themenbereich Funktionen bekommen, zu denen Fragen gestellt werden sollten. Eine dieser Situationen war z. B. folgende: Gegeben sind eine Funktion f mit $f(x)=8x^3-3x^2-4x+1$ und eine Gerade g, die durch den Punkt P(3/0) verläuft. In der ersten Phase hatten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag sich zu der gegebenen Situation eigenständig mathematische Fragestellungen zu überlegen. Anschließend wurden die Fragestellungen in Gruppenarbeit zusammengetragen (vgl. auch Behrens 2014).



1. Wie lautet die Definitionsmenge der Funktion?
2. Wie lautet die Wertemenge der Funktion?
3. Besitzt die Funktion Nullstellen (0,1,2)?
4. Wo liegen die Nullstellen?
5. Wie lautet die Ableitung der Funktion?
6. Ist die Funktion umkehrbar?
7. Ist die Funktion symmetrisch (Punktsymmetrie/Achsensymmetrie)?



1. Gibt es Schnittpunkte von g und f?
2. Wenn ja, wo und wieviele?
3. ~~Kann man~~ Wie lautet g(x), wenn ein weiterer Punkt gegeben ist?
4. Wie muss g(x) lauten, damit sie f(x) ~~ein~~ 1,2,3-mal schneidet?
5. Wie lautet die Funktion f(x) unter bestimmten Bedingungen?
6. Wie muss man f(x) verschieben, durch den Punkt P verläuft?

In der Abbildung links sind als Beispiel Fragestellungen aufgeführt, die eine Gruppe zu der obengenannten Funktions-Aufgabe formuliert hat. In der zweiten Phase der Gruppenarbeit wurden die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines Arbeitsauftrags explizit zur Variation aufgefordert. Die Fragestellungen, welche von der beispielhaft betrachteten Gruppe nach dem Variationsauftrag formuliert wurden, sind in der rechten Abbildung dargestellt. Die Gruppen haben die vorgegebene Funktionsgleichung geändert, Bedingungen hinzugefügt oder weggelassen und die Situation dynamisiert. Nach der Gruppenarbeitsphase wurde ein Gruppeninterview durchgeführt, bei dem Fragen zum Vorgehen, zum Taschencomputereinsatz und zu

Schwierigkeiten gestellt wurden. Die Gruppenarbeit sowie das Interview wurden mithilfe einer Videokamera aufgezeichnet. Danach wurde die Lehrperson u. a. zur Einschätzung der von den Schülerinnen und Schülern bearbeiteten Situationen, zu Methoden und zum Einsatz des Taschencomputers im Mathematikunterricht interviewt. Zur Beantwortung der Forschungsfragen sollen die Transkripte der Gruppenarbeiten und Interviews mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet werden. Mittels eines Kategoriensystems, aufbauend auf den von Schupp genannten Variationsstrategien und theoretischen Überlegungen, sollen die von den Schülerinnen und Schülern verwendeten Strategien identifiziert werden. Dabei soll auch der Einsatz des Taschencomputers – basierend auf den Videoaufzeichnungen und Screenshots, die bei den Gruppeninterviews aufgenommen wurden – ausgewertet werden. Auch die aufgetretenen Schwierigkeiten und Lernchancen sollen mithilfe der Transkripte der Videoaufzeichnungen gedeutet werden.

Literatur

Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of Problem Posing Strategies on Prospective Mathematics Teachers' Problem Solving Performance. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 25, 1. 56-69. http://www.recsam.edu.my/R%26D_Journals/YEAR2002/2002Vol25No1/56-69.pdf [31.03.2015]

Behrens, R. (2014): Lernen, Fragen zu stellen – unterstützt durch den Einsatz eines Taschencomputers. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 153–156). Münster: WTM-Verlag.

Brown, S. I. & Walter, M. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [01.04.2015]

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen und Basel: Francke.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14, 1, FLM Publishing Association, Vancouver. British Columbia, Canada. 19–28. http://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf [31.03.2015]

Frances BEIER, Lüneburg

Entstehung mathematikbezogener Angst zu Beginn der Sekundarstufe I

Die Mathematik ist eine sehr anschauliche, anwendungsbezogene und logische Disziplin. Trotzdem entwickeln viele Schülerinnen und Schüler (SuS) mathematikbezogene Angst während ihrer Schullaufbahn (Gierl, Bisanz 1995). Hier setzt das Ziel dieser Studie an: Es sollen Einflussfaktoren untersucht werden, welche die Entstehung mathematikbezogener Angst zu Beginn der Sekundarstufe I bedingen können.

1. Theoretischer Hintergrund

Unter mathematikbezogener Angst wird das Gefühl von Anspannung und Besorgnis beim Lösen von mathematischen Aufgaben im akademischen, privaten oder sozialen Kontext verstanden (Richardson, Suinn 1972).

Innerhalb des Kontextes der Emotion Angst wird für die Entwicklung von Emotionen der Appraisal-Ansatz von Arnold (1960) herangezogen. Zentral hierbei ist das Fähigkeitsselbstkonzept, das vorrangig für die Bildung von Appraisals (kognitive Bewertungsprozesse von Situationen, Tätigkeiten oder der eigenen Person) verantwortlich ist. Appraisals definieren durch unterschiedliche Konstellationen (Persönliche Relevanz, Valenz, Auftretungswahrscheinlichkeit, Vermeidung), welche Emotion empfunden wird. Die Emotion „Angst" wird dann erlebt, wenn ein persönlich relevantes Ereignis, das als negativ empfunden wird, mit hoher Wahrscheinlichkeit eintreten kann und das Gefühl besteht, nicht über genügend Ressourcen zur Abwendung oder Lösung des Ereignisses zu verfügen (Frenzel, Goetz, Pekrun 2009).

Die vorliegende Studie setzt bei Einflussfaktoren an, die bei der Entstehung eines Fähigkeitsselbstkonzepts zentral sind. Es soll untersucht werden, welche Faktoren bezogen auf die Emotion Angst im Kontext der Mathematik am stärksten auf das Fähigkeitsselbstkonzept wirken.

Im Fokus der Untersuchung stehen SuS, die sich zum aktuellen Zeitpunkt im Eingangsbereich einer weiterführenden Schule befinden, da gerade der Übertritt in eine weiterführende Schule divergierende Gefühle hervorrufen kann (Vernay 1999).

2. Forschungsfrage und Untersuchungsdesign

Forschungsfrage. Basierend auf dem theoretischen Hintergrund ergibt sich folgende Forschungsfrage:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Welche Faktoren – aus den Bereichen intrapersonelle Aspekte, schulische Rahmenbedingungen und prägende Ereignisse – beeinflussen in welchem Ausmaß die Entstehung mathematikbezogener Angst zu Beginn der Sekundarstufe I?

Stichprobe. Die Stichprobe bilden 12 SuS mit einem spezifischen Leistungs-Einstellungs-Profil. Diese nehmen an einer Interviewstudie teil und werden über einen Zeitraum von 7 Monaten alle vier Wochen zu erlebten Gefühlen, spezifischen Situationen, sozialer Umwelt und weiteren Einflüssen im Zusammenhang mit Mathematik interviewt. Die Auswahl dieser 12 SuS geschieht anhand eines Auswahltests, bestehend aus dem DEMAT 4 und einem Mathematikfragebogen. Am Auswahltest haben insgesamt 110 SuS (w=48/m=62, Durchschnittsalter 11 Jahre) der Jahrgangsstufe 5 aus drei unterschiedlichen Schulen Lüneburgs (insgesamt 7 Klassen) teilgenommen. Unter den Schulen befinden sich zwei Oberschulen (höchster Abschluss Sekundarabschluss I) und eine integrative Gesamtschule (höchster Abschluss Abitur), in der alle SuS niveauübergreifend in einem Klassenverband unterrichtet werden.

Untersuchungsinstrumente. Der DEMAT 4 ist der Deutsche Mathematiktest für die 4. Klasse, der in die drei Inhaltsbereiche Arithmetik, Sachrechnen und Geometrie untergliedert ist (Gölitz, Roick, Hasselhorn 2006).

Der Mathematikfragebogen stellt eine Übersetzung des amerikanischen *Attitudes towards Mathematics Inventory* (ATMI, Tapia 1996) dar, der mithilfe von vier unterschiedlichen Skalen Einstellungen gegenüber der Mathematik misst: Insgesamt besteht der Fragebogen aus 40 Items, wovon 5 der Skala Motivation zugeordnet werden, 15 der Skala Self-Confidence und jeweils 10 den Skalen Enjoyment und Value. Bei dem Fragebogen handelt es sich um ein geschlossenes Format mit einer 5-stufigen Likert-Antwortskala. Die Items wurden für die vorliegende Forschung übersetzt und an die entsprechende Altersgruppe, sowie das deutsche Schulsystem angepasst. Die erste Pilotierung des Fragebogens wurde mit 23 SuS durchgeführt, um das Verständnis der Items zu überprüfen. Daraufhin wurden einige Items an das Sprachniveau angeglichen und eine zweite Pilotierung mit 112 SuS der Jahrgangsstufe 5 einer integrativen Gesamtschule aus Lüneburg veranlasst. Die Pilotierung ergab zufriedenstellende bis sehr gute Reliabilitätswerte. Der Fragebogen wurde nach der Pilotierung für die Verwendung im Auswahltest um drei Skalen aus dem PALMA-Projekt (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik, 2003) erweitert.

Den Interviewsitzungen liegt ein Leitfaden zu Grunde, individuelle Äußerungen stehen jedoch im Fokus.

Einstellung[1] / *Leistung*	*Neutral*	*Negativ*
Unterdurch-schnittlich	3 Lernende	3 Lernende
Durchschnitt-lich	3 Lernende	3 Lernende

Tab. 1: Kombination der Ergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler werden nach einer Kombination der Ergebnisse aus dem DEMAT 4 und dem Fragebogen hin ausgewählt. Es ergeben sich hierbei vier Kategorien, die für die Beantwortung der Forschungsfrage relevant sind.

Da Leistung einen wichtigen Prädiktor für die Entwicklung des Fähigkeitsselbstkonzepts darstellt, wurde die Einstellung dem Fach gegenüber mit Leistungen kombiniert. Weiter wurden positive Einstellungen in dieser Auswahlmatrix vernachlässigt, da nicht erwartet wird, dass SuS in einem Rahmen von 7 Monaten Angst aus einer anfangs positiven Einstellung heraus entwickeln, doch aber aus einer neutralen, weshalb diese Bestandteil der Studie ist. Durchschnittliche Leistungen werden mit einbezogen, um den Leistungsfaktor zu minimieren und herauszufinden, welche Faktoren emotionsbeeinflussend sind, wenn das Verhältnis von Misserfolgen und Erfolgen ausgeglichen ist.

Datenanalyse. Die qualitativen Interviews stellen den Kern der Untersuchung dar und werden mit Hilfe der dokumentarischen Methode nach Nohl (2012) ausgewertet. Durch diese Auswertungsmethode können Hypothesen zu den Einflussfaktoren zur Entstehung mathematikbezogener Angst generiert werden.

3. Ergebnisse

Die Ergebnisse des DEMAT 4 zeigen, dass die Klassen der integrativen Gesamtschule über alle drei Inhaltsbereiche hinweg bessere Ergebnisse erzielen als die teilgenommenen Oberschulen und damit dichter an der vergleichbaren Normstichprobe des DEMAT 4 liegen. Die zugrundeliegende Normstichprobe setzt sich aus der über alle Bundesländer verteilten Jahrgangsstufe 4 zusammen.

Überraschende Ergebnisse zeigt die Auswertung des Fragebogens[2]: Mehr als die Hälfte der SuS geben über alle Skalen hinweg positive Einstellun-

[1] Die Einteilung in Negative/Neutrale Einstellung geschieht nach folgendem Kriterium: Der Gesamtscore der einzelnen Skalen wird gedrittelt und so nach Negativ, Neutral, Positiv unterschieden. Erreicht ein Kind bei über der Hälfte der Skalen (≥4) das gleiche Drittel, wird es dieser Kategorie zugeordnet.

[2] Eine zufriedenstellende Reliabilität wird erneut repräsentiert durch Cronbachs Alpha mit Werten zwischen .69 und .89.

gen an. Ein weiteres unerwartetes Ergebnis besteht darin, dass sich signifikant weniger Schülerinnen und Schüler in der Kategorie Negative Einstellung/Unterdurchschnittliche Leistung wiederfinden als in den anderen Kategorien zur Auswahl der Interviewsitzungen.

4. Diskussion und Ausblick

Aufgrund der Ergebnisse des Fragebogens entsteht die Vermutung, dass sich die Abneigung gegenüber der Mathematik erst in einem späteren Alter manifestiert.

Ein Vorteil des ATMI gegenüber anderen bereits in der deutschen Sprache existenten Fragebögen innerhalb des Kontextes zur mathematikbezogenen Angst besteht darin, dass Einstellungen und nicht konkrete Emotionen gemessen werden. So können Einflussfaktoren während des Prozesses der Entstehung mathematikbezogener Angst herausgefunden werden. Das retrospektive Reflektieren über mögliche vergangene Einflüsse kann so umgangen werden.

Die Interviewstudie hat bereits begonnen und wird bis zu den Sommerferien 2015 durchgeführt. Die SuS werden in Einzelsitzungen von etwa einer halben Stunde beispielsweise zu Assoziationen mit der Mathematik, Verhältnis zur Lehrkraft und den Eltern, Klassenklima, Leistungsdruck und spezifischen Situationen im Mathematikunterricht befragt. Um sich die Unterrichtssituation vergegenwärtigen zu können, steht Material zum Nachspielen von Situationen bereit.

Literatur

Arnold, M. B. (1960). *Emotion and personality*. New York: Columbia University Press.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Pekrun, R. (2009). Emotionen. In E. Wild, J. Möller (Hrsg.), *Lehrbuch Pädagogische Psychologie* (S. 205-234). Heidelberg: Springer.

Gierl, M. J., Bisanz, J. (1995). Anxieties and attitudes related to mathematics in grades 3 and 6. *Journal of Experimental Education, 63 (2),* 139-158.

Gölitz, D., Roick, T., Hasselhorn, M. (2006). *Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen*. Göttingen: Hogrefe Verlag.

Nohl, A.-M. (2012). *Interview und dokumentarische Methode. Anleitungen für die Forschungspraxis* (4. überarbeitete Auflage). Wiesbaden: VS Verlag.

Pekrun, R., et al. (2003). *Skalenhandbuch PALMA: 2. Messzeitpunkt (6. Jahrgangsstufe)*. Department Psychologie: Universität München.

Richardson, F. C., Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19,* 551-554.

Tapia, M. (1996). *The attitudes towards mathematics instrument*. Columbus, OH: ERIC Document Reproduction Service No. ED404165.

Vernay, R. (1999). Neue Klasse – wie beginnen? *Mathematik Lehren, 94,* 4-7.

Jana BEITLICH, Elisabeth REICHERSDORFER, Kristina REISS,
München

Blickbewegungen beim Lesen eines heuristischen Lösungsbeispiels mit verschiedenen Repräsentationsformen

Theoretischer Hintergrund

Argumentieren gilt als Wesensmerkmal von Mathematik. Es ist in schulischen Lehrplänen und Standards aller Jahrgangsstufen verankert (z. B. Kultusministerkonferenz, 2004; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Allerdings deuten Studien auf Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern verschiedener Altersstufen und Nationalitäten beim Argumentieren hin (für einen Überblick siehe z. B. Reiss & Ufer, 2009).

Ein Ansatz zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz ist die Verwendung heuristischer Lösungsbeispiele (z. B. Reiss & Renkl, 2002). Ihre Wirksamkeit konnte sowohl für Schülerinnen und Schüler (Reiss, Heinze, Renkl, & Groß, 2008) als auch für Studierende (Hilbert, Renkl, Kessler, & Reiss, 2008) gezeigt werden. Während klassische Lösungsbeispiele neben der Aufgabenstellung eine direkte Lösung des gegebenen Problems angeben, zeigen heuristische Lösungsbeispiele weniger direkte Lösungsschritte auf, sondern vielmehr einen realistischen, nicht notwendigerweise geradlinigen Lösungsprozess, der auch explorative oder irreführende Schritte enthalten kann (Hilbert et al., 2008). Oftmals erläutert eine fiktive Person ihr Vorgehen zur Lösung des Ausgangsproblems und nutzt dabei heuristische Strategien, also allgemeine Techniken, um Probleme besser zu verstehen bzw. den Lösungsprozess voran zu bringen (Schoenfeld, 1985). Die Struktur von heuristischen Lösungsbeispielen zur Förderung von Argumentationskompetenz basiert häufig auf einem Prozessmodell zum Beweisen von Boero (1999), das erklärt, wie Experten einen Beweis entwickeln.

In heuristischen Lösungsbeispielen werden Informationen in der Regel in unterschiedlichen Repräsentationsformen dargeboten. Ein Beweis etwa wird formal mit Hilfe mathematischer Symbole angegeben. Zur Entwicklung des Beweises können aber, selbst für Experten, auch nichtsymbolische Repräsentationen wie Abbildungen oder Erklärungen in Textform hilfreich sein (Thurston, 1994). Kognitionspsychologische Theorien zum multimedialen Lernen stützen den Ansatz, Informationen in unterschiedlichen Repräsentationsformen darzustellen, damit diese Informationen integriert werden können (z. B. Schnotz, 2005). Basierend auf diesen Theorien enthält das heuristische Lösungsbeispiel, das in der hier vorgestellten Studie untersucht wurde, Informationen in drei Repräsentations-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

formen. *Text* wurde genutzt, um die Ideen, heuristischen Strategien und Schlussfolgerungen der fiktiven Person im Lösungsprozess zu beschreiben. Zur Visualisierung bestimmter Textinhalte wurden *Abbildungen* integriert. Ferner wurden mit Hilfe mathematischer *Symbole* Aussagen formalisiert. Aufeinanderfolgende Repräsentationsformen bezogen sich häufig aufeinander, insbesondere Text und Abbildung bzw. Text und Symbol. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt des Lösungsbeispiels, der alle drei Repräsentationsformen enthält. Die Aufgabestellung des in diesem heuristischen Lösungsbeispiel bearbeiteten Problems lautete: *„Beweisen Sie: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.“*

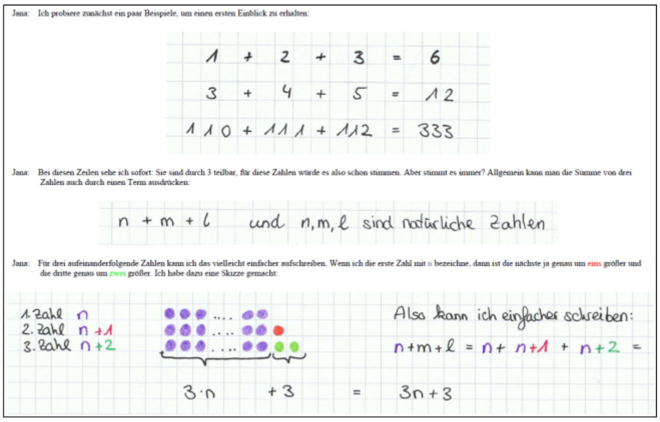


Abb. 1: Ausschnitt des heuristischen Lösungsbeispiels mit den drei Repräsentationsformen *Text*, *Abbildung*, *Symbol*.

Fragestellungen

Bisherige Studien konnten zeigen, dass der Gebrauch von heuristischen Lösungsbeispielen Argumentationskompetenz fördern kann. Unklar ist aber noch, ob Schülerinnen und Schüler von den Vorteilen heuristischer Lösungsbeispiele tatsächlich Gebrauch machen und wie sie verschiedene Repräsentationsformen nutzen. Es ist deswegen von Interesse zu untersuchen, (1) ob und wie intensiv unterschiedliche Repräsentationsformen in einem heuristischen Lösungsbeispiel zur Förderung der Argumentationskompetenz betrachtet werden und (2) ob Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe versuchen, Informationen aus verschiedenen Repräsentationsformen zu integrieren, indem sie etwa zwischen den relevanten Bereichen hin und her springen.

Methode

Um diese Fragen zu beantworten, wurde die Methode Eye Tracking verwendet. Wie eine wachsende Anzahl an Studien gezeigt hat, ist diese Technik geeignet, Strategien beim Lösen mathematischer Aufgabenstellungen sichtbar zu machen (z. B. Beitlich & Reiss, 2014; Inglis & Alcock, 2012).

Die Teilnehmenden waren 26 Schülerinnen und Schüler (16 weiblich) der Jahrgangsstufen 10 und 11 zweier Gymnasien mit einem Durchschnittsalter von 16 Jahren (*SD* = 0.85). Das heuristische Lösungsbeispiel wurde auf einem Bildschirm, der mit einem Remote Eye Tracker verbunden war, dargeboten mit der Instruktion, dass hier gezeigt würde, wie man Aufgaben vom Typ „Beweisen Sie, dass …“ bearbeiten könne. Sie sollten versuchen, den dargestellten Weg einer fiktiven Schülerin nachzuvollziehen.

Ergebnisse

Zur Analyse der Blickbewegungen wurden drei Arten von Areas of Interest (AOIs) definiert, nämlich *Text*, *Abbildung* und *Symbol*. Durchschnittlich betrachteten die Schülerinnen und Schüler die Abbildungen am längsten (0.077 ms/px, SD = .045), gefolgt von den Symbolen (0.059 ms/px, SD = .027) und dem Text (0.036 ms/px, SD = .015). Diese Unterschiede waren signifikant, $F(1.27, 31.85) = 26.34$, $p = .00$, $\eta^2 = .53$. Paarweise post-hoc Vergleiche ergaben signifikante Differenzen zwischen allen drei Repräsentationsformen (alle $p < .05$).

Außerdem sprang jeder Teilnehmende durchschnittlich 16.6-mal (SD = 9.9) zwischen AOIs verschiedener Repräsentationsformen, was darauf hindeutet, dass die Schülerinnen und Schüler versuchten, die Informationen zu integrieren. Die meisten dieser Sprünge erfolgten zwischen aufeinanderfolgenden AOIs unterschiedlicher Repräsentationsformen, die Teilnehmenden waren sich also vermutlich bewusst, dass diese Bereiche inhaltlich zusammengehörig waren.

Diskussion und Ausblick

Die Schülerinnen und Schüler betrachteten die Abbildungen des heuristischen Lösungsbeispiels länger als den Text, was im Gegensatz zu einer Studie zum Lesen und Verstehen von Beweisen zu stehen scheint, bei der Mathematikerfahrene Text länger betrachteten als die den Beweis ergänzende Abbildung (Beitlich & Reiss, 2014). Angesichts der Unterschiede dieser beiden Studien – formale Beweise, die von Experten gelesen werden vs. heuristisches Lösungsbeispiel, das von Novizen gelesen wird und Abbildungen, die den Beweis ergänzen ohne zusätzliche Informationen zu bieten vs. Abbildungen, die wichtige Aspekte der Argumentation beinhalten und zentral für das Verständnis sind – sind diese unterschiedlichen Ergebnisse jedoch nicht widersprüchlich. Gemeinsam ist beiden Studien, dass die Teilnehmenden zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen sprangen. Auch in einer Studie mit Studienanfängerinnen und -anfängern und Mathematikerinnen und Mathematikern, die Beweise lesen sollten, um sie auf ihre Gültigkeit hin zu bewerten, sprangen die Teilnehmenden zwischen aufeinanderfolgenden Zeilen (Inglis & Alcock, 2012).

Die Analyse von Blickbewegungen scheint eine geeignete Methode für die Fragestellungen der vorgestellten Studie zu sein. Um die Ergebnisse zu verallgemeinern, sind jedoch weitere Studien beispielsweise mit einer größeren Teilnehmerzahl und weiteren heuristischen Lösungsbeispielen nötig. Sinnvoll sind außerdem Studien mit Teilnehmenden mit unterschiedlichem Grad an Expertise im Bereich Argumentieren. Eine interessante Fragestellung kann ferner sein, ob sich Schülerinnen und Schüler mit besseren und schlechteren Schulleistungen in der Nutzung der verschiedenen Repräsentationsformen unterscheiden, insbesondere weil die Forschung darauf hindeutet, dass diese unterschiedlich stark von heuristischen Lösungsbeispielen profitieren (z. B. Reiss et al., 2008).

Insgesamt können Ergebnisse dieser und weiterer Studien dazu beitragen, das Design von heuristischen Lösungsbeispielen zu verbessern und den Umgang mit ihnen besser zu verstehen.

Literatur

Beitlich, J., & Reiss, K. (2014). Das Lesen mathematischer Beweise – Eine Eye Tracking Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 157-160). Münster: WTM-Verlag.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7*(8).

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction, 18*(1), 54-65.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM, 40*(3), 455-467.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34*(1), 29-35.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV, 111*(4), 155-177.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.

Ralf BENÖLKEN, Janine KELM, Münster

MaKosi – Ein Projekt zur Förderung von Kindern mit Rechenproblemen

„MaKosi" („Mathematische Kompetenzen sichern") ist ein langfristig angelegtes Förder-, Forschungs- und Lehrprojekt, das wir seit Beginn des Studienjahres 2013/2014 an der Hermannschule in Münster durchführen.

1. Zum theoretischen Rahmenwerk

In Anlehnung an phänomenologische Definitionen und entwicklungsorientierte Modellierungen von Lernschwierigkeiten in Mathematik (sowie in Anlehnung an Begabungsentwicklungsmodelle, z.B. Gagné, 2000) bildet eine ganzheitliche Modellvorstellung zu Einflussfaktoren auf den Entfaltungsprozess wichtiger arithmetischer Kompetenzen bei Grundschulkindern die Grundlage einer Beschreibung der Entstehung von „Rechenproblemen" und damit die Basis der konzeptuellen Aspekte des MaKosi-Projekts (Abb. 1; siehe auch Benölken, 2014).

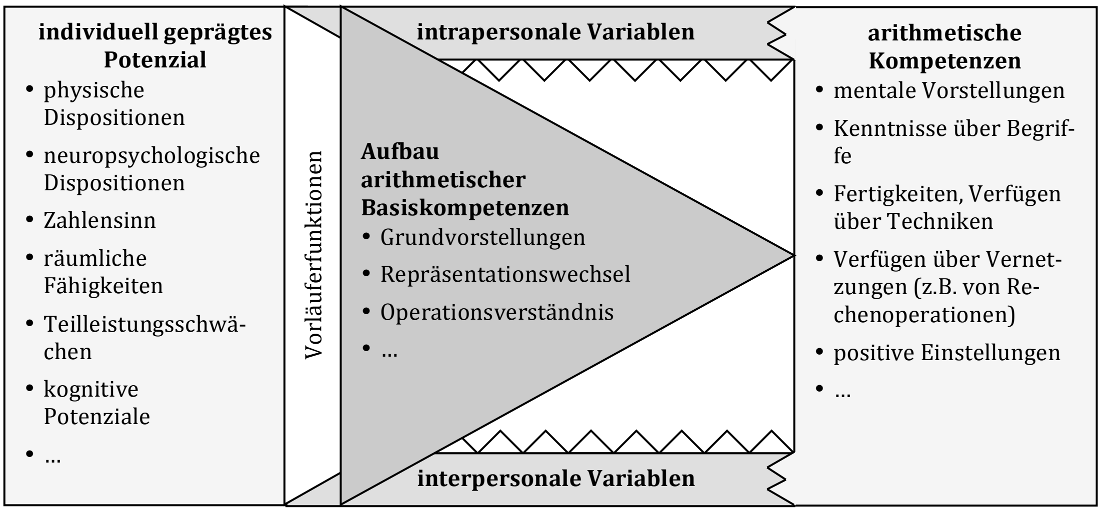


Abb. 1: Einflussfaktoren auf den Entfaltungsprozess wichtiger arithmetischer Kompetenzen.

Vor diesem Hintergrund können „Rechenprobleme" charakterisiert werden als Schwierigkeiten bei Vorläuferfunktionen für den Erwerb des Zahlverständnisses, bei Grundvorstellungen (in Bezug auf das ordinale und kardinale Zahlenverständnis – in Verbindung mit einem verfestigten zählenden Rechnen –, in Bezug auf das Teil-Teil-Ganzes-Konzept oder in Bezug auf das Verständnis des Stellenwertsystems), bei Repräsentationswechseln oder beim Operationsverständnis, die ausgehend von einem individuell geprägten Potenzial unter dem Einfluss inter- und intrapersonaler Variablen entstehen können, so dass sich Komponenten arithmetischer Kompetenzen nicht auf einem tragfähigen Niveau ausprägen. Zwar liegt der Hauptfokus

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

hier auf den in Bezug auf Lernschwierigkeiten in Mathematik am häufigsten berichteten Erscheinungsformen, doch werden Rechenprobleme gleichzeitig als individuelles Phänomen gedeutet, d.h. ihre Ausprägungen können sowohl hinsichtlich dieser „typischen" Indizien als auch darüber hinaus sehr unterschiedlich sein. Zudem sollen Schwierigkeiten fokussiert sein, die einer Förderung über den Mathematikunterricht hinaus bedürfen, jedoch innerhalb relativ kurzer Zeit und im schulischen Rahmen überwindbar scheinen (im Kontrast zu längerfristigen Schwierigkeiten, die eine Förderung außerhalb des schulischen Rahmens nahe legen und evtl. mit psychologischen Beeinträchtigungen verbunden sind; siehe auch Schipper, 2005a). Demgemäß sollten Rechenprobleme möglichst früh erkannt werden, was einem wichtigen Grundgedanken des MaKosi-Konzepts entspricht.

2. Ziele des Projekts

Die Ziele des Projekts fokussieren drei Dimensionen: (1) In Bezug auf die Kinder stehen die Unterstützung bei der Überwindung individueller Rechenprobleme sowie die Stärkung der gesamten Persönlichkeit, v.a. affektiver und motivationaler Faktoren, im Vordergrund. Außerdem soll ihnen ein adäquates Bild von Mathematik und mathematischem Tätigsein vermittelt werden. (2) MaKosi ist im Verbund mit einem vorbereitenden Seminar über theoretische Grundlagen zu Lernschwierigkeiten in Mathematik in die Ausbildung angehender Primarstufenlehrkräfte integriert. Ziele bestehen diesbezüglich in der Vermittlung theoretischer und praktischer Kompetenzen im Diagnostizieren und Fördern, wobei die unmittelbare Arbeit mit Kindern hier ebenso günstig erscheint wie die aktive Teilnahme an wissenschaftlichen Projekten. (3) Wichtige Forschungsziele liegen z.B. darin, die theoretische Grundlegung zu evaluieren sowie Handreichungen zur Diagnostik und Förderung von Kindern mit Rechenproblemen zu entwickeln.

3. Überblick über die Gestaltung der Diagnostik und Förderung

Die in Kap. 1 geschilderte Grundlegung impliziert eine ganzheitliche, langfristige Prozessdiagnostik, die verschiedene, insbesondere informelle Erfassungsinstrumente synthetisiert: Auf einer ersten Stufe erhalten die Lehrkräfte der Schule ein Anschreiben mit einem groben Überblick über theoretische Aspekte zu „Rechenproblemen" und der Bitte um eine begründete Nominierung von Kindern. Auf einer zweiten Stufe treffen sich die Kinder, die beteiligten Studierenden sowie die Projektleitung zu einem ersten Kennenlernen. Hier geht es in erster Linie darum, spielerisch Vertrauen zu schaffen und die Kinder eine(n) Lernbegleiter(in) wählen zu lassen. Auf einer dritten Stufe führen wir in den so entstehenden Learnteams ein diagnostisches Spiel durch, das in Verbindung mit den Einschätzungen der Lehrkräfte die Verankerung der weiteren Prozessdiagnostik bildet. Diese bildet formal die vierte Stufe und erstreckt sich über den gesamten Teilnahmezeitraum der Kinder. Die wichtigsten Komponenten stellen eine „Diagnose- und Förderkartei“ sowie ein darauf abgestimmtes Beobachtungsprotokoll für fehler- bzw. denkanalytische Bemerkungen dar. Die Kartei enthält diverse „typische“ Diagnoseaufgaben zu den Haupterscheinungsformen bezogen auf einzelne Zahlbereiche. Diese (an Schipper, 2005b, angelehnte) methodische Aufbereitung erscheint günstig, um der Individualität eventueller Rechenprobleme gerecht zu werden. Formell, jedoch gemäß individueller Bedürfnisse variabel gestaltbar, gliedert sich ein Projektdurchlauf in (a) eine Diagnose- und (b) eine Förderphase, in der die Arbeit mit der Kartei durch eine Förderung mit Material angereichert wird, das individuell auf die Rechenprobleme eines jeden Kindes abgestimmt wird.

4. Zur Organisation der Förderstunden

Die Projektsitzungen finden während der Semesterzeiten jeweils am Montagnachmittag statt. Sie sind gegliedert in (1) eine Vorbesprechung mit den beteiligten Studierenden, (2) die eigentliche Förderstunde sowie (3) eine Nachbesprechung zur Reflexion diagnostischer Aspekte sowie zur Gestaltung der jeweiligen Förderstunde. An den bisherigen Projektdurchgängen haben je zehn Studierende und zehn Kinder teilgenommen – diese Gleichverteilung ergibt sich aus der Arbeit mit der Diagnose- und Förderkartei. Um der Individualität von „Rechenproblemen“ gerecht zu werden, hat sich die folgende Phasierung einer Förderstunde bewährt: Jede Stunde beginnt mit einem substanziellen, natürlich differenzierenden Lernangebot, das dem Konzept des Enrichments entlehnt ist und auf arithmetische Bezüge verzichtet (z.B. Rangierprobleme; Käpnick, 2001). Auf diese Weise soll das mathematische Kompetenzerleben der Kinder gestärkt werden und eine spielerische Einstimmung erfolgen. Es schließt sich die Arbeit mit der Diagnose- und Förderkartei (später auch mit weiterem Fördermaterial) in den jeweiligen Lernteams an. Die Förderstunden enden mit einem Spiel, das z.B. einen mathematischen Bezug haben oder motorische bzw. visuelle Fähigkeiten fokussieren soll, um – gerade zum Ende einer jeden Sitzung hin – affektive Komponenten gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik zu stärken (z.B. mathematische Bewegungsspiele; Benölken, 2010).

5. Erste Ergebnisse qualitativer Evaluationen des Projektkonzepts

Im Ergebnis der Evaluation des ersten Projektdurchlaufs anhand einer Interviewstudie bei den beteiligten Studierenden liefern die Resultate von Kelm (2014) Indizien dafür, dass sich wesentliche Aspekte des MaKosi-Konzepts zu bewähren, organisatorische Details jedoch verbesserbar scheinen. So reflektieren die Studierenden den Nutzen der Projektteilnahme für die eigene Ausbildung sowie die Struktur der Förderstunden sehr positiv, insbesondere im Hinblick auf die Förderung affektiver Komponenten gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik bei den Kindern. Die diagnostische Konzeption wird im Grundsatz positiv beurteilt, die Feinabstimmung der Diagnose- und der Förderphase allerdings als noch verbesserungswürdig (diesbezüglich machten sich Effekte des „kurzen" Sommersemesters negativ bemerkbar, in dem die Evaluation durchgeführt wurde).

6. Beispiele für geplante Weiterentwicklungen und Studien

Ein Fokus liegt auf der Zusammenstellung einer Sammlung „kleiner" Spiele mit diagnostischem Bezug, welche individualisierend eingesetzt werden können und damit die Hauptphase der Förderstunden weiter flexibilisieren (z.B. unter Aspekten der für die Kinder anstrengenden Arbeit im Nachmittagsbereich). Die im Zuge der Projektarbeit entwickelten Erfassungsinstrumente sowie die zusammengestellten Fördermaterialien sollen weiter erprobt und ergänzt werden, um ein möglichst vielschichtiges und konsistentes diagnostisches „Mosaik" bzw. eine differenzierte nachhaltige Förderung zu gewährleisten. Hinsichtlich der in Kap. 2 skizzierten Forschungsziele wurde bereits eine beachtliche Zahl an Fallstudien durchgeführt (insbesondere innerhalb von Masterarbeiten), jedoch liegt hier weiterhin ein Hauptfokus. Insgesamt zielen diese Perspektiven darauf ab, ein Konzept zu dekontextualisieren, das als Theorie geleitete Handreichung für die Schulpraxis dienen kann.

Literatur

Benölken, R. (2014). Von der Begabungstheorie zur Rechenschwäche – Versuch eines Brückenschlages. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, 161–164.

Benölken, R. (2010). Anspruchsvolle mathematische Bewegungsspiele – auch und gerade für Mädchen. *MNU Primar*, 2, 95–98.

Gagné, F. (2000). Understanding the complex choreography of talent development through DMGT-based analysis. In K. A. Heller et al. (Hrsg.), *International handbook of giftedness and talent* (2. Auflage, S. 67–79). Amsterdam et al.: Elsevier.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr*. Berlin: Volk und Wissen.

Kelm, J. (2014). *„MaKosi" – Qualitative Evaluation eines Projekts zur Förderung von Kindern mit Rechenproblemen.* Masterarbeit. Universität Münster [unveröffentlicht].

Schipper, W. (2005a). *Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern.* Kiel: SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G4 [http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/sinus-modul4.pdf; 10.02.2014].

Schipper, W. (2005b). Übungen zur Prävention von Rechenstörungen [Materialkommentar, 16 Karteikarten]. *Die Grundschulzeitschrift*, 182.

Ralf BENÖLKEN, Friedhelm KÄPNICK, Münster

„Mathe für kleine Asse“ – Ein Lehr-Lernlabor an der Universität Münster

„Mathe für kleine Asse“ ist ein Enrichmentprojekt zur Förderung mathematisch begabter und interessierter Kinder zwischen dem frühen und mittleren Schulalter an der Universität Münster. Gleichzeitig ist es als Lehr-Lernlabor in die Ausbildung angehender Lehrkräfte implementiert (detaillierte Ausführungen zu den nachfolgend skizzierten Projektfacetten finden sich z.B. bei Käpnick, 2008).

1. Zum theoretischen Rahmenwerk

Zum Themenkomplex „Begabung“ gibt es einen mehrheitlichen Forschungskonsens hinsichtlich (a) der Bereichsspezifik, (b) des dynamischen und (c) komplexen Charakters sowie (d) der Notwendigkeit einer möglichst frühzeitigen Diagnostik (z.B. Käpnick, 2013). Demgemäß bildet eine ganzheitliche Modellvorstellung, welche insbesondere spezifische Merkmale mathematischer Begabungen sensu Käpnick (1998) enthält, die Basis der Diagnostik und Förderung im Projekt (Abb. 1; reduzierte Darstellung).

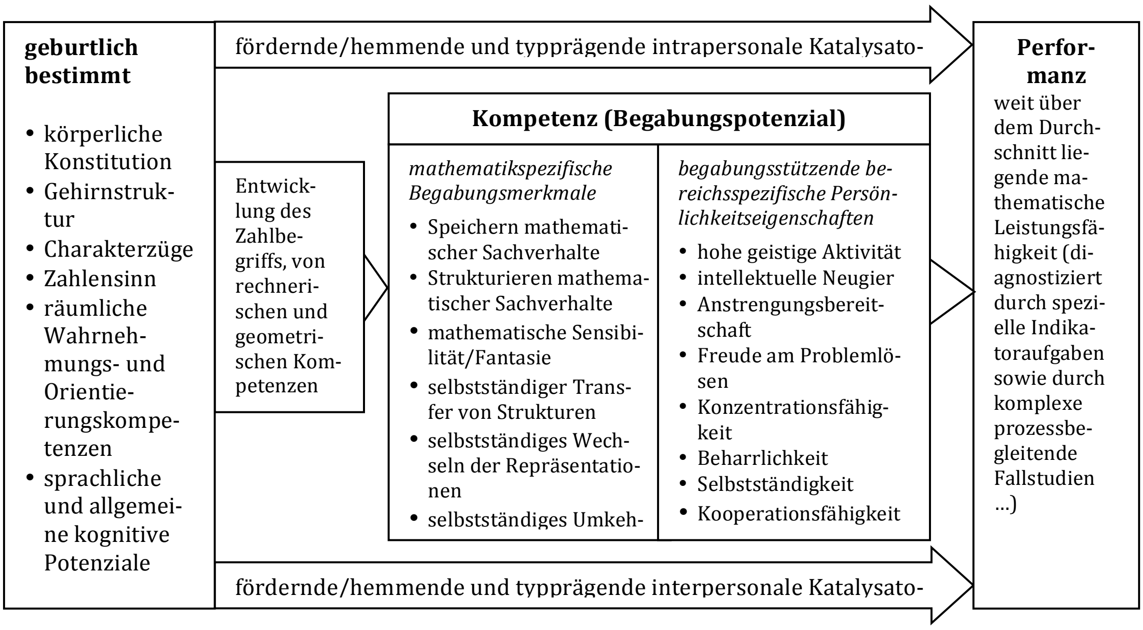


Abb. 1: Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen (im Detail siehe Fuchs & Käpnick, 2009).

2. Ziele des Projekts

Hauptziele bestehen in Bezug auf die teilnehmenden Kinder darin, ihre Freude im Umgang mit Zahlen, mit Formen und am Problem lösenden Denken zu erhalten bzw. zu vergrößern, ihnen an adäquates Bild von Ma-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

thematik bzw. von typischen mathematischen Tätigkeiten zu vermitteln und ihre gesamte Persönlichkeitsentwicklung zu stärken. In Bezug auf die teilnehmenden Studierenden liegen Ziele vornehmlich in der Vermittlung spezieller Qualifikationen in der Diagnostik und Förderung mathematisch begabter Kinder einerseits und in der Ermöglichung einer aktiven Mitarbeit an wissenschaftlichen Projekten andererseits. Forschungsziele bestehen beispielsweise in der Kennzeichnung von Merkmalen mathematisch begabter Kinder unter einer interdisziplinär geprägten Perspektive (anhand von Synthesen qualitativer und quantitativer Methoden) sowie in der Entwicklung von Förderkonzepten und methodischen Handreichungen.

3. Zum diagnostischen Procedere

Anknüpfend an das theoretische Rahmenwerk ist das diagnostische Konzept prozessorientiert angelegt, wobei sich das folgende Stufenmodell bewährt hat: Auf einer ersten Stufe erhalten die Lehrkräfte verschiedener Münsterscher Partnerschulen ein Anschreiben mit Hinweisen zum theoretischen Hintergrund sowie mit der Bitte, Kinder für eine Teilnahme an „Mathe für kleine Asse" zu nominieren. Als zweite Stufe findet eine erste gemeinsame Förderstunde statt, in der die Kinder einander kennenlernen und die Projektatmosphäre erfahren können, um mit ihren Eltern über eine Teilnahme zu entscheiden. Auf einer dritten Stufe wird ein diagnostischer Einstiegstest als Gruppenwettbewerb durchgeführt (siehe Fuchs & Käpnick, 2009), um anfangs einen groben Überblick über das mathematische Potenzial eines jeden Kindes zu erhalten und eine erste Grundlage für die weitere Diagnostik und Förderung zu schaffen: Als formell vierte Stufe schließt sich nämlich eine langfristige Synthese verschiedener informeller (z.B. Kriterien geleitete Beobachtungen oder Leitfaden orientierte Gespräche mit Lehrkräften und Eltern) und vereinzelter formeller Verfahren an (z.B. Indikatoraufgabentests, siehe Käpnick, 1998; gelegentlich auch Intelligenztests), wobei letztgenannte jeweils in die langfristige Themenplanung integriert sind (siehe Kap. 4). Auf diese Weise entsteht sukzessive ein differenziertes Bild über das Begabungspotenzial eines jeden Kindes.

4. Zur Organisation des Projekts und der Förderstunden

In jedem Schuljahr nehmen etwa 150 Kinder aus Münster und Umgebung an den Förderstunden teil. Diese finden in der „Lernwerkstatt", einem Kind gerecht eingerichteten und mit vielen Arbeitsmitteln ausgestatteten Raum, an der Universität Münster statt. Zusätzlich existieren einige „externe" Projektgruppen an Schulen, die in der Regel von Studierenden geleitet werden.

Die Kinder sind gemäß ihrer Jahrgangszugehörigkeit in Gruppen eingeteilt, die sich pro Schuljahr vierzehntägig an etwa zwanzig Terminen treffen. Jede Gruppe wird zudem durch jeweils etwa acht bis zehn Studierende unterstützt, die sich zu wesentlichen theoretischen Inhalten des komplexen Themas Begabung vorab oder begleitend qualifizieren.

Eine Projektsitzung ist in drei Abschnitte eingeteilt, nämlich (1) eine dreißigminütige Vorbesprechung der Projektleitung und der Studierenden, um den folgenden Ablauf sowie z.B. spezifische Beobachtungsaspekte zu klären, (2) die eigentliche neunzigminütige Förderstunde mit den Kindern sowie (3) eine neunzigminütige Nachbesprechung, die vor allem Reflexionen zum Ablauf der Sitzung sowie zu Potenzialen eines jeden Kindes umfasst.

Die Themenplanung für die Gruppen erfolgt jeweils langfristig für ein Schuljahr. Neben (1) mathematischen Exkursionen, (2) vereinzelten diagnostischen Testungen (z.B. Indikatoraufgabentests) und (3) anreichernden spezielleren Formaten (z.B. „Stationenknobeln“ oder Vortrags- und Fragestunden mit professionellen Mathematikerinnen und Mathematikern) bildet vor allem (4) das Erforschen komplexer mathematischer Problemfelder den Haupttypus der Förderstunden (Kriterien für deren Zusammenstellung sowie viele konkrete Beispiele finden sich z.B. bei Fuchs & Käpnick, 2009). Ähnlich zur Phasierung regulären Unterrichts ist eine solche Förderstunde in der Regel dreigeteilt: Zunächst wird in einer etwa fünfzehnminütigen Einstiegsphase gemeinsam mit den Kindern ein zu dem jeweiligen Thema passender Forscherauftrag formuliert. Es schließt sich eine etwa sechzigminütige Forscherphase an, die nach dem Prinzip der natürlichen Differenzierung gestaltet ist. Die Studierenden begleiten die Kinder während der Forscheraktivitäten als Ansprechpartnerinnen bzw. -partner bei Verständnisschwierigkeiten u.Ä. In diesem Kontext sammeln sie diagnostische Eindrücke, die (wie oben angedeutet) in der anschließenden Nachbesprechung reflektiert werden. Abschließend präsentieren und vergleichen die Kinder ihre Ergebnisse – oft bis hin zur Entwicklung „kleiner Theorien“.

5. Rückblick zu Ergebnissen der Projektarbeit und Evaluationen

Seit Projektbeginn im Jahr 2005 sind etwa 130 Examens- bzw. Masterarbeiten, etwa 140 Bachelorarbeiten, fünf Dissertationsschriften sowie über 50 Zeitschriften- und Buchbeträge entstanden, teilweise unter aktiver Mitarbeit von Studierenden.

Hinsichtlich einer Evaluation des Projekts lassen sich beispielhaft die folgenden qualitativen Indizien anführen:

In Bezug auf die theoretische Grundlegung zur Entwicklung mathematischer Begabungen (Kap. 1) wurde eine Vielzahl an Fallstudien zu sehr unterschiedlichen inhaltlichen Stoßrichtungen durchgeführt, die u.a. exemplarisch die Spezifik mathematischer Begabungen sowie die Sinnhaftigkeit und den Nutzen einer ganzheitlichen Diagnostik und Förderung belegen.

Hinsichtlich der Einbindung des Projekts in die Lehramtsausbildung berichten Studierende und „Ehemalige" immer wieder über sehr positive Effekte für ihre Ausbildung, besonders in Bezug auf Fähigkeiten im Diagnostizieren und Fördern, die sie innerhalb des Projekts exemplarisch an dem komplexen Thema „Begabung" entwickeln, jedoch in Schulpraktika oder im späteren Berufsalltag auf viele weitere Themen anwenden können. Viele Studierende beschreiben die praktische Arbeit mit Kindern innerhalb des Projekts als einen der Höhepunkte ihrer Ausbildung (Beispiele für entsprechende Reflexionen finden sich z.B. bei Käpnick, 2008). Lehrkräfte berichten in Bezug auf den Ertrag der Projektteilnahme immer wieder von sehr positiven Effekten für den regulären Mathematikunterricht. Ferner füllen die teilnehmenden Kinder am Ende eines jeden Schuljahres einen Evaluationsbogen aus, in dem sie in offenen Kategorien positive und negative Rückmeldungen äußern können. Zu einem weit überwiegenden Teil werden die Organisation und die Inhalte der Förderstunden hier als sehr gelungen beurteilt (exemplarische Ausschnitte finden sich z.B. bei Fuchs & Käpnick, 2009; Käpnick, 2008).

Insgesamt deuten die ausgewählten Aspekte darauf hin, dass sich das Konzept des Projekts „Mathe für kleine Asse" bewährt hat und es konstruktive Hinweise für die Organisation von Lehr-Lern-Laboren liefern kann. Neben einer breiter angelegten Gesamtevaluation des Projekts liegen künftige Herausforderungen zudem u.a. darin, die Erfahrungen hinsichtlich der Durchführung des Projekts als Lehr-Lern-Labor konstruktiv zu nutzen, um beispielsweise die Themen „Individuelle Förderung", „Heterogenität" bzw. „Inklusion" sowie „Diagnosekompetenzen" tiefgreifender in der fachdidaktischen Lehramtsausbildung zu verankern und dabei Chancen disziplinübergreifender Kooperationen in Lehre (und Forschung) zu nutzen.

Literatur

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr (Vol. 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2013). Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven (S. 9–39). Münster: WTM.

Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse". Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 138–148). Berlin: Lit Verlag.

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt a. M. et al.: Peter Lang.

Stephan BERENDONK, Siegen

Das Wackelfahrrad wackelt nicht mehr!

Das Fahren auf einem Wackelfahrrad ist eine wackelige Angelegenheit. Das Gefährt besitzt zwar zwei perfekt kreisförmige Räder, aber anders als beim gewöhnlichen Fahrrad liegen die Achsen nicht im Mittelpunkt der Räder (siehe Abb. 1). Beim Fahren laufen die Achsen nicht auf einer Geraden parallel zur Straße, sondern sie durchlaufen eine wellenförmige Kurve. Für eine bequeme Fahrt auf einer ebenen Straße ist das Wackelfahrrad also ungeeignet. Anstatt die Wackelräder für das Wackeln verantwortlich zu machen und sie wieder durch normale Räder auszutauschen, wollen wir lieber nach einer geeigneteren Straße für die Wackelräder suchen. Welche Form muss die Straße haben, damit sich die Achsen der Wackelräder auf einer Geraden bewegen?

Abb. 1

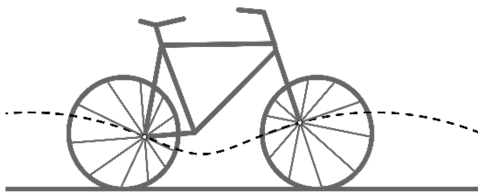
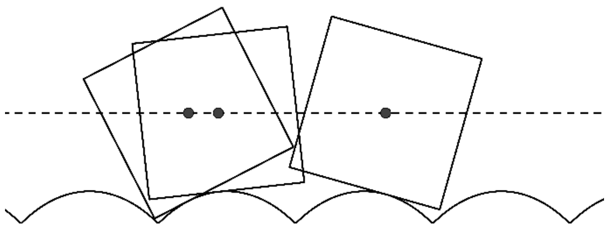


Abb. 2



Die Frage nach der passenden Straße zu einer gegebenen Radform wurde schon häufiger gestellt. Besonders populär ist die Frage, welche Straße zu einem Fahrrad mit quadratischen Rädern gehört. Die Achsen der Räder sollen sich dabei in den Mittelpunkten der Quadrate befinden (siehe Abb. 2). Die gesuchte Straße besteht aus einer Aneinanderreihung von kongruenten Bögen, deren Bogenlänge gleich der Seitenlänge des Quadrats ist. Mit Mitteln der Analysis zeigt man leicht, dass ein solcher Bogen bei geeigneter Wahl kartesischer Koordinaten die Gleichung $y = -\cosh(x)$ erfüllt und somit Stück einer (umgekehrten) Kettenlinie ist. Eine Kettenlinie ist andererseits auch die Kurve, die der Brennpunkt einer Parabel durchläuft, wenn man die Parabel auf einer Geraden abrollt (siehe Abb. 3). Ausgehend von dieser Erzeugungsweise der Kettenlinie werden wir erneut, nun aber geometrisch, nachweisen, dass Quadrat (bzw. Gerade) und Kettenlinie ein Rad-Straßenpärchen bilden. Der Begriff des momentanen Drehzentrums ersetzt dabei die analytischen Berechnungen. Rollt man anstatt der Parabel eine Ellipse auf einer Geraden ab, so beschreiben die Brennpunkte der Ellipse jeweils eine Kurve, die wir als *elliptische Kettenlinie* bezeichnen. Wir werden zeigen, dass diese Kurve die gesuchte Straße für unser Wackelrad ist. Der Beweis führt uns zu einem, schon von E. Habich in 1882 bewiesenen, allgemeineren Zusammenhang zwischen Rad und zugehöriger Straße.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Gerade und Kettenlinie

Wir rollen eine Parabel mit Brennpunkt F und Richtgerade r auf einer Geraden g ab. Der Brennpunkt F der Parabel beschreibt dabei eine Kettenlinie. Sei t die Tangente an die Kettenlinie im Punkt F und sei P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf g. Während F die Kettenlinie durchläuft, bewegt sich t entlang der Kettenlinie und P durchläuft die Gerade g. Wir werden zeigen, dass der Abstand zwischen P und t dabei stets gleich dem Abstand zwischen dem Brennpunkt F und der Scheitelgeraden s der Parabel ist und also konstant bleibt, sodass wir P als einen fest an die Gerade t montierten Punkt auffassen können. Da P sich entlang von g und also senkrecht zu FP bewegt, muss das momentane Drehzentrum der Bewegung von t entlang der Kettenlinie bei F liegen. Also rollt die Tangente t auf der Kettenlinie ab. Somit bildet die Gerade t mit dem daran befestigten Punkt P als Achse ein passendes Rad für die Kettenlinie.

Abb. 3

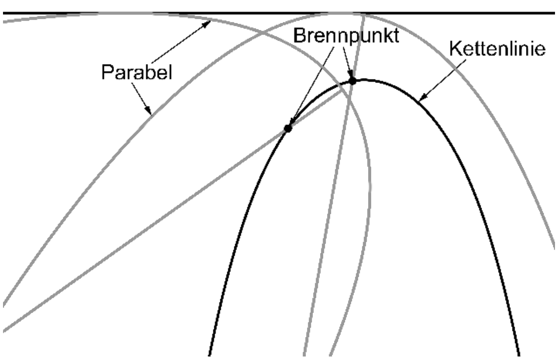
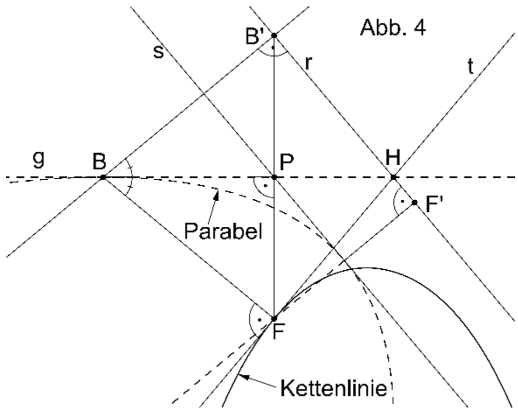


Abb. 4



Sei B der Berührpunkt der Parabel mit der Geraden g, B' der Lotfußpunkt des Lotes von B auf r und F' der Lotfußpunkt des Lotes von F auf r (siehe Abb. 4). Als Tangente an die Parabel ist g Winkelhalbierende von $\angle FBB'$. Somit sind die Dreiecke FBP und $B'BP$ nach SWS kongruent und da $\angle BPF$ und $\angle B'PB$ rechte Winkel sind, ist P die Mitte von F und B'. Damit liegt P auf s, denn s ist Mittenparallele im Dreieck $FF'B'$. Der Berührpunkt B von der Parabel und der Geraden g ist das momentane Drehzentrum der Rollbewegung der Parabel auf g. Daher ist t die Senkrechte zu FB durch F. Seien H_t bzw. H_r die Schnittpunkte von t und g bzw. r und g. Die Dreiecke BFH_t und $BB'H_r$ sind dann nach WSW kongruent. Also gilt $BH_t = BH_r$. Die Geraden t und r schneiden sich also in einem Punkt $H := H_t = H_r$ auf g. Die Dreiecke FHB und $B'HB$ sind kongruent. Daher ist der Winkel zwischen t und g gleich dem Winkel zwischen r und g, und da r und s parallel sind auch gleich dem Winkel zwischen s und g. Die Geraden s und t gehen also bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten von FP ineinander über. Der Abstand von P zu t ist daher zu jedem Zeitpunkt während der Rollbewegung gleich dem Abstand von F zu s und folglich konstant.

Wackelrad und elliptische Kettenlinie

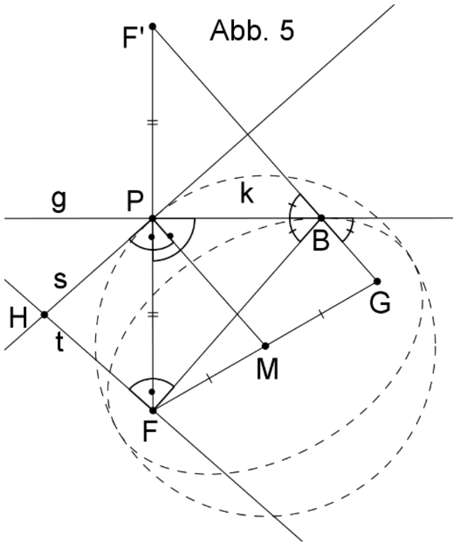
Wir rollen eine Ellipse mit den Brennpunkten F und G und der konstanten Abstandssumme $2a$ auf einer Geraden g ab. Der Brennpunkt F beschreibt dabei eine elliptische Kettenlinie, die wir im Folgenden nur die *Straßenkurve* nennen. Wir suchen die Form des Rads, dessen Achse P beim Rollen auf der Straßenkurve die Gerade g durchläuft.

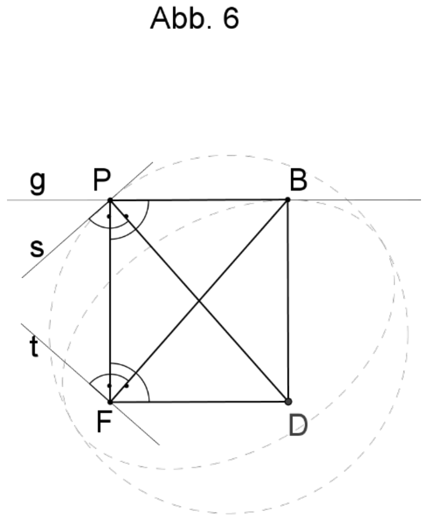
Angenommen das gesuchte Rad rollt so auf der Straßenkurve, während gleichzeitig die Ellipse auf der Geraden g rollt, dass der Berührpunkt von Straßenkurve und Rad stets mit dem Brennpunkt F der Ellipse zusammenfällt. Das momentane Drehzentrum der Rollbewegung des Rads auf der Straßenkurve ist dann bei F, sodass sich P senkrecht zu PF bewegen muss. Andererseits soll sich P entlang von g bewegen. Daher muss P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf g sein. Die Achse P des gesuchten Rades liegt also, da g eine Tangente der Ellipse ist, auf der Fußpunktkurve k der Ellipse bezüglich ihres Brennpunkts F (siehe Abb. 5).

Sei B der Berührpunkt von g und der Ellipse und sei F' das Bild von F nach Spiegelung an g. Die Dreiecke MFP und GFF' sind dann wegen SWS ähnlich. Also gilt: $MP = \frac{1}{2}\, GF'$. Da g Tangente an die Ellipse in B und also Außenwinkelhalbierende des Winkels $\measuredangle FBG$ ist, liegt B auf GF'. Also gilt: $MP = \frac{1}{2}\, GF' = \frac{1}{2}\,(GB + BF) = \frac{1}{2}\,(2a) = a$. Die Fußpunktkurve k ist folglich ein Kreis mit Radius a um die Mitte M von FG.

Sei s die Tangente an k in P und sei t die Tangente an die Straßenkurve in F und sei H der Schnittpunkt von s und t. Dann gilt: $\measuredangle HPF = 90° - \measuredangle FPM = \measuredangle MPB = \measuredangle F'BP = \measuredangle PBF = 90° - \measuredangle BFP = \measuredangle PFH$. Damit ist auch der Winkel zwischen t und g gleich dem Winkel zwischen s und g.

Sei k^* das Bild von k nach Spiegelung an der Mittelsenkrechten von FP. Dann berührt k^* die Straßenkurve in F, da s durch Spiegelung an besagter Mittelsenkrechten auf t abgebildet wird. Während F die Straßenkurve durchläuft, bewegt sich k^* also ebenfalls entlang der Straßenkurve. Da sich F und k relativ zueinander nicht bewegen, gilt dies auch für ihre Spiegelbilder P und k^*. Wir können P also als einen Punkt auffassen, der fest an k^* montiert ist. Da sich P auf g und also senkrecht zu PF bewegt, ist F das momentane Drehzentrum der Bewegung von k^* entlang der Straßenkurve. Also rollt k* auf der Straßenkurve ab. Das gesuchte Rad ist also ein Kreis mit Radius a dessen Achse Abstand MF zum Mittelpunkt des Kreises hat. Mit anderen Worten: Es handelt sich um ein Wackelrad!





Nur ein Rechteck mit Diagonalen

Die Tatsache, dass es sich bei der Straßenkurve um die Rollkurve des Brennpunktes F einer Ellipse handelt, haben wir zur Bestimmung der Tangenten s an die Fußpunktkurve im Punkt P benutzt. Wir können die Tangente s jedoch auch ohne Rückgriff auf spezielle Eigenschaften der Ellipse konstruieren. Wir betrachten hierzu die Bewegung eines rechten Winkels mit Scheitel P, dessen einer Schenkel stets durch F verläuft und dessen anderer Schenkel entlang der Ellipse gleitet. Sei B der Berührpunkt des zweiten Schenkels mit der Ellipse zu einem bestimmten Zeitpunkt. Wo ist dann das momentane Drehzentrum D der Bewegung? Der Punkt des rechten Winkels, der im betrachteten Moment auf B liegt, bewegt sich in Richtung der Tangenten an die Ellipse, d.h. in Richtung BP. Das gesuchte momentane Drehzentrum D liegt also auf der Senkrechten zu BP durch B. Da der rechte Winkel während der Bewegung stets durch F verläuft, muss sich der Punkt des rechten Winkels, der im betrachteten Moment bei F liegt, in Richtung FP bewegen. Das momentane Drehzentrum D liegt also auch auf der Senkrechten zu FP durch F. Also ist D der Schnittpunkt der beiden Senkrechten (siehe Abb. 6). Nun können wir die Tangente s an die Fußpunktkurve im Punkt P konstruieren. Es ist die Senkrechte zu DP durch P. Da s und t senkrecht auf den Diagonalen PD und FB des Rechtecks $FDBP$ stehen, schneiden sie die Gerade BP, d.h. g, im gleichen Winkel.

Wir haben damit folgendes bewiesen: Rollt man eine Kurve c auf einer Geraden g ab, so beschreibt ein an c fest montierter Punkt F eine Kurve, die wir als Straße auffassen wollen. Wir können die Fußpunktkurve von c bezüglich F so auf der Straße abrollen, dass der Pol F der Fußpunktkurve dabei die ursprüngliche Gerade g durchläuft.

Michael BESSER, Lüneburg, Denise DEPPING, Lüneburg, Timo EHMKE, Lüneburg, Dominik LEISS, Lüneburg

Mathematikdidaktische Expertise von Studierenden bei der Analyse von Schülerlösungsprozessen zu kompetenzorientierten Aufgaben

Fachdidaktisches Wissen und Können gilt als entscheidende Facette professioneller Handlungskompetenz von Lehrkräften für das Gelingen von Unterricht. Weitestgehend unklar ist jedoch, wie sich dieses Wissen sowohl bei Lehrkräften im Schuldienst als auch bei Lehrkräften in der Ausbildung entwickelt. Als ausgewählter Aspekt fachdidaktischer Expertise untersucht das Forschungsprojekt LEVEL daher u. a. die Entwicklung fachdidaktischer Diagnosekompetenz von Lehramtsstudierenden des Unterrichtsfachs Mathematik. Das Projekt selbst sowie ein neu entwickelter Expertisetest sollen aufgezeigt und Implikationen für weitere Arbeiten diskutiert werden.

1. Fachdidaktisches Wissen und Können als zentrales Element professioneller Handlungskompetenz von Lehrkräften

Die Diskussion der Bedeutung professioneller Handlungskompetenz von Lehrkräften für die Qualität von Unterricht stellt ein bedeutendes Moment empirischer Lehr-Lern-Forschung dar. Vor allem eine Auseinandersetzung mit dem Wissen und Können (mit der Expertise) von Lehrkräften als ausgewählter Aspekt professioneller Handlungskompetenz – und hier vor allem in Anlehnung an Shulman (1986): eine Auseinandersetzung mit Fachwissen (CK), fachdidaktischen Wissen (PCK) sowie mit allgemein pädagogisch-psychologischem Wissen (PK) – steht dabei im Fokus vielfältiger Arbeiten zur Professionalität von Lehrkräften. Zentrale Übersichtsartikel greifen diese Wissensfacetten auf (Baumert & Kunter, 2006; Lipowsky, 2006), empirische (mathematikdidaktische) Studien diskutieren Lehrerexpertise als Bedingungsfaktor für erfolgreiches Lehren und Lernen (Kunter et al., 2011; Tattoo et al., 2012). Vor allem das fachdidaktische Wissen und Können von Lehrkräften stellt sich in diesem Kontext als notwendiger Faktor für die Bereitstellung kognitiv aktivierender Lernumgebungen heraus. Unklar ist jedoch, wie sich fachdidaktisches Wissen sowohl bei Lehrkräften im Schuldienst als auch bei Lehrkräften in der Ausbildung entwickelt bzw. wie ein Aufbau fachdidaktischen Wissens gezielt unterstützt werden kann: PCK – the area of knowledge relating specifically to the main activity of teachers, namely, communicating subject matter to students – makes the greatest contribution to explaining student progress. This knowledge cannot be picked up incidentally, but as our finding on different teacher-training programs show, it can be acquired in structured learning environ-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ments. One of the next great challenges for teacher research will be to determine how this knowledge can best be conveyed to both preservice and inservice teachers” (Baumert et al., 2010, S. 168).

2. Das Forschungsprojekt LEVEL: Lernentwicklungsverläufe bei Lehramtsstudierenden

Das Forschungsdesiderat nach einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit der Entwicklung fachdidaktischen Wissens und Könnens aufgreifend untersucht das Forschungsprojekt LEVEL[1] im Rahmen des von der Telekom-Stiftung geförderten Verbundprojekts „Recruiting, Assessment, Support“ u. a. die Entwicklung mathematikdidaktischer Expertise von Lehramtsstudierenden. Mit spezifischem Blick auf diagnostisches Wissen und Können als ausgewählte, aber zentrale fachdidaktische Expertisefacette von Lehrkräften (Weinert, 2001) erfolgt eine Diskussion folgender Forschungsfrage: *Über welches mathematikdidaktische Diagnosewissen zur Analyse von Schülerlösungsprozessen bei kompetenzorientierten Mathematikaufgaben verfügen Lehramtsstudierende zu welchem Zeitpunkt ihrer universitären Ausbildung?* Im Kontext dieser Forschungsfrage soll im Rahmen eines angestrebten Monitorings an der Leuphana Universität Lüneburg eine regelmäßige, längsschnittliche Betrachtung der Entwicklungsverläufe fachdidaktischer Expertise von Mathematik-Lehramtsstudierenden entsprechend des in Abbildung 1 aufgezeigten Studiendesigns erfolgen. Zur Erhebung der Lernentwicklungsverläufe der Studierenden wird hierzu ein neu entwickelter Expertisetest zur Erfassung des diagnostischen Wissens und Könnens eingesetzt. Als klassischer Paper-Pencil-Test zu verstehen umfasst dieser Test sechs offene Aufgaben zur Erhebung der Fähigkeit des Analysierens von Schülerlösungsprozessen. Konkret fordern die Aufgaben eine Bewertung von Stärken und Schwächen einer gegebenen Schülerlösung zu kompetenzorientierten Aufgabe zum mathematischen Modellieren (2 Items), zum mathemaischen Problemlösen (2 Items) bzw. zum formal technisch-symbolischen Arbeiten (2 Items) ein (siehe Beispielhaft Abbildung 2 für eine Aufgabe zur Analyse von Schülerlösungsprozessen beim mathematischen Modellieren). Pilotierungsergebnisse dieses neu entwickelten Expertisetests legen eine gelungene Instrumentenentwicklung nahe und ermöglichen eine Beschreibung des diagnostischen Wissens und Könnens von Studierenden bei der Analyse von Schülerlösungsprozessen.

[1] *Lernentwicklungsverläufe im Lehramtsstudium.* Projektleitung: T. Ehmke (Leuphana Universität Lüneburg), D. Leiss (Leuphana Universität Lüneburg).

	1. Jahr	2. Jahr
Bachelor, 1. Fachsemester	1	1
Bachelor, 3. Fachsemester	3	3
Bachelor, 5 Fachsemester	5	5
Master, 7. Fachsemester	7	7

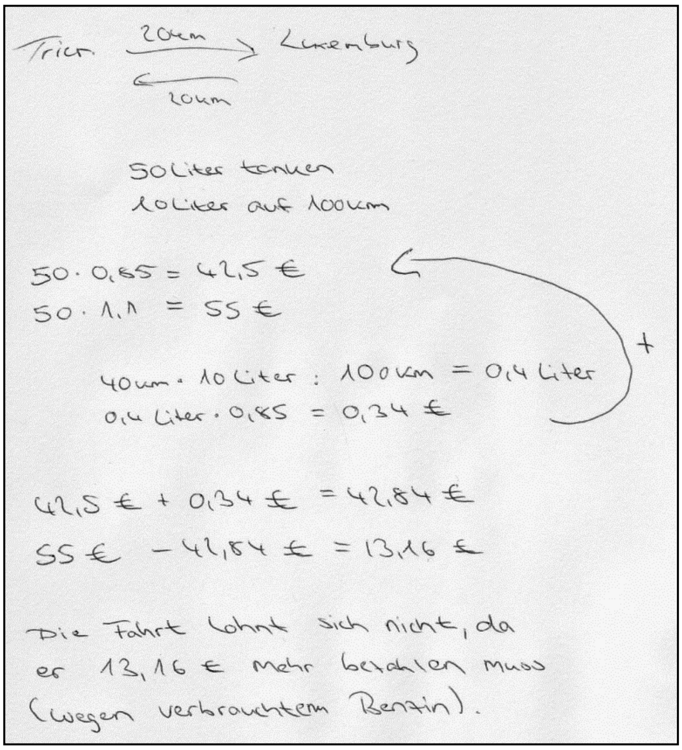
Abbildung 1: Längsschnittliche Betrachtung von Lernentwicklungsverläufen

AUFGABE:

Herr Stein wohnt in Trier nahe der Grenze zu Luxemburg. Deshalb fährt er mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der 20 Kilometer weit entfernten Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 0,85 Euro, im Gegensatz zu 1,1 Euro in Trier.

Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein? Begründe.

SCHÜLERLÖSUNG:


Trier $\xrightarrow{20km}$ Luxemburg
$\xleftarrow[20km]{}$

50 Liter tanken
10 Liter auf 100km

50 · 0,85 = 42,5 €
50 · 1,1 = 55 €

+

40km · 10 Liter : 100km = 0,4 Liter
0,4 Liter · 0,85 = 0,34 €

42,5 € + 0,34 € = 42,84 €
55 € − 42,84 € = 13,16 €

Die Fahrt lohnt sich nicht, da er 13,16 € mehr bezahlen muss (wegen verbrauchtem Benzin).

Welche **Stärken** und **Schwächen** des Schülers lassen sich aus dieser Schülerlösung ableiten? Diskutieren Sie unter Verwendung **geeigneter mathematikdidaktischer Fachtermini**.

Abbildung 2: Beispielaufgabe des neu entwickelten Expertisetests zum diagnostischen Wissen und Können (Aufgabe in Anlehnung an Leiss, 2010; Besser, Leiss & Klieme, angenommen)

3. Ausblick und weiterführende Arbeiten

Eine Diskussion von Möglichkeiten der Erfassung und Beschreibung von Lernentwicklungsverläufen im Lehramtsstudium stellt eine zentrale Herausforderung empirischer Lehr-Lern-Forschung dar. Das Forschungsprojekt LEVEL hat in diesem Zusammenhang u. a. einen Expertisetest zur Erhebung mathematikdidaktischen Diagnosewissens über die Studiendauer entwickelt. Unter Rückgriff auf dieses Instrument sollen in den kommenden Jahren längsschnittliche Betrachtungen von Lernentwicklungsverläufen von Mathematik-Lehramtsstudierenden erfolgen. Ein derartiges Monitoring soll dabei sowohl zum Zwecke eines besseren Verständnisses der Entwicklung von Expertise als auch mit dem Ziel einer Verbesserung universitärer Ausbildung von Lehramtsanwärterinnen und -anwärtern erfolgen.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9 (4),* 469-520.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47 (1),* 133-180.

Besser, M., Leiss, D. & Klieme, E. (angenommen). Wirkung von Lehrerfortbildungen auf die Expertise von Lehrkräften zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie.*

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Leiss, D. (2010). Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. *Journal für Mathematikdidaktik, 31,* 197-226.

Lipowsky, F. (2006). Auf den Lehrer kommt es an. Empirische Evidenzen für Zusammenhänge zwischen Lehrerkompetenz, Lehrerhandeln und dem Lernen der Schüler. In *51. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik: Kompetenzen und Kompetenzentwicklung von Lehrerinnen und Lehrern: Ausbildung und Beruf.* Weinheim: Beltz.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2),* 4-14.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M. & Reckase, M. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: IEA.

Weinert, F. E. (2001): Concepts of competence: a conceptual clarification. In D. S. Rychen, & L. H. Salganik (Hrsg.), *Defining and selecting key competencies: theoretical and conceptual foundations* (S. 45-65). Ashland: Hogrefe & Huber.

Michael BESSER, Lüneburg, Dominik LEISS, Lüneburg

Wirkung von Lehrerfortbildungen auf Lehrerexpertise

Eine Auseinandersetzung mit der Bedeutung fachdidaktischer Expertise von Lehrkräften für einen lernförderlichen Unterricht stellt ein zentrales Element empirischer Lehr-Lern-Forschung dar. Vielfältige Studien diskutieren den Einfluss fachdidaktischen Wissens und Könnens auf Unterrichtsqualität und zeigen die Bedeutung dieser Expertisefacette auf. Weitestgehend unklar ist jedoch, wie fachdidaktisches Wissen von Lehrkräften gezielt aufgebaut bzw. weiterentwickelt werden kann. Hier setzt das DFG-Projekt Co^{2}CA an und untersucht die Wirkung von Lehrerfortbildungen auf spezifische Facetten von Lehrerexpertise.

1. Fachdidaktisches Expertise von Lehrkräften für ein Gelingen von Unterricht

Seit mehr als einem Jahrhundert stellt eine Diskussion der „Person der Lehrkraft“ sowie deren Bedeutung für die Qualität von Unterricht ein entscheidendes Moment empirischer Forschungsbemühungen dar. Dabei bildet mal die Persönlichkeit des Lehrers selbst, mal das Handeln und Tun der Lehrkraft, mal die professionelle Handlungskompetenz von Lehrkräften den Fokus des Forschungsinteresses. Vor allem letzterer Ansatz stellt aktuell einen vielversprechenden Zugang zur Beschreibung von Bedingungsfaktoren für erfolgreiches Lehren und Lernen dar. Zahlreiche (mathematikdidaktische) Studien zeigen die zentrale Rolle des Fachwissens (CK), des fachdidaktischen Wissens (PCK) und des allgemein Pädagogisch-Psychologischen Wissens (PK) als ausgewählte Aspekte professioneller Handlungskompetenz für die Qualität von Unterricht auf (Hill, Rowan & Ball, 2005; Kunter et al., 2011; Tattoo et al., 2012). Wie derartiges Wissen und Können jedoch sowohl bei Lehrkräften in der Ausbildung als auch bei Lehrkräften im Schuldienst gezielt aufgebaut werden kann, stellt eine offene Forschungsfrage dar. Vor allem mit spezifischem Blick auf das fachdidaktische Wissen lässt sich konstatieren: PCK – the area of knowledge relating specifically to the main activity of teachers, namely, communicating subject matter to students – makes the greatest contribution to explaining student progress. This knowledge cannot be picked up incidentally, but as our finding on different teacher-training programs show, it can be acquired in structured learning environments. One of the next great challenges for teacher research will be to determine how this knowledge can best be conveyed to both preservice and inservice teachers” (Baumert et al., 2010, S. 168).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Das Forschungsprojekt Co^{2}CA: Lehrerfortbildungen zum Aufbau mathematikdidaktischer Expertise

Das DFG-Forschungsprojekt Co^{2}CA[1] greift das skizzierte Forschungsdesiderat auf und untersucht im Rahmen von theoretisch fundierten (siehe u. a. Lipowsky, 2004), wissenschaftlich begleiteten und evaluierten Lehrerfortbildungen die Wirkung dieser auf den Aufbau bzw. die Entwicklung fachdidaktischer Expertise von Lehrkräften im Schuldienst (siehe im Detail u. a. Besser, Leiss & Klieme, angenommen). Am Beispiel ausgewählter fachdidaktischer Themenschwerpunkte haben im Jahr 2013 insgesamt 67 Mathematiklehrkräfte entweder an Fortbildungen zu zentralen Ideen formativem Assessments am Beispiel mathematischen Modellierens (Untersuchungsbedingung A; N = 30) oder an Fortbildungen zu grundlegenden fachdidaktischen Ideen mathematischen Problemlösens und Modellierens (Untersuchungsbedingung B, N = 37) teilgenommen. Die Fortbildungen erstreckten sich dabei unter Berücksichtigung notwendiger Bedingungen für ein Gelingen von Lehrerfortbildungen (siehe u. a. Desimone, 2009) über zwei dreitägige Fortbildungsblöcke zuzüglich einer zehnwöchigen Phase zur Implementation von Fortbildungsinhalten in den eigenen Mathematikunterricht (siehe auch Abbildung 1). Eine Evaluation der Fortbildungen bzgl. der Effekte auf Lehrerexpertise erfolgte dabei auf Lehrerebene mittels folgender Erhebungsinstrumente:

- Allgemein-Fachdidaktischer Expertisetest des Forschungsprojekts COACTIV zu Beginn der Fortbildungen zur Kontrolle des fachdidaktischen Vorwissens (PCK-Test).
- Fortbildungssensitiver (UB A), neu entwickelter fachdidaktischer Expertisetest zu formativem Assessment am Beispiel mathematischen Modellierens am Ende der Fortbildungen (PCK-FA-Test).
- Fortbildungssensitiver (UB B), neu entwickelter fachdidaktischer Expertisetest zum mathematischen Problemlösen am Ende der Fortbildungen (PCK-PL-Test).

Unter Rückgriff auf die dargelegten Evaluationsinstrumente ergeben sich u.a. die folgenden Forschungsfragen im Kontext der durchgeführten Lehrerfortbildungsstudie:

[1] *Conditions and Consequences of Classroom Assessment.* Projektleitung: E. Klieme (DIPF, Frankfurt), K. Rakoczy (DIPF, Frankfurt), W. Blum (Universität Kassel), D. Leiss (Leuphana Universität Lüneburg). Projekt gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft. Geschäftszeichen: KL 1057/10-3, BL 275/16-3, LE 2619/1-3.

- Forschungsfrage 1: (Inwieweit) Ist es möglich, im Rahmen von Lehrerfortbildungen das fachdidaktische Wissen zu formativem Assessment am Beispiel mathematischen Modellierens gezielt zu fördern?
- Forschungsfrage 2: (Inwieweit) Ist es möglich, im Rahmen von Lehrerfortbildungen das fachdidaktische Wissen zu mathematischem Problemlösen gezielt zu fördern?

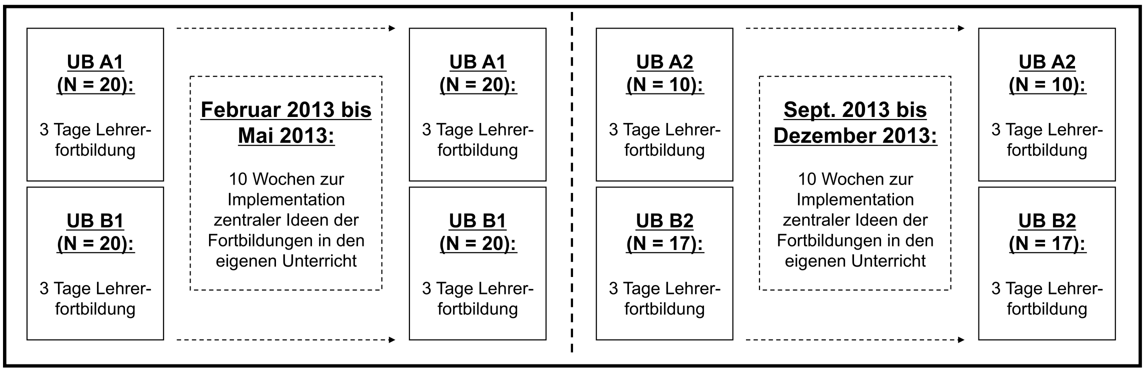


Abbildung 1: Design der Lehrerfortbildungsstudie

3. Ausgewählte Ergebnisse und kritischer Ausblick

Eine Analyse der Leistungen der Lehrkräfte in den fachdidaktischen Expertisetests ergibt (siehe auch Besser, Leiss & Klieme, angenommen):

- Zu Beginn der Fortbildungen unterscheiden sich die Lehrkräfte der beiden Untersuchungsbedingungen nicht signifikant bzgl. deren allgemein-fachdidaktischen Wissen (PCK-Test). Das allgemein-fachdidaktische Wissen kann somit zwischen den beiden Bedingungen als vergleichbar angenommen werden.
- Am Ende der Fortbildungen verfügen Lehrkräfte aus Untersuchungsbedingung A über ein signifikant ausgeprägteres fachdidaktisches Wissen zu formativem Assessment am Beispiel mathematischen Modellierens (PCK-FA-Test) als Lehrkräfte aus Untersuchungsbedingung B. Varianzanalytische Betrachtungen unter Kontrolle des allgemein-fachdidaktischen Wissens zeigen, dass diese Unterschiede durch die Fortbildungen erklärt werden können.
- Lehrkräfte aus Untersuchungsbedingung B verfügen am Ende der Fortbildungen über ein signifikant höheres Wissen zum mathematischen Problemlösen als Lehrkräfte aus Untersuchungsbedingung A (PCK-PL). Auch diese Unterschiede lassen sich varianzanalytisch unter Kontrolle des allgemein-fachdidaktischen Wissens durch die Fortbildungen selbst erklären.

Die Ergebnisse lassen deutlich werden, dass eine gezielte Vermittlung spezifischer fachdidaktischer Elemente (Forschungsfrage 1) als auch allgemeiner fachdidaktischer Grundüberlegungen (Forschungsfrage 2) im Rahmen mehrwöchiger Fortbildungen gelingen kann. Zwar handelt es sich bei der durchgeführten Studie letztlich nicht um eine echte Längsschnittbetrachtung (vielmehr erfolgt ein querschnittlicher Vergleich unter Kontrolle ausgewählter Bedingungsfaktoren), dennoch legen die Ergebnisse die Wirksamkeit der Fortbildungen bzgl. der Entwicklung ausgewählter Expertisefacetten von Lehrkräften nahe. Insbesondere im Kontext einer sich durch die Einführung verbindlicher Bildungsstandards sowie die Etablierung von Standards für die Lehrerbildung schnell verändernden Bildungslandschaft ermutigendes Ergebnis.

Inwieweit sich diese Fortbildungserfolg letztlich auch in der Qualität des von den Lehrkräften umgesetzten Mathematikunterrichts widerspiegelt, stellt eine entscheidende Frage weiterführender Arbeiten dar.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47 (1),* 133-180.

Besser, M., Leiss, D. & Klieme, E. (angenommen). Wirkung von Lehrerfortbildungen auf die Expertise von Lehrkräften zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie.*

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38 (3),* 181-199.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42 (2),* 371-406.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Münster: Waxmann.

Lipowsky, F. (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. *Die Deutsche Schule, 96 (4),* 462-479.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M. & Reckase, M. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: IEA.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Dirk THODE, Mareike BEST, Bremen

Funktionsverständnis im Übergang zur Sekundarstufe II

Das interdisziplinäre fachdidaktischen Forschungsprojekt FaBiT („fachbezogene Bildungsprozesse in Transformation“ (Creative Unit), interdisziplinäres fachdidaktisches Projekt, gefördert im Rahmen der Exzellenzinitiative, www.uni-bremen.de/cu-fabit) wendet sich der Frage zu, wie fachbezogene Bildungsprozesse sich verändern und wie Veränderungen im Fachunterricht gestaltet werden können. Eine Phase besonders starker Transformation für das Lernen von Mathematik ist die Übergangsphase von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II. Dies zu gestalten, ist für Lehrkräfte dieser Einführungsphase umso schwieriger je heterogener die Lerngruppen sind. Besonders ausgeprägt ist die Heterogenität an Bremer Oberschulen. Transformationsprozesse in den E-Phasen Bremer Oberstufenzentren zu untersuchen, kann also als besonders erkenntnisreich gelten und soll deshalb als Forschungskontext für das Mathematikteilprojekt im FaBiT-Verbund dienen. Im Fokus steht dabei die Transformation des Funktionsverständnisses, weil der Funktionsbegriff für die Oberstufenmathematik als Kernbegriff angesehen werden kann. In der Sekundarstufe I gibt es keinen einheitlichen Funktionsbegriff, sondern viele Funktionsbegriffe, etwa den der linearen oder der quadratischen Funktionen. Lernende bringen also ein durch Funktionstypen geprägtes fragmentiertes Funktionsverständnis in die Einführungsphase mit. In der Sekundarstufe II sollten diese Funktionsverständnisse dann zusammengeführt werden, damit Funktionen verknüpft, in Parameterdarstellungen verwendet oder flexibel genutzt und neue erdacht werden können. Die zentrale Frage für das Mathematikteilprojekt ist, wie die Transformation des Funktionsverständnisses sich beim Übergang zur Sekundarstufe II vollzieht und wie dies sinnvoll gestaltet werden kann. Solche Transformationsprozesse sind in Lehr-Lern-Prozessen aber schwer zu beobachten, weil sie sich langsam und über einen langen Zeitraum vollziehen. Um sie beobachtbar zu machen, sollen sie im Feld simuliert werden. Dies soll über ein auf die beschriebene Transformation ausgerichtetes Unterrichtsdesign geschehen, das die geforderten Transformationsprozesse anbahnen soll, und zwar als einen Wandel des Konzeptverständnisses von einem fragmentierten zu einem integriert-flexiblen Funktionsbegriff. Genau dieser Transformationsprozess soll dann empirisch beforscht werden.

Theoretischer Rahmen und methodisches Vorgehen

Das Mathematikteilprojekt verbindet zwei Theorien: die Anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) (Bosch u. Gascón 2014) und kontextuelle Abstraktion (AiC) (Dreyfus et al. 2015). Der Kernbegriff der ATD kenn-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zeichnet das institutionelle Handeln in Klassen durch so genannte Praxeologien. Diese bestehen aus typischen Aufgaben, Techniken zum Bearbeiten der Aufgaben, Theorien und Begründungsformen für die verwendeten Techniken, die Technologien. Wir gehen davon aus, dass typische Praxeologien der abgebenden Schulen zum Funktionsbegriff Spuren im Handeln der Lernenden hinterlassen und so zum Ausgangspunkt für die Transformation des Funktionsverständnisses in der E-Phase werden, aber auch den Entwicklungsrahmen vorbestimmen. Diese Spuren sollen als Handlungspraxen rekonstruiert werden. Ziel ist es, dass die angestrebten Transformationsprozesse diese Praxen aufgreifen, in individuelle Erkenntnis- und Konzeptbildungsprozesse im Kontext gestalteter Lehr-Lern-Prozesse hineinführen und das Funktionsverständnis flexibilisieren. Flexibilisierung allein führt aber noch nicht zu einem allgemeinen Funktionsverständnis. Sie kann aber die Separation der Funktionsbegriffe aufheben. Insbesondere gehen wir davon aus, dass Art und Grad der Flexibilisierung Richtung, Merkmale, aber auch Hindernisse der zu realisierenden Transformation aufzeigen.

Die zu untersuchenden Transformationsprozesse werden als epistemische Prozesse angesehen und sollen deshalb mit dem geschachtelten epistemischen Handlungsmodell (RBC+C-Modell) der AiC untersucht werden. Dieses Modell geht davon aus, dass durch Recognizing-Handlungen (R) vorausgegangene Konstrukte wiedererkannt werden und eine Basis für Erkenntnishandeln darstellen. Die erkannten Konstrukte können durch Building-with-Handlungen (B) zusammengebaut und durch Constructing-Handlungen (C) zur (Neu-)Konstruktion mathematischer Konzepte führen. Konsolidierung (+C) sichert und flexibilisiert die neuen Konstrukte.

Die Praxeologien der abgebenden Schulen werden durch Interviews mit Lehrkräften erschlossen, und zwar bzgl. ihres Unterrichts zu Funktionen unter Rückgriff auf das verwendete Schulbuch und die jeweiligen Schulcurricula in Bezug auf typische Aufgaben, deren Bearbeitungstechniken und deren Begründungsmuster sowie zum Theorieverständnis zum Funktionsbegriff. An den Gebrauchsspuren von Lernenden zum Umgang mit dem Funktionsbegriff soll das Design einer Unterrichtseinheit ansetzen und das Funktionsverständnis in Richtung auf ein flexibilisiertes Funktionsverständnis transformieren.

Eine Aufgabenserie soll die Untersuchung von funktionalen Zusammenhängen bei Formeln initiieren, etwa bei der Formel zum Kegelvolumen. Formeln sind interessant, weil sie Gebrauchscharakter haben. Sie sind konkret und werden normalerweise nicht mit Funktionen assoziiert, der Ansatz ist also neu für die Lernenden der E-Phase. Zugleich aber erlauben Formalen ein Anknüpfen an bekannte lineare und quadratische Funktionen und die vertrauten Darstellungsformen: algebraisch, grafisch, tabellarisch, geometrisch. Sie stellen also einen Rahmen zum Wiedererkennen vorausgegangener Konstrukte bereit. Funktionale Abhängigkeiten bei Formeln können nach Malle als „Abhängigkeiten […] mit Hilfe des Funktionsbegriffes präziser beschrieben werden." (Malle 1993, S. 79), aber auch in ihrer Bedeutung konkretisiert werden. Flexibilisierung wird erreicht durch Sichtwechsel auf unterschiedliche, voneinander abhängige Variablen.

Abbildung 1 zeigt einen Kegel und seine Volumenformel, die in unterschiedlicher Weise funktional betrachtet werden kann.

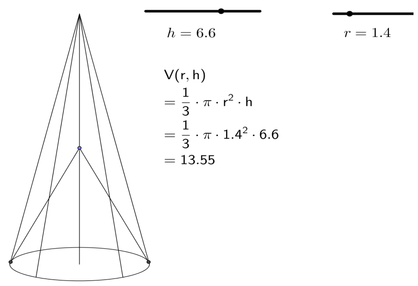


Abb. 1 Kegelvolumen

Zunächst betrachte man den kleinen Kegel im Bild, der durch Verdoppeln der Höhe h bei gleichem Radius r gestreckt wird. Wie verändert sich das Volumen? Erste geometrische Überlegungen können zeigen, dass sich das Volumen ebenfalls verdoppelt. Das ist aber nicht so unmittelbar sichtbar. Eine funktionale Betrachtung zeigt den proportionalen Zusammenhang $V(h) \sim h$ bei konstantem Radius r auf und vereinfacht und verallgemeinert die geometrischen Argumentationen. Setzt man die Höhe nun als 1 (LE) fest und fragt nach der Veränderung des Volumens bei Verdoppelung des Radius, dann führt eine funktionale Betrachtung sofort zu einer Lösung, eine geometrische Betrachtung aber nicht. Sind Radius und Höhe gleich lang, wächst das Volumen mit der dritten Potenz des Radius r. Auch das ist algebraisch unmittelbar einsichtig. Über Design Based Research soll ein Lehr-Lern-Arrangement von mindestens zwei Wochen in der eben beschriebenen Form entwickelt werden, das den Gebrauch von Funktionen flexibilisieren soll. Das kann gelingen, weil das gleiche algebraische Objekt durch Sichtwechsel das Wiedererkennen unterschiedlicher funktionaler Zusammenhänge ermöglicht und als Realisierung sich verändernder geometrischer Körper interpretiert werden kann. Ziel ist es, dass Lernende durch Perspektivwechsel lernen, dass man Funktionen in Objekte hineinsehen kann, indem man bestimmte Variable als unabhängig bzw. abhängig ansieht und deren Zusammenhang am selben Objekt untersucht. Erste Untersuchungen zu Aufgaben dieser Art decken zentrale Probleme mit dem Funktionskonzept und seinen Darstellungen auf. Dazu gehören etwa folgende Probleme: Das Übersetzen der funktionalen Zusammenhänge in eine grafische Darstellung kollidiert mit der geometrischen Form des Kegels; bei Spezifizierung der Formel durch h=1(LE) entstehen Irritationen, weil das Volumen $V=\frac{1}{3}\pi r^2$ als Flächeninhalt interpretiert wird; das Fehlen der Buchstaben y und x verhindert das Hineinsehen und grafische Darstellen von funktionalen Zusammenhängen; der Kegel wird so in ein dreidimensionales Koordinatensystem gesetzt, dass die Höhe auf der y-Ache liegt und der Radius auf der x-Ache abgetragen wird: Es entsteht eine scheinbar vertraute Darstellung, die den Zusammenhang von Volumen und Höhe bzw. Radius überdeckt. Nach dem „conceptual blending"-Ansatz (Fouconnier & Turner 2003) können zwei getrennte Bereiche wie Geometrie und Funktionen nur schwer zusammengebracht werden, man benötigt ein so genanntes „generisches Modell", das beides bereits verbindet.

Wie sollen die Transformationsprozesse untersucht werden?

Das Lehr-Lern-Arrangement soll von einer Lehrperson durchgeführt und der Unterricht soll videographiert werden. In Klassengesprächen soll die gesamte Diskussion mitgeschnitten werden, in Gruppenarbeitsphasen die Aufgabenbearbeitungen von drei Schülerpaaren. Ausgewertet werden die Erkenntnisprozesse mit dem RBC+C-Modell. Als Ergebnisse sind Erkenntnisse darüber zu erwarten, was in welchen Ressourcen wiedererkannt wird, wie dies zur Realisierung von Sichtwechseln auf funktionale Zusammenhänge in denselben Formeln führt, welche Aspekte diese Flexibilisierung fördern oder behindern und in welcher Weise die Praxeologien des abgebenden Unterrichts diese Prozesse beschränken können.

Literatur

Bosch, M. & Gacòn, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, u. S. Prediger (Hrsg.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (S. 67-83), Advances in Mathematics Education. New York: Springer.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context. Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative methods in mathematics education – examples of methodology and methods* (S. 185-217) , Advances in Mathematics education. New York: Springer.

Fouconnier, G. & Turner, M.(2003). Conceptual blending. Recherches en communicatio 19, 57-86.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Karin BINDER, Stefan KRAUSS, Georg BRUCKMAIER, Regensburg

Welche Visualisierung unterstützt Bayesianisches Denken?

Die Formel von Bayes hat innerhalb der Stochastik eine große Bedeutung. Auch wenn sie in manchen Bundesländern nicht mehr explizit im Lehrplan aufgeführt ist, werden in der gymnasialen Oberstufe nach wie vor Bayesianische Aufgaben mithilfe von Visualisierungen gelöst – mit oder ohne explizitem Rückgriff auf die Formel von Bayes. Das Lösen Bayesianischer Aufgabenstellungen ist jedoch für Schülerinnen und Schüler oftmals sehr schwierig. Selbst Ärzte (Gigerenzer, 2013) oder Juristen (Krauss & Bruckmaier, 2014) unterliegen bei der Bearbeitung derartiger Aufgaben kognitiven Illusionen, die zu teils dramatischen Fehlurteilen führen können. Im vorliegenden Beitrag werden wir darlegen, inwiefern Visualisierungen helfen können, diesen kognitiven Illusionen entgegenzuwirken.

Visualisierungen und natürliche Häufigkeiten

Im Stochastikunterricht werden Schülerinnen und Schüler bereits früh mit Visualisierungen konfrontiert, deren Verwendung ihnen das Lösen von Wahrscheinlichkeits- und Anteilswertaufgaben (später auch Bayesianischen Aufgaben) erleichtern soll. Empirische Untersuchungen zeigen, dass manche Visualisierungen, wie beispielsweise Rasterdiagramme (Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013) oder ikonische Darstellungen (Brase, 2014), Menschen unterstützen können, bei Bayesianischen Aufgaben die korrekte Lösung zu finden. Andere Visualisierungen wie zum Beispiel Eulerdiagramme bewirken hingegen keine Erhöhung der Lösungsrate (Micallef, Dragicevic & Fekete, 2012). Im Stochastikunterricht sind die gängigsten Visualisierungen zur Lösung Bayesianischer Aufgaben Vierfeldertafeln und Baumdiagramme. Daher stellt sich für den schulischen Kontext die Frage: *Inwiefern erhöht die zusätzliche Darbietung einer Vierfeldertafel oder eines Baumdiagramms die Lösungsrate bei Bayesianischen Aufgaben im Vergleich zu einer reinen Textvariante (Fragestellung 1)?*

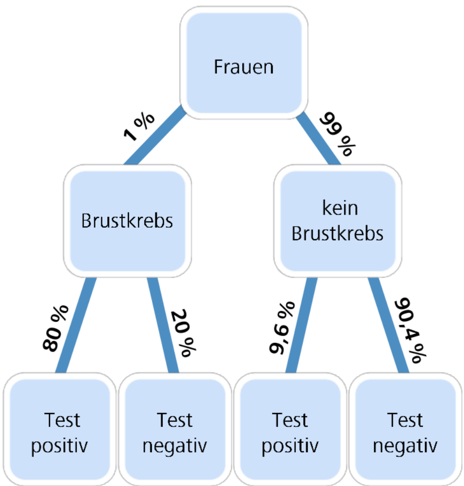
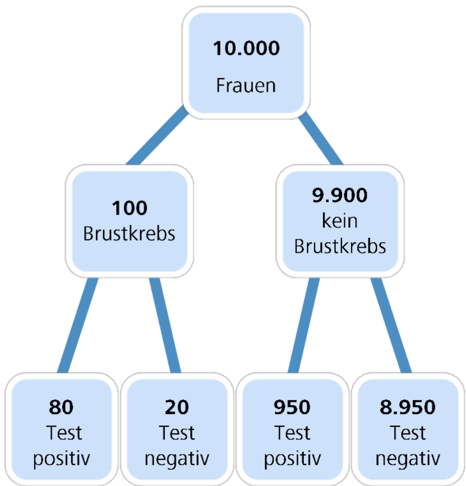
Gigerenzer und Hoffrage (1995) konnten zeigen, dass bei Bayesianischen Aufgaben eine Übersetzung gegebener Wahrscheinlichkeiten (z.B. 80%) in natürliche Häufigkeiten (z.B. 8 von 10) Menschen dabei unterstützt, die korrekte Lösung zu finden. Allerdings beinhalten die Visualisierungen im Stochastikunterricht häufig Wahrscheinlichkeiten. Eine zweite Frage lautet daher: *Inwiefern hat das Format der statistischen Information (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) in der Visualisierung einen Einfluss auf die Lösungsrate bei Bayesianischen Aufgaben (Fragestellung 2)?*

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Methode

Nachfolgende Tabelle illustriert zwei der zwölf getesteten Bayesianischen Aufgabenversionen (Kontext: Brustkrebsfrüherkennung; Visualisierung: Baumdiagramm; Formate: Wahrscheinlichkeiten vs. nat. Häufigkeiten).

Tabelle 1: Beispiel einer Bayesianischen Aufgabe in beiden Formaten

<table>
<tr><th></th><th>Wahrscheinlichkeiten</th><th>Natürliche Häufigkeiten</th></tr>
<tr><td>Einleitung</td><td colspan="2">Stellen Sie sich bitte vor, Sie sind Reporter/Reporterin einer Frauenzeitschrift und möchten einen Artikel über Brustkrebs schreiben. Sie recherchieren auch darüber, was von den Tests zu halten ist, die im Rahmen von Routineuntersuchungen eingesetzt werden, um Brustkrebs zu entdecken. Ihr besonderes Interesse gilt der Frage, was es bedeutet, wenn eine Frau bei einem solchen Test ein positives Ergebnis (welches Brustkrebs anzeigt) erhält.
Ein Arzt erklärt Ihnen die Situation anhand folgender Daten:</td></tr>
<tr><td>Aufgabentext</td><td>• Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt 1 %.
• Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält, 80 %.
• Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie dennoch ein positives Testergebnis erhält, 9,6 %.</td><td>• 100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.
• Von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten 80 ein positives Testergebnis.
• Von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten 950 dennoch ein positives Testergebnis.</td></tr>
<tr><td>Visualisierung</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Frage</td><td>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Testergebnis erhält?
Antwort: ____ %</td><td>Wie viele Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Testergebnis erhalten, haben Brustkrebs?
Antwort: ___ von ___</td></tr>
</table>

In unserer Untersuchung bearbeiteten 259 Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe des Gymnasiums je zwei Bayesianische Aufgaben, die sich im Aufgabenkontext (Brustkrebsfrüherkennung vs. Berufswahlentscheidung), im Informationsformat (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) und in der Visualisierung (keine Visualisierung vs. Vierfeldertafel vs. Baumdiagramm) unterschieden. Tabelle 1 zeigt die dargebotene Aufgabenstellung zum Kontext Brustkrebsfrüherkennung in den beiden Informationsformaten (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten). Dabei wird deutlich, dass die Visualisierung „Baumdiagramm" sowohl im Wahrscheinlichkeitsformat als auch im Häufigkeitsformat möglich ist. Entsprechend gab es diese Aufgabe auch ohne Visualisierung bzw. mit einer Vierfeldertafel (die sich ebenfalls mit Wahrscheinlichkeiten oder mit natürlichen Häufigkeiten ausfüllen lässt). Außerdem bearbeitete jeder Schüler eine weitere Aufgabe zum Kontext „Berufswahlentscheidung" (mit dem jeweils anderen Format und einer anderen Visualisierung).

Ergebnisse

Zentrales Ergebnis der vorliegenden Untersuchung ist der Interaktionseffekt zwischen Informationsformat und Art der Visualisierung (vgl. Abb. 1).

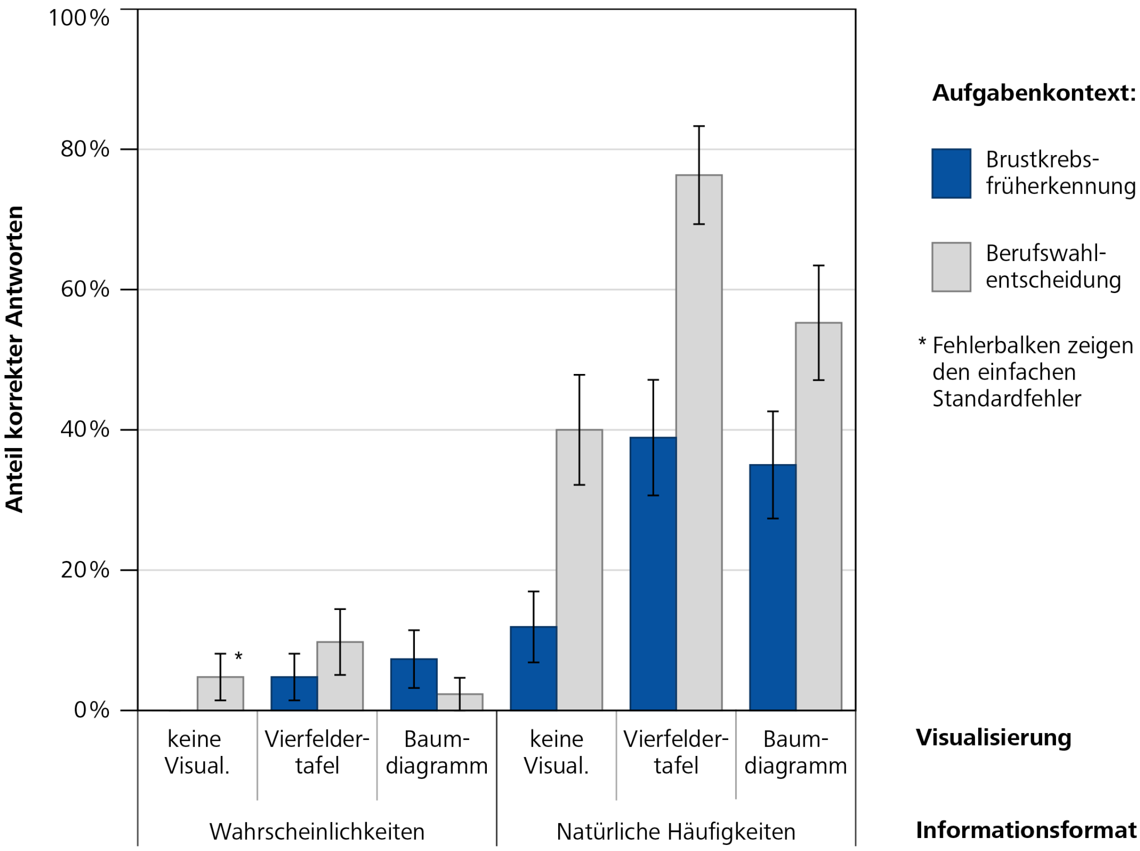


Abbildung 1: Lösungsraten der zwölf verschiedenen Aufgabenversionen

Aus der Abbildung wird deutlich, dass nur Visualisierungen mit natürlichen Häufigkeiten Bayesianisches Denken unterstützen. Interessanterweise zeigt sich bei den beiden in der Schule sehr häufig verwendeten Visualisierungen (Vierfeldertafel und Baumdiagramm, jeweils mit Wahrscheinlichkeiten) keine entscheidende Erhöhung der Lösungsrate.

Weitere Details zur Studie, sowie einen vollständigen Überblick über die Instrumente, inferenzstatistische Analysen der Ergebnisse sowie eine Diskussion des großen Einflusses des Aufgabenkontexts, finden sich in Binder, Krauss und Bruckmaier (eingereicht).

Diskussion

Im schulischen Stochastikunterricht sollen Schüler verschiedene Darstellungsarten statistischer Informationen kennenlernen und ineinander umrechnen können (Bruckmaier, Binder & Krauss, im Druck). Die zusätzliche Darbietung von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln scheint ein geeignetes Instrument darzustellen, um kognitiven Illusionen bei Bayesianischen Aufgaben entgegenzuwirken – allerdings nur, wenn diese Visualisierungen mit natürlichen Häufigkeiten versehen sind.

Literatur

Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (eingereicht). Visual representation improves Bayesian reasoning. *Frontiers in psychology, 6*.

Brase, G. L. (2014). The power of representation and interpretation: Doubling statistical reasoning performance with icons and frequentist interpretations of ambiguous numbers. *Journal of Cognitive Psychology, 26*(1), 81–97.

Bruckmaier, G., Binder, K. & Krauss, S. (im Druck). Warum sich Wahrscheinlichkeiten und Prozentangaben oft unserer Intuition widersetzen – und was man dagegen tun kann. In E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.), *Daten und Zufall. MaMut – Materialien für den Mathematikunterricht*, Band 3. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Garcia-Retamero, R. & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science & Medicine, 83,* 27–33.

Gigerenzer, G. (2013). HIV screening: helping clinicians make sense of test results to patients. *BMJ, 347,* 1–2.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704.

Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2014). Eignet sich die Formel von Bayes für Gerichtsverfahren? In U. Sproesser, S. Wessolowski & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt. Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik* (S. 123–132). Wiesbaden: Springer.

Micallef, L., Dragicevic, P. & Fekete, J.-D. (2012). Assessing the effect of visualizations on Bayesian reasoning through crowdsourcing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 18*(12), 2536–2545.

Jan BLOCK, Braunschweig

Flexibles algebraisches Handeln bei quadratischen Gleichungen durch Aufgaben zum Variieren erfassen und entwickeln

Flexibles algebraisches Handeln

In einer Studie zum flexiblen algebraischen Handeln wird u. a. mit einer Aufgabe zum Variieren einer quadratischen Gleichung untersucht, welche Merkmale Schülerinnen und Schüler bei quadratischen Gleichungen wahrnehmen, welche Bedeutungen sie diesen Merkmalen zuweisen und inwieweit diese förderlich oder hinderlich für flexibles algebraisches Handeln sein können (vgl. Block 2014). Flexibles algebraisches Handeln kann in Anlehnung an das Konzept des flexiblen Rechnens (Rathgeb-Schnierer, 2006; Threlfall 2002) definiert werden als die Fähigkeit zur Wahl einer adäquaten Bearbeitungsmethode, die von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig ist. Bei quadratischen Gleichungen sind die auftretenden Zahlen sowie die Struktur der auftretenden Terme und der Gleichung als Ganzes Merkmale für die Auswahl eines geeigneten, d. h. effizienten und fehlerunanfälligen Lösungsverfahrens.

Variation quadratischer Gleichungen

Schupp (2002) klassifiziert Variationsstrategien für Aufgaben verschiedener Themenbereiche der Mathematik allgemein. Diese lassen sich für quadratische Gleichungen konkretisieren, wie die Übersicht mit ausgewählten Beispielen in der folgenden Tabelle zeigt.

Bezeichnung		**Strategiebeschreibung**	**Beispiel** $x^2+2x-6=0$ **wird variiert zu**
V1	Geringfügig ändern	Änderung der auftretenden Zahlen	$x^2+3x-7=0$
V2	Analogisieren	Änderung der auftretenden Operatoren (einschließlich des Exponenten)	$x^2-2x+6=0$ $-x^2+2x-6=0$
V3	Verallgemeinern	Die Änderung führt zu einem allgemeineren Fall	$x^2+2x-6=8$ $2x^2+2x-6=0$
V4	Spezialisieren	Die Änderung führt zu einem Spezialfall	$x^2+2x=0$ $x^2-6=0$
V5a	Darstellung ändern	Umsortieren eines Terms	$x^2-6+2x=0$
V5b		Umformen eines Terms	$x^2+x-6+x=0$
V5c		Umformen einer Gleichung	$x^2+2x=6$
V6	Kombinieren	Kombination verschiedener Strategien	$x+2x^2=-8$

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Mit Blick auf die Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen ist festzustellen, dass Variationen mittels verschiedener Strategien sich unterschiedlich auf die Auswahl geeigneter Lösungsverfahren auswirken. Während V3 und V4 unmittelbar ein anderes Lösungsverfahren als die p-q-Formel für das Beispiel evozieren, ist dies bei den anderen Variationsstrategien abhängig von der konkreten Variation.

Zur Beurteilung von Variationen können Kriterien entwickelt werden, die sich auch bei der Beurteilung kreativer Prozesse eignen, da die Generierung von Variationen einen kreativen Prozess darstellt (vgl. Schupp (2002) unter Bezugnahme auf Becker und Shimada (1997)). Im Kontext der eigenen Studie sind folgende Kriterien bedeutsam: Flexibilität (Anzahl der verschiedenen verwendeten Strategien), die Fähigkeit zur Benennung der angewandten Strategie und die Qualität des mathematischen Denkens im Hinblick auf die Bedeutung der veränderten Merkmale der Gleichung. Ebenfalls zur Beurteilung von Variationen eignet sich das von Winter (1988) für die Beurteilung divergenten Denkens genannte Kriterium der „Elaboriertheit“ (Ausgestaltung mit Details), das sich auf die Variation selbst und die Erklärung der Variation anwenden lässt.

Merkmale und Potenzial von Variationsaufgaben

Bei der Variation einer gegebenen quadratischen Gleichung handelt es sich um eine offene Aufgabenstellung hinsichtlich der Bearbeitungswege und der Ergebnisse. Die Aufgabenstellung ist differenzierend, da sie auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden kann und sie ist authentisch hinsichtlich der angeregten Prozesse, da die jeweiligen Kompetenzen sichtbar werden. Dies sind Merkmale von Aufgaben mit diagnostischem Potenzial (vgl. z. B. Büchter & Leuders, 2005). Beim Variieren können von den Schülerinnen und Schülern keine bekannten Routinen oder Standardverfahren (wie zum Lösen von Gleichungen) angewandt werden. Auch wenn z. B. das Variieren der auftretenden Zahlen bei wiederholter Aufgabenstellung zur Variation von den Schülerinnen und Schülern als Routine verwendet wird, so hat diese Variationsstrategie je nach fachlichem Kontext (z. B. Gleichung vs. geometrische Konstruktion) ganz unterschiedliche Bedeutung und Relevanz. Weinert beschreibt „den Erwerb und die Verfügbarkeit einer intelligent organisierten, flexibel zugänglichen und originell nutzbaren bereichsspezifischen Wissensbasis“ (Weinert 1994, 274) als Grundlage für die Erzielung kreativer Leistungen. Insofern eignen sich Kreativität erfordernde Variationsaufgaben zur Erforschung der bei den Schülerinnen und Schülern zugrunde liegenden Wissensbasis.

Zum Aufbau der Studie

Abbildung 1 zeigt die Aufgabe, die die Teilnehmerinnen und Teilnehmer (11 Schülerinnen und Schüler aus vier neunten Klassen von zwei verschiedenen Gymnasien aus Niedersachsen) in der Studie bearbeitet haben. Die Schülerdokumente und die transkribierten Videos werden mit Methoden qualitativer Datenanalyse untersucht.

> Gegeben ist die quadratische Gleichung: $x^2 + 2x - 6 = 0$
> Erfinde ausgehend von dieser Gleichung durch Veränderung neue Gleichungen.
> Sprich bitte alles aus, was dir in den Sinn kommt und durch den Kopf geht, während du die Aufgabe bearbeitest.

Abbildung 1

Mithilfe der Variationsaufgabe wird untersucht, auf welche Merkmale der gegebenen quadratischen Gleichung die Probanden fokussieren, wie sie diese variieren und inwieweit sie diesen Veränderungen Bedeutungen zumessen, insbesondere im Hinblick auf Auswirkungen der Variation auf Lösungsprozesse und Lösungen der Gleichung.

Ausgewählte Befunde und Diskussion

Für alle Teilnehmer war die Aufgabenstellung ungewohnt, was sich in Irritation und Nachfragen ausdrückte, sodass weitere Erklärungen des Versuchsleiters nötig waren. Zwei Teilnehmer ignorieren die Aufgabenstellung zunächst und beginnen damit, die Gleichungen zu lösen, sich also der ihnen bekannten Tätigkeit zu widmen, die sie aus dem Mathematikunterricht im Umgang mit Gleichungen kennen.

Abbildung 2 zeigt die absoluten Häufigkeiten des Auftretens der verschiedenen Strategien. In acht Fällen konnte aufgrund fehlender Erklärung nicht entschieden werden, ob V1 oder V2 angewandt wurde. Die Strategie V5a trat nur in Kombination mit anderen Strategien auf. Die Strategie V3 hingegen war bei keiner Versuchsperson zu identifizieren.

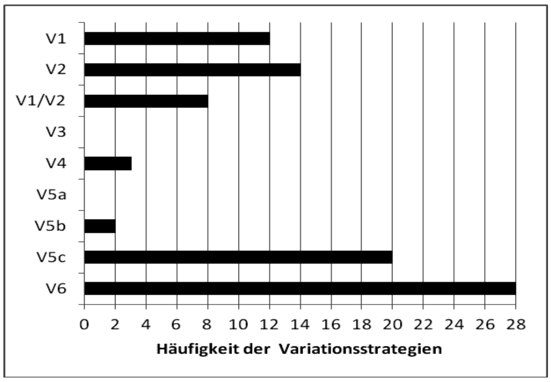


Abbildung 2

Die Strategien V3 und V4 sind im Hinblick auf flexibles algebraisches Handeln besonders relevant, da sich unmittelbar Veränderungen für den Lösungsprozess der Gleichung ergeben. Zwei Teilnehmer spezialisieren, indem sie eine zweite Variable einfügen ($x^2 + 2y - 6 = 0$) oder lineare Gleichungen ($x - 5 = 4, x + 3 = 5$) erstellen und damit den Bereich der quadratischen Gleichungen verlassen.

Bei der Strategie „Gleichung umformen“ (V5c) dominieren additive bzw. subtraktive Äquivalenzumformungen der Gleichungen. Ein Schüler produziert die in Abbildung 3 gezeigten Variationen durch Umformung der Gleichung. Er erklärt hierzu, dass er die Initialgleichung durch 2 dividiert, um die erste Gleichung zu erhalten. Diese Division wendet er dann auf alle auftretenden Zahlen, auch den Exponenten an. Bei den nächsten drei Variationen verfährt er analog, indem er die Initialgleichung der Reihe nach mit 2, 3 und 4 multipliziert. Zur letzten Variation erklärt er: „Man könnte es auch negativ machen.“ Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise werden der Exponent und die Konstante -6 jeweils mit -1 multipliziert. Der Koeffizient 2 wird zu $\frac{1}{2}$ modifiziert, was mutmaßlich auf ein irrtümliches Potenzieren statt Multiplizieren mit -1 zurückzuführen ist. Die Erklärungen deuten auf eine Fehlvorstellung zu Äquivalenzumformungen von Gleichungen hin. Der Unterschied zwischen den auftretenden Zahlen (Exponent und Koeffizienten) wird nicht beachtet.

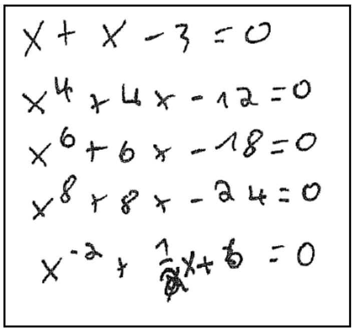


Abbildung 3

Die häufig auftretenden Strategien V1 und V2 zeigen, dass der Fokus auf die Zahlen und Zeichen gerichtet ist. Kein Teilnehmer formuliert diesbezüglich in den Erläuterungen zu den Variationen einen Bezug zur Lösbarkeit oder zu den Lösungsverfahren für die entstandenen Gleichungen.

Literatur

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach. A new proposal for teaching mathematics.* Reston: National council of teachers of mathematics.

Block, J. (2014). Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM. 197-200.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Threlfall, J. (2002): Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics 50(1)*, 29-47. doi: 10.1023/A:1020572803437

Weinert, F. E. (1994). Entwicklung und Sozialisation der Intelligenz, der Kreativität und des Wissens. In: K. A. Schneewind (Hrsg.). *Psychologie der Erziehung und Sozialisation*. Göttingen: Hogrefe. 259-284.

Winter, H. (1988). Divergentes Denken und quadratische Gleichungen. *Mathematik lehren 28*, 54-55.

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER, München

Mathematische und (fach-)sprachliche Kompetenzen von Drittklässlern mit (nicht-)deutscher Familiensprache

Als möglicher Grund für mathematische Leistungsdisparitäten zwischen Lernenden mit und ohne Migrationshintergrund wird wiederholt eine vom Deutschen abweichende Familiensprache genannt (z.B. TIMSS 2011; Tarelli, Schwippert & Stubbe, 2012). Damit einher gehen häufig geringe Sprachkenntnisse im Deutschen (z.B. Heinze, Herwartz-Emden & Reiss, 2007). Werden diese geringen Deutschkenntnisse in den ersten Schuljahren oft durch relativ gute alltagssprachliche Kenntnisse „verdeckt" und damit von Lehrkräften überschätzt (Knapp, 1999), so zeigt sich im Verlauf der Schulzeit zunehmend die Relevanz einer von der Alltagssprache abweichenden, kognitiv anspruchsvollen Sprache (z.B. CALP; Cummins, 1979) für schulische und damit auch für mathematische Lernprozesse.

Auswirkungen geringer Sprachkenntnisse im Mathematikunterricht

Liegen solche anspruchsvolleren Sprachkenntnisse jedoch nicht vor, kann eine Teilhabe am Mathematikunterricht eingeschränkt sein. Neben der Schwierigkeit, sich mit geringen Sprachkenntnissen aktiv am Unterrichtsdiskurs zu beteiligen (z.B. Civil, 2008), können auch die epistemischen Funktionen von Sprache (z.B. die sprachliche Strukturierung mathematischer Probleme) nur in geringem Maße genutzt werden (z.B. Steenpaß & Steinbring, 2014). Des Weiteren entstehen Schwierigkeiten bei der Rezeption von Aufgabenstellungen (z.B. im VERA-3-Test; Haag et al., 2013). Eine detaillierte Analyse der in diesen Aufgabenstellungen enthaltenen sprachlichen Anforderungen ergab, dass bildungssprachliche Begriffe und Nominalkonstruktionen die Aufgabenschwierigkeit für Kinder mit nichtdeutscher Familiensprache erhöhen, während sich dies für den Fachwortschatz nicht zeigte. Die in dieser retrospektiven Analyse gezeigte Relevanz bildungssprachlicher Begriffe und deren Übersetzung in die mathematische Welt soll im vorliegenden Projekt im Rahmen einer direkten Erhebung mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen überprüft werden.

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen beziehen sich dabei auf einzelne Wörter (lexikalische Ebene, Fachbegriffe), Beziehungen der Wörter zueinander (grammatikalische Struktur, z.B. Nominalkonstruktionen) sowie auf das Situationsverständnis als Fähigkeit, mathematikhaltige Texte in die Welt der Mathematik zu übersetzen (z.B. Maier & Schweiger, 1999; Jütz, 2013). Zur Operationalisierung mathematisch-fachsprachlicher Kom-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

petenzen wurde auf die lexikalische Ebene und das Situationsverständnis Bezug genommen und folgende Definition entwickelt: Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen umfassen neben der Kenntnis von Fachbegriffen die Kompetenz, mathematisch relevante Situationsstrukturen in unterschiedlichen sprachlichen Darstellungen zu erkennen und beim Aufbau von Situationsmodellen zu berücksichtigen. Im vorliegenden Projekt wurden Instrumente zu diesen beiden Bereichen der mathematisch-fachsprachlichen Kompetenzen entwickelt.

Fragstellungen

Ziel des Projekts ist es, mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen im Sinne der oben genannten Definition zu operationalisieren und in einer Längsschnittstudie hinsichtlich ihrer Erklärungskraft für mathematische Kompetenzunterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache zu analysieren. Für den vorliegenden Bericht werden die folgenden drei Fragestellungen des Projekts herausgegriffen:

- Lassen sich mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen reliabel erheben?
- Wie hängen die mathematische Kompetenz und allgemein- sowie fachsprachliche Kompetenzen zusammen? Lassen sich charakteristische Fähigkeitsprofile identifizieren?
- Inwieweit erklären mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen Unterschiede in Stand und Entwicklung mathematischer Kompetenz zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache?

Studiendesign

Zur Operationalisierung mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen wurden drei Subskalen zu den folgenden Bereichen entwickelt: *Aktiver Fachwortschatz*, *Passiver Fachwortschatz* und *Textintegratives Verständnis*. Während in den Skalen *Aktiver und Passiver Fachwortschatz* Fachbegriffe aus der Sprachproduktion und –rezeption der Kinder erhoben werden, bezieht sich das *Textintegrative Verständnis* auf das Situationsverständnis und die damit verbundene Fähigkeit, die Mathematik in mathematikhaltigen Texten zu erkennen. Des Weiteren wurde die Mathematische Kompetenz (Eigenentwicklung) erhoben sowie allgemeine Sprachkenntnisse mit dem SFD 3-4 (Hobusch, Lutz & Wiest, 2002) und kognitive Grundfähigkeiten mit dem CFT 1 (Cattell, Weiß & Osterland, 1997) kontrolliert. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Längsschnittstudie mit N = 232 Drittklässlern (N = 91 Kinder mit nicht-deutscher Familiensprache) aus acht Münchner Schulen berichtet.

Ergebnisse

Der Test zur Erhebung mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen stellt mit den Skalen *Aktiver Fachwortschatz* ($\alpha = .65$), *Passiver Fachwortschatz* ($\alpha = .57$) und *Textintegratives Verständnis* ($\alpha = .75$) ein ausreichend reliables Testinstrument dar.

Zusammenhangsanalysen zeigen eine signifikant positive Korrelation zwischen mathematischen und allgemeinsprachlichen Kompetenzen ($r = .61$). Durch einen Median-Split beider Merkmale lässt sich die Stichprobe in vier Gruppen einteilen. Dabei fällt vor allem die Gruppe der Kinder auf, die trotz unterdurchschnittlicher allgemeinsprachlicher Kenntnisse eine überdurchschnittliche Mathematische Kompetenz erzielt. Werden in einer Clusteranalyse zusätzlich die drei Indikatoren mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen eingeschlossen, so zeigen sich auch hier vier Gruppen. Neben Kindern die in allen fünf Bereichen überdurchschnittliche, durchschnittliche oder unterdurchschnittliche Leistungen zeigen, fällt auch hier eine kleine Gruppe ($N = 20$) auf, die trotz unterdurchschnittlicher allgemeinsprachlicher Kenntnisse in allen Bereichen durchschnittliche Leistungen erbringt. Diesen Kindern gelingt es, neben mathematischen Kompetenzen auch mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen zu erwerben, obwohl ihre allgemeinsprachlichen Kenntnisse weit unterdurchschnittlich ausgeprägt sind.

Um (fach-)sprachliche Einflüsse auf den Stand der Mathematischen Kompetenz zu Beginn der dritten Klasse zu untersuchen, wurden in Regressionsanalysen zunächst nur die Familiensprache (Modell 1), zusätzlich kognitive Grundfähigkeiten und allgemeine Sprachkompetenzen (Modell 2) und zuletzt die drei Indikatoren mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen (Modell 3) eingeschlossen. Während das Merkmal „Familiensprache“ in Modell 1 einen signifikanten Beitrag zur Varianzaufklärung leistet, verschwindet dieser Effekt in Modell 2. Es liegen bedeutsame mathematische Leistungsunterschiede zugunsten von Kindern mit deutscher Familiensprache vor, die vornehmlich durch allgemeine Sprachkenntnisse erklärt werden können. Werden in Modell 3 zusätzlich mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen eingeschlossen, so liefern das Textintegrative Verständnis und der Passive Fachwortschatz über die allgemeinen Sprachkenntnisse hinaus einen signifikanten Beitrag zur Varianzaufklärung. Zur Analyse der (fach-)sprachlichen Einflüsse auf die Entwicklung Mathematischer Kompetenz im Verlauf der dritten Klasse wurden die gleichen Regressionsmodelle für die Mathematische Kompetenz zum Ende der dritten Klasse unter Kontrolle der Mathematischen Kompetenz zu Beginn des Schuljahres berechnet. Es zeigte sich, dass auch die Entwicklung Mathematischer Kompetenz durch allgemeine Sprachkenntnisse erklärt werden kann, darüber hinaus leistet nur der passive Fachwortschatz einen signifikanten Beitrag zur Varianzaufklärung.

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen stellen demnach über allgemeine Sprachkenntnisse hinaus einen wichtigen Prädiktor für den Erwerb Mathematischer Kompetenz dar. Dies kann als Argument für die Wirksamkeit fachspezifischer Sprachförderung gesehen werden. Weiterhin sollte die kleine Gruppe Kinder, die trotz geringer allgemeiner Sprachkenntnisse eine gute Mathematische Kompetenz sowie mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen erzielt, genauer analysiert werden.

Literatur

Cattell, R. B., Weiß, R. H. & Osterland, J. (1997). *Grundintelligenztest Skala 1. CFT 1.* Braunschweig: Westermann.

Civil, M. (2008). Language and Mathematics. Immigrant Parents' Participation in School. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Hrsg.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Morelia, Mexico: PME.

Cummins, J. (1979). Linguistic Interdependence and the Educational Development of Bilingual Children. *Review of Educational Research, 49* (2), 222–251.

Haag, N., Heppt, B., Stanat, P., Kuhl, P. & Pant, H. A. (2013). Second language learners' performance in mathematics: Disentangling the effects of academic language features. *Learning and Instruction, 28,* 24–34.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L. & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Pädagogik, 53,* 562–581.

Hobusch, A., Lutz, N. & Wiest, U. (2002). *Sprachstandsüberprüfung und Förderdiagnostik für Ausländer- und Aussiedlerkinder (SFD 3/4)*. Horneburg: Persen Verlag.

Jütz, A. (2013). *Förderung der Fachsprache insbesondere von Schülern nichtdeutscher Herkunftssprache im Mathematikunterricht der Klassenstufen 5 und 6 bei der Lösung von Sachaufgaben im Themenbereich Größen*. Hildesheim: Franzbecker.

Knapp, W. (1999). Verdeckte Sprachschwierigkeiten. *Die Grundschule* (5), 30–33.

Maier, H. & Schweiger, F. (2011). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: ÖBV & HPT.

Steenpaß, A. & Steinbring, H. (2014). Young students' subjective interpretations of mathematical diagrams. elements of the theoretical construct 'frame-based interpreting competence'. *ZDM Mathematics Education, 46,* 3–14.

Tarelli, I., Schwippert, K. & Stubbe, T. C. (2012). Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund. In W. Bos, H. Wendt, O. Köller & C. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011* (S. 247–267). Münster: Waxmann.

Wolfgang BOCK, Martin BRACKE, Kaiserslautern

Erfahrungen mit mathematischer Modellierung in der Hochschulausbildung

Auf lange Sicht ist es von größter Bedeutung, Lehrkräfte zukunftsweisend auszubilden. Dazu gehört, dass sie schon an der Hochschule die Problemlösungsfähigkeit der Mathematik erfahren und lernen sollten sie einzusetzen. Während numerische Mathematik an den meisten Fachbereichen gelehrt und auch implementiert wird, gibt es nicht überall Lehrveranstaltungen, in denen Lehramtsstudierende lernen zu modellieren. Solche Veranstaltungen zu entwickeln, mit den numerischen Methoden zu koppeln und schließlich Simulationen zu programmieren, die zur Vorhersage und auch zur Optimierung der simulierten Systeme genutzt werden können, ist eine neue Aufgabe in der Ausbildung von Lehrkräften. Dieser Beitrag stellt exemplarisch verschiedene Veranstaltungen vor, in denen an der TU Kaiserslautern ein Fokus auf die mathematische Modellierung gelegt wird.

Erstkontakt: Mathematische Modellierung als Proseminar

An der TU Kaiserslautern bekommen die Studierenden der Mathematik genau wie die Studierenden des Lehramts mit Fach Mathematik im ersten Studienjahr eine mathematische Grundausbildung in Form der Veranstaltungen *Grundlagen der Mathematik I & II* sowie *Algebraische Strukturen*. Diese umfasst in der üblichen Terminologie die *Analysis I & II* sowie *Lineare Algebra I & II*. Im Modul *Mathematische Modellierung* können die Studierenden das gleichnamige *Proseminar* belegen, in dem der Fokus weniger auf dem Einsatz komplexer mathematischer Werkzeuge als auf der Tätigkeit des Modellierens in Form eigenen Tuns liegt. Dieses Proseminar steht Lehramtsstudierenden wie Fachmathematikern offen und die Teilnehmer bearbeiten in Gruppen von zwei bis fünf Studierenden über die Dauer von einem Semester jeweils eine reale Fragestellung. Wichtig bei der Auswahl der Projekte ist dabei, dass es sich um reale, authentische Problemstellungen handelt, bei der nach Möglichkeit auch eigene Daten erhoben werden können. Die Definition einer authentischen Fragestellung (vgl. Bock & Bracke 2013) schließt hierbei ein, dass jemand (der Kunde) an einer Lösung seines Problems interessiert ist, die am Schluss tatsächlich auf das Problem anwendbar und für ihn verständlich sein muss. Die Problemstellung wird dabei nicht zu Lehrzwecken aufbereitet. Exemplarisch sollen zwei Fragestellungen kurz vorgestellt werden, die im Laufe des Wintersemester 2014/15 von Studierenden bearbeitet wurden:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Speerwurf – Flugverhalten und -weiten von alten und neuen Speeren im Vergleich: Nachdem im Jahr 1984 der Speerwerfer Uwe Hohn mit 104.80m einen neuen Weltrekord aufgestellt hatte, wurde aus Sorge vor noch größeren Weiten – die innerhalb eines herkömmlichen Stadions aus Platzgründen problematisch wären – der Masseschwerpunkt im Jahr 1986 im Zuge neuer Normen für die Sportgeräte nach vorne verlagert. Tatsächlich waren die im Anschluss mit den neuen Speeren erzielten Weiten zunächst deutlich geringer: Der erste Weltrekord mit dem neuen Speer lag bei 85.74m. Allerdings beträgt die aktuelle Bestweite schon wieder 98.48m, also gar nicht weit von der ewigen Bestmarke entfernt. Es liegt die Frage nahe, wie sich die mit alten und neuen Speeren erzielten Weiten vergleichen lassen und ob die Reduzierung nach Regeländerung vielleicht eher auf nötige Anpassungen der Sportler an das neue Gerät als auf prinzipiell deutlich niedrigere mögliche Weiten zurückzuführen ist.

Bewertung von Spielsituationen im Billard: Jeder Billardspieler, der gerne einmal in seiner Freizeit seine Künste am Tisch mit anderen misst, schaut neidisch auf die Fähigkeiten der Profis, die aus scheinbar unmöglichen Positionen noch Kugeln einlochen. Aber einem Anfänger fällt schon die Bewertung einer Spielsituation schwer: Welche Stöße sind überhaupt sinnvoll in dem Sinn, dass prinzipiell eine eigene Kugel eingelocht werden kann? Und wie ist die jeweilige Schwierigkeit der Stöße, falls es mehrere Varianten gibt? Kann man ein Modell aufstellen, mit dessen Hilfe diese Frage beantwortet werden können, so dass dem Ungeübten ein Trainer in Form einer Software zur Seite gestellt werden kann?

Nach Vorstellung mehrerer solcher Fragestellungen – im aktuellen Semester waren es insgesamt sieben für 22 Teilnehmer – dürfen die Studierenden ein Projekt gemäß ihren Interessen auswählen, was sich im Vergleich zur einfachen Zuteilung positiv auf die Motivation auswirkt. Das Ziel des Proseminars ist wie bereits erwähnt das Finden einer Lösung für den (potentiellen) Auftraggeber, die zum Abschluss in Form einer Kundenpräsentation sowie eines schriftlichen Abschlussberichts präsentiert wird. In diesem Sinn rückt das *Produkt als Ziel* in den Mittelpunkt, die Wahl der mathematischen Werkzeuge und Methoden ist frei und wird ebenso wie die Zeiteinteilung den Teilnehmern überlassen. Den organisatorischen Rahmen bilden wöchentliche Treffen der Seminarteilnehmer mit den betreuenden Dozenten. Diese dienen einerseits für kurze Präsentationen des Zwischenstands (2-3 Mal pro Semester) und bieten andererseits die Möglichkeit, aktuelle Fragen zu thematisieren. In der Diskussion wird von Seiten der Dozenten nach dem *Prinzip der minimalen Hilfe* in den meisten Fällen angestrebt, dass die Teilnehmer im Rahmen ihrer vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten eine Lösung erarbeiten und umsetzen – oft sind kurze Hinweise oder Rückfragen ausreichend. Es kommt aber gelegentlich auch vor, dass den Studierenden bis dahin unbekannte mathematische Theorien und Werkzeuge vorgestellt werden, wenn sie eine wesentliche Verbesserung des Modells bedeuten. Dies war beispielweise im geschilderten Projekt *Speerwurf* der Fall, in dem die Studierenden noch keine Kenntnisse zur Theorie oder numerischen Lösung von Differentialgleichungen hatten.

Im weiteren Studienverlauf gibt es mit dem *Modellierungsseminar* für Studierende im 4. Studienjahr eine ähnlich aufgebaute Veranstaltung, die sich hauptsächlich durch die Komplexität der zur Lösung der Fragestellungen erforderlichen und vorhandenen Werkzeuge unterscheidet. Im *Fachpraktikum*, welches im dritten Studienjahr von den Fachmathematikern belegt werden muss, werden in einer Variante ebenfalls Modellierungsprojekte in Kleingruppen bearbeitet. Dabei liegt der Fokus allerdings speziell auf der Entwicklung von Algorithmen und die Umsetzung als Softwareprodukt.

Moderne Mathematik als *Study Research Course*

Für Studierende des Lehramts wird im zweiten Studienjahr des Masterstudiums in Kaiserslautern die Veranstaltung *Moderne Mathematik* angeboten, die Einblicke in moderne mathematische Methoden (bis hin zu aktuellen Forschungsgebieten) und mögliche Anwendungen im Schulunterricht gibt. Üblicher Weise ist die Lehrveranstaltung in drei Abschnitte unterteilt, die von Dozenten verschiedener Arbeitsgruppen gestaltet werden. Ein in den letzten Jahren mehrfach durchgeführtes und weiter entwickeltes Angebot stellt dabei die *Mathematische Modellierung authentischer Fragestellungen aus dem Alltag mit Umsetzung in der Schule* dar: Dabei beschäftigen sich die Teilnehmer mit unterschiedlichen Modellierungsprojekten wie den zuvor geschilderten oder etwa dem *Automatischen Identifizieren von Laubblättern* (vgl. Bracke 2015). Der organisatorische Rahmen ist der eines *Study Research Course*, in dem der Fokus auf der eigenständigen Erarbeitung von Lösungen liegt. Die Durchführung ist im Vergleich zum Proseminar zeitlich kompakter und daher gibt es von Dozentenseite kurze Inputs zu unterschiedlichen mathematischen Inhalten, welche sich nach den Interessen und den Fragen der Teilnehmer richten. Begleitet wird dieser Teil der Veranstaltung durch ein Seminar, in dem die Studierenden in Kleingruppen Umsetzungen für die Schule ausarbeiten und diese optional auch im Rahmen von Projekttagen mit Schülern erproben.

Fazit

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass im Rahmen der geschilderten Lehrveranstaltungen die Teilnehmer mathematische Modellierung als Projektarbeit erfahren. Dabei erleben sie in den meisten Fällen *Forschendes Lernen*, durch das sie aufgrund des Fehlens von Vorgaben zu mathematischen Werkzeugen, spezifischen Fachinhalten, definierten Vorgehensweisen oder Zeiteinteilung angeregt werden. Die Messung und Bewertung des Lernerfolgs erfolgt durch das erarbeitete Produkt, die Präsentation/Dokumentation sowie Betrachtung des Lösungsprozesses. Der Erfolg ist in hohem Maße individuell und wird auf unterschiedlichen Ebenen wahrgenommen: Für viele Teilnehmer ist die Lösung als Produkt ein sehr wichtiges Ergebnis, woraus sie auch im Laufe der Veranstaltungen regelmäßige Motivation beziehen. Einige erweitern ihr mathematisches Wissen in bestimmten, teilweise sehr speziellen Bereichen, während andere wichtige Fortschritte in der Planung und Durchführung von Projektarbeit machen. Für manche Studierende bietet sich zum ersten Mal eine Gelegenheit und Motivation, sich sinnhaft mit der Programmierung eines Computers zu beschäftigen – ein Resultat, welches im Rahmen traditioneller Programmierkurse für Mathematiker nicht immer erreicht wird. Abschließend können die Autoren aus ihrer Erfahrung feststellen, dass ebenso wie im noch seltenen Projektunterricht in der Schule Forschendes Lernen an der Hochschule ein gewinnbringendes Element ist. Für die Teilnehmenden ist diese Art des Lernens oft ungewohnt – vielleicht auch unbequem. Den Dozenten wird eine erhöhte Flexibilität abverlangt, weil Input meist situationsabhängig erforderlich wird und daher nicht komplett geplant werden kann. Lässt man sich darauf ein, ist der Lohn ein sehr spannendes und abwechslungsreiches Arbeiten mit Resultaten, die sich auf herkömmlichem Weg teilweise nur schwer oder umständlich erreichen lassen.

Literatur

Bock, W. & Bracke, M. (2013): Project Teaching and Mathematical Modelling in STEM Subjects: A Design Based Research Study. In: *CERME 8 – Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1010-1020.

Bracke, M. (2015): Computer erkennen Laubblätter – Das Produkt als Motivation. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag.

Bracke, M. & Schnieder, J. (2014): Mathematisches Modellieren im MINT-Studium - ein fächerübergreifendes Konzept zur Gestaltung von Modellierungstagen. In Roth, R. & Ames, J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.

Link, F. & Schnieder, J. (2015): Forschendes Lernen in der Hochschulmathematik In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag.

Katharina BÖCHERER-LINDER, Freiburg, Andreas EICHLER, Kassel

Vergleich konkurrierender Visualisierungen zum Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten

Hintergrund

In den 70er und 80er-Jahren erforschten Kahneman und Tversky, wie gut Menschen bedingte Wahrscheinlichkeiten schätzen können. Dabei fanden sie, dass Menschen allgemein keine gute Intuition für bedingte Wahrscheinlichkeiten haben und dass häufig ein Grund dafür ist, dass die Basisrate vernachlässigt wird (z.B. Kahneman & Tversky, 1972).

Forschungen von Gigerenzer und Hoffrage ergaben ebenfalls bei Fachleuten (z.B. Ärzte oder Juristen) eine hohe Fehlerquote. Sie konnten aber auch zeigen, dass die Ergebnisse deutlich verbessert werden können, wenn die Information nicht mit Wahrscheinlichkeiten sondern in der Form von natürlichen Häufigkeiten präsentiert wird (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Dieses Konzept zeigte auch auf Schulebene Erfolge (Wassner, 2004).

Nicht nur die Form der Information, sondern auch deren grafische Repräsentation scheint einen Einfluss auf das Verständnis von Lernenden zu bedingten Wahrscheinlichkeiten zu haben, wie etwa Sedlmeier und Gigerenzer (2001) mit dem Baum mit natürlichen Häufigkeiten und Bea (1995) mit dem Einheitsquadrat nachgewiesen haben. Ziel unserer Studie ist der Vergleich der Wirksamkeit von Baum mit natürlichen Häufigkeiten und dem Einheitsquadrat und dabei eine Spezifizierung auf das geförderte Wissen. In diesem Beitrag wird dazu eine Teilstudie zur Wirksamkeit beider grafischen Darstellungen beschrieben.

Gestaltung der Visualisierungen

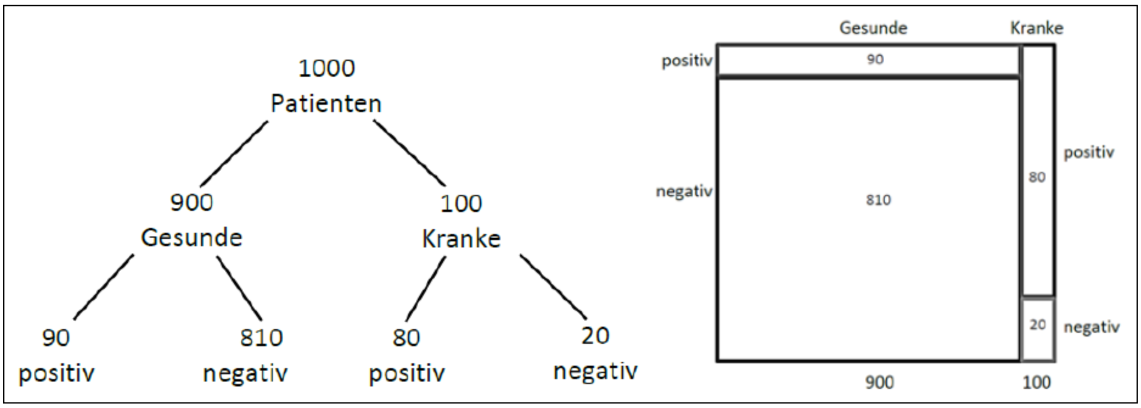


Abbildung 1: Beispiel für das Baumdiagramm und das Einheitsquadrat mit absoluten Häufigkeiten

In beiden Visualisierungen können die gleiche Information mit dem Konzept der natürlichen Häufigkeiten repräsentiert werden. Andererseits haben

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die Visualisierungen sehr unterschiedliche Eigenschaften: Das Baumdiagramm hat eine sequenzielle und hierarchische Struktur und ist den meisten Menschen vertraut. Das Einheitsquadrat hingegen ist eine statistische Graphik, da die Datenmengen durch die Größe der Flächeninhalte dargestellt sind (vgl. Eichler & Vogel, 2010). Etwa ist im Baum die Wahrscheinlichkeit für „krank“ und „positiv“ in einem Pfad repräsentiert, im Einheitsquadrat dagegen durch eine Fläche. Bezogen auf das Lernen von Stochastik ist unseres Wissens insbesondere das Baumdiagramm bekannt, während sich das Einheitsquadrat noch wenig durchgesetzt hat.

Forschungsfragen und Hypothesen

Während sich unser Forschungsprojekt insgesamt mit der Wirkung von Baumdiagramm und Einheitsquadrat auf den Wissenserwerb im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten beschäftigt, berichten wir hier von einem Teil einer Fragebogenstudie hinsichtlich der Wirkungsweise der Diagramme beim Auslesen von Information. Hierfür wählten wir die Bereiche *read the data*, *read between the data* und *read beyond the data*. Diese Kategorien stammen von Curcio (1989).

Für die ersten beiden Bereiche hatten wir die Hypothese (H1), dass beim Auslesen einzelner und zusammengesetzter Information beide Diagramme gleich gut geeignet sind. Dies begründeten wir damit, dass bei beiden Diagrammen das Konzept der natürlichen Häufigkeiten umgesetzt wurde.

Für den Bereich *read beyond the data* interessierten uns Fragen, die sich auf die Veränderung der Basisrate beziehen. Hier vermuteten wir, dass sich das Einheitsquadrat günstiger auswirkt (H2). Wir begründeten dies damit, dass man am Einheitsquadrat die Veränderung der Basisrate anschaulich darstellen kann, indem man die Veränderung der entsprechenden Flächeninhalte betrachtet.

Die Fragebogenstudie

Befragt wurden 78 Lehramtsstudenten für Mathematik an der Universität Kassel. Davon erhielten 42 den Fragebogen mit dem Baumdiagramm und 36 den Fragebogen mit dem Einheitsquadrat.

Die Fragebögen waren dabei so konzipiert, dass die Testitems identisch waren, einzig die Diagramme, die die Information präsentierten, waren verschieden. Pro Bereich gab es jeweils zwei strukturgleiche Testaufgaben mit jeweils fünf Teilfragen. Sämtliche Testaufgaben waren in der Sprache der absoluten Häufigkeiten verfasst.

Für den Bereich *read beyond the data* wurde gefragt, wie sich verschiedene Anteile, z.B. der Kranken unter den positiv Getesteten, verändern, wenn der Anteil der Kranken in der gesamten Stichprobe größer wird. Die nötige Information hierfür wurde dabei durch die Diagramme von Abbildung 1 gegeben.

Beiden Fragebögen war jeweils eine Seite mit einem einführenden Beispiel, mit dem die verwendete Visualisierung erklärt wurde, vorgeschaltet. Beide Erklärungen waren dabei bestmöglich parallelisiert.

Ergebnisse und neue Hypothesen

Für die Bereiche *read the data* und *read between the data* ergab sich kein systematischer Unterschied zwischen den Diagrammen. Das ist ein wichtiges und erwünschtes Ergebnis für alle weiteren Untersuchungen, da bei diesen nun gesichert ist, dass Unterschiede bei der Verwendung beider Visualisierungsarten nicht dadurch zustande kommen, dass das Auslesen von Daten unterschiedliche Schwierigkeitsgrade umfasst.

Für den Bereich *read beyond the data* erreichte das Einheitsquadrat summiert über alle Teilaufgaben einen leicht erhöhten Mittelwert von 6,11 von 10 Punkten gegenüber dem Baumdiagramm von 5,79. Allerdings zeigten die Daten, dass mal das Baumdiagramm deutlich überlegen war und mal das Einheitsquadrat, so dass wir in einer explorativen Phase unsere Eingangshypothese (H2) verfeinerten.

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten in Vorwärtsrichtung, z.B. p(pos|krank), vermuten wir nun, dass das Baumdiagramm überlegen ist aufgrund seiner sequenziellen und hierarchischen Struktur. Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten in Rückwärtsrichtung, z.B. p(krank|pos), halten wir das Einheitsquadrat für überlegen, da sich die Grundgesamtheit für den Rückschluss (hier alle positiv Getesteten) besser erfassen lässt. Bezüglich dieser beiden neuen Hypothesen ordneten wir die Daten neu mit folgendem Ergebnis:

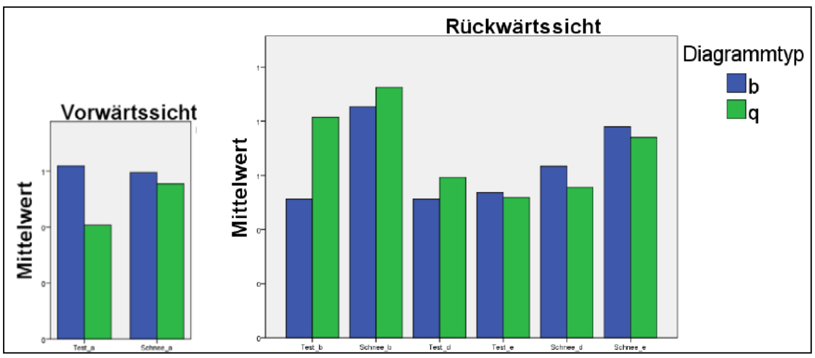


Abbildung 2: Teilergebnisse zum Bereich read beyond the data

Bei der Vorwärtssicht ergab sich für den Unterschied der summierten Items ein p-Wert von 0,096 und bei der Rückwärtssicht von 0,211. Einzelne Items, wie z.B. das erste Item der Rückwärtssicht, zeigten aber deutlich bessere p-Werte, z.B. $p_{Test\_b} = 0{,}009$.

Ausblick

Wir arbeiten an einer Weiterentwicklung des Fragebogens, um die beiden neuen Hypothesen betreffend die Vorwärts – und Rückwärtssicht zu überprüfen. Hierfür werden weitere strukturgleiche Aufgaben für den Bereich *read beyond the data* entwickelt.

Geplant ist außerdem eine Interventionsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 10 am Gymnasium. Hier soll die Wirkung der beiden Diagramme auf den Wissenserwerb untersucht werden, insbesondere die Wirkung auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen nach einer gewissen Trainingsphase.

Literatur

Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken*. Peter Lang: Frankfurt a.M.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Eichler, A. & Vogel, M. (2010). Die (Bild-)Formel von Bayes. PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 52(32), S. 25-30.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review, 102, 4*, 684-704.

Kahnemann, D. & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology* 3, S. 430-454.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130, 3*, 380-400.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen*. Hildesheim: Franzbecker.

Claudia BÖTTINGER, Jana KAULVERS, Duisburg-Essen

Mit mathematischen Mitteln ein Schloss erkunden – Möglichkeiten und Grenzen am Beispiel von Schloss Borbeck

Im Rahmen der Förderung mathematisch interessierter Grundschulkinder an der Universität besteht seit einiger Zeit das Ziel, den vielseitigen Interessen entgegen zu kommen, indem Themen mit historischem Hintergrund mathematisch aufgearbeitet werden. Die Idee, ein historisches Bauwerk und dessen Geschichte mathematisch zu erkunden, entstand durch den Kontakt zur Stiftung Jugend & Schlösser, die das Projekt „MINT auf Schlössern“ angeboten hat.

1. Hintergrundwissen zu Schloss Borbeck in Essen

Das Damenstift Essen, Vorgänger der heutigen Bistumskirche der Stadt Essen, blickt auf eine über 1000-jährige Geschichte zurück. Es beherbergte hochadelige Damen, die dort entweder bis zur Heirat ausgebildet oder auch bis zum Lebensende versorgt wurden. Das Stift gelangte zu Reichtum und Macht durch die Aufnahme von Mitgliedern der Familie Ottos I und weiterer Mitglieder der Liudolfinger. Seit Anfang des 10. Jh. ist die Zugehörigkeit von Hof „Borthbeke“ zum Stift Essen belegt, weil er abgabepflichtig war und den Zehnt einsammelte. Im 14. Jh. ließ sich die Äbtissin Elisabeth von Nassau das Münzrecht bestätigen. Im 30-jährigen Krieg wurde Haus Borbeck völlig zerstört, anschließend neu auf- und mehrmals umgebaut

2. Geschichtsdidaktische Einordnung

Arbeitet man vor Ort mit Kindern z. B. auf einem Schloss, so wird dieser zu einem außerschulischen Lernort. Da historisches Wissen nicht direkt etwa aus dem Gebäude erfahrbar ist, sondern eine Rekonstruktion darstellt (Pandel 2014), geht es um eine kontrollierte Spurensuche an historischen Orten, die durch geschichtliche Ereignisse, Prozesse oder Strukturen geprägt sind und die an Ort und Stelle rekonstruiert werden können. Geschichte ist der Zusammenhang allen menschlichen Tuns unter den Bedingungen von Zeit und Raum. Die räumliche Komponente des Geschichtslernens ist an historischen Orten weit weniger abstrakt als in der Papierform. Der historische Ort fördert und aktiviert die Vorstellungskraft der Lernenden, jedoch müssen die unsichtbaren historischen Zusammenhänge aus den fragmentarischen Relikten rekonstruiert werden (Mayer, 2014)

Bei den außerschulischen Lernorten unterscheidet man Bauwerke, Denkmäler, Archive und Museen. (Sauer 2001, S. 139). Schloss Borbeck hat demnach zwei Funktionen: Einerseits ist es ein historisches Bauwerk, ande-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

rerseits enthält es ein kleines Museum, welches Einblicke in die Lebensweise der Äbtissinnen bietet.

Bauwerke sind Quellen, die Zeugnis über vergangene Zeiten und Lebenswelten ablegen z. B. zu Macht und Herrschaft oder Alltag und Handel (Sauer 2001). Ihnen kommt eine hohe Wertschätzung zu, die auf der Annahme beruht, dass sie in vergangenen Epochen erbaut wurden. Sie können kulturelle Erinnerungen auch über Phasen kollektiven Vergessens hinweg anstoßen, beglaubigen und bewahren und genießen teilweise hohe Wertschätzung (Assmann, zit. nach Peczynsky, 2013) Aktuell gibt es keine didaktischen Konzepte, welche die Erschließung von Baudenkmäleren ermöglicht (Peczynsky, 2013).

Zur Erschließung des Bauwerks und seiner unmittelbaren Umgebung wurde daher lediglich ein mathematisches Quiz mit geschlossenen mathematischen Fragen durchgeführt, wie die Berechnung der Bauzeit, das Ermitteln von Unsymmetrien am Wirtschaftsgebäude, die Bestimmung der Zahl der Fensterscheiben, die Schätzung der Höhe des mittelalterlichen Turms usw.

Die Aufgabe von Museen ist das Sammeln, Bewahren, Erforschen und Ausstellen von Kulturgütern jeglicher Art für eine interessierte Öffentlichkeit (Peczynsky, 2013). Daher sind sie zentrale Orte historischen Lernens. Methodische Zugänge zu Museen sind Führung, Unterrichtsgespräch und die Erkundung. Eine Führung oder ein Unterrichtsgespräch entfielen für eine außerschulische Förderung im Museum. Bei einer Werkstatt geht es darum, handelnd Erfahrungen mit historischen Lebens- und Arbeitsweisen zu gewinnen. Daher wurde eine kleine Münzpresse hergestellt, mit der Münzen mit der alten Aufschrift ASNID (für Essen) geprägt werden konnten.

Bei einer Erkundung geht es darum, dass sich die Schülerinnen und Schüler selbst ein Bild von einer Ausstellung machen können und erhalten dazu Aufträge zum Suchen, Beobachten, Kombinieren, Aufzeichnen (Sauer, 2001). Erkundung meint den Vollzug von Erkenntnisgewinnung aus Spuren unvergangener Vergangenheit (originale Orte, Gebäudereste, Bodendenkmäler) Die typischen Tätigkeiten sind hier **Ausmessen, Abschreiten, Kartieren, Skizzieren, Entziffern, Errechnen, Grundrisse erlaufen, Rekonstruktionszeichnungen** herstellen etc. (Pandel 2014) – eine Stelle in der Geschichtsdidaktik, bei der auch mathematische Tätigkeiten eingeschlossen werden.

Zusammenfassend lässt sich als Ziel der zu bearbeitenden (Mathematik-) Aufgaben formulieren, dass sie historische Erkundungen ermöglichen sollen. Durch die Bearbeitung der Aufgaben sollen kleine, ausgewählte Aspekte der Geschichte von Schloss Borbeck verstanden werden. Soweit möglich sollen die Aufgaben fortsetzbar sein, Variationen und Vertiefungen ermöglichen, um den Erfordernissen mathematisch leistungsstarker Kinder entgegen zu kommen.

3. Zwei Beispiele

Arithmetische Erkundungen: Im Museum finden sich einige Münzen, die auf Borbeck geprägt wurden. Der Geldwert richtete sich nach dem Silbergewicht der Münzen. Der Silbergehalt richtete sich nach den Vielfachen eines Denars. Folgende Münzen sind aus der Zeit von Äbtissin Elisabeth von Nassau, die das Geldwesen neu geordnet hatte (Kramer, 1993) Albus, so schwer wie 2 Denare, Turnose (3 Denare), Gulden (3,5 Denare). zwei Obole wiegen so viel wie ein Denar und vier Vierlinge ebenfalls. Aufgabe für die Kinder war es, möglichst viele (am besten) alle Möglichkeiten zu finden, den Wert eines Albus mit anderen Münzen darzustellen. Aus Sicht der Arithmetik sind unterschiedliche, auch systematische Lösungen denkbar. Historisch lernt man, dass Geldsysteme auch ganz anders aufgebaut sein können, als die den Kindern bekannten Systeme. Eine Münzwaage in der Ausstellung weist darauf hin, wie Geldfälschung zu der Zeit erfolgte: Das Gewicht der Münzen wurde reduziert. Jeder Kaufmann hatte daher eine derartige Waage.

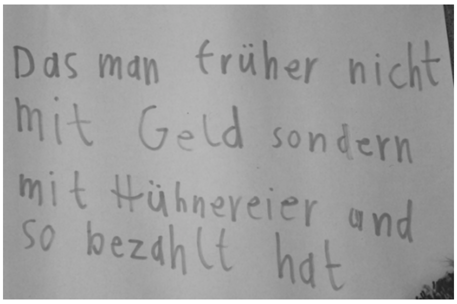
Sachrechnerische Erkundungen: Zum Hofverband Borbeck gehörten 33 Unterhöfe, von denen der Zehnt gesammelt und gelagert wurde. Eine Karte mit der Lage der Zehntscheune befindet sich im Museum. Das interessanteste, gleichzeitig schwierigste Beispiel nutzt eine erhaltene Abgabenliste aus dem im 9. Jh. (Küppers-Braun, 2003). Die folgende Abgabenliste enthält eine Auswahl aus 14 Posten: 44 Malter Malz, 600 Heringe, 20 Denare für Salm (Anm.: Süßwasserfisch), 24 Schweine im Sommer, 48 Hammel im Winter, 1 Gänseei, 1 marca als kesepennynghe, 14 Fuder Holz.

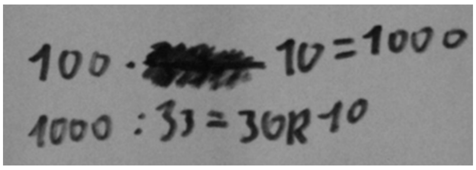
Die Abgaben erfolgten kaum in Form von Geld, welches in der Epoche noch nicht verbreitet war. Um die leibliche Versorgung der Äbtissinnen zu gewährleisten, wurden die Abgaben in Naturalien abgeführt. Die thematisierten Abgaben können als ein Vorläufer der heutigen Steuern verstanden werden. Der Zehnt entwickelte sich im Laufe der Jahre zu einer festen Abgabe, weg vom zehnten Teil – anders ist die Abgabe von 600 Heringen nicht zu erklären. Was „marca als kesepennynghe“ ist, weiß man bis heute nicht. Dies alles wurde mit den Kindern thematisiert.

Aus diesen Angaben wurde für die Kinder folgende Aufgabe entwickelt: Wenn diese Abgaben wirklich den zehnten Teil der gesamten Produktion darstellen, wie groß ist die gesamte Produktion der Höfe und was produziert ein Hof im Durchschnitt? Historisch erhält man – bei aller gegebenen Vorsicht – eine Idee von der Größe eines Unterhofs.

4. Ausblick auf Kinderlösungen

Nachdem beim ersten Besuch des Schlosses die begleitenden Studierenden ausschließlich die mathematische Lösung der Kinder in den Blick genommen hatten, wurde bei den nächsten Durchgängen noch einmal besprochen, dass die Aufgaben zur Erkundung der Geschichte von Borbeck dienen sollten. Die Ergebnisse wurden auf einem Plakat festgehalten. Die folgenden Beispiele verweisen auf ein ganz typisches Problem, das bei der mathematischen Arbeit mit historischen Themen immer wieder zu Tage tritt:





Die Kinder erlangen immer historische Sachkompetenz wie im linken Beispiel, die aber nicht auf die Bearbeitung der Aufgaben zurück zu führen ist. Die mathematische Bearbeitung ist von der historischen Deutung losgelöst.

Literatur

Kramer, H. J. (1993). Das Stift Essen – Münzen und Medaillen: Königliche und stiftische Prägungen für Essen, Serie: Quellen und Studien/Institut für kirchengeschichtliche Forschung des Bistums Essens. Münster, Aschendorff

Küppers-Braun, U. (2003). Macht in Frauenhand: 1000 Jahre Herrschaft adliger Frauen in Essen, 3. Aufl., Essen, Klartext-Verlag

Mayer, U. (2014). Außerschulische Lernorte. In U. Mayer, H-J. Pandel, G. Schneider, B. Schönemann (2014) Wörterbuch Geschichtsdidaktik, 3. Aufl. Schwalbach/Ts. Wochenschau Verlag, 27-29

Pandel (2014). Geschichte. In U. Mayer, H-J. Pandel, G. Schneider, B. Schönemann (2014) Wörterbuch Geschichtsdidaktik, 3. Aufl. Schwalbach/Ts. Wochenschau Verlag

Peczynsky, N. A. (2013). Die geschichtdidaktisch-museale Erschließung von Baudenkmälern am Beispiel des Zisterzienserinnenklosters Mariensaal in Saarn, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie durch die Philosophische Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, http://docserv.uni-duesseldorf.de/servlets/DocumentServlet?id=25977 [23.01.2015]

Sauer (2001). Geschichte unterrichten, Eine Einführung in die Didaktik und Methodik, Kallmeyer, Seelze

http://www.jugend-und-schloesser.de/crbst_5.html [22.01.2015]

Thomas BORYS, Mutfried HARTMANN, Karlsruhe, Arno BAYER, Canoas

Interkulturelles Lehrforschungsprojekt – Untersuchungen zum Mathematikunterricht in Brasilien und Deutschland im Spiegel des Umweltschutzes

Im Rahmen der Lehramtsausbildung stellen Lehrforschungsprojekte eine Möglichkeit dar, Studierende an mathematik-didaktisches Forschen heranzuführen. Eine Definition für den Begriff „Lehrforschungsprojekt“ findet man bei Weidemann: „Allgemein gesagt ist ein Lehrforschungsprojekt eine Lehrveranstaltung, in der Studierende auf Basis ihres bereits erworbenen methodologischen und theoretischen Wissens und unter Anwendung bereits erlernter (bzw. im Rahmen der Lehrveranstaltung zu erwerbender) Methoden selbständig eine Forschungsfrage bearbeiten und ein kleines Forschungsprojekt durchführen, wobei sie sich forschend nicht nur inhaltlich-thematisches Wissen erarbeiten, sondern auch Forschen lernen.“ (Weidemann, 2010). Neben einer soliden fachlichen und fachdidaktischen Grundbildung werden für die Lehramtsausbildung zudem zunehmend auch Forderungen nach Interdisziplinarität, Internationalität und Interkulturalität gestellt (vgl. Moll & Reiss 2013, Holzbrecher 2013). Derartige Forderungen umzusetzen, stellt eine große Herausforderung im Lehrbetrieb dar. Hier soll ein Versuch skizziert werden, im Rahmen eines Statistik- und Methodenseminars diesen Forderungen gerecht zu werden. Exemplarisch wird hier von der Erstellung und Auswertung von Teilen eines Fragebogens berichtet.

1. Fragestellung und Datenerhebung

Durch die Erstellung und Auswertung eines Fragebogens konnten die Studierenden Fragestellungen entwickeln, Skalenniveaus bestimmen, passende Stichproben auswählen, Daten erfassen und analysieren, passende Tests auswählen und anwenden, etc. Als eine zentrale Fragestellung wurde gewählt: „Für wie bedeutsam erachten Sie die Umweltprobleme in Brasilien und Deutschland?“ Die erste Idee der Studierenden bestand darin, dies über ein Freitextfeld abzufragen. Aufgrund der problematischen Auswertbarkeit wurde dies verworfen. Man entschied sich stattdessen folgende Umweltthemen vorzugeben und einzeln bewerten zu lassen: 1. Abfallentsorgung, 2. Abholzung, 3. Wasserverschmutzung, 4. Luftverschmutzung, 5. Bodenverschmutzung, 6. Exzessiver Wasserverbrauch, 7. Exzessiver Energieverbrauch, 8. Klimaerwärmung. Dabei orientierten man sich an einer Umfrage der UNEP (United Nations Environment Program) zu den wichtigsten zu erwartenden Umweltproblemen des 21. Jahrhunderts. Anschließend wurde

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die Skalierung thematisiert. Die erste Idee hierzu war, Schulnoten vergeben zu lassen, die allerdings ohne entsprechende Beschriftung nicht eindeutig zu interpretieren waren. Ein weiterer Vorschlag war, eine floating scale von z.B. 1-6 zu verwenden, da diese visuell intuitiv interpretierbar ist. Die Idee dadurch eine metrische Skalierung zu bekommen, wurde verworfen, da die Messwerte eine Genauigkeit vorspiegeln, die nicht vorhanden ist. Schließlich einigte man sich auf eine Skala von 1 (sehr klein), 2 (klein), 3 (mittel), 4 (groß) bis 5 (sehr groß). In einem Pre-Test wurden die Bewertungen für die beiden Länder nebeneinander erhoben. Bei einer anschließenden Diskussion mit den Befragten stellte sich heraus, dass es ihnen sehr schwer gefallen ist, die beiden Länder vergleichend zu bewerten, daher wurden für die endgültige Befragung die Bewertungsskalen für die beiden Länder übereinander angeordnet (siehe Abbildung).

Abb. 1

1. Abfallentsorgung.	**BRASILIEN**					
		1	2	3	4	5
	Deutschland					

Befragt wurden Viertsemester des Lehramtsstudiums Sekundarstufe I für das Fach Mathematik - 33 aus Deutschland und 48 aus Brasilien.

Da der Schwerpunkt in einem Lehrforschungsprojekt nicht auf den wissenschaftlichen „Ergebnissen“ als Produkt, sondern auf den Prozessen liegt, die zu diesem Produkt führen, ist es notwendig auch kleinere Fehler zuzulassen, um durch diese Erfahrungen sammeln zu können. Immerhin konnten trotz einiger methodischer Unzulänglichkeiten interessante Beobachtungen gemacht werden, die nun zumindest als Hypothesen für weitere Untersuchungen herangezogen werden können. Die interessantesten Beobachtungen ergaben sich im interkulturellen Bereich.

3. Interkulturelle „Ergebnisse“ des Lehrforschungsprojekts

Die Ausrichtung des Seminars auf ein interkulturelles Lernen sollte das Verhaftetsein in Stereotypen bewusst machen, indem eigene und fremde Vorurteile in ihrer gegenseitigen Widersprüchlichkeit aufgedeckt werden. Am deutlichsten gelang dies bei der Fragebogenerhebung zur Einschätzung der Bedeutung von Umweltproblemen in Deutschland und Brasilien.

Vergleicht man etwa die Einschätzung deutscher und brasilianischer Umweltprobleme durch deutsche Lehramtsstudierende (Abb. 2), so stellt man fest, dass sie in fast allen Bereichen die fremden Probleme als größer einstufen. Auffallend ist dabei allerdings die Abweichung in den Punkten exzessiver Energie- und Wasserverbrauch. Dies lässt sich so deuten, dass Deutschland als Industrieland mit hohen Umweltstandards wahrgenommen wird, Brasilien eher als ein Land mit unbedeutender Industrie, aber mit erheblichen Umweltproblemen. Als überraschend wurde von deutscher Seite wahrgenommen, dass die brasilianischen Lehramtsstudierenden eine völlig andere Auffassung vertreten. Sie gehen davon aus, dass in allen Bereichen die Umweltprobleme in Deutschland deutlich höher sind als Brasilien.

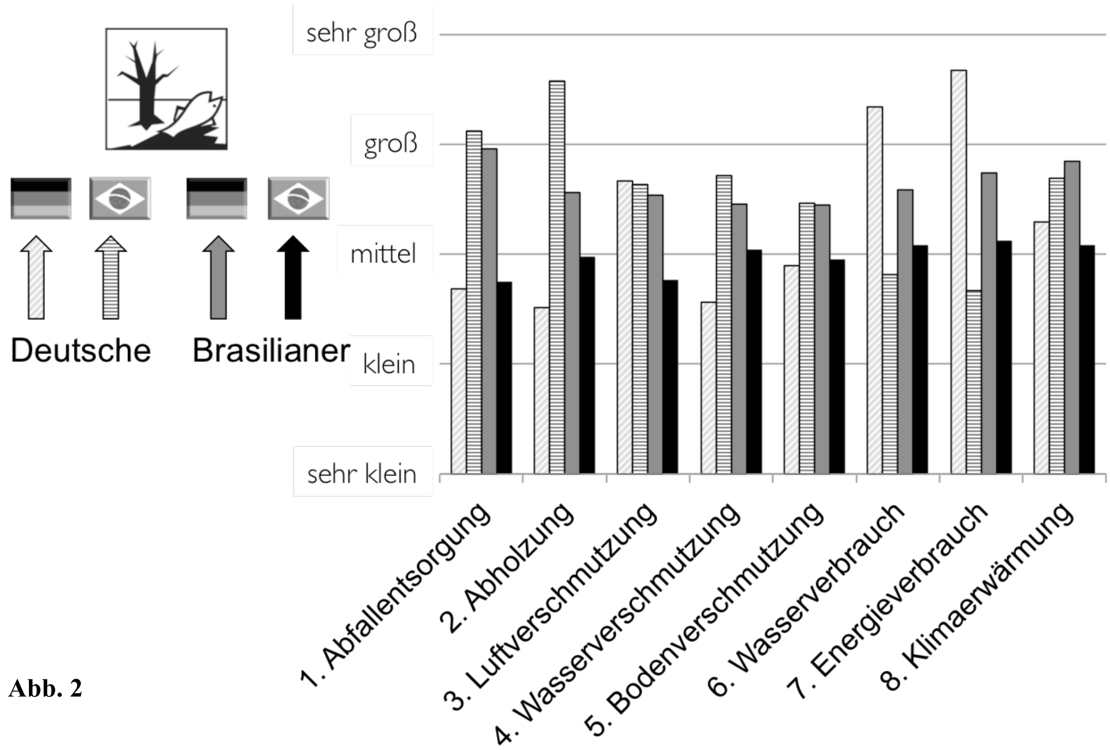


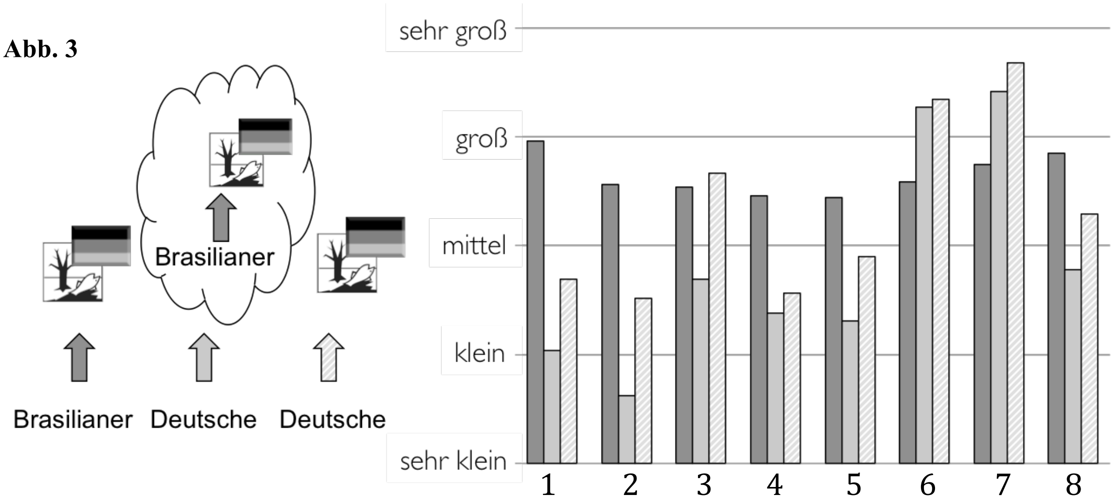
Abb. 2

Eine Untersuchung, die bisher leider nur auf deutscher Seite durchgeführt werden konnte, zielte darauf ab, das Denken der fremden Seite einzuschätzen. Dabei wurde von deutschen Studierenden erfragt, welche Antworten sie seitens der Brasilianer hinsichtlich der Größe etwa der deutschen Umweltprobleme erwarten.

Die Abbildung 3 zeigt das Ergebnis dieser Umfrage im Vergleich sowohl mit den tatsächlichen Einschätzungen der brasilianischen Lehramtstudierenden als auch mit den deutschen Einschätzungen. Offensichtlich weichen die erwarteten von den tatsächlichen Antworten der Brasilianer deutlich voneinander ab.

Als unter dem Aspekt interkulturellen Lernens besonders fruchtbar erwies es sich für die deutschen Studierenden, die von ihnen erwartete Einschätzung der Brasilianer mit ihrer eigenen zu vergleichen. Wie sich unschwer erkennen lässt, spiegelt die von den Brasilianern erwartete Einschätzung im Kurvenverlauf sehr genau die eigene wieder. Offensichtlich geht man aber davon aus, dass die Brasilianer die deutsche Umweltsituation insgesamt noch optimistischer Betrachten würden. Auch hier wieder mit der Ausnahme der Aspekte des Energie- und Wasserverbrauchs (6 und 7). Deutschland hätte also als ein Musterland wahrgenommen werden sollen. Dieselbe Umfrage bezogen auf die Einschätzung der brasilianischen Umweltprobleme zeigte ebenfalls die Projektion der eigenen Vorstellung auf die fremde. Dabei wurde allerdings davon ausgegangen, dass die Brasilianer für das Ausmaß ihrer Umweltprobleme nicht so sensibel wie die Deutschen sind.

Abb. 3



4. Fazit

Das interkulturelle Lehrprojekt, erwies sich zwar nicht als geeignet, um selbst valide Forschungsergebnisse zu erzeugen, interessante Hypothesen im interkulturellen Bereich konnte es allerdings generieren. Ebenfalls erwies es sich gut geeignet als Feld zur Einführung in Aspekte der Datenerhebung und Datenauswertung. Insbesondere war eine Sensibilisierung für methodische Herausforderungen zu beobachten. Eine Beforschung der Wirksamkeit steht allerdings noch aus.

Literatur

Holzbrecher, A. (2013): Interkulturalität als didaktisches Prinzip. In A. Holzbrecher (Hrsg.), Interkulturelle Schule: Eine Entwicklungsaufgabe (S. 166-184). Schwalbach: Debus.

Moll, G. & Reiss, K. (2013): Zwischen den Fächern: Interdisziplinäres Arbeiten im Mathematikunterricht der Grundschule. In Steinweg, A. S. (Hrsg.), Mathematik vernetzt (S. 33-48). Bamberg: Univ. of Bamberg Press.

Weidemann, A. (2010): Lehrforschung und Lehrforschungsprojekte. In A. Weidemann et. al. (Hrsg.), Wie lehrt man interkulturelle Kompetenz? (S. 489-524). Bielefeld: transcript Verlag.

Thomas BORYS, Fabian MUNDT, Karlsruhe

app@school – App-Entwicklung im Unterricht, aber wie?

Ende 2014 hat eine repräsentative Studie der BITKOM (2014) nochmals bestätigt, was die aktuelle JIM Studie (2014) bereits verdeutlicht hat. Die heutigen Kinder und Jugendlichen sind durch und durch vernetzt und digitalisiert. Der häufig bemühte Begriff der *Digital Natives* scheint in der Tat die treffende Bezeichnung für Heranwachsende zu sein, die im Alter zwischen 10 und 11 Jahren bereits zu 94% das Internet nutzen (vgl. BITKOM 2014: 12) und mit 12 Jahren zu über 90% ein Smartphone besitzen (vgl. JIM 2014: 106). Dabei verwundert es kaum, dass diese „smarte" Generation bevorzugt über mobilen Endgeräten auf das Internet zugreift (vgl. BITKOM 2014: 14).

Allerdings führt die Rede von „digitalen Ureinwohnern" auch in die Irre. Diese sind – hier sind sich beide Studien einig – keineswegs mit „ihrer" Umgebung dermaßen vertraut, dass sie deren Funktionsweisen verstünden oder sich gar problemlos in ihr zurechtfänden. Im Gegenteil, die virtuellen Welten werden mystifiziert und allenfalls bruchstückhaft verstanden. Regelmäßig provoziert die „Überfülle" des Cyberspace ein Gefühl der Hilflosigkeit.

Diese aktuelle Problemlage nimmt nicht zuletzt schulische Arrangements in die Pflicht die Herausforderungen der „digitalen Welt" zu bearbeiten. Gefordert sind Konzepte, die den Schleier der vernetzten Welt zumindest in Teilen lüften und die dahinterliegenden Mechanismen transparent machen.

Ausgehend von diesen Ansprüchen haben die Autoren app@school konzipiert, mit einer 9. Werkrealschulklasse erprobt und evaluiert. Durch die Entwicklung der *mobile app* „Colourize"[1] im Rahmen eines fächerübergreifenden Seminars zu den Science Days in Rust an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe konnten die dafür nötigen Vorerfahrungen mit Studierenden gesammelt werden.

1. Didaktische Konzeption

Der Kerngedanke von app@school besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler „die Seite wechseln" und selbst eine Anwendung konzipieren, entwickeln und veröffentlichen. Mit Blick auf die Verbreitung und alltägliche Nutzung mobiler Endgeräte (BITKOM 2014; JIM 2014) haben wir festgelegt, dass es sich dabei um eine Spiele-App für Smartphones und Tablets handeln soll.

[1] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.inventionate.colourize [20.02.2015]

Als Lehr-Lern-Szenario greift app@school einerseits den pädagogischen Projektgedanken auf (vgl. Frey 2012), zielt also auf prozessuales Lernen ab, und orientiert sich andererseits an den Abläufen agiler Softwareentwicklung und den damit verbundenen Arbeitsstrukturen (vgl. Kerres 2013). In Anlehnung an das zur Zeit viel diskutierte „Game-Based Learning“ (Felicia 2014) könnte man von „Game-Development-Based Learning“ sprechen. Insgesamt gliedert sich das didaktische Design von app@school in vier Schritte:

(1) Zunächst erfolgt einen kollektive Themenfindung („Welche App soll entwickelt werden?“). Danach werden, in Anlehnung an die bereits angesprochenen Arbeitsstrukturen, funktional differenzierte Expertengruppen gebildet: Programmierer, Grafiker, Musiker, Level Designer, PR-Manager und Projektmanager (siehe Abbildung 1). Die Wahl der Schülerinnen und Schüler für eine Gruppe erfolgt auf Grundlage von Arbeitsprofilen, die zur Verfügung gestellt werden.

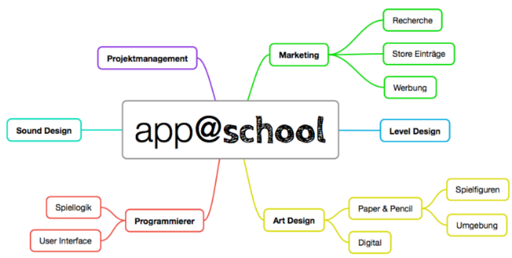


Abb. 1: Funktional differenzierte Arbeitsfelder

(2) Von diesem Zeitpunkt ab, arbeiten die Gruppen eigenaktiv an den jeweils anfallenden Arbeitsaufgaben. Die verwendeten Tools variieren je nach Expertengruppe. Beispielsweise verwenden Programmierer und Level Designer „klassische“ Personal Computer um die App mithilfe der Entwicklungsumgebung Stencyl[2] zu entwickeln, wohingegen die Grafiker zunächst mit Stift und Papier auskommen und erst später zu digitalen Medien greifen werden.

(3) Der gesamte Projektzeitraum ist in Anlehnung an das in der agilen Softwareentwicklung verbreitete *Test Driven Development* Paradigma mit Testphasen durchsetzt, in denen die erzielten Fortschritte direkt auf *mobile devices* erprobt werden. Diese Tests sind sehr wichtig, um das Zusammenspiel der einzelnen Teile sichtbar zu machen und ggf. auftretende Probleme

[2] http://www.stencyl.com [20.02.2015]

schnell zu erkennen und zeitnah bearbeiten zu können. Kurz vor der Veröffentlichung der App erfolgt eine explizite Testphase („Betatests"), in der die App von der gesamten Gruppe erprobt wird.

(4) Am Ende des Projekts, das je nach Komplexität der App 10 bis 20 Stunden beansprucht, steht die Veröffentlichung in die bekannten App Stores (Apple, Google).

Zur Rolle der Lehrpersonen: Während des gesamten Projekts agieren diese hauptsächlich moderierend und beratend. Die Unterstützungsintensität unterscheidet sich je nach Arbeitsgruppe und Vorkenntnissen der Lernenden.

2. Praktische Durchführung

app@school wurde von Februar bis März 2014 an einer Werkrealschule in Baden-Württemberg erprobt. Die Klasse bestand aus sieben Mädchen und sieben Jungen. Aus der Eingangserhebung war bekannt, dass keinerlei Programmiervorkenntnisse vorlagen. Alle Schülerinnen und Schüler besaßen ein Smartphone. Insgesamt standen sechs Doppelstunden („Förderstunden") für das Projekt zur Verfügung. Neben der Klassenlehrerin waren stets zwei Personen von der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe vor Ort. Im Großen und Ganzen konnte das Projekt wie geplant durchgeführt werden. Die einzelnen Arbeitsgruppen bildeten sich ohne Probleme, auch wenn manche nicht zustande kamen (Musiker). Die Idee die Veröffentlichung der App als Ziel auszugeben erwies sich als sehr motivierend und trug oft zur Konfliktlösung bei. Schließlich wollten alle das ausgegeben Ziel in der zur Verfügung stehenden Zeit erreichen und eine eigene App publizieren. Sozialen Spannungen, die von der Namensfindung bis zum Storydesign reichten, konnten stets konstruktiv gelöst werden.

Neben der Zielvorgabe war die Strukturierung der Arbeitsstunden von großer Bedeutung. Zu Anfang jeder Stunde wurde an der Tafel eine „Tasks"-Tabelle von den Lehrpersonen angelegt, die den aktuellen Arbeitsstand der jeweiligen Gruppen protokollierte und die je weiteren Schritte markierte. Diese Übersicht nutzen die Projektmanagerinnen um die einzelnen Gruppen aufeinander abzustimmen.

Nach der anberaumten Zeit konnte tatsächlich ein Spiel erfolgreich publiziert werden: *Gustis Discovery* (Abb. 2).[3]

Abb. 2: Das fertige Spiel „Gustis Discovery"

[3]https://play.google.com/store/apps/details?id=com.klass9a.gustisdiscovery [20.02.2015]

3. Ergebnisse und Erkenntnisse

Die Durchführung des Projekts wurde mit einer evaluativ angelegten Fragebogenerhebung gerahmt. In der ersten Erhebung vor Beginn der eigentlichen Projektarbeit wurden die Vorkenntnisse und das allgemeine Medienverhalten der Schülerinnen und Schüler erfragt. Nach der Publikation der App folgte die Schlusserhebung, die allgemein die Beurteilung des Projekts und die gemachten Lernerfahrungen erhoben hat.

Neben den bereits angeführten Einsichten in die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler ermöglichte die Befragung einen differenzierteren Blick auf das Medienverhalten zu werfen. Die Klasse entsprach dabei dem durch die einschlägigen Studien gezeichneten Bild, auch wenn einige Schüler eine besondere Affinität zu grafischen Gestaltungen angaben. Unter diesen Voraussetzungen kann der erfolgreiche Abschluss des Projekts nicht stark genug betont werden. Trotz der allenfalls marginalen Vorerfahrungen gelang es der Gruppe ein voll funktionsfähiges Spiel zu entwickeln und zu publizieren. Folgerichtig überrascht es nicht, dass alle Schülerinnen und Schüler rückblickend das Projekt äußerst positiv bewerten. Fast alle gaben an sehr zufrieden mit Ihrem Arbeitsbeitrag zu sein und viel über die Entwicklung von Anwendungen und die Funktionsweisen mobiler Apps gelernt zu haben. Einzig den hohen Zeitdruck empfanden viele als belastend. In einem Punkt waren sich aber alle einig: Sie würden sofort wieder eine eigene App entwickeln! Kann man sich ein besseres Feedback wünschen?

Literatur

BITKOM (2014): *Jung und vernetzt*. Berlin. Verfügbar unter http://www.bitkom.org/files/documents/BITKOM_Studie_Jung_und_vernetzt_2014.pdf [20.02.2015]

Felicia, P. (Hrsg.) (2014): *Game-Based Learing. Challenges and Opportunities*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing.

Frey, K. (2012): *Die Projektmethode. „Der Weg zum bildenden Tun“*. 12., neu ausgestattete Auflage. Weinheim/Basel: Beltz.

JIM (2014): *JIM 2014. Jugend, Information, (Multi-) Media.* Stuttgart. Verfügbar unter http://www.mpfs.de/fileadmin/JIM-pdf14/JIM-Studie_2014.pdf [20.02.2015]

Kerres, M. (2013): *Mediendidaktik. Konzeption und Entwicklung mediengestützter Lernangebote*. 4., überarbeitete und aktualisierte Auflage. München: Oldenbourg.

Martin BRACKE, Kaiserslautern

Computer erkennen Laubblätter – Das Produkt als Motivation

Die Aufgabe, Laubbäume anhand ihrer Blätter zu erkennen, scheint auf den ersten Blick keine große Herausforderung zu sein: Die meisten Grundschüler können ohne große Probleme lernen, einheimische Bäume bei Betrachten ihrer Blätter sicher zu unterscheiden. Warum soll das für einen Computer schwierig sein?

Die Problemstellung – wirklich spannend?

Die hier betrachtete Fragestellung ist hinsichtlich des mathematischen Gehalts sehr ähnlich zur Aufgabe, Schildkröten anhand von Fotos ihres Panzers zu erkennen (vgl. Schäfer 2014). Dort besitzt allerdings die dahinter stehende Thematik *Artenschutz* einen offensichtlich hohen Motivationscharakter: Tiere sollen nicht mehr durch das Implantieren von passiven Sensoren gekennzeichnet, sondern nur anhand von Bilddaten identifiziert werden. Neben dem finanziellen Nutzen ist der ethisch-moralische Aspekt direkt erkennbar und führt bei der Bearbeitung mit Schülern zu anhaltender Motivation.

Was ist für Schüler an der Aufgabe spannend, Blätter automatisch zu erkennen und dies sogar mit Hilfe von Mathematik zu tun? Zumindest der zweite Teil der Frage scheint problematisch – und wurde daher in bisherigen Projekten (vgl. Hansel 2014) zu Beginn überhaupt nicht gestellt! Ausgangspunkt waren jeweils reale Blätter bzw. Fotos von Blättern und es wird dringend empfohlen, das Projekt in der Zeit von April bis Oktober durchzuführen – auch wenn es problemlos mit Fotos aus der Konserve realisierbar ist: Die Möglichkeit, selbst nahezu unbegrenzt *eigenes Material* sammeln und bearbeiten zu können, ist in diesem Fall einer der Schlüssel zu andauernder Motivation. Dabei ist die Auswahl der betrachteten Bäume (und ihrer Blätter, in Variation und Anzahl) ein wichtiger Faktor, der die Schwierigkeit des Problems, die Wahl geeigneter Methoden und Werkzeuge sowie die Art und Qualität des Validierungsprozesses beeinflusst. Es ist unserer Erfahrung nach sehr wichtig, diesen Auswahlprozess den Schülern zu überlassen und nur wenig – am besten überhaupt nicht – steuernd einzugreifen.

Ein zweiter sehr reizvoller Aspekt liegt für Schüler in der Tatsache, dass für uns Menschen die Aufgabe des Erkennens von Blättern mit ein wenig Übung sehr einfach zu sein scheint, aber der dahinter stehende Prozess kaum greifbar ist: Wie gelingt es uns und welche (unbewussten) Schritte stehen dahinter? Wie kann ich die verwendeten Strategien so formulieren

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

und automatisieren, dass jemand sie ohne ein spezielles Training erfolgreich anwenden kann? Und falls das gelingt: Wie bringe ich einen Computer dazu, den kompletten Erkennungsprozess automatisiert zu durchlaufen? Sehr spannend kann an dieser Stelle übrigens ein Abstecher in die Biologie sein, wo die Klassifizierung als Methodik etabliert ist. Obwohl es möglich ist, mittels Mustererkennung durch *neuronale Netze* das Vorgehen aus der Biologie in Softwarelösungen umzusetzen, sind hier gewisse Grenzen gesetzt. Wenn die Zeit vorhanden ist, können diese Grenzen bzw. Nachteile von den Schülern selbst erkundet und Unterschiede zu einer eher mathematisch orientierten Vorgehensweise herausgearbeitet werden.

In diesem Projekt ist die Umsetzung mit dem Computer ab einem bestimmten Alter und Wissensstand zwar sehr motivierend, allerdings keinesfalls erforderlich: Bereits mit Grundschülern kann man ein in sich abgeschlossenes kleines Projekt umsetzen, welches komplett ohne Verwendung von Computern auskommt! Hier ist der selbst entwickelte Steckbrief für ein individuelles Blatt als Produkt für die Lernenden ein Garant für langandauernde Motivation. Für die älteren und an der Arbeit mit Computern interessierten Schüler ist es ein riesiges Erfolgserlebnis, wenn nach den praktisch garantierten zwischenzeitlichen Misserfolgen am Ende die selbst entwickelte Software – oder gar eine App auf dem Handy – eines oder mehrere frisch gesammelte Blätter richtig benennt. Und dabei ist es nicht entscheidend, ob der Software alle einheimischen Laubbäume oder nur einige wenige Arten bekannt sind!

Ein Blick hinter die Blätter – Mathematisches Potential des Projekts

Nachdem wir uns ausführlich mit der sehr wichtigen Frage einer anhaltenden Motivation beschäftigt haben, soll nun das hinter der Fragestellung stehende mathematische Potential skizziert werden. Exemplarische Umsetzungen für die Klassenstufen 5 und 10 findet man in Hansel (2014). Im Folgenden sind wichtige mathematische Stichworte und Werkzeuge aufgeführt und dabei thematisch gruppiert. Der Abgleich mit Lehrplaninhalten und die konkrete Umsetzung sind nach bisherigen Erfahrungen recht flexibel möglich, zumal über *Wiederholung* bzw. *Forschendes Lernen* in gewissem Umfang auch das Einbeziehen von Inhalten außerhalb des aktuellen Lernstoffs möglich ist.

Definition und Ermittlung verschiedener Features: Es müssen Merkmale wie etwa Länge, Breite (evtl. an mehreren Stellen), Umfang, Fläche, Aussehen des Randes (wie beschreibt man das mathematisch?) festgelegt werden. Dazu gehört neben der exakten Definition (wo messe ich die Breite?) auch die Messmethode zur Ermittlung konkreter Werte. Bei der Arbeit mit Fotos kommt das Umgehen und Rechnen mit Maßstäben hinzu.

Wahl eines Koordinatensystems: Da ein Blatt im Foto ganz unterschiedlich orientiert sein kann, ist eine wichtige Erkenntnis die Möglichkeit (und Notwendigkeit!) zur *Wahl* eines Koordinatensystems! Wichtig ist hier zunächst die Festlegung und Reproduzierbarkeit der Orientierung sowie für den späteren Vergleich eine geeignete Skalierung.

Vergleich anhand selbst gewählter Features: Quantitative Werte für verschiedene selbst gewählte Features können einzeln oder als Satz (in welcher Norm?) miteinander verglichen werden – abstrakt betrachtet wird jedes Blatt zu einem Punkt im n-dimensionalen Raum. In der einfachsten Variante vergleicht man absolute Werte, um individuelle Blätter zu identifizieren. Um den Maßstab bei Fotos bzw. das Wachstum zu berücksichtigen, sollte man sich eine Möglichkeit zur Normierung überlegen (z.B. durch Bilden von Verhältnissen). Daten eines *Referenzblattes* können mit Hilfe statistischer Methoden bestimmt werden; diese können auch Aufschluss darüber geben, welche Features überhaupt für eine Identifizierung sinnvoll sind. Weitergehend ist die Betrachtung der Robustheit von Messungen sowie der Ergebnisse hinsichtlich der Variation der Daten.

Mathematische Bildverarbeitung: In der einfachsten Variante wird mit Fotos von Blättern gearbeitet, in denen man Messungen durchführt. Das Finden des Blattes im Bild, die Festlegung der Orientierung sowie Bestimmung des Randes können im ersten Schritt manuell vorgenommen werden. Beliebig kompliziert wird es, wenn Aufnahmen von Blättern in natürlicher Umgebung oder beschädigte Blätter automatisch verarbeitet werden sollen. Wenn das Blatt als s/w-Bild vorliegt (kann relativ einfach mit einer Bildbearbeitungssoftware erstellt werden), können Umfang und Fläche eines Blattes auf Basis von Pixelkoordinaten bestimmt werden. Genauer wird es nach Wahl eines Koordinatensystems, automatischer Ermittlung des Blattrandes in Form von Stützstellen (optional mit anschließender Interpolation) und numerischer Berechnung von Umfang und Fläche aus Funktionsdaten.

Steckbriefe und Apps – Umsetzungsmöglichkeiten

Die Fragestellung wurde bereits auf mehreren verschiedenen Ausbildungsniveaus und mit jeweils unterschiedlicher Dauer bearbeitet. Diese sind in der folgenden Tabelle in Kurzform dargestellt und können als Anregung für eigene Umsetzungen des Lesers genutzt werden. Es sind auch kürzere Durchführungen im Bereich von 4 Unterrichtsstunden denkbar, auf der anderen Seite kann die Fragestellung im Projektunterricht nahezu beliebig ausgeweitet werden (vgl. Bock & Bracke 2014).

Lerngruppe, Rahmen	Stichpunkte zur mathematischen Umsetzung
JGS 5, Mathematikunterricht (6 Stunden)	Messen (Länge, Breite, Umfang), Maßstab, Messfehler, Vergleich von Features, *Steckbrief für Blätter*
JGS 10, Mathematikunterricht (8 Stunden)	Messen (s.o.), Messfehler, Vergleich von Features (und Verhältniswerten), Wahl des Koordinatensystems, Rolle der Datenbasis, Entwicklung und Test von Algorithmen
JGS 11/12, Mathem. Modellierungswoche	Autom. Ermitteln des Blattrandes als Fkt. (Polarkoordinaten), Erkennung mittels Fourieranalyse/-koeffizienten
Studierende Mathematik, Proseminar	Math. Bildverarbeitung: Automatisches Bestimmen der Features (Länge, Breite, Umfang, Fläche), (autom.) Wahl des Koordinatensystems, Vergleich von Features (sowie von verschiedenen Verhältnissen), Normen und Robustheit, Umsetzung in MATLAB und als Android-App

Denjenigen Lesern des Beitrags, die bis zu dieser Stelle noch unsicher sind, ob sie das Projekt tatsächlich mit eigenen Lerngruppen umsetzen möchten und können, sei zum Schluss das Folgende nahegelegt: Sehen Sie sich beim nächsten Spaziergang in der Natur einmal Blätter verschiedener Laubbäume genauer an, probieren Sie sie zu erkennen (auch später zu Hause auf dem Schreibtisch, im wahrsten Sinne des Wortes losgelöst von den zugehörigen Bäumen!) und machen Sie sich dabei auftretende Schwierigkeiten und Fragen bewusst. Wenn Sie computeraffin sind, probieren Sie vielleicht selbst einmal, erste Schritte in Richtung Automatisierung des Erkennungsprozesses zu unternehmen. Ich bin mir sicher, dass Sie anschließend Motivation und Material zur Umsetzung mit Ihren Schülern oder Studierenden haben und wünsche Ihnen viel Freude dabei!

Literatur

Bock, W. & Bracke, M. (2014): MINT-Projektunterricht in der Sekundarstufe I: Konzepte und Herausforderungen. In Roth, R. & Ames, J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.

Hansel,V. (2014): Erstellung eines mathematischen Modells zur Klassifizierung der Blätter von Laubbäumen. Masterarbeit am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern. Kaiserslautern.

Schäfer, S. (2014): Reisepass für Schildkröten – Mathematische Merkmalsanalyse mit MATLAB und beispielhafte Anwendung in der Unterstufe. Masterarbeit am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern. Kaiserslautern.

Eileen Angélique BRAUN, Münster

Bearbeitung einer offenen, realitätsnahen Aufgabe – Interviewanalyse im Rahmen einer Konzeption eines Lernangebots

Zusammenfassung

Innerhalb des ZooMa-Projekts bearbeiten Viertklässlerinnen in Partnerinterviews u. a. eine offene, realitätsnahe Aufgabe zum Pinguin. Die zur Bearbeitung relevanten Daten stehen nicht in der Aufgabenstellung und müssen somit von den Lernenden z. B. über ein per Lernangebotskonzeptionierung erstelltes Sachbuch zum Pinguin recherchiert werden. Die transkribierten Interviews wurden zum einen nach einer modifizierten Analyse metakognitiver und diskursiver Anteile nach Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) und zum anderen nach einem eigenen Bewertungssystem analysiert. Die Lernenden bearbeiten die *unter*bestimmte Aufgabe überwiegend zielorientiert und nutzen das Sachbuch vorrangig zur Recherche. Die schriftlichen Lösungen erhielten mit Ausnahme von Dreien über 60 % der Punkte.

Einleitung

Um u. a. eine willkürliche Kombination von in Aufgabenstellungen vorhandenen Zahlen zu vermeiden, wurden in der Untersuchungsaufgabenstellung keine für die erfolgreiche Bearbeitung notwendigen Daten angegeben (s. u.). Das Sachbuch enthält gleichwohl mehr Daten als erforderlich. Die Sachbücher stellen die Tiere fachgerecht dar, wodurch die dritte Funktion (Sachrechnen als Lernziel) nach Winter (1992) vertreten wird. Beispielsweise wird im Sachbuch zum Pinguin thematisiert, dass der Kaiserpinguin am Südpol brütet. „The male is exposed to the worst weather conditions: winds up to 108 miles per hour (180 km/h) and temperatures as low as -79.6° F (-62° C).” (Remy, 1999, S. 39)

> Während es draußen immer kälter wird, bleibt es im Nest warm. Wie groß kann der Temperaturunterschied zwischen den Temperaturen im Nest eines Pinguins und den winterlichen Temperaturen am Südpol sein? Schreibe auf, wie du vorgehst!

Die Aufgabe wird innerhalb einer sogenannten Lernumgebung präsentiert, in welcher Schülerinnen Aufgaben eines gewissen Typs vorfinden. Bei diesem Lernangebot handelt es sich um Aufgaben, welche zunächst nicht die relevanten Daten enthalten, aber dann mit dem Sachbuch überbestimmt werden. Die Aufgaben mit den Hilfestellungen und den Sachbüchern stellen zusammen eine komplexe Lernumgebung dar. Die einheitliche Struktur, welche komplexe Lernumgebungen auszeichnet (vgl. Stein, 2014, S. 103), bietet einen hohen Wiedererkennungswert. Dieser wiederrum ist

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

einer erfolgreichen Bearbeitung auf Seiten der Lernenden förderlich. Die Aufgabe zum Pinguin birgt insofern noch eine weitere Schwierigkeit, als dass damit ein mathematisches Thema behandelt wird, welches in der Grundschule noch nicht Unterrichtsinhalt war. Die Bearbeitung wird als herausfordernd eingestuft. Neben der unterbestimmten Ausgangssituation ist auch kein Lösungsalgorithmus erkennbar. Es muss die Differenz einer negativen und einer positiven Zahl bestimmt werden. Metakognitive Fähigkeiten werden von den Viertklässlerinnen verlangt: Sie müssen sich die beschriebene Situation vorstellen, bearbeiten und angemessen darstellen können. Diese Prozesse sollten im Zuge einer erfolgreichen Bearbeitung ineinander übergehen und durch Selbstbeobachtung gesteuert werden. Aufgrund der verlangten Aktivitäten wurde die Analyse metakognitiver und diskursiver Anteile nach Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) als Auswertungsmethode der Transkripte gewählt. Um den überbestimmten und problemhaltigen Charakter der Aufgabe in der Auswertung mit einzubeziehen, wurde das Manual diesbezüglich modifiziert. Im ZooMa-Projekt wird innerhalb der Konzeptionierung eines Lernangebots das Ziel verfolgt, Lernende an die selbstständige Modellierung offener, realitätsnaher Aufgaben heranzuführen. Zwei Fragen lauten:

1. Wie bearbeiten Viertklässlerinnen die offene, realitätsnahe Aufgabe zum Pinguin, und welche Rolle spielt dabei das Sachbuch?
2. Wie erfolgreich stellen sie ihre Lösungen schriftlich dar?

Methodologie

Die metakognitive Diskursanalyse ermöglicht es, mehrere Interviewsituationen miteinander zu vergleichen und diese zu typisieren (vgl. Cohors-Fresenborg, Kaune, 2007, S. 246). Die Autoren machen darauf aufmerksam, dass metakognitive Aktivitäten Argumentations- und Modellierungskompetenzen fördern (Kaune et. al. 2010, S. 484) und somit dem eigenen Untersuchungsinteresse entsprechen. Außerdem wurden die erbrachten verschriftlichten Gedankengänge mit einem eigens erstellten aufgabengebundenen Bewertungssystem beurteilt. Die an bereits bestehenden Modellierungsphasen gebundenen Kategorien wurden induktiv nach Mayring (2010) zur Analyse des gesamten Bearbeitungsprozesses entwickelt. Das Modellieren wird nicht als ein fest zu durchlaufender Kreislauf verstanden, vielmehr lösen die Lernenden die Aufgaben auf ihren eigenen Wegen, wie es z. B. Borromeo-Ferri (2011, S. 113) in ihrer Untersuchungen feststellte.

Ergebnisse

Die 16 Partnerinterviews wurden während des Unterrichts an zwei Terminen im Jahr 2014 an einer ländlich gelegenen Schule und einer Schule im Ruhrgebiet durchgeführt. Die Schülertandems benötigten zwischen sieben und 13 Minuten für die Bearbeitung. Die beiden Schüler aus dem Interviewausschnitt sind zuvor durch Herumblättern auf die Seite zum Pinguinjungen gestoßen. Dort finden sie die Nesttemperatur. Sie verstehen, dass es draußen Minusgrade sind und kommen zu einer richtigen Lösung.

Dana blättert auf Seite 3 / 4. #00:05:51-0# P2aBJ~

Dana: #00:05:51-3# Da! #00:05:52-0# R2aB~

Marius: #00:05:52-4# Ah, da im Nest. #00:05:53-7# D2d~

Marius zeigt auf das Bild (Pinguin im Nest). #00:05:53-2# R2aB~

Dana: #00:05:53-8# So #00:05:54-1# D4a~

Marius liest: #00:05:55-3# Ende Mai treffen sich weibliche Pinguine zusammen (..) bilden eine KoolonIE. Sie legen fast zeit (.) gleich ein Ei. Die männlichen Pinguine brüten das Ei aus. Sie hungern beim Brüten. Im Nest ist es 30 Grad Celsius warm. #00:06:10-7# P2aBJ~

Marius: #00:06:14-0# Also (.) Da war es 25 Celsius KALT. #00:06:17-8# D2b~

Marius zeigt auf die Seite mit minus 25°C auf Seite 4. #00:06:14-9# R2aB~

Dana: #00:06:18-2# MINUS (.) und da war es plus. #00:06:20-6# D2c~ R1a-~

Dana zeigt auf die Nesttemperatur auf Seite 3. #00:06:19-8# R2aB~

Marius: #00:06:20-5# Also (.) 30 (.) 55 Unterschied. #00:06:24-4# R6a~

Abbildung: Ausschnitt des analysierten 2. Interviews

Im Rahmen der Interviews erkannten und notierten fast alle Schülerpaare die relevanten Daten. Jedoch notieren sie mitunter auch irrelevante Daten. Der Übergang zu einem mathematischen Modell gelang 13 Paaren. Sieben von ihnen berechneten die Differenz richtig. Die Dokumentation der recherchierten Daten und die Bearbeitung der Aufgabe wurde nur von acht Paaren gewissenhaft festgehalten.

Fazit

Die Lernumgebung des ZooMa-Projekts bietet auf Grundlage von offenen, realitätsnahen Aufgaben für Lernende kognitive Anreize. Bereits Braun (2013) zeigte, dass Viertklässlerinnen in Einzelarbeit zwar Schwierigkeiten haben, die aufgabenrelevanten Daten zu extrahieren, jedoch mitunter vollständig recherchierte, korrekt bearbeitete und dargestellte Lösungen erstellen (S. 191). Durch die Analyse der Interviews wurde deutlich, dass richtig bearbeitete Lösungen in einem planvollen, aber auch durch Reflektion und Diskursivität geprägten Prozess entstehen. Die Planungsphase setzt sich weitestgehend aus dem Lesen und Verstehen der Aufgabenstellung sowie dem Recherchieren der Daten zusammen. Die Kinder lesen oft viele Seiten des Sachbuches durch und nutzen das Inhaltsverzeichnis nur wenig. Es lässt sich schlussfolgern, dass Viertklässlerinnen ohne Lehrerunterstützung fähig sind, *unter*bestimmte problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei metakognitiv zu handeln. In Partnerarbeit gehen sie strukturiert vor. Sie recherchieren oft erfolgreich die relevanten Daten und lösen zumeist das mathematische Problem. Das Sachbuch wird von 14 der 16 Interviewpaaren genutzt. Die schriftlichen Lösungen zeigen die Schwierigkeiten auf, welche Lernende mit der Aufgabe haben. Allerdings erhielten fünf Lösungen über 80 % der Punkte. Zwei von ihnen hatten ein falsches Ergebnis.

Literatur

Borromeo-Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des Mathematischen Modellierens*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Braun, E. (2013). Lösung realitätsnaher Aufgaben – eine Voruntersuchung zum Lösungsverhalten von ViertklässlerInnen bei der Bearbeitung einer realitätsnahen Fermi-Aufgabe. In Greefrath, G., Käpnick, Fr., & Stein, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (188–191). Münster: WTM.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In Peter-Koop, A. & Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *mathematische bildung - mathematische leistung* (233–248). Hildesheim: Franzbecker.

Kaune, C., Cohors-Fresenborg, E. & Kramer, S. (2010). *Aufgaben zur Förderung metakognitiver Kompetenzen* (S. 481–484). Münster: WTM.

Mayring, Ph. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Weinheim; Basel: Beltz.

Remy, M. (1999). *Penguins: A Worldwide Guide*. New York: Sterling Publishing Company.

Stein. M. (2014). Mathematische Lernräume als Lernumgebungen von Problemklassen. In Heinrich, F. & Juskowiak, S. (Hrsg.): *Mathematisches Problemlösen lernen. Vorträge auf dem gleichnamigen Symposium am 27. & 28. September 2013 an der Technischen Universität Braunschweig* (S. 95–110). Münster: WTM.

Winter, H. (1992). *Sachrechnen in der Grundschule*. 2. Aufl. Frankfurt a. M.: Cornelsen Scriptor.

Bernhard BROCKMANN, Augsburg

50 Jahre Programmierter Unterricht – Ein Zeitgenosse schürft im Archiv

Mit dem Vortrag soll ein Versprechen eingelöst werden, aus den grundlegenden Arbeiten der *Zentralstelle für Programmierten Unterricht und Computer im Unterricht* ein weiteres Kapitel zu erschließen und aus heutiger Sicht zu kommentieren oder zu bewerten.

Buchprogramme für Mathematik

Nach ersten Versuchen mit Buchprogrammen am Gymnasium bei St. Anna Augsburg erhält die Schule im Winter 1964/65 den Auftrag, Erfahrungen auf dem Gebiet des Programmierten Unterrichts zu sammeln und die Möglichkeiten dieser Unterrichtsform zu erkunden. Das erste Mathematikprogramm von Karl-August Keil, *Einführung in die Raumgeometrie,* erscheint bereits 1965. Es folgen 1966 *Die Verbindung der vier Grundrechenarten* und 1968 in Zusammenarbeit mit seiner Frau Inge Keil die *Wiederholung der Algebra*, ein Werk, das 1982 noch in 8. Auflage nachgedruckt wurde.

Schon an den ersten Titeln wird deutlich: Buchprogramme eignen sich zur Einführung eines neuen Stoffgebietes und zur Wiederholung.

Aber lässt sich z. B. Raumgeometrie überhaupt auf der Ebene von Buch-Seiten vermitteln?

Schon auf Seite 7 wird der Schüler aufgefordert:

> „Stelle aus kräftigem Papier oder aus Karton einen Quader her:
> Länge 7 cm, Breite 5 cm, Höhe 4 cm.
>
> Mache es so, dass Du die Deckflächen aufklappen kannst!
>
> Fertige diesen Körper zu Hause an und stelle ihn in den folgenden Stunden vor Dir auf! Er wird Dir manche Überlegung erleichtern.“

Am Ende des Buchprogramms sind in eine Tasche drei Blätter mit Schrägbildern, darunter Quader und Prisma eingelegt. Auch sie stützten die Anschauung.

Das zugehörige Lehrerheft (1965) vermittelt einen überzeugenden Einstieg in die Auseinandersetzung mit dem Programmierten Unterricht: „In erster Linie ist das Programm für den Klassenunterricht in Anwesenheit des Fachlehrers gedacht. Es ist eine Unterrichtshilfe wie Schulfilm, Schulfunk, Lichtbild, Tonband [Anmerkung: 1970 wird mit dem Projekt Computerunterstützter Unterricht unter der Leitung von Dr. Karl-August Keil die Er-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

kundung der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des Computers im Schulbereich intensiviert]. Es dient wie diese dazu, den Unterricht abwechslungsreicher zu gestalten. Für die Schüler ist es eine Schulung zum selbständigen Aneignen eines Stoffes, zum genauen Lesen eines Textes, zum konzentrierten Arbeiten. Der Lehrer kann sich, während die Klasse mit einem Programm arbeitet, einzelnen, besonders schwächeren Schülern widmen und besser als sonst deren Wissenslücken feststellen und beheben, oder er kann auch auf weiterführende Fragen guter Schüler eingehen, ohne die übrige Klasse bei der Arbeit aufzuhalten.“ (S. 3)

Das Lehrerheft beschreibt auf S. 4 den Adressatenkreis (8. bis 10. Schuljahr), die Lernvoraussetzungen, die geometrischen Themen und den Programmaufbau. „Das Programm ist zunächst linear aufgebaut, d. h., alle Schüler bearbeiten dieselben Lernschritte. Später kommen mehrere Verzweigungen vor. Sie dienen dazu, häufig auftretende Wissenslücken zu füllen oder schwierige Stellen für den schwächeren Schüler ausführlicher zu behandeln. Dieser wird auf einem leichteren Weg zum Ziel geführt, während der bessere Schüler den direkten Anstieg wählt.“ Empfehlungen zur Durchführung des Programmierten Unterrichts und zum Schlusstest folgen. Der Anhang vermittelt in Schülerstimmen zum Programmierten Unterricht, wie Schüler mit dem für sie neuen Medium zurechtkommen.

Das Programm wurde mit mehreren Einzelschülern, in mehr als 20 Klassen aus verschiedenen Schulen unterschiedlicher Ausbildungsrichtungen erprobt und während der Erprobung laufend weiterentwickelt. Fehler der Schüler bei den einzelnen Aufgaben und beim Schlusstest, Fragen der Schüler an den Lehrer, Hinweise auf besondere Schwierigkeiten und Anregungen der Schüler dienten als Grundlage für Programmverbesserungen. Der – auch aus heutiger Sicht – enorme Aufwand lohnte sich, denn es entstanden ausgefeilte, von Schülern und Lehrern akzeptierte und geschätzte Buchprogramme von hoher Qualität, die – auch wenn sie heute mit computergestützten Medien konkurrieren müssen – in Einzelfällen immer noch erfolgreich eingesetzt werden können.

„Wenn man die Vor- und Nachteile gegeneinander abwägt, wird man auf die Möglichkeiten des Programmierten Unterrichts in der Schule nicht verzichten wollen, aber auch seine Grenzen beachten. Keinesfalls dürfte in Zukunft der gesamte Unterricht oder auch nur ein großer Teil auf Programme umgestellt werden. Aber der gelegentliche Einsatz eines Programms in dem einen oder anderen Fach wird zweifellos eine wesentliche Bereicherung bedeuten.“ (S. 11)

Koordination der Programmentwicklung

Mit einem Schreiben des Kultusministeriums vom 17. 12. 1968 wurde am Gymnasium bei St. Anna Augsburg die *Zentralstelle für Programmierten Unterricht an bayerischen Gymnasien* eingerichtet und Dr. Karl-August Keil mit der Leitung beauftragt. Zu ihren Aufgaben gehörte die Koordination der Entwicklung und Erprobung von Buchprogrammen in Zusammenarbeit mit den Versuchsschulen für die einzelnen Fächer. Versuchsschule für Mathematik war das Ohm-Gymnasium Erlangen, der erste Landesbeauftragte für Programmierten Unterricht im Fach Mathematik Waldemar Hofmann. Er hat zu fast allen Gebieten der Mathematik Programme entworfen. Hier eine Auswahl aus seiner Werkliste: *Summen und Produkte (1977), Systeme linearer Gleichungen und Determinanten (1984), Ungleichungen (1971), Der Absolutbetrag in Gleichungen und Ungleichungen (1971), Die zentrische Streckung (1972), Die rationalen Funktionen (1971), Die Umkehrfunktion (1975), Kettenregel und Mittelwertsatz (1978), Kombinatorik (1981, Nachdruck bis 1991; Basis für ein Computerprogramm von Konrad Rudert), Das Testen von Hypothesen (1986).*

Welche Verbreitung und welchen Umfang die Programmentwicklungen in den Jahren von 1965 bis 1991 insgesamt erreichten, zeigen die große Beteiligung weiterer Autoren und ihre Themenbereiche (Titel verkürzt):

Gerd Adam *(Punktsymmetrie)*, Günter *Beck (vektorielle analytische Geometrie)*, Walter Czech *(negative Zahlen, Bruchgleichungen)*, Roswitha Graser *(Flächenlehre)*, Franz Hager *(Achsensymmetrie)*, Gertrud Köhler *(lineare Funktion)*, Giselbert Kosmala *(Trigonometrie)*, Eugen Kuntze *(Teilbarkeit)*, Helmut Lerche *(Bedingte Wahrscheinlichkeit)*, Hildegard und Helmut Lerche *(Algebraische und geometrische Gruppen)*, Helmut Loy *(Technik des Integrierens),* Wilfried Mehlhart *(Aussage und Aussageform)*, Elisabeth Pasing *(Primzahlen, ggT, kgV)*, Jürgen Penßel *(Komplexe Zahlen)*, Dieter Roth und Peter Stingl *(geometrisches Beweisen, geometrische Abbildungen, vollständige Induktion)*, Karl Röttel *(Lineare Optimierung, Logarithmus)*, Werner Schneider *(Direkte und umgekehrte Proportionalität)*, E. Hans Schwab *(Ableitung, Integralrechnung)*, Horst Sedlmaier *(Mengenlehre)*, Gerhard Steidle *(Einführung in die Algebra – div. Teilbereiche, Wurzelgleichungen)*, Fritz Thayssen *(Lineare Ungleichungen)*, Alfred Walther *(Grenzwerte)*, Hartmut Wiedling *(Wirtschaftsmathematik).*

Die meisten dieser über 50 Buchprogramme wurden im Bayerischen Schulbuch-Verlag veröffentlicht und sind in Format (A6), Titelseite und Textanordnung (Aufgaben rechte Seiten unten, Antworten nach Umblättern rechte Seiten oben) einheitlich gestaltet. Zu allen gibt es ein Lehrerheft.

Weitere Verlage

1965 erscheinen auch in anderen Verlagen Buchprogramme. Zunächst sind es Adaptionen aus dem Amerikanischen wie das Unterrichtsprogramm *Mengenalgebra* (Helmut Lindner 1965) oder in der Reihe der TT-Programme – der Klett-Verlag hatte ein eigenes Referat für Programmierten Unterricht – *Trigonometrie* (1966), *Bruchrechnen* (1966), *Dezimalrechnen* (1967). Doch schon ab 1968 finden sich in den Veröffentlichungen z. B. Original-Arbeiten aus deutschen Hochschulen (etwa von Ursula Viet oder Heinrich Winter). Auch Kallmeyer, Schroedel, Westermann legen Serien auf; fast jeder Verlag hat etwas zum Programmierten Unterricht. Aus den insgesamt etwa 200 Programmtiteln seien zwei herausgegriffen, *Der Rechenstab* (Hans Bergmann 1966) und *Logarithmenrechnen* (C. Petersen, E. Feddersen 1968), nicht weil die Themen aktuell wären, sondern weil diese beiden Buchprogramme vielleicht in ferner Zukunft helfen können, Erbstücke aus dem letzten Jahrhundert zu verstehen und zu bedienen.

Eine Serie mit 29 Themen aus der Mathematik verdient besondere Beachtung, die Düsseldorfer Programme, herausgegeben vom Düsseldorfer Verein für Berufspädagogik (Dähmlow, Neuß/Rhein): Jedes Programm enthält 58 übersichtlich angeordnete Lernelemente, ein Testblatt mit Aufgaben, dazu ein Lösungsblatt. Das Format ist außergewöhnlich (A2 zweimal gefaltet zu A4), der Preis auch (laut undatiertem Prospekt 0,50 DM je Programm, auch Kritiker des Programmierten Unterrichts sollten da einen Versuch riskieren können).

Literatur

Keil, Karl-August (Hg.): Das Gymnasium bei St. Anna in Augsburg. 475 Jahre von 1531 bis 2006. Wißner-Verlag Augsburg 2006. *Darin:* Die Zentralstelle und das Computerprojekt am Anna-Gymnasium. S. 238 - 252. *Literatur-Auswahl zu:* Zentralstelle für Programmierten Unterricht und Computer im Unterricht. S. 286 - 289. Buchprogramme von Lehrern des Annagymnasiums, erschienen im Bayerischen Schulbuchverlag München. S. 299.

Archivierung: In Vorbereitung ist eine Zusammenstellung aller Materialien zum Programmierten Unterricht (Buchprogramme, Lehrerhefte, Anleitungen, Erprobungsberichte, Grundsatzartikel, Tagungsbände z. B. der gpi Gesellschaft für Programmierte Instruktion, Sekundärliteratur, die von Ernst Walter an der Zentralstelle erstellten Übersichten, kommentierte Bestandslisten u. a.) für das Archiv des Gymnasiums bei St. Anna, (Schertlinstr. 5 - 7, 86159 Augsburg, Tel. 0821-324-1651). Näheres (Verzeichnisse, Inhalte, Lagerorte, ggf. auch Ausleihe) über: Bernhard Brockmann, Burgfriedenstr. 10, 86159 Augsburg, bernhard.brockmann@web.de, Tel. privat 0821-573752.

Bibliotheken: Buchprogramme haben z. B. die Universitätsbibliothek Bielefeld und der Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg (Prof. Weth).

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Ist doch logisch – Untersuchungen der Korrektheit und des Verknüpfungsgrades von Schülerargumentationen

1. Hintergrund

Die Begriffe *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* werden in der Literatur äußerst unterschiedlich gebraucht. Holland (2007, S. 132) betrachtet das Argumentieren als eher anschauliche Niveaustufe des Beweisens. Brunner (2014, S. 31f.) dagegen sieht Argumentieren und Beweisen als unterschiedlich formale Ausprägungen des Begründens. Im niedersächsischen KC wird Beweisen als strenge Form des Argumentierens beschrieben. Dieser Sichtweise wird hier gefolgt.

Ein Argument wird verstanden als die Anwendung eines Hilfsmittels (Mathematischer Satz, Definition, Rechenregeln etc.) auf die erforderlichen und gegebenen Voraussetzungen[1] mit dem Ziel, eine neue Aussage, die Konklusion, zu generieren. Argumentationsschritte sollten auf den Gesetzen der Logik basieren und deduktiv geführt werden. Eine Argumentation entsteht durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten.

Unterschieden werden muss zwischen der Korrektheit eines Argumentes und der Wahrheit seiner Aussagen. Der Begriff der Wahrheit bezieht sich nur auf die einzelnen Aussagen des Argumentes, also auf die Prämissen und die Konklusion. Brunner (2014, S. 37) stellt in diesem Zusammenhang fest: „Die Wahrheit von Aussagen wird als semantisches Kriterium auf der inhaltlichen Ebene geklärt, die Gültigkeit [bzw. Korrektheit] des Arguments hingegen auf der syntaktischen Ebene und damit auf der Ebene der Struktur des Arguments“. Um die Prämissen auf der syntaktischen Ebene zum Zwecke einer wahrheitstransferierenden Konklusion zu verknüpfen, muss nach Bayer (2007[2], S. 85 – 88) zweierlei gegeben sein: Erstens müssen die Prämissen *haltbar*, also wahr sein und zweitens müssen sie für die Konklusion *relevant* sein, also in einer logischen bzw. semantischen Beziehung zu dieser stehen. Die entscheidende Eigenschaft korrekter Argumente ist, dass aus wahren Prämissen nur wahre Konklusionen abgeleitet werden können (ibid., S. 90).

2. Fragestellung

- Methodisch: Wie lassen sich die Korrektheit und der Verknüpfungsgrad einer Argumentation kategorisieren?

[1] Das Hilfsmittel sowie die Voraussetzungen sind jeweils Aussagen und werden in der Literatur als die *Prämissen* des Argumentes bezeichnet.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- <u>Inhaltlich:</u> Produzieren die Probanden einer im Argumentieren trainierten Klasse korrektere und stärker verknüpfte Argumentationen als jene einer untrainierten Vergleichsklasse?

3. Methodik

Im Rahmen der HeuRekAP-Studie wurden an einem hannoveraner Gymnasium zwei achte (später neunte) Klassen über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren auf zwei unterschiedliche Arten im Problemlösen und Argumentieren trainiert[2], zwei weitere Klassen dienten als Vergleichsklassen. In regelmäßigen Abständen wurden von allen Schülern schriftliche Bearbeitungen mathematischer Aufgaben erhoben. Von ausgewählten Schülern einer trainierten Klasse (ET-Training) und einer Vergleichsklasse wurden 21 Matched Samples gebildet. Grundlage der Zuordnung bildeten die gemittelten Mathematik- und Deutschnoten der letzten vier Jahre vor Eintritt in die Studie. Dieser Beitrag bezieht sich auf die Bearbeitungen der TIMSS-III-Aufgabe K18 durch diese 42 Schüler am Ende der Studie.

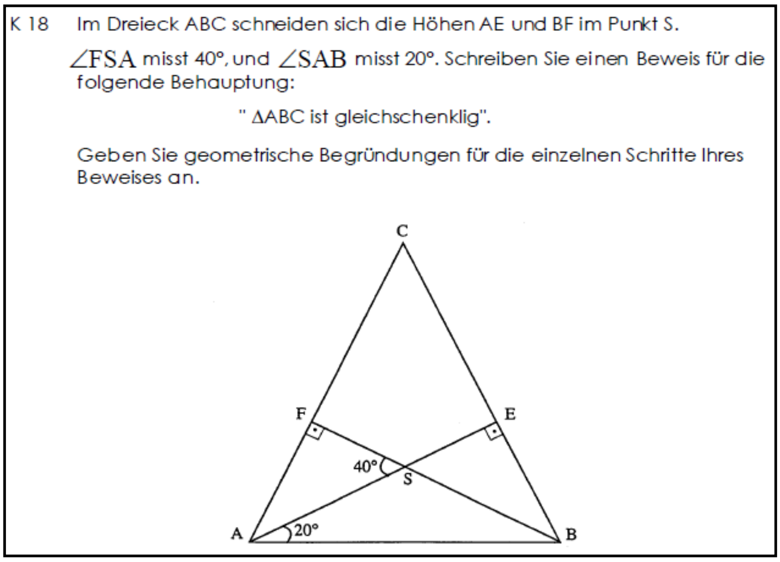


Abbildung 1: TIMSS-III-Aufgabe K18

Zu dieser Aufgabe wurden im Vorfeld Musterlösungen von Experten erstellt und mittels Lösungsgraphen dargestellt. Zwei Rater ordneten dann in einem ersten Schritt jeder untersuchten Schülerbearbeitung einen der Musterlösungswege zu. Diese Zuordnung wurde danach konsensuell validiert.

In einem zweiten Schritt beurteilten die beiden Rater unabhängig voneinander, welche Teilziele und Verknüpfungen des Musterlösungsweges vom Schüler erreicht wurden und kodierten dies nach den in einem Handbuch beschriebenen Regeln. Auf diese Weise entstanden zwei unabhängig erstellte Lösungsgraphen BG_1 und BG_2 zu dieser Schülerbearbeitung, die wiederum konsensuell validiert wurden. Das Ergebnis war der Konsenslösungsgraph $BG_{1,2}$. Aus diesem Lösungsgraphen wurden schließlich nach den Regeln eines weiteren Handbuches Korrektheit und Verknüpfungsgrad der Argumentation bestimmt. Da-

[2] Für Details dieser Trainings siehe Brockmann-Behnsen (2014b).

zu wurde eigens ein sechsstufiges Kategoriensystem entwickelt, das – vereinfacht gesagt – folgende Qualitätsstufen einer Argumentation hierarchisch abbildet: **K0**: Kein Ansatz, **K1**: Unver-knüpfte Nennung von Graphenelementen (hilfreiche Sätze, wahre Aussagen etc.), **K2**: Herstellen einer einfachen Verknüpfung von wahren Graphenelementen, **K3**: Wiedergabe eines korrekten Argu-mentes, **K4**: Korrekte Zusammenführung mehrerer Argumente, **K5**: Im wesentlichen komplette Lösung[3].

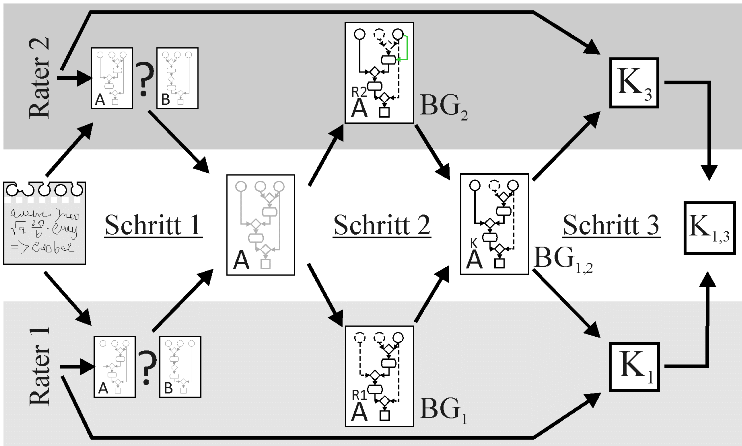


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Auswertungsprozesses

4. Ergebnisse

Der Median der Kategorienverteilung liegt in der Trainingsklasse bei K3, in der Vergleichsklasse bei K2 (siehe Abb. 3), alle Schüler ereichten mindestens Kategorie 1, die Kategorien K4 bis K5 wurden in der trainierten Klasse siebenmal, in der untrainierten Klasse zweimal ermittelt.

Interessant ist auch der direkte Vergleich der erreichten Kategorien der Matched Samples. In Abb. 4 sind die Paare längs der Abszisse nach gemittelten Mathematik-Vornoten sortiert dargestellt. Man sieht, dass sich bei dieser Aufgabe der Vorsprung der Trainingsteilnehmer nur im oberen und mittleren Leistungsbereich zeigt, im unteren Leistungsbereich dagegen ergibt sich ein indifferentes Bild. Es muss untersucht werden, ob sich dieses Phänomen bei anderen Aufgaben wieder findet.

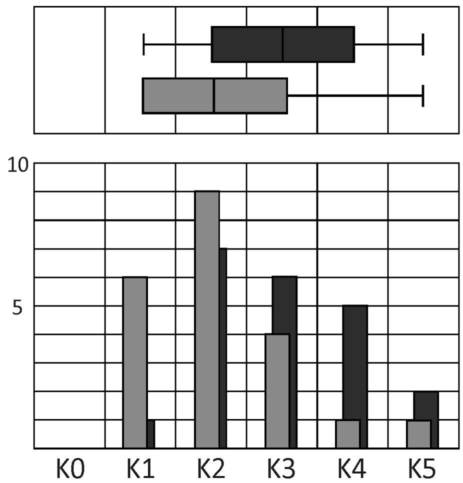


Abbildung 3: Verteilung der Kategorien für die Trainingsklasse (dunkelgrau) und die Vergleichsklasse (hellgrau) und die zughörigen Boxplots

[3] Eine genauere Darstellung der Kategorien findet sich in Brockmann-Behnsen (2014a, S. 247).

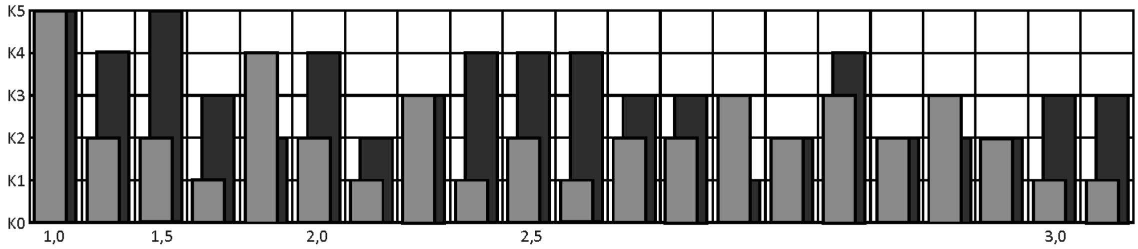


Abbildung 4: Direkter Kategorienvergleich der Matched Samples aus der Trainingsklasse (dunkelgrau) und der Vergleichsklasse (hellgrau), sortiert nach den gemittelten Mathematik-Vornoten

5. Diskussion

Im Rahmen ihrer kumulativen Bachelorarbeit bewerten Mix, Fränzel & Soyta (2014) die Lösungsgraphen der 42 ausgewählten Schüler für verschiedene Aufgaben, darunter auch K18, mit einem intervallskalierten Punktesystem, das hoch rangkorreliert (ρ = 0,69) ist mit dem hier vorgestellten Kategoriensystem. Sie können zeigen, dass die beiden Samples zu Beginn der Untersuchung zu vergleichbaren Ergebnissen kommen, während die Trainingsgruppe nach dem Training deutlich besser abschneidet. Brockmann-Behnsen & Rott (2014) bestimmen die Argumentationskategorien für verschiedene Aufgaben (u.a. TIMSS-III-K10) zu Beginn und zum Ende des Trainings für die gesamten Klassen. Gemessen an den Medianen der Argumentationskategorien kommen sie ebenfalls zu dem Ergebnis vergleichbarer Leistungen zu Beginn des Trainings, aber besseren Abschneidens der Trainingsklasse im Posttest. Bei komplexeren Aufgaben wie K10 zeigt sich der Vorsprung im Nachtest dabei ebenso wie bei der hier vorgestellten Aufgabe K18 weniger deutlich (Median eine Kategorie höher) als bei einfacheren Aufgaben (Mediane um zwei bis drei Kategorien höher).

Literatur

Bayer, K. (2007[2]). *Argument und Argumentation. Logische Grundlagen der Argumentationsanalyse*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

Brockmann-Behnsen, D. (2014a). Wie steigert man die Problemlöse- und Argumentationskompetenz? Ergebnisse der HeuRekAP-Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 245–248). Münster: WTM-Verlag.

Brockmann-Behnsen, D. (2014b). Explizites und implizites Heurismentraining im Unterricht. In Deschauer, S. (Hrsg.), *MU* 60(5), 10/2014 (S. 19 – 23), Friedrich Verlag

Brockmann-Behnsen, D. & Rott, B. (2014). Fostering the Argumentative Competence by Means of a Structured Training, in: Proceedings of PME38, Band 2

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Holland, G. (2007[3]). *Geometrie in der Sekundarstufe*, Franzbecker, Hildesheim

Mix, A.-Chr.; Fränzel, R. & Soyta, W. (2014). Strukturelle Analyse von Problemlöseerfolg und Heurismeneinsatz in Schülerbearbeitungen der Aufgaben K18, Raute und Winkel, unveröffentlichte Bachelorarbeit an der Leibniz-Universität Hannover

Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Gestaltung von Mathematikunterricht in Jahrgangs- und Mehrjahrgangsklassen der Primarschule

Ausgangslage und Fragestellungen

Im Zusammenhang Schulentwicklungsprojekten wurden in einigen Schweizer Kantonen sowie in einzelnen Bundesländern Deutschlands die Jahrgangsklassen zugunsten von Mehrjahrgangsklassen aufgegeben. Von der größeren Altersmischung wird erwartet, dass sie der Heterogenität der Schülerschaft besser Rechnung tragen könne und dass vermehrt erweiterte Lehr- und Lernformen wie beispielsweise Freiarbeit, Posten-, Werkstattarbeit oder Projekte eingesetzt würden (vgl. Amt für Volksschule Kanton Thurgau, 2012). Forschungsbefunde, wie Lehrpersonen ihren Mathematikunterricht in Mehrjahrgangsklassen gestalten, fehlen aber weitgehend. Vor diesem Hintergrund interessiert, wie Lehrpersonen ihren Mathematikunterricht unter den organisatorisch komplexen Rahmenbedingungen einer Mehrjahrgangsklasse im Vergleich zu Lehrpersonen, die in Jahrgangsklassen unterrichten, gestalten. Dieser Beitrag fokussiert folgende Fragestellungen:

- Wie gestalten Primarlehrpersonen in Mehrjahrgangsklassen ihren Mathematikunterricht?
- Unterscheidet sich die Gestaltung des Mathematikunterrichts von Primarlehrpersonen, die in Jahrgangsklassen arbeiten von denjenigen, die Mehrjahrgangsklassen unterrichten?

Es wird vermutet, dass in Mehrjahrgangsklassen organisatorisch strukturierende Formen wie Planarbeit öfters eingesetzt und Schülerinnen und Schüler mehr in Stillarbeit arbeiten als in Jahrgangsklassen, weil der Fokus der Lehrperson auf der Organisationsstruktur und dem Handling der verschiedenen Jahrgänge liegt. Darüber hinaus wird erwartet, dass im Mathematikunterricht in Mehrjahrgangsklassen vermehrt erweiterte Lehr- und Lernformen eingesetzt werden, wie dies im Zuge von solchen Umstellungen der Schulstruktur propagiert wird.

Die organisatorisch komplexe Schulstruktur der Altersdurchmischung bzw. der Mehrjahrgangsklasse stellt insbesondere beim Berufseinstieg für die Lehrpersonen eine besondere Herausforderung dar. Deshalb wird im Rahmen dieses Beitrags der Fokus auf Lehrpersonen zu Beginn ihrer beruflichen Laufbahn gerichtet und nach deren Gestaltung von Mathematikunterricht gefragt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Methoden

Im Rahmen der vorliegenden Studie wurde bei Primarlehrpersonen des Kantons Thurgau (Schweiz), die im 1. und 2. Berufsjahr unterrichten ($N = 101$), die Gestaltung von Mathematikunterricht in der Selbsteinschätzung erfragt. Dazu wurde ein Fragebogeninstrument entwickelt, das u.a. die Häufigkeit des Einsatzes bestimmter Unterrichtsformen (**Tabelle 1**) und Sozialformen (**Tabelle 2**) im Mathematikunterricht erhebt. Die Unterrichtsformen wurden mit 14 Items auf einer 5-stufigen Likertskala bezüglich Häufigkeit des Einsatzes erfragt (1 = weniger als einmal im Monat; 2 = ein- bis zweimal pro Monat; 3 = einmal pro Woche; 4 = zwei- bis dreimal pro Woche; 5 = (fast) in jeder Mathematikstunde). Die gleiche Skalierung wurde auch für die 5 Items für das Erfassen der Häufigkeit bestimmter Sozialformen im Mathematikunterricht verwendet.

Die Items zu Unterrichts- und Sozialformen wurden in Anlehnung an bestehende Instrumente formuliert, die auf das Erfassen von erweiterten Lehr- und Lernformen im Mathematikunterricht abzielen (Pauli & Reusser, 2001) und entsprechend angepasst und ergänzt.

Stichprobe

Es handelt sich um eine Vollerhebung der Primarlehrpersonen, die im Schuljahr 2013/2014 in ihrem ersten oder zweiten Berufsjahr in der Primarschule im Kanton Thurgau Mathematik unterrichten. Von diesen 101 Lehrpersonen unterrichten 33 in Jahrgangsklassen, 68 in Mehrjahrgangsklassen. Bei den Mehrjahrgangsklassen lässt sich das Bild weiter ausdifferenzieren: Insgesamt 39 % der Lehrpersonen unterrichten zwei aufeinanderfolgende Jahrgänge (z.B. Klasse 1/2 oder 5/6). Drei Jahrgänge (z.B. Klasse 1-3 oder 4-6) unterrichten 26 % der Lehrpersonen. Je 1 % der Lehrpersonen unterrichten mehr als 3 Jahrgänge bzw. zwei Jahrgänge, die nicht aufeinanderfolgend sind (z.B. Klasse 1/3 oder 4/6).

Ergebnisse

Erste Ergebnisse zeigen, dass sich die Gestaltung von Mathematikunterricht von Primarlehrpersonen in den ersten beiden Berufsjahren nach Schulstruktur bis auf die Häufigkeit, mit der Präsentationen von Schülerinnen und Schülern berichtet werden, nicht unterscheiden (**Tabelle 1**). In Jahrgangsklassen erhalten Lernende demnach mehr Gelegenheiten, Lösungen zu präsentieren als in Mehrjahrgangsklassen.

Tabelle 1: Häufigkeit des Einsatzes verschiedener Unterrichtsformen für Jahrgangs- und Mehrjahrgangsklassen (1 = weniger als einmal im Monat; 2 = ein- bis zweimal pro Monat; 3 = einmal pro Woche; 4 = zwei- bis dreimal pro Woche; 5 = (fast) in jeder Mathematikstunde)

Unterrichtsform	*Jahrgangsklassen (N = 33)*	*Mehrjahrgangsklassen (N = 68)*
Referieren, erklären	$M = 2.91$; $SD = .84$	$M = 2.97$; $SD = .83$
Vorzeigen	$M = 3.24$; $SD = .83$	$M = 3.21$; $SD = .67$
Abfragen	$M = 2.55$; $SD = .94$	$M = 2.52$; $SD = 1.09$
Vorrechnen lassen	$M = 2.97$; $SD = 1.02$	$M = 2.82$; $SD = 1.08$
Lehrgespräch	$M = 2.97$; $SD = 1.21$	$M = 3.09$; $SD = .99$
Diskussion Problemstellungen	$M = 2.52$; $SD = .97$	$M = 2.23$; $SD = .94$
Präsentation von Schülerlösungen	$M = 2.24$; $SD = 1.12$	$M = 1.85$; $SD = .73$*
Stillarbeit	$M = 4.33$; $SD = .65$	$M = 4.36$; $SD = .60$
Postenarbeit	$M = 3.12$; $SD = 1.19$	$M = 3.02$; $SD = 1.20$
Werkstattarbeit	$M = 2.21$; $SD = 1.12$	$M = 1.89$; $SD = 1.15$
Arbeitsplan	$M = 2.97$; $SD = 1.65$	$M = 3.14$; $SD = 1.67$
Freiarbeit	$M = 1.70$; $SD = .91$	$M = 1.73$; $SD = .99$
Projekte	$M = 1.15$; $SD = .36$	$M = 1.24$; $SD = .63$
Forschen, Lerntagebuch	$M = 1.12$; $SD = .42$	$M = 1.12$; $SD = .37$

Anmerkung: * statistisch signifikanter Gruppenunterschied: $t = 2.11$; $df = 97$; $p < .05$

Häufig (2-3 mal pro Woche oder in (fast) jeder Mathematikstunde) eingesetzt wird von Lehrpersonen in Jahrgangs- und Mehrjahrgangsklassen Stillarbeit. Formen wie Vorzeigen, Erklären, Vorrechnen lassen, Lehrgespräch, Postenarbeit und Arbeitsplan werden deutlich weniger häufig eingesetzt, während der Einsatz von Projektunterricht, Forschen/Lerntagebuch oder Freiarbeit kaum berichtet wird.

Auch hinsichtlich des von den Lehrpersonen berichteten Einsatzes verschiedener Sozialformen zeigen sich kaum Unterschiede zwischen Lehrpersonen aus Jahrgangs- und denjenigen aus Mehrjahrgangsklassen (**Tabelle 2**). Leidiglich die Tandem-/Partnerarbeit wird von den Lehrpersonen, die Jahrgangsklassen unterrichten, deutlich öfters eingesetzt als von denjenigen aus Mehrjahrgangsklassen. Am verbreitetsten ist die Einzelarbeit, gefolgt von Tandem-/Partnerarbeit, vor dem Ganzklassenunterricht, der ungefähr gleich häufig eingesetzt wird wie Gruppenarbeiten oder wie die Wahl der Sozialform freigestellt wird.

Tabelle 2: Häufigkeit des Einsatzes verschiedener Sozialformen für Jahrgangs- und Mehrjahrgangsklassen (1 = weniger als einmal im Monat; 2 = ein- bis zweimal pro Monat; 3 = einmal pro Woche; 4 = zwei- bis dreimal pro Woche; 5 = (fast) in jeder Mathematikstunde)

Sozialform	*Jahrgangsklassen (N = 33)*	*Mehrjahrgangsklassen (N = 68)*
Ganzklassenunterricht	$M = 3.18$; $SD = .92$	$M = 3.06$; $SD = .98$
Gruppenarbeit	$M = 3.18$; $SD = 1.07$	$M = 2.95$; $SD = .90$
Tandem/Partnerarbeit	$M = 4.15$; $SD = .67$	$M = 3.82$; $SD = .72$*
Einzelarbeit	$M = 4.45$; $SD = .62$	$M = 4.41$; $SD = .66$
Wahl der Sozialform	$M = 3.13$; $SD = 1.34$	$M = 3.16$; $SD = 1.10$

Anmerkung: * statistisch signifikanter Gruppenunterschied: $t = 2.22$; $df = 97$; $p < .05$

Diskussion

Bezugnehmend auf die eingangs präsentierten Fragestellungen und Hypothesen kann zusammenfassend gesagt werden, dass sich Mathematikunterricht in Jahrgangs- und Mehrjahrgangsklassen hinsichtlich eingesetzter Unterrichts- und Sozialformen kaum unterscheidet. Demnach scheint in Mehrjahrgangsklassen nicht zwangsläufig eine größere Verbreitung von erweiterten Lehr- und Lernformen aufzutreten.

Einzelarbeit und Stillarbeit sind sehr stark verbreitet und scheinen den Mathematikunterricht in den Primarschulen zu dominieren, unabhängig von der Schulstruktur. Dieser Befund wirft insbesondere vor dem Hintergrund eines vielfältigen Erwerbs von mathematischen Kompetenzen wie Argumentieren oder Kommunizieren, welche diskursiv angelegt sind und ein Gegenüber brauchen, Fragen auf.

Auch wenn kein statistisch signifikanter Mittelwertsunterschied für die Häufigkeit des Einsatzes von Arbeitsplänen gefunden wurde, deutet die große Varianz ($SD \geq 1.65$) darauf hin, dass sich hier die Klassen – wenn auch nicht nach Schulstruktur – deutlich voneinander unterscheiden.

Weitergehende Analysen, u.a. auch ein Vergleich zwischen erfahrenen Lehrpersonen und Novizinnen und Novizen, sind zurzeit in Gange.

Literatur

Amt für Volksschule Kanton Thurgau. (2012). *Altersdurchmischtes Lernen AdL. Eine Lernorganisation, welche den Blick auf Individuen in Lerngruppen schärft* (2. Aufl.). Frauenfeld: Amt für Volksschule Thurgau.

Pauli, C. & Reusser, K. (2001). *Dokumentation: Lehrerbefragung im schweizerischen Videoprojekt*. Unveröffentlichte Projektunterlage. Zürich: Universität.

Julia BRUNS, Lars EICHEN, Humboldt-Universität zu Berlin

Mathematikbezogene Kompetenzentwicklung elementarpädagogischer Fachpersonen in Intensiv-Fortbildungen

Durch die Einführung der Bildungs- und Orientierungspläne in den Bundesländern ist der mathematische Bildungsbereich zu einem Thema für alle pädagogischen Fachpersonen im Elementarbereich geworden (Dreier & Preissing, 2004). Allerdings geben die Bildungs- und Orientierungspläne keine Hinweise zur Umsetzung der mathematischen Förderung. Fachdidaktische Konzepte für diese Altersstufe existieren bisher nur in Anfängen (Fthenakis, 2009).

1. Mathematikbezogene Kompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen

Zur Beschreibung und Systematisierung mathematikbezogener Kompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen schlagen Jenßen und Kollegen (im Druck) ein Kompetenzstrukturmodell mit den Komponenten *Fachbezogenes Wissen Mathematik*, *Mathematikdidaktisches Wissen*, *Pädagogisches Wissen* und *Beliefs* vor. Als Ausdifferenzierung für das mathematikdidaktische Wissen werden wiederrum die Unterpunkte *Gestaltung von geplanten mathematischen Bildungsprozessen*, *Gestaltung von situativen mathematischen Bildungsprozessen*, *Diagnostik, Förderung* und *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Kindern* angenommen. Aus empirischer Perspektive liegen zu den unterschiedlichen Aspekten vereinzelt Studien vor, die zeigen, dass die elementarpädagogischen Fachpersonen Schwierigkeiten haben angemessene mathematische Aktivitäten für unterschiedliche Kinder zu planen (Bruns, 2014). Weiter wird der Unterstützungsleistung der elementarpädagogischen Fachperson eine hohe Bedeutung für das mathematische Lernen zugeschrieben (Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006; Peter-Koop & Grüßing, 2008; Schuler, 2013). Gleichzeitig zeigen die Fachpersonen Schwächen in der Diagnose mathematikspezifischer Lernprozesse (Bruns, 2014).

Die empirischen Ergebnisse, die die fachbezogenen Beliefs der elementarpädagogischen Fachpersonen betreffen, lassen vermuten, dass die mathematische Überzeugungen die Gestaltung der elementarpädagogischen Praxis beeinflussen (Brown, 2005; Lee, 2010). Gleichzeitig zeigt sich, dass die pädagogischen Fachpersonen Mathematik häufig als schematischformal wahrnehmen und auf Aktivitäten aus den Bereichen ‚Zahlen und Strukturen', ‚Zahlen und Zählen' sowie ‚Formen' begrenzen (Benz, 2012).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Konzept der Fortbildung für die Qualifizierung elementarpädagogischer Fachpersonen

Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) reagiert mit dem Aufbau des Fortbildungskonzepts „EmMa – Erzieherinnen und Erzieher machen Mathematik“ auf die Diskrepanz zwischen den Anforderungen der Bildungspläne aller Bundesländer und der Rolle mathematischer und mathematikdidaktischer Inhalte in der Ausbildung elementarpädagogischer Fachpersonen (Grassmann, 2005). Dabei wurde ein kompetenzorientierter Ansatz gewählt, da sich diese Fortbildungsform bereits in anderen Studien als wirksam bis auf die Ebene der Kompetenzentwicklung der Kinder erwiesen hat (Gasteiger, 2010).

Die Fortbildung baut auf dem vorhandenem Fach- und Handlungswissen der elementarpädagogischen Fachpersonen auf. Empirische Ergebnisse werden genutzt, um den elementarpädagogischen Fachpersonen in einem handlungs- und kompetenzorientierten Rahmen zu ermöglichen, ihr Wissen auszubauen. Die Fortbildung wird als Intensivkurs-Plus und entsprechend der Gestaltungsprinzipien des DZLM durchgeführt.

Inhaltlich werden in der Fortbildung alle Inhaltsbereiche der Mathematik aus der Perspektive des Elementarbereichs, aber auch im Hinblick auf die Linienführung mathematischer Bildung thematisiert. Die Fortbildung gliedert sich in zwei Einführungsbausteine und vier Vertiefungsbausteine. In den Einführungsbausteinen wird die Bedeutung von Mustern und Strukturen in der Mathematik herausgestellt, das eigene Bild von Mathematik reflektiert und die individuelle Begleitung mathematischer Bildungsprozesse mit Hilfe von Beobachtung, Dokumentation und adaptiver Förderung angesprochen. In den Vertiefungsbausteinen werden fachliche, fachdidaktische und entwicklungspsychologische Grundlagen zu den vier Inhaltsbereichen „Raum und Form“, „Mengen und Zahlen“, „Größen und Messen“ sowie „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ vermittelt.

3. Untersuchung der Wirksamkeit des Fortbildungskonzepts

Das vorliegende Konzept zur Fortbildung elementarpädagogischer Fachpersonen in der Begleitung mathematischer Bildungsprozesse von Kindern im Elementarbereich wird seit August 2013 in zwei Fortbildungskursen durchgeführt und empirisch hinsichtlich der Wirksamkeit untersucht. In einem Prä-Posttest-Design mit nicht-äquivalenter Kontrollgruppe wird die Entwicklung des mathematikbezogenen Wissens (Fachwissen, mathematikdidaktisches Wissen), der Einstellungen und des bereichsspezifischen Alltagshandeln der pädagogischen Fachpersonen untersucht.

Tabelle 1: Design der Wirkungsforschung

Zeitpunkt	Ziele	Instrumente
T_1: Prä (Sept. 2014)	- mathematikbezogenes Wissen - Beliefs	Kompetenztest, Fragebogen (Jenßen et al., in Vorbereitung)
Intervention (Sept. 2014 – Juli 2015)	Experimentalgruppe: Fortbildung „EmMa – Erzieherinnen und Erzieher machen Mathematik“ Nicht-äquivalente Kontrollgruppe: Kein Treatment	
T_2: Post (Juli 2015)	- mathematikbezogenes Wissen - Beliefs - Mathematikdidaktische Handlungskompetenzen	Kompetenztest, Fragebogen (Jenßen et al., in Vorbereitung) Videovignettentest (in Entwicklung)
Praxis (Juli 2015- Jan. 2016)	Beide Gruppen: Praxisarbeit	
T_3: Follow-Up (Jan. 2016)	- Siehe Posttestung	Siehe Posttestung

4. Erste Ergebnisse

Die ersten Ergebnisse der Prä-Testung bezogen auf die Beliefs zeigen, dass die Fachpersonen der Mathematik eine hohe Bedeutung beimessen (n = 41, M =4.88, *Min.* = 3.67, *Max.* = 6.00). Allerdings bereitet nur einem Teil der Fachpersonen die Mathematik auch Freude (n= 39, M = 4.14, *Min.* = 1.40, *Max.* = 5.80). Das Bild der Fachpersonen von der Mathematik ist ambivalent. Es werden sowohl hohe Werte auf der statischen (n = 39, M =4.29, *Min.* = 2.00, *Max.* = 6.00) wie auch auf der dynamischen Skala erzielt (n = 41, M =4.42, *Min.* = 1.25, *Max.* = 6.00). In Bezug auf das mathematikdidaktische Wissen zeigt sich, dass die Fachpersonen ein gutes Basiswissen aufweisen (M = 20.27 vom maximal 30 möglichen Punkte). Es zeigt sich aber auch eine große Spanne in den erreichten Punktzahlen (*Min.* = 14.00, *Max.* = 27.00). Werden die Items mit hoher Fehlquote betrachtet, so zeigt sich, dass die Fachpersonen vor allem mit dem Verständnis der fachdidaktischen Begrifflichkeiten Probleme haben.

5. Fazit

Die ersten Ergebnisse der Prä-Testung zeigen, dass die elementarpädagogischen Fachpersonen in der Fortbildung Interesse an dem Fachbereich Mathematik haben und Basiskenntnisse in der Mathematikdidaktik mitbringen. Ziel der Fortbildung ist es, das vorhandene Wissen weiter auszubauen und zudem die dynamische Perspektive der Mathematik zu stärken.

Literaturverzeichnis

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik* (Dr. A1). Braunschweig: Westermann.

Benz, C. (2012). Attitudes of kindergarten educators about math. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (2), 203–232.

Brown, E. T. (2005). The Influence of Teachers' Efficacy and Beliefs regarding Mathematics Instruction in the Early Childhood Classroom. *Journal of Early Childhood Teacher Education, 26* (3), 239–257.

Bruns, J. (2014). *Adaptive Förderung in der elementarpädagogischen Praxis. Eine empirische Studie zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 21). Münster: Waxmann.

Dreier, A. & Preissing, C. (2004). *Das Berliner Bildungsprogramm für die Bildung, Erziehung und Betreuung von Kindern in Tageseinrichtungen bis zu ihrem Schuleintritt*. Berlin: Verl. Das Netz.

Fthenakis, W. E. (2009). *Frühe mathematische Bildung* (Natur-Wissen schaffen, Bd. 2). Troisdorf: Bildunsgverl. EINS.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 3). Münster: Waxmann.

Grassmann, M. (2005). Im Kindergarten Mathematik unterrichten? *Grundschule, 37* (1), 20–23.

Jenßen, L., Dunekacke, S., Baack, W., Tengler, M., Schmude, C., Wedekind, H. et al. (in Vorbereitung). *KomMa. Test zur Erfassung professioneller Kompetenz von frühpädagogischen Fachkräften im Bereich Mathematik.* Manual zum Testheft. Unveröffentlichtest Manuskript, Humboldt-Universität zu Berlin und Alice Salomon Hochschule Berlin.

Jenßen, L., Dunekacke, S., Baak, W., Tengler, M., Koinzer, T., Schmude, C. et al. (im Druck). KomMa: Mathematikbezogene Kompetenz von Erzieher/-innen: Theoretischer Rahmen, Strukturanalyse und Zusammenhang zu Ausbildungsinhalten.

Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M. & Hedges, L. V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk.". *Developmental psychology, 42* (1), 59–69.

Lee, J. (2010). Exploring Kindergarten Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics. *International Journal of Early Childhood, 42* (1), 27–41.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten. Befunde zur vorschulischen Identifizierung und Förderung von potenziellen Risikokindern in Bezug auf das schulische Mathematiklernen. *Empirische Pädagogik, 22* (2), 209–224.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 15). Münster: Waxmann.

Nils BUCHHOLTZ, Armin JENTSCH, Hamburg

Zusammenhänge zwischen berufswahlbezogener Motivation und fachmathematischem und mathematikdidaktischem Wissen bei Mathematiklehramtsstudierenden

Der Einstieg in ein Lehramtsstudium für das Fach Mathematik verläuft für viele Studierende keinesfalls unproblematisch. Nach wie vor prägen hohe Studienabbrecherquoten von bis zu 40 Prozent (je nach Berechnung, siehe Briedis et al., 2008; Dieter et al., 2008) das Bild des Mathematiklehramtsstudiums an vielen Universitäten. Es wird in den letzten Jahren vermehrt diskutiert, welche Maßnahmen von Seiten der Hochschulen und Universitäten ergriffen werden können, um die Lehramtsstudierenden in der kritischen Studieneingangsphase zu unterstützen (vgl. Bruder et al., 2010). Um allerdings wirkungsvolle Maßnahmen ergreifen zu können, ist nicht nur eine systematische Entwicklung und Evaluation von hochschuldidaktischen Maßnahmen erforderlich, sondern auch eine wissenschaftliche Untersuchung von Ausgangsbedingungen auf Seiten der Studierenden. Dazu möchte der vorliegende Artikel einen Beitrag leisten.

Berufswahlbezogene Motivation

Aus welchen Gründen nehmen Studierende ein Lehramtsstudium auf? – Bislang nehmen nur wenige Studien die berufswahlbezogene Motivation von Lehramtsstudierenden in den Blick (z.B. Watt et al., 2012). Interessant an dieser Frage sind allerdings aus einer fachlichen Perspektive insbesondere Zusammenhänge zum fachlichen Wissen der Studierenden (vgl. Laschke, 2013). König & Rothland (2012) haben dazu in einer Längsschnittstudie die Berufswahlmotive und deren Zusammenhänge zum pädagogischen Wissen von Lehramtsstudierenden im deutschsprachigen Raum untersucht. Für die Erhebung berufswahlbezogener Motivation kam dabei die von Watt & Richardson (2007) entwickelte sog. FIT-Choice-Skala (Factors Influencing Teachers Choice) zum Einsatz. Die motivationalen Aspekte, die im Rahmen dieser empirischen Studie mit der FIT-Choice-Skala erfasst wurden (Vereinbarkeit von Familie und Beruf, Arbeit mit Kindern, Soziales Engagement, Jobsicherheit, u.a.), decken sich weitestgehend auch mit aktuellen, integrierten Theorieansätzen zu Berufswahlmotiven aus der allgemeinen Soziologie (Hentrich, 2011). Im Hinblick auf die Ausbildung von zukünftigen Mathematiklehrerinnen und -lehrern stellen sich aber spezielle Fragen, nämlich erstens, welche Struktur die berufswahlbezogene Motivation von Mathematiklehramtsstudierenden aufweist und zweitens, welche möglichen Zusammenhänge zwischen Motivation und mathematikbezogenem Fachwissen identifiziert werden können.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die Evaluationsstudie TEDS-Telekom

Für die vorliegende Studie wurde die FIT-Choice-Skala bei einer Evaluationsstudie an der FU Berlin im Sommersemester 2011 eingesetzt und um Items zum fachlichen Interesse ergänzt („Mir machen die Themen, die ich unterrichten werde, wirklich Spaß." – „Ich habe großes Interesse an dem Fach, das ich unterrichten werde." – „Ich möchte meine Leidenschaft für mein Fach mit anderen teilen."). An der Studie nahmen 142 Mathematiklehramtsstudierende verschiedener Lehramtsstudiengänge des ersten und zweiten Semesters teil. (Durchschnittsalter 22,4 Jahre, 49,6 % weiblich, 76,6 % Erstsemester). Die Studierenden konnten dabei die Fragen zur berufswahlbezogenen Motivation auf einer siebenstufigen Likert-Skala einschätzen, indem sie angaben, wie wichtig die Überlegungen für ihre Entscheidung waren, ein Lehramtsstudium aufzunehmen (von „überhaupt nicht wichtig" bis „äußerst wichtig").

Mit einem im Rahmen der TEDS-Telekom-Studie entwickelten Instrument zur Erhebung des fachmathematischen, und mathematikdidaktischen Wissens (Buchholtz & Kaiser, 2013) wurde ferner das fachmathematische und mathematikdidaktische Wissen der Studierenden erhoben. Mit Hilfe von Rasch-Skalierungen konnten anschließend die Fähigkeiten der Studierenden als latente Fähigkeitsscores modelliert werden, die im Hinblick auf die zweite Forschungsfrage mit der berufswahlbezogenen Motivation der Studierenden in Beziehung gesetzt werden konnten. Die zugehörigen Reliabilitätsschätzer liegen in einem befriedigenden bis guten Bereich (EAP/PV .63 bis .75).

Ergebnisse

Für die strukturanalytische Untersuchung der Daten zur berufswahlbezogenen Motivation wurde zunächst eine exploratorische Faktorenanalyse durchgeführt, welche eine Lösung mit zehn Faktoren für die Berufswahlmotive der Studierenden ergab. Die Bestätigung dieses Modells wurde mittels konfirmatorischer Faktorenanalyse mit Hilfe der Software *Mplus* vorgenommen. Dabei können die Fitwerte insgesamt als noch akzeptabel beurteilt werden (χ^2/df = 1.62, CFI = .91, SRMR = .067, RMSEA = .065).

Die höchsten mittleren Ausprägungen ergaben sich für den Faktor *fachliches Interesse* (5.89) gefolgt von *intrinsischer Motivation* („Ich unterrichte gern.") (5.77) und *sozialem Engagement* („Ich möchte Kindern/Jugendlichen helfen zu lernen.") (5.57). Die geringsten Ausprägungen fanden sich bei den Studierenden für den Faktor *äußerer Einfluss* („Leute, mit denen ich zusammengearbeitet habe, finden, ich sollte Lehrer/-in werden.") (3.26), *verträgliche Arbeitszeit* („Als Lehrer/-in werde ich lange Ferien haben.“) (3.14) und *Ausweichkarriere* („Ich habe den Lehrerberuf gewählt, weil ich keine anderen Möglichkeiten mehr hatte.“) (1.64). Insgesamt dominierten bei den Studierenden intrinsische motivationale Aspekte, so dass davon ausgegangen werden kann, dass die Mathematiklehramtsstudierenden ihr Studium in erster Linie aus fachlichem bzw. pädagogischem Interesse aufnahmen.

Zur Bearbeitung der zweiten Forschungsfrage wurde die Stichprobe auf die 123 Sekundarstufen I und II Lehramtsstudierende eingeschränkt, da das Instrument zur Erhebung des mathematikbezogenen Wissens insbesondere für diese Teilstichprobe konzipiert ist, und eine systematischen Verzerrung der Zusammenhänge durch mögliche Bodeneffekte vermieden werden sollte. Für die Zusammenhänge wurden bivariate Korrelationen zwischen den der Rasch-Skalierung entstammenden Fähigkeitsparametern und den Faktorscores zur berufswahlbezogenen Motivation berechnet. Signifikante Zusammenhänge konnten allerdings nur (in schwach ausgeprägter Form) zwischen dem Faktor *fachliches Interesse* und dem fachdidaktischem ($r = .21$) sowie fachmathematischem Wissen ($r = .25$) identifiziert werden. Weitere Zusammenhänge konnten – auch tendentiell – nicht festgestellt werden.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse machen deutlich, dass sich die faktorielle Struktur in den Daten zur Berufswahlmotivation der Mathematiklehramtsstudierenden nicht wesentlich von der in den Vorarbeiten dargestellten unterscheidet. Die verschiedenen Dimensionen der FIT-Choice-Skala, welche wesentlichen Kategorien aus der allgemeinen Berufssoziologie entsprechen, konnten weitestgehend auch empirisch bestätigt werden.

Dagegen ließen sich, abgesehen von fachspezifischen Aspekten, keine signifikanten Zusammenhänge zwischen Motivation und mathematikbezogenem Wissen der Studierenden finden. Überraschend ist dabei das Resultat, dass keine Zusammenhänge zwischen intrinsischer bzw. sozialer Motivation und dem fachdidaktischen Wissen festgestellt werden konnten, was möglicherweise an der starken fachlichen Orientierung der mathematikdidaktischen Items liegt. Der Faktor *fachliches Interesse* korreliert als einziger signifikant, allerdings nur schwach positiv mit mathematischen Wissensfacetten. Zu ähnlichen Befunden kommen auch König & Rothland (2012) in einer Längsschnitterhebung für die Zusammenhänge zwischen pädagogischem Wissen und den Berufswahlmotiven von Studierenden.

Allerdings lassen die Ergebnisse durchaus die Möglichkeit zu, dass trotz der nur schwach ausgeprägten Korrelationen Zusammenhänge zwischen einzelnen Wissens- und Motivationsfacetten bestehen. Die Daten rechtfertigen einen solchen Ansatz mit Blick auf den Faktor *fachliches Interesse*, der ggf. differenzierter erfasst werden muss. Des Weiteren erscheinen qualitative Analysen als Ergänzung für die Interpretation der schwachen Zusammenhänge hilfreich, was möglich wäre, da bei einer Teilstichprobe der befragten Studierenden auch Interviews über motivationale Aspekte durchgeführt wurden.

Literatur

Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Henn, H.-W., Kramer, J. & Pinkernell, G. (2010). Schnittstelle Schule – Universität. Positionspapier der Gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule/Hochschule der DMV, GDM und MNU. Abgerufen am 25. September 2013 von http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/ Materialien/PDF/schnittstellen-muenchen.pdf.

Briedis, K., Egorova, T., Heublein, U., Lörz, M., Middendorff, E., Quast, H. & Spangenberg, H. (2008). Studienaufnahme, Studium und Berufsverbleib von Mathematikern. Einige Grunddaten zum Jahr der Mathematik. Forum Hochschule, F09/2008, Hannover: HIS.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2013b). Improving Mathematics Teacher Education in Germany: Empirical Results from a longitudinal Evaluation of innovative Programs. International Journal for Science and Mathematics Education, 11(4), 949-977.

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D. & Törner, G. (2008). Zahlen rund um das Mathematikstudium – Teil 3. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 16(3), 176-182.

Hentrich, K. (2011). Einflussfaktoren auf die Berufswahlentscheidung Jugendlicher an der ersten Schwelle. Eine theoretische und empirische Analyse. In Frommberger, D. (Hrsg.), Magdeburger Schriften zur Berufs- und Wirtschaftspädagogik, Heft 1, Jg. 2011. Magdeburg: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

König, J. & Rothland, M. (2012). Motivations for choosing teaching as a career: effects on general pedagogical knowledge during initial teacher education. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *40*(3), 289-315.

Laschke, C. (2013). Effects of future mathematics teachers' affective, cognitive and socio-demographic characteristics on their knowledge at the end of the teacher education in Germany and Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 895-921.

Watt, H.M.G. & Richardson, P.W. (2007). Motivational factors influencing teaching as a career choice: Development and validation of the FIT-Choice scale. Journal of Experimental Education, 75, 167-202.

Watt, H.M.G., Richardson, P.W., Klusmann, U., Kunter, M., Beyer, B., Trautwein, U., et al. (2012). Motivations for choosing teaching as a career:

Jannis BUCHSTEINER; Michael KALLWEIT, Bochum

Professionalisierung des Helpdesk Mathematik

Das Helpdesk Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum ist für Studierende der Ingenieur- und Naturwissenschaften seit Jahren kompetente Anlaufstelle bei fachlichen Fragen. Die gesammelten Erfahrungen wurden genutzt, um die Professionalisierung des Helpdesk voranzubringen. Dabei entstanden ein bivalentes Regelwerk zur Beratung, neues eLearning-Material, frei verfügbare Lernzettel und sich wiederholende Kurz-Repetitorien.

Das Helpdesk Mathematik

Beim Helpdesk Mathematik der Ruhr-Universität Bochum handelt es sich um ein Angebot, das sich speziell an die Bedürfnisse von Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus Veranstaltungen der Service-Mathematik richtet (3547 Hörer, Stand Oktober 2014). Erfahrungsgemäß hat ein großer Teil dieser Studierenden der Natur- und Ingenieurwissenschaften in der Studieneingangsphase Schwierigkeiten mit den obligatorischen Mathematikvorlesungen. Um dieser Problematik zu begegnen, wurde im Wintersemester 2006/07 das Helpdesk Mathematik gegründet. Der Träger dieses Angebots ist das Servicezentrum Mathematik und Anwendung (SZMA), das die Servicelehre sowie das Beratungsangebot der Fakultät für Mathematik für fachfremde Studierende und Wissenschaftler koordiniert, siehe Dehling et al. (2011).

Seit seiner Gründung ist das Helpdesk in zwei nebeneinanderliegenden Räumen innerhalb der Fakultät für Mathematik untergebracht, die dem SZMA exklusiv hierfür zur Verfügung stehen. Beide Räume sind jeweils mit Tafel, Computern und Arbeitsplätzen ausgestattet; die aktuellen Aufgabenblätter und Skripte sämtlicher Serviceveranstaltung liegen aus. Geöffnet ist das Helpdesk Mathematik während der Vorlesungszeit von Montag bis Freitag zwischen 12 und 16 Uhr, also für insgesamt 20 Wochenstunden. Das Mitarbeiterteam des Helpdesk setzt sich aus den studentischen Hilfskräften, d.h. Übungsgruppenleitern und Korrekteuren aller angebotenen Serviceveranstaltungen (17 Vorlesungen, Stand Oktober 2014) zusammen. Die Zentralisierung der Sprechstunden in das Helpdesk hinein ermöglicht eine kostenneutrale Bereitstellung dieses Angebots. In der vorlesungsfreien Zeit werden durch zusätzlich eingestellte Hilfskräfte reduzierte Öffnungszeiten ermöglicht.

Innerhalb der oben beschriebenen Rahmenbedingungen etablierte sich das Helpdesk binnen kürzester Zeit und wurde von den Studierenden sämtli-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

cher servicenehmender Fakultäten positiv aufgenommen. Seitens des SZMA gab es keine expliziten Vorgaben für die Beratungsgespräche. Infolgedessen wurden immer wieder ähnliche Probleme sowohl von den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern als auch von den Studierenden an das SZMA herangetragen. Beide Gruppen bemängelten gleichermaßen, dass Ziel und Umfang der Beratung im Helpdesk nicht klar geregelt sind. So war häufig nicht klar wie umfangreich die Hilfe bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben ausfallen darf, und ob sie auf Nachfrage eine detaillierte Zusammenfassung der Vorlesungsinhalte liefern müssen. Zudem erschwerte oftmals fehlendes Grundlagenwissen der Studierenden die effiziente Hilfe. Im Gegenzug bemängelten Studierende, die einige Vorlesungen und Übungen versäumt hatten, dass ihre Fragen nicht im erhofften Umfang beantwortet wurden. Der Andrang zu Stoßzeiten, wie z.B. vor Abgabe des wöchentlichen Übungszettels größerer Veranstaltungen, wurde von beiden Seiten als zusätzliche Erschwernis angesehen.

Um diese kritischen Punkte anzugehen und das Serviceangebot des Helpdesk Mathematik zu erweitern, wurden bei der Reinhard Frank-Stiftung finanzielle Mittel für das Projekt „Professionalisierung des Helpdesk Mathematik“ eingeworben. Mit der Arbeit an dem auf zwei Jahre angelegten Projekt wurde im Wintersemester 2013/14 begonnen.

Maßnahmen zur Professionalisierung

In Anlehnung an die Empfehlungen von Croft et al. (2003) wurde zu Beginn der Förderphase ein kurzes Regelwerk erstellt, in dem erstmals deutlich beschrieben wird, was von den Helpdesk-Nutzerinnen und -Nutzern erwartet wird (regelmäßige Teilnahme an Vorlesung und Übung, selbstständige Nachbearbeitung der Vorlesung, Mitbringen der Vorlesungsmitschriften oder Skripte) und was diesen im Gegenzug geboten werden kann (Wissenslücken schließen, konkrete Fragen zum Vorlesungsstoff beantworten, Hilfestellung bei der Bearbeitung der Hausaufgaben geben). Diese Regeln wurden sowohl in Posterform in den Räumen des Helpdesk platziert, als auch online publik gemacht.

Um die Mitarbeiter des Helpdesks besser auf die Beratungssituation vorzubereiten, wurden zu Beginn des Wintersemesters 2014/15 zwei 90-minütige Workshops zu den Themen „Tipps und Tricks rund ums Korrigieren“ und „Die Sprechstunde im Helpdesk“ angeboten. Die hier behandelten Themen sind nicht Teil der regulär angebotenen hochschuldidaktischen Schulung, welche für studentische Hilfskräfte verpflichtend vom SZMA angeboten werden.

In Mitarbeitergesprächen wurden die häufigsten Fragen und Schwierigkeiten der Helpdesk-Nutzer ermittelt. Zu zehn dieser Themen wurden dann doppelseitige Lernzettel erstellt. Behandelt werden z.B. Potenzrechnung, komplexe Zahlen und Nullstellenbestimmung. Neben einer kurzen Einleitung, die das Thema vorstellt und einordnet, werden die wichtigsten Rechenregeln aufgelistet und konkrete Beispiele gegeben. Die Lernzettel liegen prominent platziert in den beiden Helpdeskräumen aus und werden zusätzlich auch über eine e-Learning Plattform angeboten. Durch diese Form der Bereitstellung werden je nach Situation unterschiedliche Funktionen erfüllt. Zum einen können die Materialien als Leitfaden bei den Beratungsgesprächen eingesetzt werden. Fragen können direkt mit dem Lernzettel beantwortet werden, und zum Abschluss des Gesprächs kann dieser, ggf. mit zusätzlichen Kommentaren versehen, dem Studierenden mitgegeben werden. Zum anderen ermöglichen sie eine Erstversorgung der wartenden Studierenden zu Stoßzeiten. Durch die Onlineverfügbarkeit ist auch ein erster Schritt getan, das Beratungsangebot außerhalb der Öffnungszeiten verfügbar zu halten.

Mit der Workshop-Reihe „30 Minuten Mathe“, die im Sommersemester 2014 startete, wurde ein zusätzliches Angebot des Helpdesk realisiert, das parallel zum regulären Betrieb stattfindet und zudem von einem wissenschaftlichen Mitarbeiter betreut wird. Es handelt sich hierbei um 30-minütige Kurzrepetitorien für Studierende im ersten und zweiten Semester, die ihr Wissen reaktivieren wollen oder bei konkreten Anwendungen auf Schwierigkeiten stoßen. Bei der Themengestaltung wird besonderes Augenmerk darauf gelegt, keine konkurrierende Veranstaltung zu den normalen Vorlesungen zu schaffen. So orientieren sich die Themen im Wintersemester am Schulstoff und im Sommersemester an Inhalten aus den Mathematikvorlesungen des Wintersemesters. Beworben wird das Angebot durch Aushänge und Email-Benachrichtigungen der potentiellen Teilnehmer. Um den Studierenden auch eine spontane Teilnahme zu ermöglichen, wurde nach einer anfänglichen Testphase auf eine Vorabanmeldung verzichtet. Bei der Konzeption von „30 Minuten Mathe“ wird darauf geachtet, dass die eigentliche Veranstaltung eine Dauer von 20 Minuten nicht überschreitet, da in der Regel ca. 10 Minuten für Diskussionen mit den Teilnehmern beansprucht werden. Für dieses Format haben sich auf Grund des bewusst reduzierten zeitlichen Umfangs insbesondere Zuordnungs- und Entscheidungsaufgaben bewährt. Ein kurzes Brainstorming zu Beginn ermöglicht eine Einschätzung des Kenntnisstands, und regt die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zur Mitarbeit an.

Das Feedback der Teilnehmer zu „30 Minuten Mathe“ ist durchweg positiv. Trotzdem gibt es noch einige Herausforderungen im Rahmen dieser Veranstaltung zu bewältigen. Hierzu gehört die Etablierung des Angebots zu Beginn des Wintersemesters, einem Zeitpunkt, zu dem die Veranstaltung bei den Studienanfängern noch gänzlich unbekannt ist. Auch die Terminfindung gestaltet sich schwierig, da sich der potentielle Teilnehmerkreis auf mindestens acht Studiengänge verteilt. Ferner variiert die Teilnehmerzahl pro Veranstaltung stark und ist aufgrund des Verzichts auf eine Vorabanmeldung stets unbekannt.

Um die Studierenden über die neuen Angebote des Helpdesk zu informieren wurde ein Blackboard Kurs eingerichtet. Neben den Lernzetteln und Ankündigungen rund um „30 Minuten Mathe“ findet sich hier auch die Rubrik „Klausurvorbereitung“. In Absprache mit Dozenten der Fakultät wurden Altklausuren anonymisiert und die einzelnen Aufgaben nach Themenbereichen sortiert. Zusätzlich wurden diese Aufgabensammlungen mit Hinweistexten versehen, da nicht jede Aufgabe von allen Studierenden gleichermaßen gelöst werden kann. Durch dieses Angebot konnten zum einen die häufige Nachfrage nach Altklausuren befriedigt werden und zum anderen ein effektives Werbemittel geschaffen werden, um auf die weiteren Angebote des Helpdesks aufmerksam zu machen. Durch die Anonymisierung wird zudem die Fokussierung auf bestimmte Aufgaben eines einzelnen Dozenten verhindert.

Ausblick

Die Verbesserung des Angebots Helpdesk Mathematik wird weiter vorangetrieben. Geplant ist ein Start noch vor Vorlesungsbeginn mit direkter Anknüpfung an die angebotenen Vorkurse. Die online-Präsenz soll mit der Bereitstellung von elektronischen Übungsaufgaben gestärkt werden. Hierbei wird auf das Assessmentsystem STACK zurückgegriffen, welches offene Aufgabenformate für Mathematik ermöglicht. Weitere Herausforderung ist die zielgruppengenaue Bewerbung des Angebots.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., Härterich, J., Kacso, D. (2011). Servicezentrum Mathematik und Anwendung an der Ruhr-Universität Bochum - Ein Zentrum für Mathematik im Dienst der Anwendung. *Das Hochschulwesen* 2/2011, 55-58.

Croft, T., Halpin, M., Lawson, D. (2003). *Good practice in the provision of mathematics support centre*s. Verfügbar unter www.mathcentre.ac.uk/resources/guides/goodpractice2E.pdf [19.02.2015]

Christian BÜSCHER, Dortmund

Was ist normal? – Individuelle Konzepte von Normalität als Fundament für den Vorstellungsaufbau in der Statistik

Mit den Bildungsstandards Mathematik ist der beschreibenden Statistik eine größere Rolle in der Schule zugekommen (Eichler & Vogel 2009, KMK 2003). Eng verbunden mit der Entwicklung von statistischem Denken ist der Begriff des *Informal Inferential Reasoning* (im Folgenden IIR; Makar, Bakker & Ben-Zvi 2011). Konstituierend für die Statistik ist hierbei nicht die reine Beschreibung von Daten, sondern die Fähigkeit, statistische Inferenzen zu ziehen. Dabei werden anhand von Daten allgemeine Aussage über die grundlegenden, unbekannten Phänomene getroffen, die diese Daten erzeugt haben (Makar & Rubin 2009). Lernprozesse zum IIR von Lernenden mit nur wenigen Vorerfahrungen werden dabei von der Forschung nur selten in den Blick genommen (Eichler & Vogel 2012). Der Verlauf solcher Lernprozesse (mit möglichen Zugänge für Lernende, vorunterrichtlichen Vorstellungen und intendierten Zielvorstellungen) muss weiter untersucht werden.

Die Rolle von IIR

IIR zeichnet sich durch eine Breite von Elementen aus: Die Beherrschung statistischer Konzepte wird verbunden mit speziellen Normen und Gewohnheiten – etwa der Haltung, Hypothesen zu generieren und Erklärungen in Daten zu suchen und zu bewerten (Makar, Bakker & Ben-Zvi 2011). Dabei müssen statistische Konzepte wie Verteilung, Zentrum, Streuung, Variabilität und Sampling miteinander verknüpft werden. Statistische Inferenzen sollen dabei nicht erst am Ende des Lernweges stehen, sondern von Anfang an die treibenden Herausforderungen für die Lernprozesse bilden. Wie es Lernenden gelingen kann, Vorstellungen zu statistischen Konzepten zu bilden und gleichzeitig die für statistische Inferenzen notwendigen Verknüpfungen dieser vorzunehmen, war Gegenstand einer Entwicklungsforschungsstudie mit folgenden Forschungsfragen:

(F1) Mit welchen individuellen Konzepten beschreiben Lernende Daten und wie nutzen sie diese für statistische Inferenzen?

(F2) Wie verknüpfen sie dazu verschiedene individuelle statistische Konzepte?

Design der Studie

Die vorliegende Studie ist Teil eines Dissertationsprojekts im forschungsmethodologischem Rahmen der lernprozessfokussierenden fachdidakti-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

schen Entwicklungsforschung (Prediger et al. 2012). In einem iterativen Prozess werden dabei Forschung und Entwicklung miteinander verschränkt, um gleichzeitig gegenstands- und prozessorientierte lokale Lerntheorien als auch praktisch erprobte Lernumgebungen zu generieren. In dem 2. Zyklus, aus dem hier berichtet wird, wurden Design-Experimente mit 5x2 Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse eines Gymnasiums in NRW durchgeführt (Gravemeijer & Cobb 2006), bei denen den die statistischen Inhalte Boxplots und Quartile noch nicht behandelt wurden.

Zur Datenauswertung wurden die vollständig videographierten Designexperiente teilweise transkribiert und unter interpretativem Paradigma mit Hilfe der Konstrukte von Vergnaud (1996) ausgewertet.

Design der Lernumgebung

Um die Lernenden zu informellen statistischen Inferenzen anzuregen, wurden sie aufgrund von Daten zu Temperaturverteilungen eines Monats (vgl. Abb. 1) zu weiteren Prognosen aufgefordert. So erhielten sie die Verteilung von Temperaturen innerhalb eines Monats Juni als Punktdiagramm, mit dem Auftrag, eine Vorhersage für 10 Tage desselben Monats im nächsten Jahr anzugeben und zu begründen. Anschließend wurde der betrachtete Zeitraum erhöht auf Monate Juni aus weiteren drei bzw. zehn Jahren (im Plot untereinander gedruckt), und die Prognosen ggf. angepasst; Abb. 1 zeigt die jeweiligen Temperaturverteilungen.

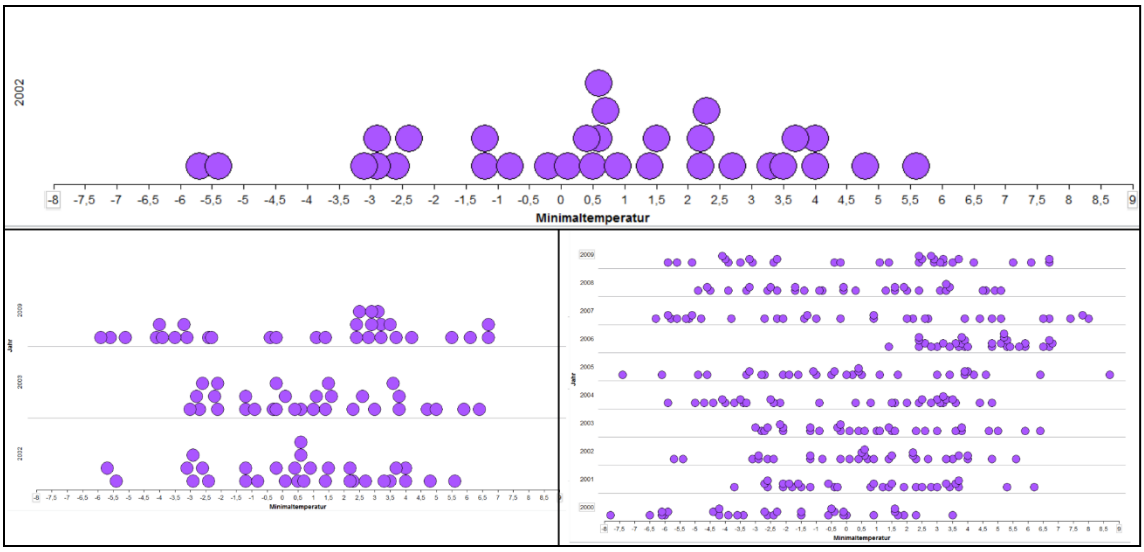


Abb. 1: Temperaturverteilung im Juni aus einem Jahr, drei Jahren, 10 Jahren als Datengrundlage für Prognosen

Empirische Einblicke in individuelle Konzepte

Die Haupttemperatur

Nachdem die Schülerin Amy eine Prognose (Abb. 2; gezeichnet sind mehr als 10 Tage) auf Grundlage von drei Jahren (Abb. 1 links unten) abgegeben hat, versucht sie, eine Begründung zu formulieren.

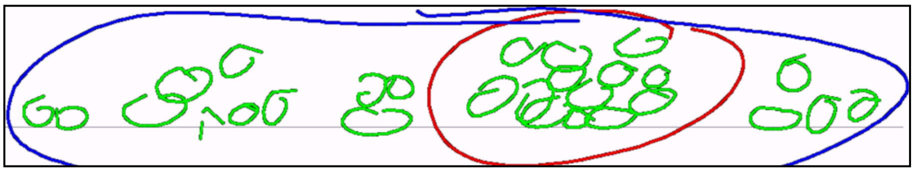


Abb. 2: Amys Prognose

> Amy: *Ich weiß nicht, wie ich das erklären soll. Also es gibt so ne Art Haupttemperatur, die ganz oft vorkommt. Und dann gibt's Temperaturen, die kommen nur manchmal vor, aber sie kommen trotzdem vor. […] Jede Temperatur, abgesehen von ganz kalt und ganz warm, [ist] immer ein bisschen verteilter.*

Amy nutzt ihre individuelle Vorstellung einer Haupttemperatur als Zugang zu den Daten und als Grundlage zum Treffen von statistischen Inferenzen. Ihr Vorgehen weist dabei Elemente verschiedener statistischer Konzepte auf: Sie beschreibt die gesamte *Verteilung*, indem sie Inferenzen zieht („vorkommen" auf Grundlage der anderen Verteilungen) aufgrund von *Zentrum* (rot, „ganz oft") in der Verbindung mit *Streuung* („nur manchmal"). Sie versucht sogar, die von der Mitte her abnehmende *Dichte* zu beschreiben („immer ein bisschen verteilter").

Normalität und Wahrscheinlichkeit

Sukzessive verändern die Lernenden ihren Blick auf die Daten und kombinieren ihre Beschreibungen mit weiteren probabilistischen Überlegungen.

> Amy: *Es ist unwahrscheinlich, dass es so warme Tage gibt, und wenn nur vereinzelt.*

Amy interpretiert Abweichungen von der Haupttemperatur hier als Ausnahmen, die nur vereinzelt auftreten. Damit bezieht sie *Variabilität* innerhalb der Daten als beschreibbare, probabilistische Größe in ihre Überlegungen ein. Abweichungen von einem Regelfall werden auch von der Schülerin Dora thematisiert.

> Dora: *Also es kann passieren, aber das ist nicht so typisch. So kalt wird es nicht im Juli.*

Dora bezieht sich dabei auf einige der zehn Verteilungen (Abb. 1, rechts unten), die sie als „Ausnahmejahr" bezeichnet. Auch sie bezieht Unsicherheit in ihre Aussagen ein („kann passieren"), aber sieht in der gesamten

Verteilung des einen Jahres eine Abweichung vom Regelfall („nicht so typisch"). Die gesamte Verteilung wird dadurch als konkretes *Sampling* eines Klimaphänomens gedeutet, das in diesem Fall nicht repräsentativ ist. Dieser Zusammenhang zwischen konkretem Sampling und der Variabilität der Daten wird bei Fionas Bewertung ihrer Prognose deutlich.

Fiona: *Ich glaube aber nicht dass das so passiert. Die Wahrscheinlichkeit ist es, dass das passiert. Aber das kann man ja nicht so bestimmen.*

Normalität als Fokus

Die Frage „was ist normal?" erweist sich in zweierlei Hinsicht als tragend für einen Vorstellungsaufbau: Den Lernenden bietet sie einen Zugang zu den Daten und Anknüpfungspunkte an individuelle Vorstellungen wie „Haupttemperatur" oder „typisch", welche sie zum Treffen von Inferenzen nutzen. Und die dabei verknüpften statistischen Konzepte erhalten für die Lernenden direkte Bedeutsamkeit; Zentrum und Streuung können beschreiben, welche Temperaturen normal für eine Region sind.

Gegenstand weiterer Forschung wird die Verknüpfung dieser individuellen Vorstellungen mit regulären statistischen Darstellungen wie Boxplots sein, um es Lernenden zu ermöglichen, in der Schule vorstellungsgestütztes inferential reasoning zu betreiben.

Literatur

Eichler, A., & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner.

Eichler, A., & Vogel, M. (2012). Basic modelling of uncertainty: young students' mental models. *ZDM*, *44*(7), 841-854.

KMK, Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* München: Luchterhand.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 152-173.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82-105.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J., & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen–Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, *65*(8), 452-457.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (Hrsg.), *Educational design research*, 17-51. Routledge.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning*, 219-239. Hove (UK): Psychology Press

Katja DERR, Reinhold HÜBL, Tatyana PODGAYETSKAYA, Mannheim

Betreuungsangebote in einem Online Vorkurs Mathematik: Modularisierung als Antwort auf heterogene Studierendenschaft?

1. Einleitung

Im BMBF-geförderten Verbund-Projekt „optes - Optimierung der Selbststudiumsphase“ werden Methoden und Konzepte zum Einsatz computergestützter Vorkurse in Mathematik entwickelt. Studienanfänger/-innen der Ingenieurwissenschaften sollen dabei möglichst früh angeregt werden, ihr Grundlagenwissen in Mathematik zu testen und gegebenenfalls aufzufrischen.

Eine Herausforderung bei der Gestaltung von Vor- und Brückenkursen stellen die ungleichen Ausgangsvoraussetzungen der Teilnehmer/-innen dar; nicht nur ihre Vorkenntnisse in Mathematik unterscheiden sich teilweise erheblich, auch die Fähigkeit zum selbstgesteuerten Lernen ist sehr unterschiedlich ausgeprägt (Baumert et al., 2000; Biehler et al., 2012). Um diese heterogene Gruppe zu adressieren werden im optes Projekt verschiedene didaktische und technische Maßnahmen angeboten und evaluiert. Im optes Teilprojekt „formatives eAssessment“, das an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Mannheim angesiedelt ist, wurde für den Jahrgang 2014/15 ein modulares Vorkursangebot erprobt. Zusätzlich zum Selbststudium auf der Online Plattform konnten angehende Studierende einen einwöchigen Präsenzkurs und / oder einen einmonatigen Kurs „betreutes eLearning“ belegen.

2. Konzept

Das Programm zur Studienvorbereitung beginnt mit einem umfassenden diagnostischen Online-Selbsttest, der zehn mathematische Themengebiete abdeckt und auf dem Mindestanforderungskatalog der Arbeitsgruppe „cooperation schule:hochschule“ (cosh, 2014) basiert.

Nach Abgabe des Tests erhalten die Teilnehmer/-innen ein Feedback mit Gesamtpunktzahl, einen allgemeinen Text zur Interpretationshilfe sowie eine Auswertung nach den zehn mathematischen Kategorien. Bei Bedarf wird eine Empfehlung ausgesprochen, dieses Thema zu bearbeiten. Hierzu werden Online-Lernmodule zur Verfügung gestellt, die bis zum Studienbeginn bearbeitet werden können. Zur Erfassung des Lernerfolgs wird in der ersten Woche nach Studienbeginn in den PC-Räumen der Hochschule ein zweiter Test durchgeführt. Dieser enthält Aufgaben, die vom Schwierig-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

keitsgrad mit denen des Einstiegstest vergleichbar sind und die gleichen mathematischen Grundlagenthemen abdecken.

Dieses Basis-Angebot steht allen angehenden Studierenden der Fakultät Technik zur Verfügung und wurde in den Jahren 2011 bis 2014 sukzessive auf- und ausgebaut. Neben der Analyse und schrittweisen Verbesserung der Qualität der Pre- und Post-Tests wurde die jährliche Evaluation dazu genutzt das didaktische Konzept anzupassen und zu optimieren. So werden seit 2012 einwöchige Präsenzkurse für Studienanfänger/-innen mit Fachhochschulreife angeboten, da diese Gruppe die niedrigsten Einstiegstestergebnisse (und auch den geringsten Lernzuwachs) erzielt hatte. Angesichts wachsender Nachfrage nach Unterstützung bei der Studienvorbereitung wurden diese Präsenzkurse für alle Studienanfänger geöffnet und das Angebot durch einen einmonatigen Kurs „betreutes eLearning“ erweitert. Das Konzept basiert auf der Arbeit des optes Teilprojekts eMentoring (Halm et al., 2013), sowie auf Erfahrungen der DHBW Mosbach, die einen ähnlichen Ansatz verfolgt (Deimling, 2012).

Die angehenden Studierenden können sich selbst für den Kurs anmelden und werden auf Basis ihrer Einstiegstestergebnisse einer Gruppe zugeordnet, die ähnliche Ergebnisse pro Themengebiet erzielt hat (und dann die gleichen Lernmodule bearbeitet). Die Kommunikation zwischen den Teilnehmer/-innen läuft über themenspezifische Foren, Fragen können von Dozent/-innen oder Peers beantwortet werden.

Neben der stärkeren Strukturierung des Lernplans und Kommunikation in der Gruppe besteht der zentrale Unterschied zum Selbststudium in einer höheren Verbindlichkeit. Die Kursteilnahme wird nur bestätigt, wenn ein Teilnehmer vier Aufgabenblätter rechtzeitig bearbeitet und eingereicht hat (ein Aufgabenblatt pro Thema und Woche). Dieses offene Aufgabenformat ermöglicht den Dozent/-innen einen Einblick in die einzelnen Rechenschritte der Teilnehmer/-innen; anders als bei geschlossenen oder halb offenen Online-Aufgabentypen kann so nachvollzogen werden, ob und an welcher Stelle eines Lösungsansatzes eine Fehlkonzeption vorliegt.

3. Teilnehmerdaten

Insgesamt liegen Einstiegs- und Kontrolltestdaten für gut 80 Prozent der Studienanfänger/-innen der Fakultät Technik vor (603 von 722), außerdem Fragebogendaten wie Alter, Bundesland, schulischer Hintergrund oder Mathematiknoten der letzten Schuljahre. Die sechs einwöchigen Präsenzkurse wurden im Zeitraum August bis November durchgeführt (n=119); der vierwöchige Kurs „betreutes eLearning“ fand im September 2014 mit 132 Teilnehmer/-innen, verteilt auf elf Gruppen, statt.

4. Ergebnisse

Im Einstiegstest wurden durchschnittlich 50% der Punkte erreicht, wobei die Ergebnisse eine starke Streuung aufweisen (Minimum: 7 %; Maximum: 93 %; Standardabweichung: 16,0). Im Hinblick auf die gewählte Lernform liegt der Mittelwert der Gruppe, die *kein* Zusatzangebot gewählt hat, etwas über diesem Durchschnitt (MW Einstiegstest: 52,4%; n=386). Die Teilnehmer/-innen an einem (oder beiden) Zusatzangebot(en) erzielten einen Mittelwert von 44,9% (n=217). Es haben sich also vor allem Studienanfänger/-innen mit schwächerem Einstiegstestergebnis für die Teilnahme an einem Zusatzangebot entschieden, wobei die Präsenzkurse von Studienanfänger/-innen mit Fachhochschulreife bevorzugt wurden. Angehende Studierende mit allgemeiner Hochschulreife (Gymnasium) waren dagegen stärker im Kurs „Betreutes eLearning" vertreten.

Betrachtet man den Unterschied zwischen Einstiegs-und Kontrolltest, so konnte insgesamt eine Steigerung auf 55 % festgestellt werden. Die Teilnehmer/-innen, die den Kurs „Betreutes eLearning" mit Zertifikat abgeschlossen haben (n=85), haben sich von durchschnittlich 47,5% im Einstiegstest auf 54,2% im Kontrolltest verbessert. Im Vergleich dazu ist der Lernerfolg der Präsenzkursteilnehmer (n=91) mit einer Verbesserung von 43,7% auf 47,3% geringer. Den stärksten Anstieg von 44,2% auf 53,3% verzeichneten die 28 Lernenden, die an beiden Kursformen teilgenommen haben.

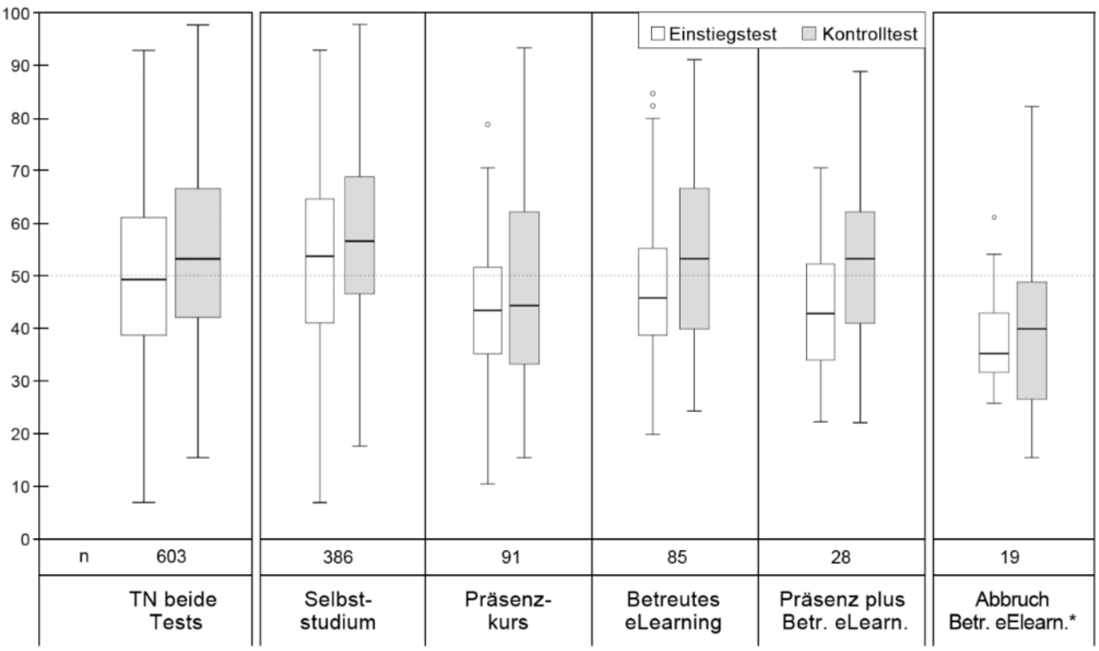


Abbildung: Boxplots der Einstiegs- und Kontrolltestergebnisse 2014 insgesamt (n=603) und in den unterschiedlichen Lernformen Selbststudium, Präsenzkurs und Betreutes eLearning (*in dieser Gruppe sind 6 Teilnehmer enthalten, die danach am Präsenzkurs teilgenommen haben)

5. Fazit

Der Ansatz, die sehr heterogene Gruppe der Studienanfänger/-innen durch ein modulares Angebot zu adressieren, hat sich bewährt. Während Studienanfänger/-innen mit gutem und sehr gutem Einstiegstestergebnis kleinere Wissenslücken im Selbststudium schließen konnten, wurden insbesondere Studienanfänger/-innen mit schwächeren Einstiegstestergebnissen zur Teilnahme an den Zusatzangeboten motiviert.

Das Kursangebot „betreutes eLearning" hat dabei zu einem deutlich besseren Lernerfolg geführt als der Präsenzkurs. Dieses Ergebnis ist in erster Linie konzeptionell begründet, da über Abgabe und Korrektur von Übungen eine stärkere Verbindlichkeit hergestellt wurde. Durch die Kursdauer von einen Monat wurden außerdem längere Übungsphasen ermöglicht. Studienanfänger/-innen, die über die Teilnahme am einwöchigen Präsenzkurs hinaus keine weiteren Lernaktivitäten unternommen haben, haben im Mittel nur einen geringen Lernzuwachs gezeigt. Die Gruppe, die das betreute eLearning abgebrochen hat (n=19), hatte im Einstiegstest (MW: 38,0%) und im Kontrolltest (MW: 39,9%) ein unterdurchschnittliches Ergebnis und konnte ganz offenbar kaum von dem Angebot profitieren.

Beim Vergleich der Kursformen ist zu berücksichtigen, dass die Vorkenntnisse der Teilnehmer/-innen an der eLearning Variante durchschnittlich etwas besser waren als die der Präsenzkursteilnehmer/-innen. Dieser größere Abstand ist durch einen einwöchigen Kurs offensichtlich nicht zu schließen, und so haben Studienanfänger/-innen, die sich für beide Kursangebote entschieden haben, auch den größten Lernzuwachs zu verzeichnen.

Literatur

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Tillmann, K.-J. & Weiß, M. (2000). *Fähigkeit zum selbstregulierten Lernen als fächerübergreifende Kompetenz*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R. & Wassong, T. (2012). Self-regulated learning and self assessment in online mathematics bridging courses. In: Juan et al. (Hrsg.), *Teaching Mathematics Online: Emergent Technologies and Methodologies* (S. 216–237). Hershey, PA: IGI Global.

cosh cooperation schule:hochschule (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern. www.mathematik-schule-hochschule.de.*

Deimling, E. (2012). *Betreuter Onlinekurs Mathematik zur Vorbereitung auf das Studium www.dhbw-mosbach.de/mediendidaktik.*

Halm, L., Heubach, M., Mersch, A. & Wrenger, B. (2013). Zwei Seiten des Online-Lernens in mathematischen Grundlagenveranstaltungen: Unterstützung Lehrender und Betreuung Studierender im Selbststudium, *Tagungsband zum 1. HD MINT Symposium* (S. 177–183).

Eva DIETZ, Bamberg

Mathe? Klasse! 4 teachers – Erprobung eines Fortbildungskonzeptes für Grundschullehrkräfte

Professionswissen inkludiert für alle Lehrämter auch Fachwissen. Im Studium (1. Phase) für das Lehramt an Grundschulen sind fachliche Anteile – auch in Bayern– meist unterrepräsentiert bzw. Mathematikdidaktik ist mitunter gar nicht verpflichtend. Mathematische Fortbildungen (3. Phase) haben folglich eine große Bedeutung. Im Beitrag wird das Design des eigenen Fortbildungskonzeptes *Mathe?Klasse! 4 teachers* vorgestellt sowie Einblick in erste Ergebnisse der begleitenden Fragebogenstudie gegeben.

1. Motivation

COACTIV (Krauss et al. 2008) hat in seinen Ergebnissen konstatiert, dass Gymnasiallehrkräfte über mehr Fachwissen gegenüber anderen Lehrkräften und dadurch auch über mehr fachdidaktisches Wissen verfügen. Somit ergibt sich eine hohe Bedeutung des Fachwissens. Des Weiteren hat TEDS-M (Blömeke et al. 2010) offengelegt, dass Grundschullehrkräfte eine eher durchschnittliche oder zum Teil auch nur unterdurchschnittliche Kompetenz im Fachwissen aufweisen. Lipowsky (2010) weist darauf hin, dass fachdidaktisches und fachwissenschaftliches Wissen der Lehrkräfte für den Schulerfolg der Kinder im Mathematikunterricht wichtig sind. Die Mathematikausbildung im Grundschullehramtsstudium umfasst in Bayern nicht etwa 20 %, wie im Aufruf von DMV u.a. 2012 gefordert, sondern lediglich rund 6 %. Auch im Referendariat spielt die Förderung von Fachwissen kaum eine Rolle. Infolgedessen kann die weitere Professionalisierung mathematischer Kompetenzen nur im tertiären Bereich der Ausbildung, sprich nach dem Referendariat, erfolgen. Da dies durch Fortbildungen gewährleistet wird, wurden in einer Studie die Fortbildungsangebote für bayerische Grundschullehrkräfte im Beispieljahr 2011 vollständig analysiert.

2. Studie zur Analyse des Ist-Stands an Fortbildungsangeboten

In Bayern ist die Internetseite *FIBS* (Fortbildung in bayerischen Schulen) die zentrale Anlaufstelle für Lehrkräfte, die eine Fortbildung besuchen möchten, da alle Angebote staatlich anerkannt werden müssen und erst danach bei FIBS online zu finden sind. In der Studie wurden alle Fortbildungsangebote für Mathematik für das Beispieljahr 2011 untersucht, die durch die Stichwörter *Mathematik & Grundschule* gekennzeichnet waren.

Von den insgesamt 320 Angeboten, wurden 269 durch interne Anbieter wie Schulämter und Regierungen sowie 51 durch externe Anbieter wie Univer-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

sitäten, Verlage und Verbände ausgeschrieben. Alle Angebote wurden inhaltlich nach den Kategorien der Wissensarten (fachlich, fachdidaktisch, allgemeinpädagogisch) nach Shulman (1986) analysiert. Selbst mit einem sehr wohlwollenden Blick auf diese Mathematikfortbildungen lassen sich keine fachwissenschaftliche Angebote erkennen; und das obwohl Lipowsky (2012) konstatiert hat, dass wirksame Fortbildungen einen engen Fachbezug aufweisen sollten. Bei den externen Anbietern sind immerhin fast 90 % der Angebote fachdidaktischer Natur, was sich darin begründen könnte, dass Universitäten eine Vielzahl der Angebote im Jahr 2011 stellten. Bei den internen Anbietern sind fast die Hälfte aller Angebote nur mit allgemeinpädagogischen Inhalten gefüllt (s. Abb.1).

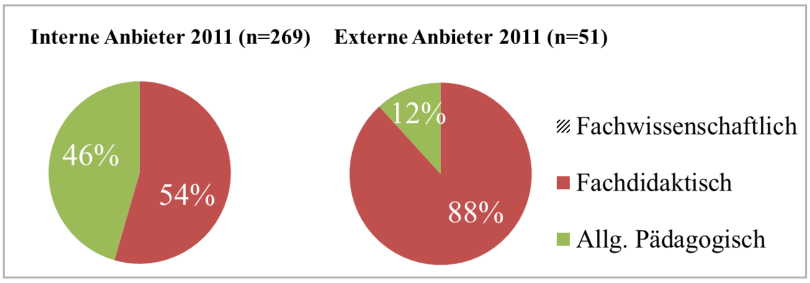


Abbildung 1: Analyse der Fortbildungsangebote (Grundschule & Mathematik) für Bayern im Jahr 2011

Die Analyse des Ist-Stands an Angeboten zeigt somit, dass die Fortbildungen fachdidaktische, zu einem sehr großen Teil aber nur allgemeinpädagogische Inhalte aufweisen. Fachliche Angebote, die für die weitere Professionalisierung der Lehrkräfte nötig wären, konnten keine identifiziert werden. Daher ist das Ziel der Arbeit es ein solch fehlendes, fachliches Fortbildungskonzept theoriegeleitet exemplarisch auszuarbeiten und zu erproben. Handlungsleitend sind folgende Forschungsfragen:

1. Ist das Design fachlicher Fortbildungsmodule nach den Prämissen der Wirksamkeitsforschung von Lehrerfortbildung möglich?
2. Lassen sich Effekte der fachlichen Fortbildung auf Teilnehmermerkmale nachweisen?
3. Erfahren fachliche Fortbildungen Akzeptanz seitens der Lehrkräfte?

3. Design des Fortbildungskonzeptes „Mathe?Klasse! 4 teachers“

Die Forschungsarbeit ist als qualitative Studie angelegt, in deren Zentrum die exemplarische Ausarbeitung und Durchführung eines fachlichen Fortbildungskonzeptes steht. Für die *inhaltliche Konzeption* sind die *Empfehlungen für Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik* von DMV u.a. (2008) richtungsweisend. Darin werden fachliche Kompetenzen formuliert, „über die eine Lehrkraft zur Bewältigung ihrer Aufgaben im Hinblick auf das jeweilige Lehramt verfügen soll“ (DMV u.a. 2008, 1). Aus den dort gelisteten grundschulrelevanten Themengebieten wird der erste Bereich *Arithmetik und Algebra* exemplarisch ausgewählt. In allen Themengebieten sind verschiedene Inhalte zu finden, über die „eine Lehrkraft verfügen [soll], die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, auch dann, wenn sie kein Fachstudium absolviert hat." (ebd., 1). Für Arithmetik und Algebra kristallisieren sich dort vier Schlagworte für die Inhalte des Fortbildungskonzeptes heraus: *Stellenwertsystem, Grundrechenarten, Teilbarkeit* und *Muster*.

Die Begleitforschung folgt einem Pre-Post-Follow up Design und erhebt in halbstandardisierten Leitfadeninterviews und Fragebögen Wirkungen auf Kompetenzen und Einstellungen der Lehrkräfte und die Akzeptanz des Angebots. Der Gesamtzeitraum für die Durchführung der Fortbildung einschließlich der Befragungen beläuft sich auf 11 Monate (s. Abb. 2).

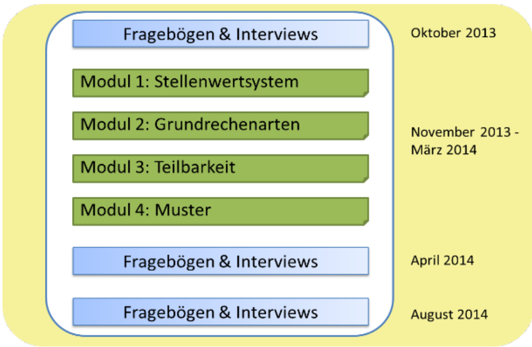


Abbildung 2: Design des Fortbildungskonzeptes Mathe?Klasse! 4 teachers

Für die *methodische Konzeption* der Fortbildung sind die Prämissen der Wirksamkeitsforschung für Fortbildungen (vgl. Lipowsky 2012) grundlegend. Es wurde konstatiert, dass sehr kurze Fortbildungen keine Effekte auf Lehrpersonen haben und ein längerer Fortbildungszeitraum erfolgreich ist. Somit ergeben sich für das vorliegende Konzept keine einmalige Fortbildung, sondern vier Fortbildungsmodule. Weiterhin zeigt sich, dass eine Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen für effektive Fortbildungen notwendig ist. Jedes Modul weist daher eine dreigliedrige Struktur auf, beginnend mit der Inputphase, die zu allen Zeitpunkten in der Lernwerkstatt Mathematik an der Otto-Friedrich-Universität stattfand. In der Entdeckerphase sollen die Lehrkräfte, die in der Inputphase gemeinsam erarbeiteten Inhalte im eigenen Unterricht wiederentdecken und sich bewusst machen, wann sie die Inhalte der Fortbildung im Unterricht (Vorbereitung und Durchführung) benötigen. In der Reflexionsphase arbeiten die Lehrkräfte einen Entdeckerbericht aus und geben ihn vor Beginn des nächsten Moduls bei der Forschungsleiterin ab. Inhalte des Berichts sind beispielsweise die gemachten Erfahrungen während der Entdeckerphase. Außerdem soll den Lehrkräften die Möglichkeit zum kollegialen

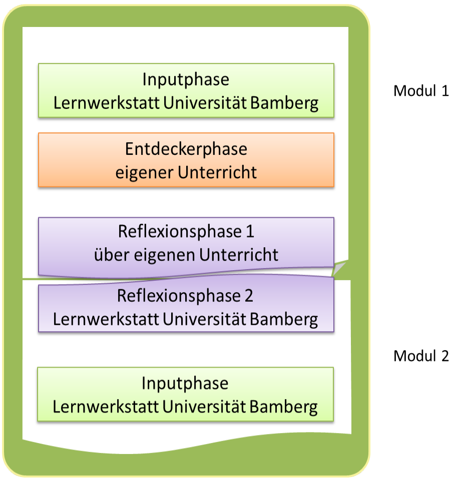


Abbildung 3: Modulstruktur des Fortbildungskonzeptes Mathe?Klasse! 4 teachers

Austausch in der Reflexionsphase gegeben werden, so teilt sich diese Phase in die individuelle (Bericht) und die sozial-interaktive Reflexion (Diskussion der Erkenntnisse) (s. Abb. 3). Anschließend findet die nächste Inputphase statt.

4. Erste Trends der Fragebögen und Ausblick

An der Fortbildung nahmen elf Lehrkräfte teil, das Durchschnittsalter lag bei 49 und fast die Hälfte der Lehrkräfte hat Mathematik nicht studiert, weder fachdidaktisch noch fachlich. Im Fragebogen wurden sowohl Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik, als auch Kompetenzen der Lehrkräfte erhoben, um Veränderungen diesbezüglich zu analysieren. Es kann konstatiert werden, dass die Lehrkräfte mathematische Fähigkeiten als von der Umwelt beinflussbar, also veränderlich ansehen. Ebenso konnte festgestellt werden, dass die Lehrkräfte laut Selbstauskunft im Mathematikunterricht eher prozessorientiert arbeiten. Fachliche und fachdidaktische Kompetenzen wurden für jedes Inhaltsmodul erhoben. Sowohl bei den Einstellungen als auch den Kompetenzen der Lehrkräfte zeichnen sich leichte Verbesserungen im Vergleich vom ersten zum letzten Befragungszeitpunkt ab. Diese Ergebnisse sind als erste Trends zu verstehen und bedürfen weiterer Auswertung. Aktuell werden die 36 Interviews (gesamt 715 min) transkribiert. Als weiteres Forschungsvorgehen werden die Interviews, Fragebögen und Entdeckerberichte mit der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) ausgewertet und kategorisiert.

Literatur

Blömeke, S. et al. (2010a). *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primärstufenlehrkräfte für die im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Krauss, S. et al. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 29, *3/4*, 223–258.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). „Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen" In *Schulpädagogik heute*, 5 (2012) 3, 1–17.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse.* Weinheim: Beltz.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. In *Educational Researcher, 15 (2)*, 4–14.

DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.* Empfehlungen von DMV, GDM und MNU. (http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf, 06.02.2014).

Hans M. DIETZ, Paderborn

Some CAT's Experiences With Complex Signs

1. Vorbemerkung

Zu den größten Herausforderungen für Studienanfänger besonders in nicht-mathematischen Studiengängen zählt die mathematische Grundlagenausbildung. Die Ursache dafür liegt sehr oft in unangepassten Studien- und Arbeitsmethoden sowie im mangelnden Verständnis für die „Sprache" der Mathematik. Zur Unterstützung der Studierenden wurde in der „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I", die der Autor seit Jahren an der Universität Paderborn liest, mit „CAT" ein System gezielter methodischer Instruktionen in die regulären Kurse *integriert* (Dietz 2013). Der vorliegende Beitrag beleuchtet einige Aspekte von CAT aus semiotischer Perspektive.

1. Komplexe Zeichen und ihr Kontext

Zeichen als interagierende Einheit von *Objekt, Representamen* und *Interpretant* sind das grundlegende Konstrukt der Semiotik von Peirce, auf die wir uns im Sinne von Hoffmann (2005) beziehen. Der Zeichenbegriff ist überaus weitreichend und umfasst speziell auch mathematische Zeichen, Phrasen und ganze Texte, ebenso aber auch Graphiken. In ihrer Kommunikationsfunktion werden solche Zeichen typischerweise von einem „Autor" geschaffen und sind von „Rezipienten" zu interpretieren. Peirce hat betont, dass für die Entstehung des Interpretanten der *Kontext*, von ihm als *collateral knowledge* bezeichnet, essentiell ist. Ergänzend unterstreichen wir, dass nicht nur der Autor, sondern auch jeder mögliche Rezipient beim (erstmaligen) Interpretieren eines Zeichens über einen individuellen, mental hinterlegten Kontext verfügt. Die Problematik der Kommunikation besteht also u.a. darin, dass ein und dasselbe Zeichen (Representamen) je nach Kontext unterschiedliche Interpretanten generieren kann. Wenn es darum geht, unbeabsichtigte Interpretationen zu vermeiden, müssen daher genügend Informationen über den relevanten Kontext zur Verfügung stehen.

Die Aufgabe der Konstruktion von Bedeutung aus Zeichen stellt sich oft nicht allein für ein einzelnes Zeichen, sondern für Gesamtheiten aus mehr oder weniger komplex strukturierten Zeichen und ist in einem dynamischen Prozess zu lösen. Dabei liefert der jeweils schon interpretierte Teil der Gesamtheit zugleich wesentliche Informationen über den Kontext der anderen Zeichen. Beispielsweise wird in einem Roman der erste Satz auf Seite 319 im Kontext der Seiten 1-318 und zusätzlich im gesamten mentalen Kontext des Lesers interpretiert. Im folgenden Beispiel kann der gesamte „Text" als

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zeichen verstanden werden, welches seinerseits eine hierarchische Struktur von Subzeichen bildet:

… *Weil die Funktion f an der Stelle x als stetig angenommen wurde,*
gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Zur korrekten Interpretation bedarf es einer guten Interpretationstechnik, die die jeweils relevanten Kontextebenen sorgfältig bewusst macht. Daher spielt „Kontext“ in der *Lehre* – speziell von Mathematik – eine besonders wichtige Rolle, denn hier bestehen besonders hohe Ansprüche an die Entwicklung korrekter Interpretationen von Zeichen. Andererseits sind diese fast immer nur vor dem Hintergrund des richtigen Kontextes möglich. Ein Merkmal guter Lehre sollte es somit sein, nicht allein „Zeichen“ zu vermitteln, sondern zugleich - bzw. besser vorab - auch Informationen über den relevanten Kontext, um Fehlinterpretationen vorzubeugen.

2. CATs Umgang mit Kontext

„CAT“ steht für *Checklisten, Ampel* und *Toolbox* als grundlegende methodische Prozeduren, die u.a. den Studienverlauf, die notwendige Selbstkontrolle und auch das Problemlösen unterstützen. Die wichtigste Checkliste „Lesen“ leitet die Studierenden beim sinnentnehmenden Lesen mathematischer Formulierungen. Beginnend beim „Buchstabieren“ führt sie zum Aufbau eines validen mentalen Konzeptes (Dietz 2013). Die Rolle des Kontextes ist dabei grundlegend. So kann z.B. die Bedeutung von

$$\mathrm{C} := \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \tag{1}$$

nur verstanden werden, wenn die Rolle bzw. Bedeutung jedes Zeichens in dieser Zeichenkette vollständig verstanden wurden. In der Regel ergibt sich diese aus dem Kontext, ist also von dort zu „importieren“. In einer guten Vorlesung werden die Zeichen „ := “ und „ ^ “ *vor* dem ersten Auftreten von (1) eingeführt und sind somit Bestandteil des *Kurswissens* als Kontext. Damit sie dort leicht und sicher aufgefunden werden können, hält CAT die Studierenden an, alle neuen Begriffe und Symbole in einer *Vokabelliste* zu verzeichnen. Diese sollte neben dem Symbol bzw. Begriff selbst auch seine präzise Definition sowie ggf. Hinweise zur Syntax und zum Vorlesen enthalten. Die Vokabelliste bildet somit ein lexikalisches Grundgerüst des begrifflichen Kurswissens in *materieller* Form. Indem die Studierenden damit arbeiten, wird dieses – hoffentlich – möglichst genau auch *mental* abgebildet. Im Idealfall kann so die Bedeutung von „ := “ und „ ^ “ direkt aus dem Gedächtnis importiert werden. - Wir merken an, dass das Verständnis von

(1) weiterhin auch die Klärung von Bedeutung bzw. Rolle von „A“, „B“ und „C“ voraussetzt; nähere Ausführungen hierzu sowie über den gesamten Weg vom Buchstabieren bis hin zum Konzept siehe z.B. Dietz (2012).

Nun besitzt (1) in verschiedenen Kontexten unterschiedliche Bedeutungen. Es handelt sich um ein einfaches, aber dennoch typisches Beispiel dafür, dass der Kontext für das Verständnis entscheidend ist. Wegen dieser wichtigen Rolle wird das Thema „Kontext“ in der *Vorlesung* thematisiert. Die Studierenden werden unter dem Logo „wwww“ („*wissen was, wie gut und woher*“) schon frühzeitig zu einem bewussten Wissensmanagement angeregt. Den Zusammenhang verschiedener Kontext-Segmente zeigt Abbildung 1. Die Studierenden werden angeleitet, bei einem Bedeutungs-

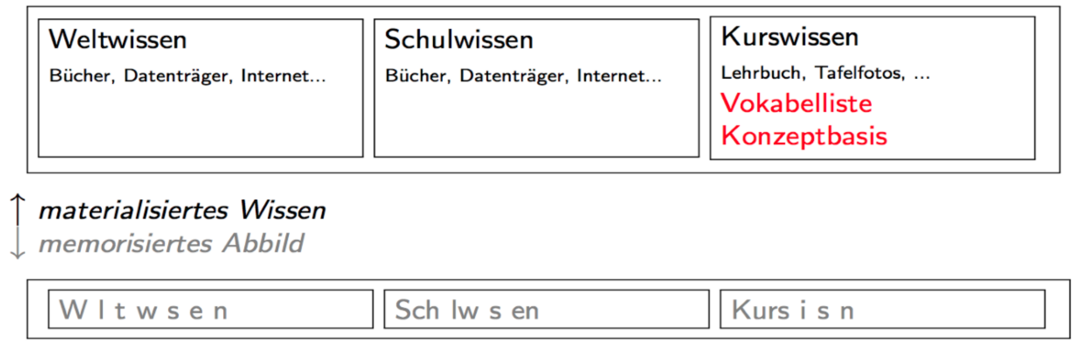


Abbildung 1: Tafelbild zum Wissensmanagement

“Import“ aus dem Kontext primär auf das Kurswissen zuzugreifen; erst wenn Zeichen bzw. Begriffe dort nicht gefunden werden, wird das Schulwissen und erst danach das Weltwissen herangezogen. Da das im Gedächtnis gespeicherte Wissen in der Regel unvollständig ist, ist im Zweifelsfall die materielle Wissensbasis der mentalen vorzuziehen. Die Forderung, den jeweils relevanten Kontext stets genau zu kennen und – ggf. in Form von Referenzen – auch angeben zu können, wird jedoch nicht allein abstrakt erhoben, sondern zugleich sehr konkret in den Präsenz- und Hausübungen verankert, wie z.B. die Abbildung 2 zeigt.

Begründen Sie jeden Ihrer Lösungsschritte (Umformungen, Folgerungen etc.), indem Sie genau angeben, welche Aussage aus der Vorlesung, dem kursbegleitenden Lehrbuch, den bereits gelösten Übungsaufgaben bzw. dem vorausgesetzten Schulwissen dabei verwendet wird. Die Angaben können z.B. nach folgendem Muster erfolgen:

- *”Satz des Pythagoras” (Schulwissen)*
- *Satz 12345 aus ECOMath 1, Seite 97890*
- *laut Vorlesung vom 18.11.14, Tafelfoto 92 etc.*

Abbildung 2: Auszug aus Hinweisen zu einer Übungsaufgabe

3. Einige Erfahrungen und Probleme

Eine Erhebung im WS 2014/15 zeigte, dass das Wissensmanagement von Studierenden zufriedenstellend umgesetzt wird (vgl. Feudel 2015). Auch beim verstehenden Lesen konnten mit Hilfe von CAT Fortschritte erzielt werden. Dennoch sind bei den Studierenden noch immer hohe Fehlerraten beim mathematischen Lesen zu verzeichnen. Allen Erfahrungen aus Prüfungen, Sprechstunden etc. zufolge besteht die Hauptursache in der *mangelnden Memorierung* grundlegender Begriffe und Sachverhalte. Eine wesentliche Ursache hierfür wiederum dürfte in dem erwiesenermaßen *zu geringen Arbeitsvolumen* vieler Studierender liegen; jedoch scheinen in den letzten Jahren auch neue gesellschaftliche Einflüsse zu wirken. Hinzu treten Probleme im Bereich der *Abstraktion* sowie in den metakognitiven Fähigkeiten zur *Prozessorganisation* wie z.B. das „*mental pointer problem*": Hierbei wird die Aufmerksamkeit jeweils nicht auf das korrekte Objekt fokussiert; beim Arbeiten in hierarchischen Strukturen werden die jeweils relevanten Hierarchieebenen verwechselt u.ä.. Beispielsweise wird die Aussage *„Wenn f' nichtnegativ ist, so ist f wachsend"* über eine beliebige differenzierbare reelle Funktion f auf einem Intervall oft falsch verwendet, indem zwecks Überprüfung von f auf Monotonie untersucht wird, ob f' wachsend (statt nichtnegativ) ist.

4. Fazit

Es kann erwartet werden, dass beim verstehenden „Lesen von Mathematik" weitere Fortschritte erreichbar sind, wenn Art und Ursachen der genannten Probleme besser verstanden werden. Dies sollte Gegenstand künftiger Untersuchungen sein. Die Erkenntnisse über den allgemein zu niedrigen Arbeitsaufwand der Studierenden ermutigen überdies dazu, in der Lehre ein hohes Anforderungsniveau in der Lehre aufrechtzuerhalten.

Literatur

Dietz, H.M. (2013). CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. In R. Biehler et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase – Herausforderungen und Lösungsansätze.* Heidelberg u.a.: Springer, erscheint 2015.

Hoffmann, M.H.G., (2005). *Erkenntnisentwicklung.* Klostermann, Frankfurt am Main.

Dietz, H.M. (2012). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Das ECOMath Hand buch.* Heidelberg u.a.: Springer Gabler.

Feudel, F. (2015). Studienmethodische Förderung in der Mathematik für Wirtschaftswissenscnaftler – Chancen und Schwierigkeiten. Vortrag auf der GDM Jahrestagung 2015 in Basel. BZMU 2015.

Ernestina DITTRICH, Karlsruhe

Mathematik erleben, entdecken und begreifen außerhalb des Schulunterrichts - Fachdidaktik und Schülerlabor

Das Schülerlabor Mathematik der Abteilung für Didaktik der Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) mit über 80 Exponaten unterstützt das entdeckende Lernen, ohne die Mathematik auf eine spielerische Ebene einzuschränken. Je nach Neigungen und Vorkenntnissen sind unterschiedliche Strategien nötig. Interaktive mathematische Experimente ermöglichen den Besuchern einen neuen Zugang zur Mathematik. In Workshops wird das Verständnis für mathematische Themen vertieft. Diese Workshops werden teilweise von Schülerinnen und Schülern, die an einer unserer Projektgruppen für Begabte teilnehmen, entwickelt. In die Projektgruppen werden Lehramtsstudierende eingebunden. Mit einem projektorientierten Ansatz in der Fachdidaktikausbildung streben wir die Verzahnung zwischen der Erarbeitung der theoretischen Grundlagen und der Umsetzung in die Praxis an. Anhand von Beispielen wird im Folgenden das Gesamtkonzept vorgestellt und reflektiert.

Das Schülerlabor Mathematik am KIT wurde 2007 durch die Abteilung für Didaktik der Mathematik eingerichtet und bis zum jetzigen Zeitpunkt von etwa 900 Schulklassen besucht. Es ist unser Ziel, den Schülerinnen und Schülern Freude und Interesse an der Mathematik durch faszinierende Experimente und spielerisches Erforschen mathematischer Phänomene zu vermitteln. Aus diesem Grund wurden die Aktivitäten so angelegt, dass man ganz ohne Taschenrechner, Formeln und Gleichungen, alleine durch neugieriges Beobachten, Knobeln und Experimentieren mathematische Erfahrungen sammeln kann.

Die Vorüberlegungen, die zur Konzeption des Labors führten, waren vielfältig. Folgende drei Grundintentionen stellten sich heraus:

- Interesse von Schülerinnen und Schülern für das Fach Mathematik wecken
- Interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler fördern
- Das Angebot im Bereich der Fachdidaktik für Studierende und Lehrende praxisnah erweitern.

Um diesen unterschiedlichen Grundintentionen gerecht zu werden, bieten wir für jede Zielgruppe passende Angebote: Schulklassen können im Labor experimentieren und zur Vertiefung zusätzlich Workshops buchen. Zudem gibt es einmal im Monat einen Tag der offenen Tür, an dem jedermann das Labor kennenlernen kann. Die genauen Termine und alle wichtigen Infor-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

mationen für Schulen sind auf unserer Homepage veröffentlicht (siehe www.math.kit.edu/schuelerlabor).

Besonders Interessierte und Begabte haben die Möglichkeit, ein Schuljahr lang an den Projekten „Mathe-Kids“ und „Mathe-Profis“ am KIT teilzunehmen, die wöchentlich stattfinden. Die Lehramtsstudierenden können ihre fachdidaktischen Kenntnisse durch die Einbindung in diese und andere Projekte praxisnah erweitern. Die Idee der projektorientierte Fachdidaktik wird durch den Ausbau des Schülerlabors zu einem Lehr-Lern-Labor, d.h. durch die didaktische und strukturelle Integration des Schülerlabors in die Lehrerbildung weiter vorangetrieben.

Experimentieren im Schülerlabor

Das Schülerlabor ist für Schülerinnen und Schüler ab der dritten Klasse und für alle Schularten geeignet. In der Regel findet der Besuch im Klassenverband statt, wobei die Termine individuell mit den Mathematiklehrkräften vereinbart werden. Der Besuch ist kostenlos und dauert pro Klasse etwa 90 Minuten.

In einer Einführungsphase werden zunächst drei Exponate gemeinsam erforscht, anschließend können die Besucher sich an den unterschiedlichen Stationen eigenständig auf eine mathematische Entdeckungsreise begeben. Die Exponate sind größtenteils auf Tischen ausgelegt und mit einer kurzen Experimentieranweisung versehen. Das Schülerlabor ist so konzipiert, dass alle Altersstufen mit den gleichen Exponaten experimentieren.

Eine Differenzierung nach Begabungen der außerschulischen Förderung erfolgt hierbei in drei Stufen:

- Wenig Interessierte und Begabte: Interesse soll durch neuartige Zugänge geweckt werden
- Normalbegabte: Anreize zur Vertiefung werden geschaffen
- Leistungsstarke und Hochbegabte: Impulse zur Leistungssteigerung werden gegeben.

Am Beispiel der Platonischen Körper werden im Folgenden die fünf Stufen des didaktischen Vorgehens erklärt. Anhand dieses Musterbeispiels wird die Verzahnung und der Stufenaufbau bei der Einführung eines Begriffes verdeutlicht und dargestellt, auf welche Weise die Entwicklung von Grundvorstellungen ermöglicht und der mathematische Hintergrund der Phänomene durchdrungen wird. Dabei werden nicht von jedem Schüler alle Stufen durchlaufen. Dies hängt unter anderem vom Alter und den intellektuellen Voraussetzungen ab:

- Interesse wecken und kennenlernen: Die Schülerinnen und Schüler experimentieren mit fertigen Modellen der Platonischen Körper.
- Aktivierung: In dieser Phase werden die Schülerinnen und Schüler durch den Bau eigener Körper selbst aktiv.
- Vertiefung: Anhand von Rautenspiegeln wird der Zusammenhang zwischen Platonischen Körpern und deren zugehörigen Dualkörpern verdeutlicht.
- Transfer: In einem Seifenhaut-Experiment zu Minimalflächen werden die Platonischen Körper in einen neuen mathematischen Kontext gebracht.
- Theoretischer Hintergrund: Interessierte Schülergruppen können die theoretischen Hintergründe im Workshop „Vom Ikosaeder zum Fußball“ weiter ergründen und vertiefen.

Workshops im Schülerlabor

Bei den Laborbesuchen entdecken die Schülerinnen und Schüler eigenständig durch das Experimentieren mit Exponaten Phänomene der Mathematik. Zusätzlich bieten wir für besonders interessierte Arbeitsgemeinschaften, Schülergruppen und Klassen Workshops an. Hierbei ist die Idee, das Interesse der Schülerinnen und Schüler durch für sie ungewohnte mathematische Fragestellungen und Themen zu wecken. Die Inhalte der Workshops, die etwa 90 Minuten dauern, sind so gewählt, dass sie weitgehend unabhängig vom momentanen Unterricht sind und den schulischen Stoff ergänzen. Es werden neue Inhalte präsentiert, verblüffende Aspekte bekannter Themen beleuchtet und ein Bewusstsein dafür geschaffen, dass die Mathematik ein aktuelles Forschungsgebiet und eine lebendige Wissenschaft ist. Der Unterrichtsstil ist überwiegend schüleraktivierend, längerer Vorlesungsstil und unnötige theoretische Abhandlungen und Rechnungen sollen möglichst vermieden werden.

Nähere Informationen zu den Inhalten und Zielgruppen findet man unter www.math.kit.edu/schuelerlabor/seite/workshops/ .

Begabtenförderung und praxisbezogene Lehramtsausbildung

Im Schuljahr 2008/09 startete im Schülerlabor das Projekt „Verbesserung der fachdidaktischen Ausbildung durch praxisnahe Zusammenarbeit von Schülern und Studierenden“. Durch die Mitarbeit an diesem Projekt im Rahmen eines Fachdidaktikseminars erhalten die Lehramtsstudierenden schon während ihres Studiums die Möglichkeit, Erfahrungen in der Projektarbeit mit Schülerinnen und Schülern zu sammeln. Geleitet werden die

Projekte mit den Namen „Mathe-Kids“ für die Klassen 7/8 und „Mathe-Profis“ für die Klassen 9/10 jeweils von einer Gymnasiallehrkraft. Die beiden Gruppen von jeweils etwa 20 begabten Schülerinnen und Schülern treffen sich ein Jahr lang einmal in der Woche für zwei Schulstunden im Schülerlabor. Als Themen werden Gebiete der Mathematik ausgewählt, die nicht primär in der Schule behandelt werden. Im letzten Drittel des Schuljahres suchen sich die Schülerinnen und Schüler ein neues Themengebiet für die Ausarbeitung eines neuen Workshops. Angeleitet durch die Lehrkraft und mit der Unterstützung von Lehramtsstudierenden entwickeln sie aktiv ein Produkt für andere Schülerinnen und Schüler. Dabei findet unter fachkundiger Betreuung eine behutsame Heranführung an das wissenschaftliche Arbeiten statt. Die Lehramtsstudierenden bereiten gemeinsam mit den Lehrkräften die wöchentliche Veranstaltung vor und gestalten diese teilweise. Auf diese Weise können sie den Umgang mit Begabten sowie den Einsatz von verschiedenen Unterrichtsmethoden und Medien üben. Regelmäßig findet ein Beratungsgespräch statt, in dem die Studierenden ein Feedback erhalten. Diese Vorgehensweise bereitet die Lehramtsstudierenden auf das Praxissemester bzw. auf die Referendarszeit vor.

Lehr-Lern-Labor und Fachdidaktik

Im Fachdidaktikseminar „Projektorientierter Unterricht mit Unterrichtspraxis“ bereiten die Studierenden zuerst einen Fachvortrag zu einem mathematischen Thema vor. Anschließend bereiten sie ihr Thema für eine Schulklasse auf, d.h. die Studierenden arbeiten einen Workshop aus und üben dabei die didaktische Reduktion. Bei der Durchführung des Workshops mit einer Schulklasse sammeln sie Erfahrung und Praxis beim projektorientierten Unterricht. Im Anschluss findet eine Unterrichtsanalyse, Reflexion und Beratung durch alle Beteiligten statt.

Die Idee der projektorientierten Fachdidaktik wird mit neuen Seminarangeboten weiter verfolgt. Im kommenden Sommersemester ist ein Seminar angekündigt, in dem Studierende einzelne Experimentierstationen des Schülerlabors in Kurzvorträgen präsentieren und Arbeitsblätter zur Lernkontrolle erarbeiten sollen. Damit können sie sowohl die didaktische Reduktion als auch den Umgang mit unterschiedlichen Alters- und Zielgruppen trainieren. Des Weiteren planen wir Seminare, im Rahmen derer u. a. Kurzvideos zu einzelnen Stationen durch Lehramsstudierende erstellt werden, die wir dann auch den Besuchern des Schülerlabors vorstellen könnten. Unser Ziel ist die Stärkung der Fachdidaktik durch systematische forschungsorientierte Weiterentwicklung und Evaluation des projektorientierten Ansatzes unter geeigneter Einbeziehung des Lehr-Lern-Labors.

Jean-Luc DORIER, Genf

The modeling dimension in mathematics and sciences in Geneva lower secondary education curriculum

A new curriculum in French speaking Switzerland

A new curriculum (known as *Plan d'Etude Romand*, PER) for all compulsory education (grade -2 to 9) has recently been adopted for all French speaking Switzerland and launched in Geneva, since 2011/2012 for the first grades of all cycles. The PER divides the school disciplines into five domains, one being *Mathematics and Sciences of the Nature* (MSN), for which modeling as a common federating theme for the whole domain: "Representing to oneself, questioning (*problématiser*) and modeling situations and solving problems by building and mobilizing notions, concepts, approaches (*démarches*) and reasoning specific to Mathematics and Sciences in the area of natural and technical phenomena, from living species, environment, as well as numbers and space." (PER, introduction to MSN).

Moreover, in the lexical index of the domain MSN, modeling is defined as "the idea of associating to a complex situation a model that makes it comprehensible by reducing it to its essential elements". In parallel with the new PER an inter-cantonal commission has produced a new mathematics textbook for grades 7-8-9, in which modeling is defined by: "Create a simplified representation of a problem (schema, sketch, table, graph, simulation, etc.), in order to understand and solve it". Thus the term modeling is taken in a broad meaning, is not only applied to a 'real concrete' situation, whose complexity is to be reduced, in order to be treated mathematically. Indeed, it is clearly said that modeling can be intra-mathematical. In this sense, it is closer to a view shared by several researchers in mathematics education, especially within Chevallard's *Anthropological Theory of Didactics*, which claims that "most of the mathematical activity can be identified (…) with a mathematical modeling activity" (Chevallard, Bosch and Gascón, 1997, p.51 quoted by García & Ruiz Hiugeras, 2005, p.1647, see also Artaud, 2007). Moreover, in the PER modeling is seen as a way of translating a situation in another system of representation; the fact that the complexity is reduced may not be as central as it is in a more restricted version of modeling. On another hand, more than one model can be involved and a discussion about the values of the different models can be as important as solving a problem. In sciences, modeling may also involve only

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

non-mathematical models. We will show how we addressed this issue in our training-course in our involvement in the European project PRIMAS[1].

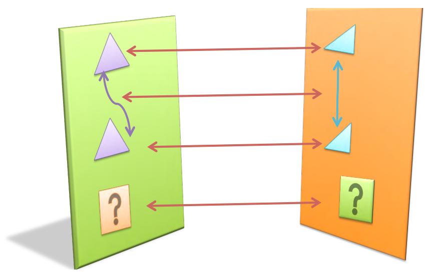
A training course within the European project PRIMAS

The new PER and the new textbook for grade 7 led the educational authorities in Geneva to organize a one-day (compulsory) training course for all mathematics teachers of grade 7-8-9 (around 350 teachers, half of them teaching also some science). As part of the European project PRIMAS our team of 15 teachers, teachers' trainers, researchers in mathematics and science education was contacted to organize this training. One day training is short, too short to be able to change things radically. Moreover, experience with in-service teachers' training has shown that valuable training must be practical, close to teachers' concerns and aware of their potential of evolution without trying to be too radical. In our case, we tried to take these concerns into account by setting up a training-course to show that investigation and modeling can be taught in a somehow modest version without consuming too much time and necessitating other resources than what is offered in the official textbook. In this sense, we tried to be realistic since the training was addressed to all teachers of Geneva and a command from the institution.

A typology for modeling activities

Our first concern was to have a definition of modeling that could be both broad enough to respect the PER and, at the same time, operational in order to analyze the different activities that could be seen as modeling. In the literature on can find several definitions of what is modeling, we decided to adopt a very broad one, which is not very far from the one proposed by Niss, Blum and Galbraith (2007, p. 4)

Modeling means setting up/discussing/tackling a correspondence (mapping) between two (or more) *systems* including objects, relations between these objects and questions.



[1] The project PRIMAS, *Promoting inquiry in mathematics and science across Europe,* has received funding from the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement n° 244380. This text reflects only the author's views and the European Union is not liable for any use that may be made of the information contained herein.

There is no condition that one domain is non mathematical and the other one is mathematical. In this sense our definition can involve two mathematical domains or, on the contrary, two non-mathematical domains (like this is used in biology teaching quite often). In the "traditional" mathematical modeling, the first system is extra-mathematical, while the second one is mathematical. We preferred the term of system to domain as used by Niss, Blum and Grabaith. One reason is that the term 'domain' may induce the fact that one is extra-mathematical and the other one mathematical, while system can be seen as more neutral. Another reason is to point out the fact that we deal with objects and relations between them. The most challenging way of engaging students in modeling is to give them a problematic question in a system and to leave them build another system (the model) in which this question can be solved. In this case, students have the responsibility of reducing the complexity of the first system to some significant elements, choose the second system and build the mapping, solve the problem in the second system and interpret the solution in terms of the first system. All this is described in many papers about modeling, in particular in the introduction of the ICMI study quoted above. However, in some teaching situations, the two systems may be given and what is expected from the students is either to interpret part of one system in terms of the other or to discuss the validity of the correspondence in relation to a certain type of question (in particular more than two systems can be given and the correspondences should be compared in terms of consistency). These types of activities, even if less challenging, may still offer a good opportunity to engage students into a rich reflection about modeling, in particular it is often the case in science teaching in Primary school. Finally in some situations, the two systems are given but most of the students' task is to solve the question in the second system, without real reflection about the relation with the first one. Most of the time, this type of activity does not present much challenge in terms of modeling, the initial system is only evoked, the mapping with the other system is transparent and the modeling acts, at most, as an extra motivation for students.

Based on these remarks, we proposed a typology of modeling activities in 3 levels:

- *Level 1* – The two systems are given but the task given to students involves only the second system
- *Level 2* – The two systems are given and the task involves the two systems
- *Level 3* – Only one system is given and students have to choose the other(s)

In our training course we presented this typology to the trainees and we ask them to use it to classify a selections of 12 activities taken from the new textbook for grade 7. Then we made a more specific analysis on three of them focusing on the teacher's work to realize a maximum of the potential of modeling and investigation for the students. In our talk we present some examples of the use of this tool, that we do not have space to develop here

Conclusion

The aim of the training-course is to help teachers taking at best into account the requirement of the curriculum concerning modeling and investigation. Our categorization in 3 levels is a tool in order to analyze the potential of modeling in an activity. In the training-course, we have also worked on the actual realization of such an activity in class and discuss some ingredients of teacher's work. We have used videos of real class activities, especially concerning the divided square. Indeed however the activity is a good modeling activity the question of how it is implemented in the class and how much the students are involved in a real investigation is crucial. In everyday teaching, teachers need some tools to be able to regulate their way of piloting such an activity. Example like what we presented very briefly above about the dialectical use of milieu and didactical contract in the activity of the divided square is one of our leading orientation in our actions within PRIMAS in order to promote investigation in mathematics and sciences especially through modeling.

Bibliography

Argand, M. (1806). Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans des constructions géométriques. *Annales de Mathématiques, 4*, 133–147.

Artaud M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classroom In W. Blum, P. Galbraith, P., H.-W. Henn & M. Niss (Eds.) *Modeling and applications in mathematics education – The 14th ICMI study* (pp. 371–378). New-York: Springer.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematical instruction, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37–68.

Blum, W. et al. (2007). ICMI Study 14 : Applications and modeling in mathematics education – Discussion document, *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Chevallard, I., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabónperdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

García, F. J. & Ruiz Higueras, L. (2005). Mathematical praxeologies of increasing complexity: variation systems modeling in secondary education. In M. Bosch (Ed.) *e-Proceedings of CERME4* (pp.1645-1654) http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, P., H.-W. Henn & M. Niss (Eds.) *Modeling and applications in mathematics education – The 14th ICMI study* (pp. 4–32). New-York: Springer.

Perrin-Glorian, M.-J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de sequences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(2),* 217–276.

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Rückschlüsse auf fachdidaktisches Kriterienwissen von Lehrkräften auf der Basis eines aufgabenbezogenen Befragungsformats

Wenn Lehrkräfte das Begriffsverständnis von Lernenden einschätzen, spielt der Einsatz von Aufgaben eine entscheidende Rolle. Es kann daher angenommen werden, dass durch eine entsprechende Aufgabenauswahl spezifisches Kriterienwissen der Lehrkräfte zum Ausdruck kommt, etwa bezüglich der Repräsentationen, die für das Verständnis der Lernenden als zentral angesehen werden. Am Beispiel des Bruchzahlbegriffs wurden daher in dieser Studie Aufgaben analysiert, die Lehrkräfte nutzen, um das Verständnis ihrer Schülerinnen und Schüler einzuschätzen.

Der Bruchzahlbegriff ist sehr facettenreich: Verschiedene Autoren haben eine Reihe sogenannter Bruchzahlaspekte beschrieben (z.B. Niemi, 1996; Padberg, 2009). Für ein umfassendes Begriffsverständnis ist es deshalb wichtig, Bruchzahlen aus unterschiedlichen Perspektiven zu sehen und verschiedene Bruchzahlaspekte zu integrieren. So heben unterschiedliche Repräsentationen von Bruchzahlen typischerweise unterschiedliche Bruchzahlaspekte hervor (z.B. Lamon, 2001). Als theoretischer Rahmen in Bezug auf die Idee des Nutzens vielfältiger Repräsentationen im Mathematikunterricht liegt der Studie Duvals (2006) Theorie der Register zu Grunde. Duval (2006) betonte, dass Repräsentationswechsel (sogenannte *Conversions*) zwischen verschiedenen Repräsentations*registern* häufig entscheidend für das Verständnis von mathematischen Konzepten sind. Lernende sollten daher dabei unterstützt werden, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Repräsentationsregistern zu erkennen und Conversions durchzuführen.

Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen sollten geeignete Aufgaben zur Einschätzung des Verständnisses von Lernenden zum Bruchzahlbegriff beispielsweise wichtige Aspekte des Begriffs, verschiedene Repräsentationsregister und Conversions thematisieren. Neben solchen Aufgabenmerkmalen, die eng mit der Idee des Nutzens vielfältiger Repräsentationen verbunden sind, spielen wahrscheinlich auch andere Merkmale der Aufgaben eine Rolle im Hinblick darauf, wie gut das Begriffsverständnis von Lernenden sichtbar gemacht werden kann. Offene Aufgaben (z.B.: „Zeichne mindestens drei verschiedene bildliche Darstellungen für die Bruchzahl ¾.“) sind beispielsweise häufig besser dafür geeignet einen Einblick zu ermöglichen als geschlossene Aufgaben (z.B.: „Zeichne eine Zahlengerade und markiere darauf die Bruchzahl ¾.“). Folglich ist anzunehmen, dass sich an den Aufgaben, die Lehrkräfte stellen, um das Begriffsverständnis

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

von Lernenden einschätzen, nicht nur inhaltsbereichsspezifisches Wissen abzeichnet, sondern dass auch allgemeineres professionelles Wissen und entsprechende Sichtweisen eine Rolle spielen. Insbesondere konstruktivistische bzw. rezeptive Sichtweisen zum Lehren und Lernen von Mathematik (vgl. Staub & Stern, 2002) beeinflussen möglicherweise, welche Aufgaben Lehrkräfte für die Diagnose von Begriffsverständnis als angemessen ansehen.

Selbstverständlich kommt es bei der Diagnose von Begriffsverständnis nicht nur auf die eingesetzten Aufgaben an, sondern auch auf die Analyse der Schülerlösungen. Allerdings ist die Auswahl entsprechender Aufgaben entscheidend für das Potential, das Begriffsverständnis von Lernenden sichtbar und damit diagnostizierbar zu machen. Solche Aufgaben sollten deshalb in den Blick genommen werden und erlauben praxisrelevante Einblicke hinsichtlich des fachdidaktischen Wissens, das Lehrkräfte nutzen, um das Verständnis von Lernenden zum Bruchzahlbegriff einzuschätzen.

Die Studie konzentriert sich daher auf die folgenden Forschungsfragen:

- Welche Rückschlüsse auf bereichsspezifisches fachdidaktisches Wissen zum Nutzen vielfältiger Repräsentation legen Aufgaben nahe, die Lehrkräfte für die Diagnose von Begriffsverständnis zum Begriff Bruchzahl einsetzen würden?
- Können Zusammenhänge zwischen solchem bereichsspezifischen fachdidaktischen Wissen und allgemeinen fachdidaktischen Sichtweisen festgestellt werden?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Um Antworten auf diese Forschungsfragen zu finden, wurde ein entsprechender Fragebogen entworfen. Dieser Fragebogen wurde von 87 praktizierenden Lehrkräften in Baden-Württemberg (45 weiblich, 41 männlich, 1 ohne Daten) beantwortet, wovon 64 an Gymnasien und 23 an Haupt-/Werkrealschulen unterrichteten.

Entsprechend der ersten Forschungsfrage wurden die teilnehmenden Lehrkräfte im ersten Fragebogenteil dazu aufgefordert Aufgaben zu notieren, die sie einsetzen würden, um das Begriffsverständnis von Lernenden zum Begriff Bruchzahl einzuschätzen:

Welche Fragen bzw. Aufgaben würden Sie stellen, um herauszufinden, ob ein Schüler verstanden hat, was eine Bruchzahl ist? Sie können sich dabei vorstellen, dass Sie am Ende der Unterrichtseinheit „Bruchzahlen" in einer 6. Klasse eine Klassenarbeit erstellen.

Um die Antworten der Lehrkräfte zu analysieren, wurde jedes Set von Aufgaben in einem top-down Verfahren im Hinblick auf bestimmte Aufgabenmerkmale kodiert (Cohens Kappa ≥ .86 für jedes Kodierungskriterium), um daraus wiederum Anhaltspunkte auf spezifisches fachdidaktisches Wissen zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen zu gewinnen:

- Wurden offene/geschlossene Aufgaben gestellt?
- Welche Bruchzahlaspekte (vgl. Padberg, 2009) werden durch die genannten Aufgaben thematisiert?
- Wie viele verschiedene Repräsentationsregister/Conversions werden durch die genannten Aufgaben thematisiert?

Konstruktivistische bzw. rezeptive Sichtweisen zum Lehren und Lernen wurden mit Hilfe von Items aus dem Fragebogeninstrument von Staub und Stern (2002) erfasst.

Ausgewählte Ergebnisse

In Bezug auf das Merkmal offene bzw. geschlossene Aufgaben zeigen die Daten, dass fast alle teilnehmenden Lehrkräfte (95%) geschlossene Aufgaben nannten, aber weniger als die Hälfte (42%) offene Aufgaben notierte. Abbildung 1 zeigt, dass sich die genannten Aufgaben vor allem auf den Aspekt Bruchzahl als Teil vom Ganzen konzentrierten, während die anderen Bruchzahlaspekte jeweils von weniger als einem Drittel der teilnehmenden Lehrkräfte in entsprechenden Aufgaben thematisiert wurden.

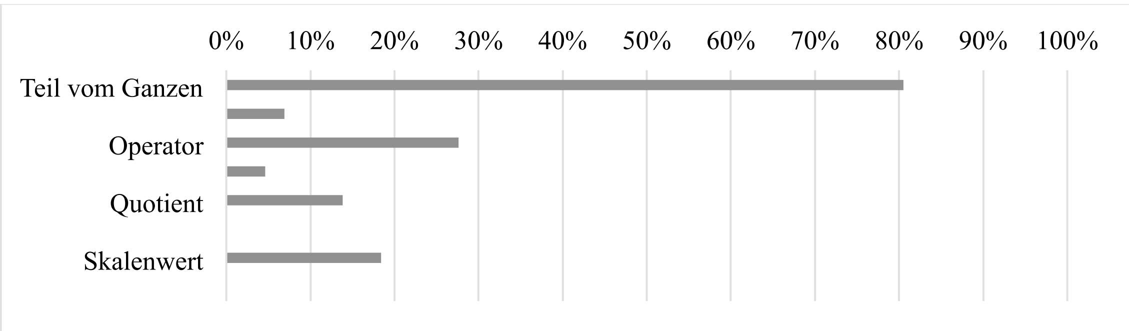


Abbildung 1: Anteil an Lehrkräften, die die jeweiligen Bruchzahlaspekte thematisierten

Nur 16% der Teilnehmer(innen) thematisierte mittels der notierten Aufgaben mehr als zwei Bruchzahlaspekte.

Im Hinblick auf die Anzahl verschiedener Repräsentationsregister und Conversions zeigen die Auswertungen, dass jeweils mehr als die Hälfte der teilnehmenden Lehrkräfte mehr als drei verschiedene Repräsentationsregister bzw. mehr als zwei verschiedene Conversions in den Blick nahm.

In Bezug auf Zusammenhänge zwischen allgemeinen fachdidaktischen Sichtweisen und Aufgabenmerkmalen war festzustellen, dass diejenigen Lehrkräfte, die offene Fragen gestellt hatten, im Vergleich zu ihren Kolleginnen und Kollegen, bei denen dies nicht der Fall war, im Schnitt stärker konstruktivistischen und weniger stark rezeptiven Sichtweisen zustimmten.

Diskussion

Der Befund, dass offenbar weniger als die Hälfte der teilnehmenden Lehrkräfte offene Fragen stellen würde, um das Begriffsverständnis von Lernenden zu Bruchzahlen einzuschätzen, legt nahe, dass häufig das Potential von offenen Aufgaben in Bezug auf das Sichtbarmachen von Begriffsvorstellungen nicht gesehen wurde. Die Tatsache, dass diejenigen Lehrkräfte, die offene Fragen nannten, im Schnitt stärker konstruktivistische und weniger rezeptive Sichtweisen zeigten, deutet darauf hin, dass nicht nur fachdidaktisches Wissen, sondern auch allgemeinere Sichtweisen eine Rolle spielen könnten, wenn Lehrkräfte entsprechende Aufgaben wählen.

Vor dem Hintergrund der Idee des Nutzens vielfältiger Repräsentationen im Mathematikunterricht erwies sich, dass meist mehrere verschiedene Repräsentationsregister berücksichtigt wurden. Die Tatsache, dass allerdings die meisten teilnehmenden Lehrkräfte dabei nur einen einzigen oder höchstens zwei Bruchzahlaspekte einbezogen, spricht dafür, dass die verschiedenen Repräsentationen von Brüchen in der Regel nicht so ausgewählt worden sind, dass sie unterschiedliche Aspekte widerspiegeln und sich gegenseitig im Hinblick auf ein facettenreiches Begriffsverständnis ergänzen.

Die Ergebnisse der Studie zeigen folglich spezifische Bedarfe für die Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrkräften auf.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183-198.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco (Hrsg.), *The roles of representation in school mathematics* (S. 146-165). Reston, VA: NCTM.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: representations, problem solutions, justifications and explanations. *Journal of Educational Research, 89*(6), 351-363.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The nature of teachers’ pedagogical content beliefs matter for students’ achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344-355.

Ulrike DREHER, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

Einfluss von Präferenzen und Selbstwirksamkeits-überzeugungen auf den Umgang mit verschiedenen Repräsentationen

Der Umgang mit verschiedenen Repräsentationen von Funktionen ist Lerngegenstand der Sekundarstufe I. Unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" finden sich in den Bildungsstandards nicht nur das Erstellen der einzelnen Darstellungen (Graph, Tabelle, Funktionsterm, Situation), sondern auch die Übersetzung zwischen den Darstellungen und deren Interpretation als anzustrebende Kompetenzen (KMK 2004, S.12). Die inhaltlichen Anforderungen beim Übersetzungsprozess wurden in zahlreichen Studien beschrieben (vgl. Leinhardt et al. 1990). Die vorgelegte Studie konzentriert sich auf zwei Repräsentationsformen von Funktionen - Graph und Tabelle - im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen, in denen Funktionen durch Situationen repräsentiert sind.

1. Stand der Forschung

Der Bearbeitungsprozess solcher Aufgaben unterliegt zahlreichen Einflussfaktoren, die bei Acevedo Nistal et al. (2009) in drei Bereiche gegliedert werden: *Aufgabenspezifische Faktoren* beziehen sich z.B. auf die jeweilige adäquate Repräsentationswahl (vgl. Hollands & Spence 1998). Zu den *individuellen Faktoren* zählen sowohl das inhaltliche Vorwissen (Grawemeyer 2006), das Wissen über den Umgang mit den Repräsentationen (Ueasaka & Manolo 2006) als auch Affekte (deBellis & Goldin 2006), Präferenzen (Ainsworth 1999) und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen. *Kontextuelle Faktoren* beziehen sich auf die Art der unterrichtlichen Auseinandersetzung mit den verschiedenen Repräsentationen: Werden beispielsweise Repräsentationen einzeln behandelt oder die Übersetzung zwischen diesen betont (vgl. Greeno & Hall 1997)? Die vorliegende Studie sieht von den kontextuellen Faktoren ab und knüpft an die Befunde zu den folgenden drei Bereichen an: Im Bereich des **Umgangs mit den Repräsentationen** Graph und Tabelle konnten Bayrhuber et al. (2010) unterschiedliche Kompetenzdimensionen bei Achtklässlern identifizieren. Befunde zum **flexiblen Umgang** von Acevedo Nistal et al. (2012) zeigen, dass es Lernenden der Sekundarstufe je nach Alter unterschiedlich schwer fällt, angemessene Repräsentationen auszuwählen und dass Items mit Vorgabe besser gelöst werden. Die Kombination von geschlossenen und offenen Aufgaben erscheint damit als probates Mittel zur Messung der Leistung mit Repräsentationen. In einer Interventionsstudie war es Uesaka und Manolo (2006) möglich, **reflexives Wissen über die Repräsentationen** zu vermitteln und dieses in of-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

fenen Statements der Schüler zu erheben. Die vorliegende Studie nutzt ebenso offene Antwortformate, um an ein solches **metarepräsentationales Wissen** (vgl. diSessa & Sherin 2000) zu gelangen. Den dritten Bereich bilden die **Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen**. Kognitionspsychologische Befunde zeigen, dass für verschiedene Repräsentationen Präferenzen in der kognitiven Struktur vorliegen können (Schwank 1996). Selbstwirksamkeitsüberzeugungen bezüglich einzelner Repräsentationen wurden in Fragebogenstudien (Gagatsis et al. 2009) erhoben und es zeigt sich eine eher rückläufige Entwicklung in der Schullaufbahn.

2. Fragestellung

Bisherige Forschungsbefunde konzentrieren sich auf die Erfassung und Beschreibung der genannten einzelnen Komponenten des Umgangs mit Repräsentationen, können jedoch keine systematischen Zusammenhänge herstellen. Daher soll untersucht werden, welche Zusammenhänge bei Lernenden der Klasse 8 zwischen (1) Kompetenzen bezüglich der Nutzung verschiedener Repräsentationen, (2) Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen für einzelne Repräsentationen und (3) der adaptiven Nutzung mehrerer Repräsentationen im Bereich Funktionen bestehen. An dieser Stelle werden erste Befunde aus einer Vorstudie vorgestellt, welche Anlass zu einigen Hypothesen geben.

3. Design

Die entwickelten Erhebungsinstrumente nutzen quantitative wie qualitative Erfassungsstrategien. Ein Fragebogen soll die vorliegenden Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen bezüglich der Repräsentationsarten Graph und Tabelle erfassen. Offene Items mit mathematischen Textaufgaben geben Hinweise auf die Präferenzen und Reflexionsfragen zur Nutzungsbegründungen erfassen metarepräsentationales Wissen. Eine repräsentationsbezogene Kompetenzmessung erfolgt mit Testitems des Forschungsprojekts HEUREKO (Bayrhuber et al. 2010). Um vertiefende Analysen vorliegender Extremfälle leisten zu können, wird eine Interviewstudie mit ausgewählten Lernenden angeschlossen.

4. Vorstudie

Anliegen der Vorstudie ist die Erprobung der neu entwickelten Instrumente. Sowohl die Fragebogenskalen zu den Konstrukten der spezifischen Präferenz und der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, als auch die offenen Mathematikitems wurden an einer Stichprobe von 95 Schülerinnen und Schülern der Klasse 8 an Realschulen erprobt. Für die Selbstwirksamkeitsüberzeugungen bezüglich der Repräsentationen von Funktionen wurden Items in Anlehnung an Gagatsis et al. (2009) entwickelt und ein 4-stufiges Antwortformat gewählt. Die Präferenzskala in diesem Bereich wurde 6-stufig und bipolar angelegt, sodass eine kontrastierende Entscheidung zwischen Graph und Tabelle vom Lernenden eingefordert werden konnte. Des Weiteren wurden die allgemeinen Skalen Selbstwirksamkeit und Selbstkonzept bezüglich Mathematik (Ramm et al. 2006) eingesetzt, um überprüfen zu können, ob spezifische Selbstwirksamkeitsüberzeugungen bei Schülerinnen und Schülern messbar sind.

5. Vorstudienergebnisse

Zunächst zeigt sich in einer explorativen Faktorenanalyse, dass die repräsentationsspezifischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen von den allgemeinen Skalen (Selbstwirksamkeit und Selbstkonzept bezüglich Mathematik) trennbar sind. Letztere sind allerdings nicht voneinander trennbar (1-dim Lösung mit Cronbachs $\alpha = 0.934$; 9 Items), was der inhaltlichen Nähe der Konstrukte geschuldet ist. Die Überprüfung der Dimensionsstruktur der spezifischen selbst entwickelten Skalen mittels einer konfirmatorischen Faktorenanalyse bestätigte, dass Selbstwirksamkeit bezüglich der Repräsentationen dreidimensional betrachtet werden kann: Dabei weisen die 3 Dimensionen eine hohe interne Konsistenz auf: Cronbachs $\alpha_{(\text{Funktionen allg.})} = 0.770$ (2 Items); Cronbachs $\alpha_{(\text{Tabelle})} = 0.789$ (4 Items) und Cronbachs $\alpha_{(\text{Graph})} = 0.783$ (4 Items). Korrelationsanalysen zwischen den Konstrukten Präferenz und Selbstwirksamkeit zeigten, dass eine Präferenz für Tabellen mit einer Selbstwirksamkeitsüberzeugung für die Tabelle mit $r = 0.336$ mäßig korreliert. Für die Graphen ergibt sich ein ähnliches Bild mit $r = 0.344$. Die vier offenen Mathematikitems sind mit unterschiedlichen Schwierigkeiten (Lösungshäufigkeiten zwischen 0.34 und 0.74) zufriedenstellend variabel. Zur Beantwortung der Fragestellung müssen weitere Zusammenhänge korrelativ untersucht werden.

6. Ausblick

In der Hauptstudie werden in einer Stichprobe von 15 Klassen zu drei Messzeitpunkten mit Hilfe der beschriebenen Instrumente die individuellen Faktoren erhoben, um anschließend Aussagen über deren Zusammenhang mit der Leistungsfähigkeit und darüber hinaus über deren Beziehung zu einer metarepräsentationalen Kompetenz schließen zu können.

Literatur

Acevedo Nistal, A., van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM Mathematics Education 41 (5)*, 627–636.

Acevedo Nistal, A., Dooren, W., Verschaffel, L. (2012). What counts as a flexible representational choice? An evaluation of students' representational choices to solve linear function problems. *Instructional Science 40 (6)*, 999–1019.

Ainsworth, S. (1999). *Designing effective multi-representational learning environments (technical report 58).* University of Nottingham: ESRC Centre for Research in Development, Instruction and Training.

Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R., Wirtz, M. (2010). Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen - Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. *Zeitschrift für Pädagogik; Beiheft 56 (56)*, 28–39.

DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem-solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63(2)*, 131–147.

diSessa, A. & Sherin, B. (2000): Meta-representation: an introduction. *Journal of Mathematical Behavior (19),* 385–398.

Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Elia, I. (2009). Student's Belief about the Use of Representations in the Learning of Fractions. In *Proceedings of CERME 6. Lyon, France, 28.1.-1.2.2009,* 64–73.

Grawemeyer, B. (2006). Evaluation of ERST—An external representation selection tutor. In D. Barker-Plummer, R. Cox & N. Swoboda (Eds.). *Diagrammatic representation and inference: 4th international conference, Stanford, CA, USA, June 28–30, 2006*. New York: Springer, 154–167.

Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78(5),* 361–367.

Hollands, J. G. & Spence, I. (1998). Judging proportion with graphs: The summation model. *Applied Cognitive Psychology, 12*, 173–190.

Kultusministerkonferenz, B. (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12. 2003. In *Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.).* München: Luchterhand.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Task, Learning and Teaching. *Review of Educational Research, 60 (1),* 1–64.

Ramm, G., Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W. et al. (Hrsg.)(2006). *PISA 2003. Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

Schwank, I. (1996). Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (H. 6),* 168-183.

Uesaka, Y. & Manalo, E. (2006). Active comparison as a means of promoting the development of abstract conditional knowledge and appropriate choice of diagrams in math word problem solving. In D. Barker-Plummer, R. Cox & N. Swoboda (Eds.). *Diagrammatic representation and inference: 4th international conference, Stanford, CA, USA, June 28–30, 2006*. New York: Springer, 181–195.

Christina DRÜKE-NOE, Weingarten

10 Jahre Bildungsstandards – Wohin kann die Reise gehen?

Vor gut zehn Jahren wurden die ersten Bildungsstandards verabschiedet. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit diese inzwischen als implementiert gelten können. Diese Frage wird im Folgenden auf drei Ebenen (Schülerinnen und Schüler, Lehrkräfte, Aufgaben) diskutiert. Der Beitrag schließt mit dem Aufzeigen potentieller zukünftiger Handlungsfelder.

1. Bildungsstandards: Entwicklung, Konzeption und Implementation

Als Reaktion auf das unbefriedigende Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler in internationalen Leistungsstudien wurden in Deutschland Ende der 1990er Jahre verschiedene länderbezogene bzw. länderübergreifende Maßnahmen zur Qualitätssicherung beschlossen. Besonders der Befund, dass etwa 50 % der Schülerinnen und Schüler wesentliche Bildungsziele verfehlen (u.a. Baumert & Lehmann, 1997), galt hier als bedenklich. Ein erstes wesentliches Element der Qualitätssicherung sind die in den Jahren 2003 bis 2012 für alle Schulstufen verabschiedeten Bildungsstandards (vgl. www.kmk.org), die als Regelstandards formuliert sind. Diese Leistungsstandards sind über drei Dimensionen (Inhaltsdimension: Leitideen, Prozessdimension: Prozessbezogene Kompetenzen, Anspruchsdimension: Anforderungsbereiche) konzeptualisiert und ihnen kommen mit Orientierung, Steuerung und Überprüfung drei zentrale Funktionen zu. Letztere beziehen sich unmittelbar auf die Vereinbarung, regelmäßig bundesweite Vergleichsuntersuchungen durchzuführen (KMK 2006), die ein zweites wesentliches Element der Qualitätssicherung bilden. Allerdings obliegt die Implementation der bundesweit gültigen Bildungsstandards den einzelnen Bundesländern, weshalb es keine bundesweit einheitliche Implementationsstrategie gibt.

2. Empirische Erkenntnisse zur Implementation

Eine standardbasierte Überprüfung von Schülerleistungen und die Erfüllung der Steuerungs-, der Orientierungs- und der Überprüfungsfunktion bedürfen geeigneter Testverfahren. Hierzu gehören erstens die in den Klassen 4 und 9 im 5- bzw. im 6-Jahresrhythmus u.a. im Fach Mathematik geschriebenen Ländervergleiche, die stichprobenbasierte Tests sind und Steuerungswissen generieren. Zweitens gehören hierzu die in den Klassen 3 und 8 geschriebenen bundesweiten Lernstandserhebungen (Vergleichsarbeiten), die Vollerhebungen sind und Lehrkräften systematische Rückmeldungen über den Kompetenzentwicklungsstand ihrer Klassen geben. Beide Arten

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

von Tests geben Auskunft über den Grad der Standarderreichung und sollen Hinweise für die Schul- und Unterrichtsentwicklung liefern.

Auf der Ebene der Schülerinnen und Schüler lassen speziell die Ergebnisse der Ländervergleiche in den Klassen 4 und 9 erkennen, dass zwischen den Bundesländern deutliche Unterschiede in den erzielten Kompetenzständen bestehen. So lassen sich in Klasse 4 Gruppen erfolgreicher bzw. wenig erfolgreicher Länder identifizieren, die sich erheblich in ihren jeweiligen Leistungsständen und somit im Grad der Standarderreichung unterscheiden. Allerdings lassen sich in dieser Klassenstufe kaum differentielle Befunde auf der Ebene einzelner Leitideen feststellen (Stanat et al., 2012).

Die Ergebnisse des Ländervergleichs in Klasse 9 zeigen ebenfalls erhebliche Unterschiede in den in den einzelnen Bundesländern erzielten Kompetenzständen auf. Dabei entspricht der größte Unterschied zwischen zwei Bundesländern etwa einem durchschnittlichen Lernzeitvorsprung von zwei Jahren und ist somit als substantiell einzuschätzen. Anders als in Klasse 4 gibt es in dieser Klassenstufe zudem differentielle Befunde auf der Ebene einzelner Leitideen: So zeigen etwa die Bundesländer Hamburg und Berlin relative Stärken im Bereich der Leitidee Daten und Zufall, während z.B. Berlin relative Schwächen bei der Leitidee Raum und Form offenbart.

Ein weiterer Befund dieses Ländervergleichs ist mit Blick auf eine Diskussion um Schulstrukturen interessant: So zeigt der im Mittel erzielte Kompetenzstand der Schülerinnen und Schüler der Gymnasien eines Bundeslandes keinen systematischen Zusammenhang mit der Gymnasialbeteiligungsquote des Bundeslandes. Vielmehr sind es sogar die Bundesländer mit den höchsten Gymnasialbeteiligungsquoten, in denen diese Schülerinnen und Schüler auch die höchsten Kompetenzstände auf der Globalskala erzielen.

Schließlich zeigt die Verteilung aller Schülerinnen und Schüler der Klasse 9 auf der Kompetenzstufenskala, dass auch noch im Jahr 2012 wesentliche Anteile von Schülerinnen und Schülern (25 %) den Mindeststandard und damit wesentliche Bildungsziele verfehlen (Pant et al., 2013).

Ähnliche und in Teilen gravierende Schwächen lassen die Ergebnisse der Lernstandserhebungen in Klasse 8 erkennen, was hier am Beispiel der Aufgabe „Berechne 20 % von 80 m." verdeutlicht wird. Diese Aufgabe lösen nur 41 % (62 %) jener Schülerinnen und Schüler, die den Hauptschulabschluss (den Mittleren Schulabschluss) anstreben, und dies, obwohl lediglich der Prozentwert zu dieser Grundaufgabe der Prozentrechnung anzugeben ist. Eine qualitative Analyse der häufig aufgetretenen Fehlösungen zeigt zudem ein umfassendes Spektrum von Fehlvorstellungen.

Insgesamt lassen sich also noch immer substantielle Anteile von Schülerinnen und Schülern identifizieren, die in den verschiedenen Jahrgangsstufen erhebliche Schwierigkeiten haben, so dass hier noch weitere Arbeit an einer erfolgreichen Implementation der Bildungsstandards nötig erscheint.

Für die Ebene der Lehrkräfte werden hier kurz die Ergebnisse von zwei Implementationsstudien berichtet, die mit Lehrkräften der Sekundarstufe I (Pöhlmann et al., 2014) bzw. mit Grundschullehrkräften (Richter et al. 2014) durchgeführt wurden. Die erste Studie, durchgeführt im Jahr 2006, ergab, dass für eine erfolgreiche Implementation der Standards das Vorwissen der Lehrkräfte zu diesen zentral ist. Dabei ging eine intensive Begleitung dieser Schulen u.a. mit einer verstärkten Kompetenzorientierung im Unterricht einher und es wurden insgesamt vermehrt *verschiedene* Kompetenzen berücksichtigt; lediglich die Anteile des Argumentierens erhöhten sich kaum. Beide Untersuchungsgruppen zeigten nach Abschluss dieser Interventionsstudie vergleichbare Schülerleistungen, wohl auch wegen des nur einjährigen Interventionszeitraums. Die zweite Studie untersuchte die Überzeugungen von Grundschullehrkräften zu den Funktionen von Vergleichsarbeiten. Wurden diese als Instrument der Unterrichtsentwicklung wahrgenommen, zeigten sich im Unterricht u.a. verstärkt Kompetenzorientierung, Differenzierung und eine vermehrte Nutzung der Testergebnisse als Reflexionsinstrument. Im Falle der Wahrnehmung als Kontrollinstrument ergaben sich mit Blick auf Kompetenzorientierung und Differenzierung zumindest keine negativen Effekte. Allerdings zeigte sich in beiden Gruppen eine gewisse Tendenz zur Verengung des Lehrplans, die jedoch weiter zu untersuchen ist.

Insgesamt geben beide Studien Hinweise auf Gelingensbedingungen für eine Implementation der Bildungsstandards (u.a. aktive Information der Lehrkräfte über die mit den Standards verbundenen Intentionen und die zugehörigen Begleitmaßnahmen). Diese Studien machen jedoch auch deutlich, dass eine gelingende Implementation ausreichend Zeit benötigt.

Auf der Ebene der Aufgaben ist die gelungene Implementation der Standards eher kritisch einzuschätzen. Legt man hier die Ergebnisse einer Untersuchung der bildungsstandardbezogenen Merkmale der in zentral gestellten Prüfungen gestellten Aufgaben zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses als Beurteilungsmaßstab zugrunde, so wird deutlich, dass die drei Dimensionen der Standards nur unausgewogen in diesen Aufgaben abgebildet sind und die Aufgaben vielfach nur Standardaktivitäten erfordern (Kühn & Drüke-Noe, 2013), und dies, obwohl auch die Abschlussprüfungen explizit auf die Bildungsstandards abgestimmt konzipiert werden sollen (KMK, 2006).

3. Potentielle zukünftige Handlungsfelder

Insgesamt ergeben sich auf den drei Ebenen vielfältige Hinweise darauf, dass die Bildungsstandards wohl noch nicht in dem Maße als implementiert gelten können, wie dies wünschenswert wäre. Dabei scheint (auch weiterhin) ein besonderer Anspruch darin zu bestehen, das in Tests (u.a. Ländervergleiche, Lernstandserhebungen) generierte Beschreibungswissen, vor allem um Schwächen der Schülerinnen und Schüler, in Handlungswissen zu übersetzen, das es besser ermöglicht, diese Schwächen gezielt zu beheben. Drei abschließende Fragen mögen Hinweise für potentielle zukünftige Handlungsfelder aufzeigen:

- Wie kann es künftig besser gelingen, die Lücke zwischen Testergebnisse und Unterrichtsentwicklung (besser) zu schließen?
- Inwiefern tragen Bildungsstandards zur Sicherung eines Basiswissens bei und was folgt aus dem wiederholten Feststellen des Nicht-Erreichens des Mindeststandards?
- Was wissen wir tatsächlich über die unterrichtliche Umsetzung der Bildungsstandards?

Literatur

Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., Köller, O. & Neubrand, J. (1997): *TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

KMK (2006). *Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring*. München: Luchterhand.

Kühn, S. M. & Drüke-Noe, C. (2013). Qualität und Vergleichbarkeit durch Bildungsstandards und zentrale Prüfungen? - Ein bundesweiter Vergleich von Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses. *Zeitschrift für Pädagogik, 6* , 912-932.

Pant, H. A., Stanat, P., Schroeders, U., Roppelt, A., Siegle, T. & Pöhlmann, C. (2013) (Hrsg.). *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I.* Münster: Waxmann.

Pöhlmann, C., Pant, H. A., Frenzel, J., Roppelt, A. & Köller, O. (2014). Auswirkungen einer Intervention auf die Auseinandersetzung und Arbeit mit Bildungsstandards bei Mathematik-Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 17*, 113–133.

Richter, D., Böhme, K., Becker, M., Pant, H. A. & Stanat, P. (2014). Überzeugungen von Lehrkräften zu den Funktionen von Vergleichsarbeiten: Zusammenhänge zu Veränderungen im Unterricht und den Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern. *Zeitschrift für Pädagogik, 60(2)*, 225–244.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K. & Richter, D. (2012) (Hrsg.). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011.* Münster: Waxmann.

Lars EICHEN; Julia BRUNS, Humboldt-Universität zu Berlin

Entwicklung eines videobasierten Instruments zur Erhebung mathematikdidaktischer Handlungskompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen

Unterschiedliche Kompetenzmodelle für pädagogische Fachpersonen beschreiben Kompetenzen auf zwei Ebenen: der Dispositions- und der Performanzebene (bspw. Fröhlich-Gildhoff, Weltzien, Kirstein, Pietsch & Rauh, 2014). Empirische Studien zur systematischen Untersuchung mathematikbezogener Kompetenzen mit Paper-Pencil Verfahren elementarpädagogischer Fachpersonen und ihrer Zusammenhänge beziehen sich bisher hauptsächlich auf die Dispositionsebene (bspw. Dunekacke, Jenßen & Blömeke, 2015). Um die Kompetenzfacetten auf beiden Ebenen zu erfassen, braucht es ergänzende Verfahren, die auch mathematikdidaktische Handlungskompetenzen der Fachpersonen in den Blick nehmen.

1. Mathematikdidaktische Handlungskompetenzen im Elementarbereich

In Anlehnung an das Kompetenzmodell von Loewenberg Ball und Bass Hymann (2009) werden unter mathematikdidaktischen Handlungskompetenzen im Folgenden allgemein die Fähigkeiten gefasst, die für das Lehren von Mathematik im Elementarbereich explizit erforderlich sind.

Verschiedene Studien geben schlaglichtartig Hinweise zu den vorhandenen Kompetenzen der Fachpersonen. Dabei zeigt sich, dass die Unterstützungsleistungen der Fachpersonen von hoher Bedeutung für die Lernprozesse der Kinder sind (bspw. Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006; 2008; Schuler, 2013). Schuler (2013) hat für das Spielen von Regelspielen die Bedeutung der Fachperson genauer beschrieben. Sie zeigt, dass mathematische Aktivitäten in Spielsituation vor allem dann auftreten, wenn eine Interaktion zwischen den Fachpersonen, den Kindern und den Materialien erfolgt. In der Studie von Bruns (2014) zeigten die Fachpersonen allerdings große Schwierigkeiten hinsichtlich der Planung angemessener mathematischer Aktivitäten und der adaptiven der mathematischen Förderung.

Alle oben genannten Studien stützen sich auf relativ kleine Stichproben und haben eher explorativen Charakter. Um jedoch die mathematikbezogenen Kompetenzstrukturen elementarpädagogischer Fachpersonen zur untersuchen, werden standardisierte Instrumente benötigt, die die Erfassung mathematikdidaktischer Handlungskompetenzen mit größeren Stichproben er-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

laubt. Als geeignetes Verfahren hierfür wird von Lindmeier (2013) die Testung mit Hilfe von Videovignetten vorgeschlagen.

2. Videovignetten zur Erfassung mathematik-didaktischer Handlungskompetenzen

Blömeke (2013) unterscheidet drei Formen von Videoeinsatz in der erziehungswissenschaftlichen Forschung:

- Videographierter Unterricht als Datenpool für die Analyse kontext-sensitiver Fragestellungen
- Videographierter Unterricht als kontext-sensitiver Impuls für die Datengewinnung
- Nutzung von Videos zur Beschreibung, Klassifizierung oder Veranschaulichung von Best Practice

Im ersten Ansatz werden Videos genutzt, um Unterricht aufzuzeichnen und anschließend zu analysieren. Der zweite Ansatz nutzt Videoformate als Impuls, um weitere Daten zu generieren. Ein weiterer Bereich für den Einsatz von Videos sei zudem die Darstellung von Best Practice Beispielen. Werden Videos als Impuls genutzt, um Daten zu generieren, kann dies wiederrum auf drei unterschiedliche Arten geschehen: die Videos können als Reflexionsbasis für verschiedene Gruppen, als Gesprächsanlass und als Testinstrument eingesetzt werden.

Lindmeier (2013) schreibt dem Einsatz von Videovignetten als Testinstrument im Vergleich zu schriftlichen Verfahren das Potenzial zu, eine höhere Validität zu erreichen. Dies gilt insbesondere für die Erfassung von Kompetenz- und Wahrnehmungskonstrukten. Stärker als papierbasierte Verfahren können Videoverfahren die Komplexität, Spontanität und Unmittelbarkeit von pädagogischen Alltagssituation nachbilden.

3. Zielsetzung

Auf der Basis der dargestellten empirischen Erkenntnisse und der methodischen Diskussion zur Erfassung von Kompetenzen in pädagogischen Settings, soll ein Instrument entwickelt werden, dass an der Schnittstelle zwischen der Dispositions- und Performanzebene ansetzt. Ziel ist zum einen die valide Erfassung der Fähigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen zur Situationswahrnehmung im Bereich Mathematik und zum anderen die valide Erfassung der Kompetenzen zur Handlungsplanung im Bereich Mathematik.

4. Methodisches Vorgehen

Für die Entwicklung des Instruments sind insgesamt vier Entwicklungsschritte vorgesehen. Der Zeitplan für die Entwicklung des Instruments ist in der Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Zeitplan zur Entwicklung des videobasierten Instruments zur Erhebung mathematikdidaktischer Handlungskompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen

April – Juni 2014	Theoretische Ausdifferenzierung der mathematikdidaktischen Handlungskompetenzen
Juli – Sept.	Auswahl der Videovignetten
Okt. 2014 – Apr. 2015	Item-/Fragekonstruktion
Mai – Juli 2015	Inhaltliche Validierung des Vignettentest

Der erste Schritt in der Entwicklung des videobasierten Instruments zur Erhebung mathematikdidaktischer Handlungskompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen (ViMaH) war eine Gruppendiskussion zur Ausdifferenzierung der mathematikdidaktischen Handlungskompetenzen im Arbeitsumkreis des Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM). Dazu wurden unterschiedliche Kompetenzfacetten in den Bereichen *Gestaltung von geplanten mathematischen Bildungsprozessen*, *Gestaltung von situativen mathematischen Bildungsprozessen*, *Diagnostik, Förderung* und *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Kindern* entwickelt und diskutiert. Im zweiten Entwicklungsschritt wurden mit Hilfe eines Online-Fragebogens die einzelnen Vignetten hinsichtlich ihrer formalen und inhaltlichen Qualität von Expertinnen und Experten bewertet. Weiter wurden die Expertinnen und Experten befragt, welche mathematikdidaktischen Handlungskompetenzen in den Videosequenzen nach ihrer Einschätzung vorrangig in den Videosequenzen thematisiert werden. In einem dritten Schritt werden die Items zu den ausgewählten Videovignetten konstruiert. Dafür werden in einer Pilot-Studie offene Antworten von elementarpädagogischen Fachpersonen zu den Videovignetten erhoben und mit Hilfe dieser Items gebildet. In einem Itempanel werden diese Items überprüft, diskutiert und weiterentwickelt. Der letzte Entwicklungsschritt beinhaltet die inhaltliche Validierung des Verfahrens durch Expertinnen und Experten.

5. Aktueller Stand

Insgesamt wurden nach einer internen Vorauswahl 133 Videovignetten von Expertinnen und Experten mit Hilfe des Online-Fragebogens bewertet. Unter den Videovignetten befinden sich Sequenzen zu allen Inhaltsbereichen der Mathematik in verschiedenen pädagogischen Settings (bspw. geführte

Aktivitäten, selbstbestimmte Aktivitäten). Zurzeit wird die Pilot-Studie zur Itemgenerierung vorbereitet.

Literatur

Blömeke, S. (2013). Moving to a higher state of confusion. Der Beitrag der Videoforschung zur Kompetenzforschung. In *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen. 4, S. 25–43). Münster u.a.: Waxmann.

Bruns, J. (2014). *Adaptive Förderung in der elementarpädagogischen Praxis. Eine empirische Studie zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 21). Münster: Waxmann.

Dunekacke, S., Jenßen, L. & Blömeke, S. (2015). Validierung eines Leistungstests zur Erfassung mathematikdidaktischer Kompetenz angehender frühpädagogischer Fachkräfte durch die videogestützte Erhebung von Performanz. *Zeitschrift für Pädagogik, 61* (Beiheft 61), 80–98.

Fröhlich-Gildhoff, K., Weltzien, D., Kirstein, N., Pietsch, S. & Rauh, K. (2014). *Expertise. Kompetenzen frühkindheitspädagogischer Fachkräfte im Spannungsfeld von normativen Vorgaben und Praxis. Erstellt im Kontext der AG Fachkräftegewinnung für die Kindertagesbetreuung in Koordination des BMFSFJ März 2014.* Freiburg i.Br: Zentrum für Kinder- und Jugendforschung.

Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M. & Hedges, L. V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk.". *Developmental psychology, 42* (1), 59–69.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen. 4, S. 45–61). Münster u.a.: Waxmann.

Loewenberg Ball, D. & Bass Hyman. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 Online. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 02.03. bis 06.03.2008 in Oldenburg* .

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 15). Münster: Waxmann.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis

Das *Funktionenmikroskop* war ein Vorschlag von Arnold Kirsch „zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“, der damals mit OHP-Folien realisiert wurde (Kirsch, 1980). Das war eine Vorwegnahme der Idee des Hineinzoomens: „Wir sehen uns den Graphen einer (geeigneten) Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P mit einem ‚Mikroskop‘ an. Dabei bemerken wir, daß das beobachtete kleine Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig verläuft und somit eine gewisse Steigung besitzt. Dies ist die Steigung von f an der betreffenden Stelle“ (Kirsch, 1979).

Diese Idee gab es im Prinzip auch schon vor Kirsch, wurde aber von ihm im deutschsprachigen Raum verbreitet und mit dem einprägsamen Bild des Mikroskops verbunden. Einige Jahre später ließ sich diese Idee dann digital mit der Zoom-Funktion von Funktionenplottern umsetzen. Damit wurde man bei den Funktionen und bei der zu untersuchenden Stelle flexibler, aber man agierte nach wie vor rein lokal.

1. Lokale Steigung mit der Funktionenlupe: Funktionenmikroskop 2.0

Die hier vorgestellte *Funktionenlupe* greift die Idee des Funktionenmikroskops auf und erweitert sie. Sie bietet zwei Fenster: im ersten Fenster ist der Funktionsgraph ‚normal‘ zu sehen, im zweiten wird ein Ausschnitt um einen Punkt A vergrößert. Die Größe dieses Ausschnitts kann über einen Schieberegler verändert werden und sukzessive verkleinert werden. Somit erhalten wir jetzt nebeneinander einen globalen und einen lokalen Blick (Elschenbroich & Seebach & Schmidt, 2014). Gehen wir um h nach links oder nach rechts, bekommen wir zwei weitere Punkte A_l und A_r auf dem Graphen von f. Durch A_l und A bzw. durch A und A_r kann man Geraden definieren, die Sekanten des Graphen von f sind.

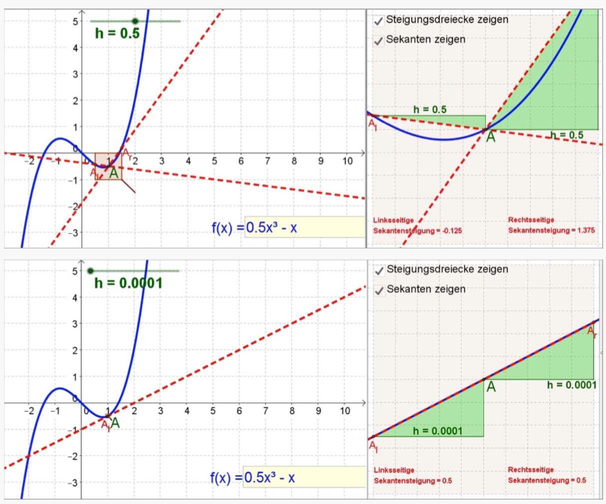


Abb. 1a, b Visueller Zugang zur lokalen Steigung mit der Funktionenlupe

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Deren Steigungen sind einfach zu bestimmen. In der Regel werden sie zunächst unterschiedlich sein. Bei ‚gutartigen' (= differenzierbaren) Funktionen nähern sich dann diese Sekantensteigungen immer mehr an, wenn h immer kleiner wird, und werden schließlich im Rahmen der Rechengenauigkeit identisch bzw. die Sekanten auf dem Bildschirm ununterscheidbar.

So kann man Funktionsgraphen anschaulich auf ihre Steigung an einem Punkt A untersuchen bzw. bei typischen nicht-differenzierbaren Funktionen erkennen, dass dort eine ‚Knickstelle' auch im Hineinzoomen bleibt.

Im Folgenden werden wir sehen, dass man mit der Funktionenlupe auch global einen Zugang zur Steigungs<u>funktion</u> bekommt (Elschenbroich & Seebach, 2014), weswegen ich die Funktionenlupe auch als digitale Erweiterung des Funktionenmikroskops, als *Funktionenmikroskop 2.0* sehen möchte.

2. Anschaulich zur Steigungsfunktion mit der Funktionenlupe

Wir haben ja lokal die Information über die (von h abhängige) linksseitige und rechtsseitige Sekantensteigung an *einer* Stelle A. Diese kann man mit dynamischer Mathematik-Software als y-Koordinate in einem Punkt P_l bzw. P_r übertragen, der die gleiche x-Koordinate wie A hat. Da A auf dem Graphen von f variabel ist, erhält man als Ortslinie die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungsfunktion, ohne den Funktionsterm zu kennen (was ich im Unterschied zum üblichen Funktionenplotter *Graphenplotter* nenne).

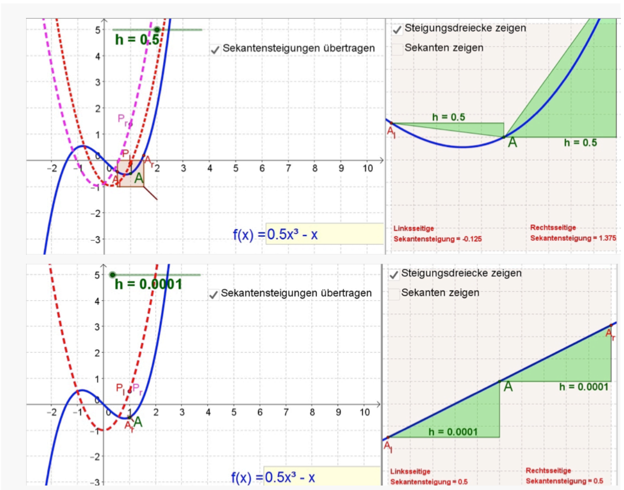


Abb. 2a, b Visueller Zugang zur Steigungsfunktion mittels Ortslinien

Wird h immer weiter verkleinert (z.B. bis h = 0.0001, aber nicht Null!), so verschwindet bei gutartigen Funktionen der Unterschied zwischen den Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen und sie verschmelzen anschaulich, d.h. im Rahmen der Bildschirmauflösung [1], zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion (Elschenbroich, 2014).

[1] Natürlich bleiben wir hier im Endlichen, sogar rational. Hier und auf dieser Grundlage sollten dann Theorie und Kalkül ansetzen, um eine *Infinitesimal*rechnung aufzubauen!

3. Anschaulich zur Krümmung mit der Funktionenlupe

Beim Zugang zur Steigung wurde (bei gutartigen Funktionen) der Funktionsgraph lokal bei starker Vergrößerung als geradlinig verstanden. Nun sind Funktionsgraphen aber meist gekrümmt. Es liegt also nahe, auch einen visuellen Zugang zur Krümmung zu suchen. Untersucht man die Krümmung mit den Methoden der Analysis, wird es konzeptionell schwierig und rechnerisch schnell unangenehm, weswegen die Krümmung (bis auf Rechts- oder Linksgekrümmtheit) im Schulunterricht keine Rolle spielt. Dies ist bedauerlich, weil Krümmung ein wichtiger und alltagsnaher Begriff und eigentlich auch eine Grundvorstellung der Analysis ist.

Die Funktionenlupe ermöglicht auch einen einfachen visuellen Zugang zur Krümmung, indem wir den Graphen jetzt lokal dadurch approximieren, dass wir durch die drei Punkte A_l, A und A_r einen Kreis konstruieren. Wird h wieder immer kleiner, so stabilisiert sich (bei gutartigen Funktionen) dieser Kreis (hier liegt der Fokus auf dem ersten Fenster!) und wird anschaulich zum Krümmungskreis (Büchter & Henn, 2010; Elschenbroich, 2014). Der Kehrwert des Kreisradius ist betraglich die Krümmung an dieser Stelle.

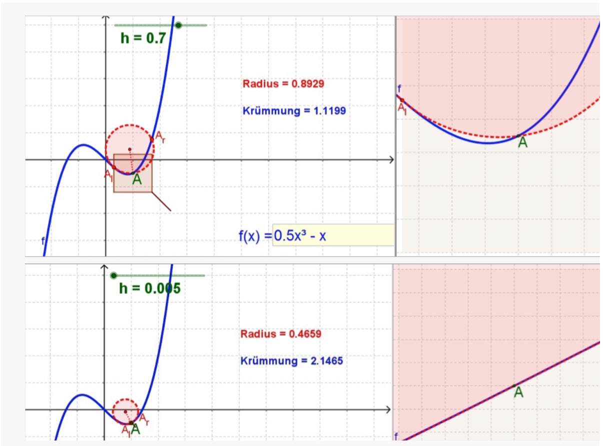


Abb. 3a, b Visueller Zugang zur Krümmung über den Schmiegekreis

4. Zur quadratischen Approximation mit der Funktionenlupe

So wie man geometrisch von der Tangente als einfachstem geradlinigem Objekt zum Kreis als einfachstem gekrümmten Objekt übergehen kann, so liegt es funktional nahe, von der linearen Approximation zu einer quadratischen Approximation überzugehen. Auch hier greifen wir auf die drei Punkte A_l, A und A_r zurück, ebenfalls mit Blick auf das erste Fenster. Durch diese drei Punkte ist eine quadratische Funktion festgelegt, die man in GeoGebra einfach mit dem Befehl `Polynom[A₁, A, Aᵣ]` bestimmen und plotten kann.

Für $f(x) = e^x$ approximiert diese Parabel den Graphen an der Stelle a = 0 schon für großes h recht gut (h = 1, siehe Abb. 4). Für kleines h (h = 0.0001) erhält man als quadratische Approximation $y = \frac{1}{2}x^2+x+1$.

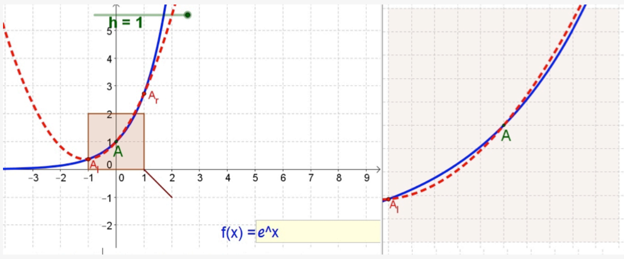


Abb. 4 Visueller Zugang zur quadratischen Approximation: Parabel durch 3 Punkte

Die lineare Approximation ist an dieser Stelle $y = x + 1$. So kommen wir anschaulich zum ersten und zweiten Taylorpolynom (es kommt zum linearen Term $x + 1$ nur noch der quadratische Term $\frac{1}{2}x^2$ hinzu)!

5. Fazit

Die Funktionenlupe ermöglicht einen anschaulichen und schüleraktiven Zugang zur lokalen Steigung einer Funktion, zur Steigungsfunktion, zur Krümmung und zur quadratischen Approximation. Dieser Zugang ist *auf der Benutzerebene* der Schüler oder Studenten anschaulich und kalkülfrei (wobei natürlich unterhalb der Benutzeroberfläche viel gerechnet wird).

Sicherheitshalber sei noch betont, dass ich damit nicht der Abschaffung des Kalküls und der Theorie das Wort reden möchte, sondern beiden eine anschauliche Grundlage geben möchte! Der Analysis-Kalkül wird in der Schule meist zu früh eingeführt und zu oft unverstanden exerziert. Dem kann man mit der Funktionenlupe abhelfen und tragfähige Grundvorstellungen aufbauen. Die hier vorgestellten anschaulichen Zugänge sind so angelegt, dass sie keine Fehlvorstellungen erzeugen und einen späteren Kalkül- und Theorieaufbau nicht behindern.

Literatur

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter & Schmidt, Reinhard (2014): Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *mathematik lehren 187* (S. 34–37). www.geogebratube.org/student/b411373

Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter (2014): Funktionen unter der Lupe. MatheWelt 187. Beilage zu mathematik lehren 187. www.geogebratube.org/student/b409833

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2014): Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis. In: Roth & Ames (Hsrg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 337–340).

Kirsch, Arnold (1980). Folien zur Analysis: Das Funktionenmikroskop. Serie A: Die Steigung einer Funktion. Schroedel, Hannover.

Kirsch, Arnold (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3 (S. 25–41).

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Variationen zum 'Rätsel der Woche' aus Spiegel online

Anfang Dezember 2014 erschien im Spiegel online eine Mathematik-Aufgabe als ‚Rätsel der Woche', die schnell die Runde machte. Dies möchte ich zum Anlass nehmen, zu untersuchen, wie man diese Aufgabe variieren und für den Mathematikunterricht nutzen kann.

1. Die originale Aufgabe

In einen Halbkreis sind zwei Strecken eingezeichnet.
Die eine liegt auf dem Durchmesser und hat die Länge 5 Zentimeter (rot). Die andere steht senkrecht darauf und ist 15 Zentimeter lang (blau).
Wie groß ist der Radius des Halbkreises?

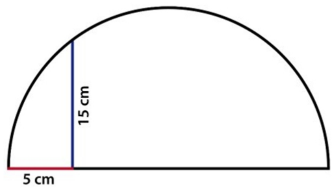


Abb. 1 Aufgabenstellung in Spiegel online

Eigentlich haben wir eine normale Mathematikaufgabe vorliegen. Für etwas mathematikfernere Menschen erscheint es vielleicht deshalb als ‚Rätsel', weil aus der Figur zunächst nicht erkennbar ist, was die beiden Strecken mit dem gesuchten Radius zu tun haben könnten.

Schaut man sich die in Spiegel online vorgestellte und weitere Lösungen im Internet an, so stellt man fest, dass diese üblicherweise einen statischen Ansatz mit einer Planfigur und Variablen verfolgen, bei dem dann noch auf einen geeigneten geometrischen Satz zurückgegriffen wird.

2. Statische Lösungen

Zunächst möchte ich kurz die gängigen algebraisch ausgerichteten Lösungen vorstellen.

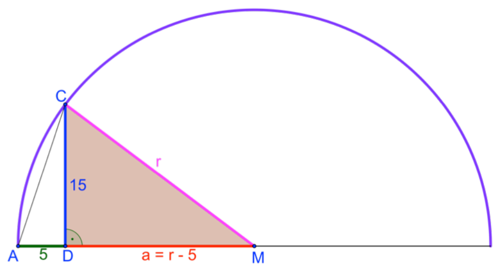


Abb. 2 Satz des Pythagoras im Dreieck CDM. r = 25.

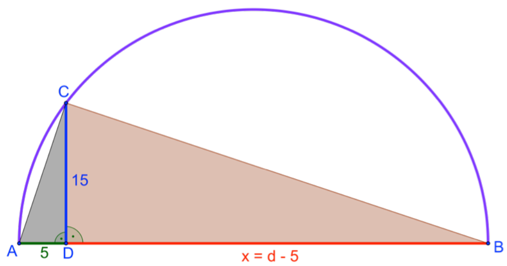


Abb. 3 Satz des Thales, Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und CDM. d = 50.

Die Lösungen in Abb. 2 – 4 arbeiten mit einer Planfigur, der Variablen r bzw. dem Satz des Pythagoras, Höhensatz oder Ähnlichkeitsätzen und der

Lösung einer Gleichung, die dann als Ergebnis den Radius r bzw. den Durchmesser d liefert.

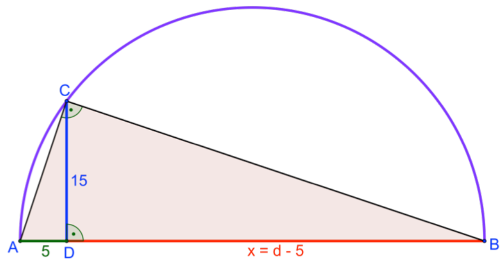


Abb. 4 Satz des Thales, Höhensatz im Dreieck ABC. d = 50.

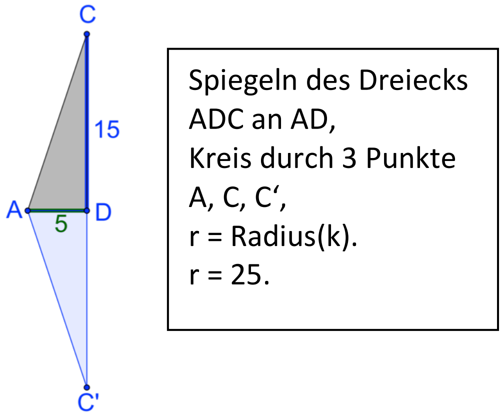


Abb. 5 GeoGebra-Tools

3. Lösung mit GeoGebra-Werkzeugen

Eine völlig andere Herangehensweise ist in Abb. 5 zu sehen, die aber auch weitgehend statisch bleibt. Durch den Einsatz von mächtigen GeoGebra-Werkzeugen als Black Box (Achsenspiegelung, Kreis durch 3 Punkte, Radius eines Kreises) wird der gesuchte Radius ermittelt.

4. Eine typische Problemlösestrategie

Allen vier Ansätzen ist gemeinsam, dass man die Lösung straight forward ermitteln kann - wenn man es halt kann. Die ersten drei algebraischen Lösungen dürften insbesondere mathematisch geschulten Menschen (Mathematiklehrern) geläufig sein. Es bleibt aber das Problem, dass man entweder weiß, wie man die Aufgabe angehen muss, oder aber keinen Zugang hat. Für mich stellten sich daher zwei Fragen:
- Wie kommt man zu *geometrischen, konstruktiven* Lösungen?
- Wie kann man eine *Lösungsidee finden*, wenn man zunächst keine hat?

Als erstes ist es sicher sinnvoll, in der Planfigur Punkte und Strecken zu benennen (A, B, C, Lotfußpunkt D, Radius r bzw. Durchmesser d). Dann stellt man fest, dass man nicht nur den Radius sucht, sondern damit auch den Kreis k. Man stellt dabei fest, dass man den Eckpunkt B nicht kennt und erst einmal die Strecke AD zu einem Strahl AD verlängern muss.

> „Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. […] Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst du etwas Förderliches aus den Daten ableiten?“ (Polya 1949, erste Innenseite)

Wir haben so drei Bedingungen: der Kreis muss durch A und C verlaufen und der Kreismittelpunkt muss irgendwo auf dem Strahl AD liegen.

Eine typische heuristische Strategie besteht darin, *eine* der Bedingungen wegzulassen, auch (n-1)-Strategie genannt. Hier haben wir die drei Bedingungen: Kreis durch A, Kreis durch C und Kreismittelpunkt M auf AD.

Daraus ergibt sich durch Weglassen einer der Bedingungen:
- Kreis durch A und C
- Kreis durch A um M auf AD
- Kreis durch C um M auf AD.

Kreise mit diesen Bedingungen sind leicht zu finden.

5. Dynamisierung I

Alle Kreise durch A und C müssen ihren Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke AC haben. Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, einen Punkt M auf ihr und einen Kreis um M durch A (der zwangsläufig auch durch C geht), so entdeckt man im Zugmodus schnell, dass die dritte Bedingung (M auf AD) auch erfüllt werden kann und das gesuchte M im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit AD liegen muss. Damit ist die Lösungsidee gefunden und es kann der gesuchte Kreis konstruiert und sein Radius gemessen werden.

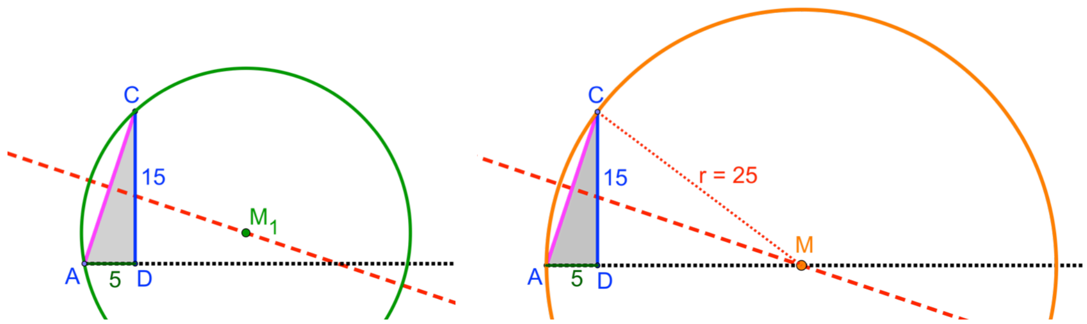


Abb. 6a, b Dynamisierung I: Kreis durch zwei Punkte

Dieser Weg ist für Schüler sicher leicht gangbar, ggf. brauchen sie beim Ansatz eine Anleitung oder ein geeignetes Arbeitsblatt.

6. Dynamisierung II

Konstruiert man Kreise um einen Punkt M auf AD durch A, so erkennt man im Zugmodus schnell, dass auch die dritte Bedingung (durch C) erfüllt werden kann. Nicht so einsichtig ist aber, wie man zu einer *Idee für die*

Konstruktion der Lösungsfigur kommt. Hier ist wieder ein Blick in die Schule des Denkens von Polya hilfreich.

> „Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein! [...]
> Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? [...]
> ... würdest du irgendein Hilfselement einführen?“
> (Polya 1949, erste Innenseite)

Damit könnte man z.B. auf die Idee kommen, den Schnittpunkt des Kreises mit AD zu konstruieren und als Ecke B eines Dreiecks ABC zu sehen. Bei Kreis und Dreieck denkt man vielleicht an den Satz des Thales bzw. den Umfangswinkelsatz und betrachtet deswegen noch den Winkel bei C.

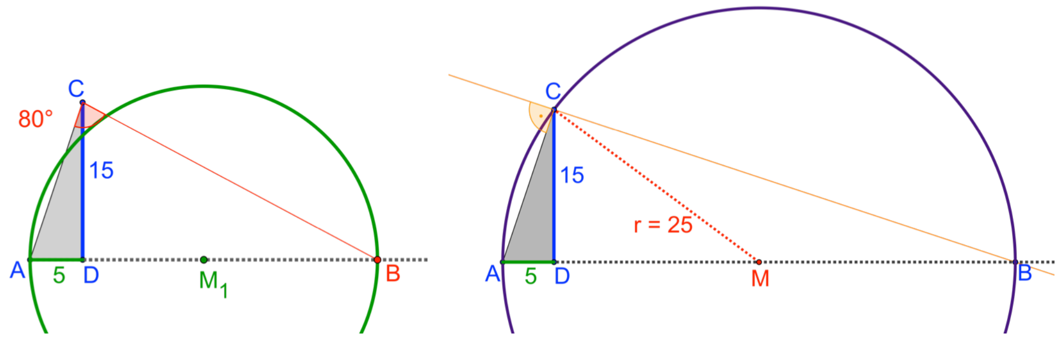


Abb. 7a, b Dynamisierung II: Kreis um M auf AD durch A

Variiert man nun diese Konstruktion im Zugmodus, so entdeckt man, dass der gesuchte Kreis dann vorliegt, wenn bei C ein rechter Winkel ist. Dann ist der Kreis Thaleskreis über AB. So erhalten wir eine Idee zur Konstruktion der Lösungsfigur: Die Senkrechte zu AC durch C schneidet den Strahl AD in einem Punkt B und der Mittelpunkt von AB ist der gesuchte Kreismittelpunkt. Damit kann nun der gesuchte Kreis konstruiert werden und sein Radius gemessen werden. Die dritte Dynamisierungsvariante (Kreis um M durch C) verläuft analog und wird daher hier nicht weiter ausgeführt.

7. Fazit

Die (n-1)-Strategie hat es ermöglicht, von der starren Planfigur abzugehen, die Figur im Zugmodus zu dynamisieren und dabei Ideen für eine geometrische, konstruktive Lösung des Problems zu entdecken.

Literatur

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Francke Verlag, Bern

Spiegel online: Rätsel der Woche: Das Kreuz mit dem Kreis. www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/raetsel-der-woche-kreis-unbekannter-groesse-a-1005539.html. Zugriff am 4.12.2014

Ralf ERENS, Freiburg, Andreas EICHLER, Kassel

Überzeugungen von Lehrkräften zum Technologie-Einsatz im Analysisunterricht

Zur Untersuchung des professionellen Handelns von Lehrkräften gehört auch die Umsetzung der objektive Ebene curricularer Vorgaben, die Ebene der individuellen lehrerspezifischen Interpretation und Fokussierung auf bestimmte Inhalte und die damit verbundenen Ziele. Untersuchungen haben hier gezeigt, dass die individuellen Überzeugungen von Lehrkräften zu ihrem Mathematikunterricht die Planung und Realisierung einen Einfluss auf die reale Unterrichtspraxis haben (Hiebert & Grouws, 2007). Die individuellen Vorstellungen, subjektiven Annahmen, Überzeugungen und Zielsetzungen der Lehrkräfte werden (international) unter das Konstrukt der *beliefs* oder *beliefs systems* subsumiert (Eichler & Erens, 2014). Diese beliefs bzw. belief systems von Lehrkräften betrachten wir anhand des Themenbereichs der Analysis, die der zentrale Teil des Curriculums in der gymnasialen Oberstufe ist. In diesem Beitrag verengen wir noch stärker den Fokus und betrachten allein die beliefs von gymnasialen Lehrkräften im Zusammenhang mit dem Einsatz digitaler Medien speziell für das Lehren und Lernen im Bereich der Analysis. Die digitalen Medien (GTR oder CAS) spielen zwar in allen belief systems der Lehrkräfte eine Rolle, zeigten aber in ihrer Ausprägung deutliche Unterschiede. In diesem Beitrag betrachten wir zunächst auf einer theoretischen Ebene vier Stufen der Verwendung digitaler Medien im Mathematikunterricht und skizzieren anschließend Ergebnisse einer qualitativen Studie mit 30 Lehrkräften bezogen auf die genannten Stufen.

Theoretischer Rahmen

In der Forschungsliteratur zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht wird dem Unterschied zwischen einer technischen und einer konzeptuellen Ebene Bedeutung zugemessen (z.B. Zbiek et al, 2007). Die technische Werkzeugebene besteht aus prozeduralem, mathematischem Arbeiten auf der Kalkülbasis, während die konzeptuelle Ebene Aktivitäten wie die Untersuchung, Erkundung, Vermutungen und deren Nachweis beinhaltet (ebd.). Die Entwicklung von der Werkzeug/Kalkül-Ebene zum konzeptuellen Arbeiten wird durch das Konstrukt der *instrumentellen Genese* beschrieben. Von essentieller Bedeutung ist hierbei die Unterscheidung zwischen einem „Instrument“ und einem „Artefakt“. Der Begriff des Instruments ist ein psychologisches Konstrukt und nicht die Beschreibung eines materiellen Gegenstands (Artefakt). Der materielle Gegenstand (Artefakt; z.B. GTR oder CAS-Rechner) muss von seinem Benutzer in gewissem

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Sinne beherrscht werden, um diesem im Sinne der Mathematik nutzbar machen zu können. Die instrumentelle Genese ist folglich der Prozess, wie der materielle Gegenstand zu einem (mathematischen) Instrument wird (ebd.). In einem Mathematikunterricht mit digitalen Medien ist es die Aufgabe der Lehrkräfte, den Prozess der instrumentellen Genese zu initiieren und zu steuern. Goos et al. (2010) definieren dazu unter dem Begriff der *instrumentellen Integration* vier Phasen, die beschreiben, wie Lehrkräfte die Bedingungen für eine instrumentelle Genese im Unterricht schaffen können:

Instrumentelle Einführung (*initiation*): Der Schwerpunkt in dieser Stufe liegt auf der Einführung der grundlegenden technischen Aspekte des verwendeten Hilfsmittels und wird als Werkzeugkompetenz bezeichnet.

Instrumentelle Erprobung (*exploration*): Wesentlich in dieser Stufe ist die Erprobung verschiedener Merkmale und Möglichkeiten der Technologie mittels mathematischer Aufgabenstellungen.

Instrumentelle Verstärkung (*reinforcement*): Im Mittelpunkt steht hier der Gebrauch und die Anwendung der Technologie zur Überwindung von Schwierigkeiten, z.B. bei der Lösung von Gleichungen.

Instrumentelle Symbiose (*symbiosis*): Entscheidend in dieser Stufe ist der notwendige Einsatz der Technologie beim mathematischen Arbeiten auf konzeptueller Ebene (s.o.).

Die Frage, wie Lehrkräfte die Rahmenbedingungen für eine instrumentelle Genese im Unterricht realisieren, steht dabei im engen Zusammenhang mit ihren individuellen Überzeugungen, wie eine instrumentelle Integration das Lernverhalten der Schüler unterstützen kann.

Studie und methodisches Vorgehen

Für die Beschreibung der Überzeugungen von Lehrkräften hinsichtlich des Lehrens und Lernens von Analysis – bezogen auf den Technologieeinsatz im Analysisunterricht – besteht die Stichprobe aus zehn Absolventen, die am Beginn der zweiten Phase der Lehramtsausbildung Mathematik stehen, zehn Referendaren des Lehramts Gymnasium im zweiten Ausbildungsjahr sowie zehn Lehrkräften des Gymnasiums mit mindestens fünf Jahren Unterrichtserfahrung. Die Erhebung basiert auf halbstrukturierten Leitfadeninterviews, in denen die Lehrkräfte u.a. hinsichtlich des Technologieeinsatzes zu Unterrichtsinhalten, Zielen des Analysis-Curriculums, und Materialien befragt wurden. Die Fragen des Interviews wurden vertieft durch die Einforderung von konkreten Beispielen und Ideen aus dem eigenen Unterricht. Die Unterschiede der Überzeugungen der Lehrkräfte hinsichtlich des Technologieeinsatzes im Analysisunterricht können mittels qualitativer Inhaltsanalyse anhand des Konstrukts der instrumentellen Genese (induktiv) kategorisiert werden.

Ergebnisse

Die empirischen Ergebnisse für die Existenz aller vier Stufen der instrumentellen Integration soll im Folgenden dargestellt werden mit dem Ziel, die zugrundeliegenden Ziele und Überzeugungen zu rekonstruieren, *wie* und *warum* Lehrkräfte Technologie im Analysisunterricht verwenden.

Auf der Stufe der instrumentellen Einführung ist es nicht weiter überraschend, dass insbesondere angehende Lehrkräfte sowohl selbst als auch auf Schülerebene die Notwendigkeit sehen, zunächst eine entsprechende Werkzeugkompetenz zu erlangen. Diese Prämisse ergibt sich zwingend aus den curricularen Rahmenvorgaben, nach denen für den Analysisunterricht in der Sekundarstufe 2 mindestens ein GTR benutzt werden muss.

In der Erprobung der verschiedenen Merkmale der Technologie (instr. Erprobung) erwähnen viele Lehrkräfte die Möglichkeiten der Visualisierung und die verschiedenen Repräsentationsformen (z.B. Term, Graph & Tabelle), um das Verständnis mathematischer Konzepte zu fördern. Wesentliches Ziel der Lehrkräfte ist hier die Erlangung eines tieferen Funktionenverständnisses. Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen wird dabei von wenigen Lehrkräften erwähnt. Weit häufiger wird der Mehrwert der Technologie in der Visualisierung (graphischer Aspekt) gesehen.

Bei der Anwendung der Technologie zur Überwindung von (Kalkül-) Schwierigkeiten (Entlastung der Schüler von Routineberechnungen z.B. Lösen von Gleichungen und Berechnen von Ableitungsfunktionen/Extremwerten) wird im Sinne der instrumentellen Verstärkung der Mehrwert in der Kalkülentlastung gesehen (Zeitersparnis). Dieser ermöglicht eine Konzentration auf den innermathematischen Lösungsprozess und enthält zugleich eine positiv wirkende motivationale Komponente auf Schülerebene. Zentrales Ziel dieser Lehrkräfte ist ein Nutzen der Technologie zur Erlangung eines tieferen Verständnisses für Inhalte und ein erfolgreiches Schüler-Lernen.

Für die vierte Stufe der instrumentellen Integration finden sich wenige Belege bezogen auf die Absolventen und Referendare. Ein Grund dafür könnte die fehlende Unterrichtserfahrung sein. Dagegen findet man etwa folgendes paradigmatisches Beispiel einer Lehrkraft mit langjähriger Unterrichtserfahrung, die einen CAS-Rechner im Sinne der instrumentellen Symbiose einsetzt.

„Mit CAS können meine Schüler tatsächlich selbst entdecken, ob ihre Vermutung, die sie selbst zu einer Funktion aufgestellt haben, auch auf andere Funktionen zutrifft. Wenn sie [die Schüler] *ihre Vermutung an 5 Bespielen mit dem CAS einfach überprüft haben und als richtig erkannt haben, na dann sind sie (...) sogar dazu bereit sich darauf einzulassen ihr Ergebnis formal zu beweisen.“*

Diese Lehrkraft betont Vorteile des CAS-Einsatzes: als Hilfsmittel für die Schüler, die mit mathematischen Objekten induktiv experimentieren können. Sie hat das Ziel, die Schüler zu eigenaktivem mathematischen Arbeiten zu motivieren und einen höheren Grad der Abstraktion zu erreichen.

Bezüglich aller vier Stufen der instrumentellen Integration finden sich in den Interviews insbesondere bei erfahrenen Lehrkräften auch Bedenken zu Nachteilen eines Technologieeinsatzes: beispielsweise wird die Abnahme von grundlegenden Kalkülkompetenzen erwähnt, die als Fundament des Analysisunterrichts in der Sekundarstufe 2 als wichtig erachtet werden.

Insgesamt lassen sich in der Stichprobe zwei antithetische Überzeugungssysteme hinsichtlich des GTR/CAS-Einsatzes ausmachen: Befürworter und Ablehner. Die Datenauswertung suggeriert zwischen den Polen ein Kontinuum, das von Zurückhaltung und Skepsis über einen Mehrwert bis zu einer Implementierung von Technologie als Mittel zum Zweck reicht. Alle Lehrkräfte betonen, dass die händischen Rechenkompetenzen mehr oder weniger wichtig für die (Schul-)Analysis sind. Inwieweit die von Lehrkräften geäußerten Überzeugungssysteme eine Handlungsrelevanz für die Unterrichtspraxis haben und ob ein Zusammenhang zwischen den Lehrerüberzeugungen und dem Lernverhalten der Schüler existiert, sind Anschlussfragen zukünftiger Forschung.

Literatur

Eichler, A. & Erens, R.(2014). T*eachers' beliefs towards teaching calculus*. ZDM, Int. J. Math. Educ. 46, No. 4, pp. 647-659. Berlin/Heidelberg: Springer

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Goos, M. & Soury-Lavergne, S. (2010). *Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation*. In Hoyles, Celia (ed.) et al., Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI study. Dordrecht: Springer

Zbiek, R M.., Heid, M. K., Blume, G., & Dick, T.P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Nora FELDT-CAESAR, Darmstadt

Möglichkeiten der Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptiv gestaltetes Testverfahren

Um insbesondere an den Übergängen zwischen den Sekundarstufen und von der Sekundarstufe II zur Hochschule bei jeder Schülerin/jedem Schüler ein gewisses *Grundwissen und Grundkönnen* (Feldt, 2013) zu sichern, kommt einem dafür geeigneten Diagnoseinstrument besondere Bedeutung zu.

Anforderungen an ein Diagnoseinstrument

Wenn ein Testinstrument das Grundwissen und Grundkönnen mehrerer Jahrgangsstufen umfassen soll, muss in der Regel eine Vielzahl relevanter Inhalte abgedeckt werden. Um dieser Inhaltsvielfalt in einem zeitlich notwendigerweise begrenzten Test gerecht zu werden, scheint es zunächst naheliegend, vorwiegend komplexe, d.h. mehrschrittige Items zu verwenden. Eine solche Verknüpfung von elementaren Inhalten und Handlungen wird zudem der Forderung nach einem im Sinne von Weinert *intelligenten* Grundwissen und Grundkönnen gerecht. Da Grundwissen und Grundkönnen die Voraussetzung für jedes weitere Lernen darstellt, ist es auf der anderen Seite besonders wichtig, eventuelle Defizite genau lokalisieren zu können. Elementare, einschrittige Aufgaben ermöglichen solch eine präzise Diagnose und erlauben damit, aus den Testergebnissen unmittelbar förderwirksame Rückschlüsse zu ziehen. Dies erscheint umso wichtiger, wenn ein digitales Testinstrument verwendet wird, das der Lehrerkraft keinen Einblick in das Zustandekommen der Schülerlösungen bietet.

Elementarisierendes Testen als Lösungsansatz

Ein im Sinne des *branched testings* (Kubinger, 2009) adaptiv gestaltetes Testverfahren bietet die Möglichkeit, sowohl komplexe als auch elementare Items je nach Bedarf zu kombinieren: Beim *elementarisierenden Testen* durchlaufen alle Schülerinnen und Schüler zunächst eine Hauptlinie von Testaufgaben, in der die Inhalte im Sinne der Zielformulierung von Grundwissen und Grundkönnen auch in verknüpfter Form getestet werden. Kann eine dieser Aufgaben nicht gelöst werden, wird man durch eine Schleife von Elementaritems geleitet, die jeweils einen für das Lösen der Hauptlinienaufgabe notwendigen *Elementarbaustein* (Feldt, 2013; Bruder et al., in Druck) fokussieren und somit zur Aufklärung des in der Hauptlinie aufgetretenen Fehlers beitragen. Nach dem Durchlaufen der elementarisierten Schleifenaufgaben wird mit der Bearbeitung der Hauptlinienaufga-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ben fortgefahren. Die Realisierung eines solchen Testverfahrens kann über ein digitales Testformat oder in diagnostischen Interviews erfolgen.

Forschungsfragen und Erprobung

Zentral ist die Frage nach dem diagnostischen Mehrwert der vorgenommenen Elementarisierungen. Hier gilt es, für einzelne Aufgabenkomplexe (Hauptlinienaufgabe mit zugehörigen Elementaritems) Anhaltspunkte darüber zu gewinnen, inwieweit das Durchlaufen der elementarisierenden Schleife zur Fehleraufklärung beitragen kann. Eine weitere Forschungsfrage beschäftigt sich mit möglichen Lerneffekten beim Durchlaufen der elementarisierenden Schleifen. Diese Lerneffekte sind primär nicht intendiert, aufgrund des gezielten Ansprechens von Elementarbausteinen in den Schleifen aber durchaus zu erwarten. Zur Klärung dieser und weiterer Forschungsfragen wird derzeit ein Instrument zur Diagnose des am Ende der Sekundarstufe II verfügbaren Grundwissens und Grundkönnens im Bereich funktionaler Zusammenhänge mit SchülerInnen der Sekundarstufe II und StudienanfängerInnen im Rahmen des Mathematik-Vorkurses VEMINT und einer einführenden Mathematik-Lehrveranstaltung an der TU Darmstadt erprobt. Bei den StudienanfängerInnen wurden vier verschiedene Aufgabenkomplexe in verschiedenen Gruppierungen eingesetzt (Tangente: n=458; Extrema: n=459; Normale: n=332; Flächeninhalt: n=216). Zur Kontrolle des Lerneffekts wurde am Ende des Tests zu jeder der Hauptlinienaufgaben ein Parallelitem platziert, das im Falle einer ursprünglich nicht oder falsch gelösten Hauptlinienaufgabe angezeigt wurde.

Diagnostisches Potential

	Gruppe 1 → (teilweise) Fehleraufklärung *(„Fehleraufklärungsquote")*	**Gruppe 2** → keine Notwendigkeit einer Fehleraufklärung *(Lerneffekt)*	**Gruppe 3** → keine Fehleraufklärung
Tangente (n=264)	62,0%	16,7%	21,3%
Extrema A (n=115)	51,3%	20,9%	27,8%
Normale (n=207)	78,3%	15,5%	6,3%
Flächeninhalt (n=104)	87,5%	1,9%	10,6%

Die Angaben beziehen sich auf die Gruppe der TestteilnehmerInnen, die aufgrund eines Fehlers in der Hauptlinienaufgabe durch die elementarisierende Schleife geleitet wurde.

Um Anhaltspunkte zum diagnostischen Mehrwert der Elementarisierungen zu erhalten, wurden die TestteilnehmerInnen, die die Hauptlinienaufgabe nicht lösen konnten und daher in die elementarisierende Schleife geleitet wurden, in drei Gruppen eingeteilt: Gruppe 1 umfasst alle TestteilnehmerInnen, bei denen im Verlauf der Schleife mindestens ein Fehler registriert wurde, der auf mindestens einen fehlenden oder fehlerhaften Elementarbaustein schließen lässt. Der Anteil dieser Gruppe an allen TestteilnehmerInnen, die die Hauptlinienaufgabe nicht lösen konnten, wird als „Fehleraufklärungsquote“ bezeichnet. Die Gruppen 2 und 3 umfassen hingegen die TestteilnehmerInnen, die bei allen elementarisierten Schleifenitems die richtige Lösung angegeben konnten. Aus diagnostischer Sicht ist hier zunächst kein Mehrwert gegeben. Allerdings ist hier eine Unterscheidung sinnvoll, ob das Parallelitem im Anschluss an den Test gelöst werden konnte (Gruppe 2) der nicht (Gruppe 3). Kann die Anforderung des Hauptlinienitems schließlich doch bewältigt werden, so ist davon auszugehen, dass in irgendeiner Form ein Lernen stattgefunden hat. In diesem Fall ist es durchaus legitim, dass das Durchlaufen der elementarisierenden Schleife keinen Beitrag zur Fehleraufklärung leistet. Kritisch ist hingegen der Fall, der in Gruppe 3 eintritt: Hier findet weder ein Lernen noch eine Fehleraufklärung statt. Ein hoher Anteil von TestteilnehmerInnen in dieser Gruppe deutet darauf hin, dass eine zentrale Schwierigkeit der Hauptlinienaufgabe bei der Elementarisierung nicht erfasst wurde. (Ein geringer Teil der registrierten Fehler lässt sich vermutlich auch auf nicht-systematische Fehler zurückführen. Diese sind jedoch im verwendeten Testformat nicht kontrollierbar und werden daher bewusst ausgeblendet. Hierzu sollen anhand von zusätzlich erhobenen Interviewdaten weitere Anhaltspunkte gewonnen werden.) Die Anteile der jeweiligen Gruppen (vgl. Abb.) lassen darauf schließen, dass sich die eingesetzten Aufgabenkomplexe hinsichtlich der Qualität der Elementarisierung stark unterscheiden. Eine besonders hohe Fehleraufklärungsquote besitzt der Aufgabenkomplex „Flächeninhalt“, bei dem zusätzlich das diagnostische Potential von Distraktoren genutzt wird (Winter, 2011): Einer der zur Auswahl stehenden Distraktoren bildet den typischen Fehler ab, für eine unterhalb der x-Achse liegende Fläche statt des Flächeninhalts den orientierten Flächeninhalt anzugeben. Dieser Fehler macht 33,8% aller falschen Antworten aus. Da davon auszugehen ist, dass mit der Auswahl dieses Distraktors der Fehler vollständig aufgeklärt ist, wird der Testteilnehmer in diesem Fall nicht durch die elementarisierende Schleife, sondern direkt zum nächsten Hauptlinienitem geleitet. Werden beide Effekte zusammengenommen, erreicht man insgesamt eine Fehleraufklärungsquote von 91,7%. Der Anteil der kritischen Gruppe 3 reduziert sich gleichzeitig auf 7,0%. Dieses Beispiel zeigt, dass die Fehleraufklärungsquote durch den kombinierten Einsatz von elementarisierenden Schleifenaufgaben und Distraktoren mit diagnostischem Potential wesentlich verbessert werden kann.

Lerneffekte durch Reaktivieren

Die Lösungshäufigkeiten der im Anschluss des Tests platzierten Parallelitems liegen bei etwa 30% bis 37%, sodass das Durchlaufen der elementarisierenden Schleifen zumindest zu kurzfristigen Lerneffekten zu führen scheint. Lediglich beim Aufgabenkomplex „Flächeninhalt“ zeigt das Parallelitem nur eine Lösungshäufigkeit von 16,3%. Der Grund hierfür liegt in dem erwähnten häufigen Fehler, der durch den Distraktor zwar aufgeklärt, jedoch nicht noch einmal gezielt in einer Schleifenaufgabe thematisiert wird, sodass hinsichtlich dieses Fehlers kein Lernanlass geboten wird. Bei den übrigen Aufgabenkomplexen zeigt die mittlere Anzahl der gelösten Schleifenitems einen signifikanten, gering bis mittelstark positiven Zusammenhang (Korrelationskoeffizient nach Pearson) mit dem Lösen des Parallelitems. Einen Lerneffekt zeigen demnach vorwiegend die TestteilnehmerInnen, die viele Elementaritems lösen können. Das unterstützt die theoretisch auch zu erwartende Vermutung, dass die beobachteten Lerneffekte weniger auf ein Neulernen als vielmehr auf ein Reaktivieren von bereits erlernten, aber nicht mehr verfügbaren Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten zurückzuführen sind.

Zusammenfassung

Die aktuellen Erprobungsergebnisse zeigen, dass mit dem elementarisierenden Testen ein Diagnoseverfahren entwickelt werden konnte, das die reguläre Teststruktur zunächst von der Einbindung vieler einzelner Elementaritems entlastet, um so verstärkt ein intelligentes Wissen und Können in den Blick zu nehmen. Gleichzeitig bleibt eine hohe diagnostische Aussagekraft erhalten, wobei die Fehleraufklärungsquoten zwischen den einzelnen Aufgabenkomplexen stark variieren. Insbesondere das Zusammenspiel von elementarisierenden Schleifen und diagnostischen Distraktoren scheint besonders wirksam. Neben dem eigentlichen Ziel der Gewinnung diagnostischer Informationen sind durch die vorgenommenen Elementarisierungen zumindest kurzfristige Lerneffekte zu beobachten, die vermutlich auf ein Reaktivieren von nicht mehr verfügbaren Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten zurückzuführen sind.

Literatur

Bruder, R., Feldt-Caesar, N., Pallack, A., Pinkernell, G. & Wynands, A. (in Druck). Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II. In W. Blum et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II.* Braunschweig: Schrödel.

Feldt, N. (2013). Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 308-311). Münster: WTM.

Kubinger, K. D. (2009). *Psychologische Diagnostik, Theorie und Praxis psychologischen Diagnostizierens.* Göttingen: Hogrefe.

Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse*. Münster: WTM.

Marei FETZER, Julia FRIEDLE, Lina-Sophie PFEIFFER,
Franziska SCHNEIDER, Frankfurt

Inklusion – Ideen für Unterricht und Lehrerausbildung

In diesem Beitrag möchten wir das Projekt-Seminar ‚Inklusiver Mathematikunterricht', welches im Wintersemester 2014/15 an der Goethe-Universität Frankfurt durchgeführt wurde, vorstellen. Auslöser für die Entwicklung des Inklusions-Seminars war die Bedarfsanmeldung durch Studierende. In engem Austausch zwischen der Dozentin, Frau Dr. Fetzer, und den Studierenden wurde ein zweisemestriges Seminarkonzept ausgearbeitet. Im ersten Semester werden mathematikdidaktische Grundlagen gelegt. Themenschwerpunkte sind hier Heterogenität, Differenzierung und Diagnostik. Das *Projektseminar Inklusiver Mathematikunterricht* baut im zweiten Semester auf dieser Basis auf. Die Konzeption dieses zweiten Teils stellen wir im folgenden Absatz vor.

1. Seminarkonzeption

Grundlegend für das Inklusions-Seminar war die *Orientierung am Fach*. Es ging also um Mathematik und die Möglichkeiten, Mathematik in inklusiven Settings zu lernen und zu unterrichten. Statt einem vorher festgelegten Seminarplan zu folgen, war die Konzeption auf *Offenheit und Flexibilität* angelegt. Dabei blieb die Kernidee ‚Inklusiver Mathematikunterricht' stets der Ausgangs- und Bezugspunkt. Eine Seminarplanung entlang einer *Kernidee* stellt nicht nur für die Dozentin, sondern auch für die Studierenden eine ungewohnte Situation und Herausforderung dar. Zitat einer Studentin aus dem Seminar: „Ich habe in keinem anderen Seminar jemals so viel mitgedacht und mitgemacht. Es war zwar anstrengend, aber ich habe auch unglaublich viel gelernt." Den Begriff der ‚Kernidee' verwenden wir unter Rückgriff auf Gallin und Ruf (1999) als sensibilisierenden Begriff.

Neben dem individuellen Lernen und Arbeiten wurde ein besonderer Fokus auf das *gemeinsame Arbeiten* gelegt. Die Gestaltung des Seminars und somit auch die Verantwortung wurden in besonderem Maße auf alle Beteiligten verteilt. So brachten die Studierenden ihr jeweiliges Expertenwissen ein, wovon alle Beteiligten profitierten. Zudem waren regelmäßige gemeinsame Fazits und Überlegungen zum weiteren Vorgehen ein wichtiger Bestandteil des Arbeitens im Seminar.

Teamfähigkeit ist ein Aspekt, der für den inklusiven Unterrichtsalltag zunehmend an Bedeutung gewinnt. Statt wie bisher als ‚Einzelkämpfer', arbeiten Lehrkräfte in inklusiven Klassen in multiprofessionellen Teams. Eine gute Zusammenarbeit und Kooperation zwischen den Beteiligten unter-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

schiedlicher Berufsgruppen stellt einen entscheidenden Faktor für gelingenden inklusiven (Mathematik-) Unterricht dar. Entsprechend war das *Ausbilden von Teamfähigkeit* nicht nur inhaltlich, sondern vor allem konzeptionell Teil des Seminars. Grundlegendes und integratives Element der Veranstaltung war die Praxis der Arbeit im Team.

2. Inhaltliche Schwerpunkte

Einer der inhaltlichen Schwerpunkte des Seminars bestand in der *Auseinandersetzung mit dem Mangel an Fachliteratur* zu inklusivem Mathematikunterricht. Dazu haben wir u.a. bestehende Literatur, sowie Materialien kritisch betrachtet und einen Katalog von ‚Reviews' zusammengestellt. Unsere im Laufe des Seminars gewonnenen Ergebnisse und Erkenntnisse werden als Publikation erscheinen.

Ein weiterer Baustein im Seminar war Gastvorträge und Diskussionen mit *ExpertInnen aus Wissenschaft und Schulpraxis*. Aus der Forschung besuchten uns WissenschaftlerInnen aus den Erziehungswissenschaften, der Sonderpädagogik und der Mathematikdidaktik. Aus der Praxis waren eine Grundschullehrerin, eine Förderschullehrerin, eine Rektorin und eine Montessori-Lehrerin vertreten.

Die Studierenden haben in Kleingruppen *Hospitationen* sowohl an Regelschulen, die inklusiv arbeiten, als auch an Reform- oder Förderschulen organisiert. Die Beobachtungen, die dabei an den Regelschulen gemacht wurden, dienten als Anknüpfungspunkt für die Planung einer eigenen inklusiven Mathematikstunde in dieser Klasse.

Daraufhin haben die Studierenden des Inklusions-Seminars in Kleingruppen jeweils ein *Konzept für eine Unterrichtsstunde* auf der Basis einer mathematischen Kernidee entwickelt. Diese Unterrichtsideen wurden im Anschluss durchgeführt und gründlich reflektiert. Besonders deutlich wurde hierbei, dass ein Umdenken und ein Loslösen von alten Mustern und Denkweisen von vorneherein bei der Planung wichtig sind.

3. Ergebnisse und Erkenntnisse

Die Erkenntnisse, die im Seminar gewonnen wurden, beziehen sich zum einen auf die Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts, und lassen sich zum anderen dem Bereich der Lehrerausbildung zuordnen. Aus beiden Schwerpunkten stellen wir im Folgenden einige Ergebnisse beispielhaft vor, beginnend mit der Unterrichtspraxis.

Inklusiver Mathematikunterricht zielt zum einen auf Individualisierung, also auf eine *individuelle* Förderung der Kinder. Zum anderen ist das *gemeinsame* Lernen unerlässlich für gelingenden inklusiven Mathematikunterricht. Substanziell Neues kann nur im Miteinander, in der Diskussion mit Freunden oder im Austausch mit der Lehrkraft, gelernt werden (Miller 1986, Wittmann 1995). Insbesondere das gemeinsame Lernen wird im Unterrichtsalltag oft vernachlässigt und als problematisch in der Umsetzung empfunden. Entscheidend ist eine Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen.

Zentral für einen gelingenden inklusiven Mathematikunterricht ist die Abkehr von klassischen Formen der Differenzierung, die in vielen Fällen auf ein Beschäftigen der Kinder hinauslaufen. Stattdessen soll darauf gezielt werden, dass alle Kinder am selben mathematischen Inhalt gemäß ihren jeweiligen Voraussetzungen arbeiten. Dies kann durch die Orientierung an einer *mathematischen Kernidee* gelingen, von der ausgehend der Unterricht konzeptioniert wird. Gallin und Ruf prägten den Begriff der Kernidee, mit dem sie sich gegen eine kleinschrittige, segmentierende Didaktik wenden (Ruf/Gallin 1999). Dafür findet eine Rückbesinnung auf den inhaltlichen (hier mathematischen) Kern statt, ein umfassender, vernetzender Zugang zu einem Thema wird eröffnet. Der Begriff der Kernidee erscheint uns in besonderem Maße als geeignet für ein intuitives Verständnis der grundlegenden Aspekte im Zusammenhang mit inklusivem Mathematikunterricht.

Die Orientierung an mathematischen Kernideen bedeutet, mit Formen der *Natürlichen Differenzierung* zu arbeiten. Diese lässt sich in zwei Arten umsetzen: In Form von substantiellen Lernumgebungen (Wittmann 2010) und durch Thematische Parallelisierung (Nührenbörger/Pust 2011).

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass inklusiver Mathematikunterricht nur auf der Basis guter *fachlicher und didaktischer Kenntnisse* der Lehrperson gelingen kann. Außerdem erfordert Inklusion ein hohes Maß an Offenheit und *Flexibilität*. Beides wird durch die Konzentration auf eine Kernidee günstig beeinflusst.

Für den Umgang mit inklusiven Klassen haben wir im Seminar eine *Checkliste* erstellt, die die Planung einer inklusiven Mathematikstunde erleichtern kann: Sind unterschiedliche Einstiegsniveaus, vor allem auch niedrige Einstiegsniveaus, gegeben? Sind unterschiedliche Zugänge möglich? Können unterschiedliche Wege genutzt werden? Können unterschiedliche Ziele angestrebt und erreicht werden? Ist gemeinsames Lernen möglich?

Abschließend gilt: Inklusives Arbeiten im Mathematikunterricht stellt neue Lehr- und Lernformate sowohl für die Lehrenden, als auch für die Lernenden dar. Die Umsetzung ist ein Prozess. Ohne Zutrauen zu sich selbst und Vertrauen in die Kinder, ohne *Durchhaltevermögen*, geht es nicht.

In Bezug auf die Lehrerausbildung konnten wir nachstehende Aspekte als fundamental für eine gute Vorbereitung auf die inklusive Schulpraxis identifizieren:

Die Ausbildung zukünftiger Lehrkräfte gewinnt dann an Qualität, wenn eine *Verzahnung von Theorie und der Praxis* hergestellt werden kann. Dies sollte gefördert werden, indem Studierenden Hospitationen über längere Zeiträume ermöglicht werden. Auch fest in das Semester integrierte Praxistage oder Praxissemester könnten sich positiv auswirken. Außerdem sollte möglichst oft konkret statt allgemein gearbeitet werden, indem theoretische Konzepte immer mit Hilfe eines praktischen Beispiels erläutert werden. Schließlich sollten vermehrt Fallbeispiele analysiert werden. So können wissenschaftliches und praktisches Wissen situationsbezogen zusammengeführt werden.

Teamarbeit und Kooperation mit KollegInnen, die bei der Arbeit in multiprofessionellen Teams eine wesentliche Rolle spielen, sollten bereits in der Lehrerausbildung aktiv umgesetzt und geübt werden. Im Seminar wurde Unterricht im Team geplant und gestaltet. Zudem war die dynamische und prozesshafte Seminarplanung geprägt von Expertenwissen, das durch einzelne Studierende eingebracht wurde. Somit wurde in Anfängen als (multiprofessionelles) Team gearbeitet. Diese Art des Arbeitens wird im kommenden Semester durch ein Kooperationsseminar, bei dem Lehramtsstudierende für die Grundschule und für die Förderschule zusammenarbeiten, weiterentwickelt. Für die Zukunft ist es denkbar eine Vernetzung von Universitäten anzustreben, sodass Wissen über Inklusion im Mathematikunterricht gebündelt werden kann. Außerdem sollte die Inklusion im Studium in die Didaktik eingegliedert werden und verpflichtendes Element werden.

Literatur

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie.* Frankfurt: Suhrkamp.

Nührenbörger, M. & Pust, S. (2011). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik.* Seelze: Kallmeyer.

Ruf, U. & Gallin, P. (1999). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Bd.2: Spuren legen – Spuren lesen*. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10-42). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E. Ch. (2010). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule – vom Fach aus. In P. Hanke & G. Möwes Butschko et. al. (Hrsg.), *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule* (S. 63-78). Münster: ZfL.

Frank FEUDEL, Paderborn

„Studienmethodische Förderung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Chancen und Schwierigkeiten"

Problemstellung und Ausgangslage

Studierende der Wirtschaftswissenschaften benötigen für ihr Studium umfangreiche mathematische Kompetenzen, die über Rechentechniken hinausgehen. Dazu gehören vor allen Dingen Modellierungs- und Problemlösekompetenzen, Argumentationskompetenzen sowie ein adäquater Umgang mit der mathematischen Fachsprache.

Aufgrund sehr heterogener Vorkenntnisse und teilweise ungünstiger methodischer Arbeitsweisen haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften einen großen Unterstützungsbedarf. Zur deren Unterstützung wurde deshalb an der Universität Paderborn ein studienmethodisches Konzept entwickelt (Dietz, 2013), welches seit 2011 in dem Projekt „Förderung von Lern- und Arbeitsstrategien im Fach Wirtschaftsmathematik" des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) systematisch evaluiert und weiterentwickelt wird (Projektleiter: Prof. Dr. Hans-Michael Dietz).

Das studienmethodische Konzept CAT an der Universität Paderborn

An der Universität Paderborn wird seit 2010 den Studierenden in der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" ein Konzept mit dem Namen „CAT" (Checkliste, Ampel, Toolbox) zur methodischen Unterstützung angeboten. Dieses ist in die Lehrveranstaltung direkt integriert. Das Konzept CAT besteht aus mehreren sogenannten „Instrumenten", welche die Studierenden unterstützen sollen. So gibt es zum Beispiel „Checklisten" zur Unterstützung der Studierenden bei der Vorlesungsnachbereitung, der Übungs- und der Klausurvorbereitung sowie beim Lesen mathematischer Texte, das Instrument „Ampel" zur Hilfe bei der Selbstkontrolle, das Instrument „Toolbox" zur Unterstützung beim Problemlösen, eine Vokabelliste zur Hilfe bei der Memorisierung des Fachvokabulars und das Instrument „Konzeptbasis" zur Unterstützung der Studierenden beim Aufbau eines adäquaten Verständnisses mathematischer Begriffe (Dietz, 2013). In diesem Artikel ist exemplarisch die Konzeptbasis Gegenstand der Betrachtungen, weshalb diese im Folgenden näher beschrieben wird.

Die Konzeptbasis geht auf die Idee des *concept image* von Tall und Vinner (1981) zurück, wonach mit einem mathematischen Begriff weitaus mehr assoziiert wird als ein Symbol oder die Definition. Dazu gehören: mentale Bilder, Eigenschaften und zugehörige Prozesse. Zur Unterstützung der Stu-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

dierenden beim Aufbau eines angemessenen *concept image* dient das Instrument der Konzeptbasis. Zu allen neuen mathematischen Begriffen sollen die Studierenden schriftlich Übersichten erstellen, die neben der Definition auch Beispiele, Nicht-Beispiele, eine eventuell mögliche Visualisierung sowie Aussagen (zum Beispiel Rechengesetze) und Anwendungen enthalten sollen (Dietz, 2012, S.124). Als Hilfe wird den Studierenden ein gemäß der obigen Begriffsaspekte vorstrukturiertes leeres Formblatt zur Verfügung gestellt.

Das khdm-Projekt „Förderung von Lern- und Arbeitsstrategien im Fach Wirtschaftsmathematik“

Obwohl aus Einzelrückmeldungen von Studierenden und Beobachtungen in der Übungsleiter in den Übungen hervorgeht, dass das Methodenkonzept CAT hilfreich zu sein scheint, verwenden es viele Studierende augenscheinlich dennoch nicht. Dies war der Anlass für das oben genannte, khdm-Projekt, in dem seit 2011 eine Evaluation von Akzeptanz und Wirksamkeit des CAT-Konzepts erfolgt. Aus den Ergebnissen erfolgt eine Weiterentwicklung des Konzepts und dessen praktischer Umsetzung in der Lehrveranstaltung, um Akzeptanz und Wirksamkeit von CAT zu erhöhen. Folgende Forschungsfragen stehen dabei im Zentrum der Evaluation:

1. In wieweit ist CAT eine Hilfe für die Studierenden?
2. In wieweit werden die Instrumente von CAT angenommen?
3. Welche Ursachen gibt es für die Ablehnung einzelner Instrumente?

Eine erste Befragung fand im Wintersemester 2011/12 statt. Aus ihr ergab sich beispielsweise, dass CAT bis zu diesem Zeitpunkt in den Übungen kaum eine Rolle spielte. Als Konsequenz wurde CAT seit dem Wintersemester 2013/14 systematisch in den gesamten Übungsbetrieb eingebunden, wobei die Tutoren und Korrektoren speziell im Umgang mit dem Konzept geschult wurden. Im Wintersemester 2013/14 fand dann eine Detailbefragung statt, bei der die Instrumente einzeln im Fokus der Befragung standen. Dabei wurden die tatsächliche Verwendungshäufigkeit und mögliche Ablehnungsgründe der einzelnen Instrumente identifiziert, denen im Wintersemester 2014/15 begegnet wurde. Aus Platzgründen erfolgt bei der Darstellung der Ergebnisse der Evaluation und der daraus gezogenen Konsequenzen hier eine Beschränkung auf das Instrument der Konzeptbasis.

Einige Ergebnisse zur Evaluation des Instruments „Konzeptbasis“

Die Mehrheit der im Wintersemester 2013/14 befragten Studierenden empfindet das Instrument „Konzeptbasis“ als hilfreich, was die Verteilung der

Antworten auf einer aus 4 Items bestehenden Skala (α=0,836), die man mit „Die Konzeptbasis ist hilfreich.“ bezeichnen könnte, widerspiegelt:

1,0-1,9	2,0-2,9	3,0-3,9	4,0-4,9	5,0-6,0			sd
4,9%	11,1%	20,5%	41,0%	22,5%	4,01	4,25	1,09

Tabelle 1: Prozentuale Verteilung für die Skala „Die Konzeptbasis ist hilfreich.“ von 1 für „trifft überhaupt nicht zu“ bis 6 für „trifft vollkommen zu“, N=381

Obwohl die Mehrheit der Studierenden die Konzeptbasis als hilfreich einstuft, wird sie nur von einer Minderheit in gewisser Regelmäßigkeit verwendet:

1	2	3	4	5	6			sd
37,0%	22,5%	12,0%	13,8%	9,2%	5,5%	2,52	2	1,58

Tabelle 2: Prozentuale Verteilung bei der Frage nach der Verwendungshäufigkeit der Konzeptbasis von 1 für „nie“ bis 6 für „jede Woche“, N=757

Die Konzeptbasis wird zwar von knapp 30% der Studierenden in guter Regelmäßigkeit genutzt (Antwort ab Stufe 4), die Mehrheit nutzt die Konzeptbasis aber eher rudimentär.

Ein wesentliches Ziel der Befragung war auch die Identifizierung von Ablehnungsgründen (um den Nutzeranteil zu erhöhen). Deshalb sollten die Studierenden in einer offenen Frage einen Ablehnungsgrund angeben, falls sie die Konzeptbasis nicht regelmäßig verwenden. Dabei ließen sich aus den 242 gegebenen Antworten folgende Kategorien identifizieren (Mehrfachnennungen waren aufgrund der Offenheit der Frage möglich):

Ablehnungsgrund	Anzahl der Nennungen	Prozentualer Anteil
Zeitaufwand/Aufwand	90	37,2%
Probleme beim Ausfüllen	45	18,6%
Eigene Methode	44	18,1%
Vokabelliste genügt	28	11,6%
Mangelnder Nutzen	26	10,7%
Anderer Grund	74	30,6%

Tabelle 3: Ablehnungsgründe für die Konzeptbasis, N=242

Unter „eigene Methode“ wurden diejenigen eingeordnet, die entweder diese Stichwort direkt oder „eigene Übersichten“ angegeben haben). Unter den anderen Gründen (z.B. Unbekanntheit oder „nicht nötig“) hat kein weiterer Grund einen Anteil von mehr als 5% der Gesamtnennungen.

Der wesentlichste Grund für die Ablehnung ist der Zeitaufwand/Aufwand. Da dieser Grund bereits vorher vermutet wurde, wurde in der Befragung auch ermittelt, wieviel Zeitaufwand die Studierenden generell in das zur Lehrveranstaltung gehörige Selbststudium investieren und wieviel Zeit für die Anfertigung einer Konzeptbasis nötig ist. Dabei kam heraus, dass die Anfertigung einer Konzeptbasis im Mittel 30 Minuten dauert, was zumutbar ist, da pro Woche ein bis zwei wichtige mathematische Begriffe eingeführt werden. Jedoch investieren die Studierenden generell viel zu wenig Zeit in das zur Lehrveranstaltung gehörige Selbststudium (gemessen an den vergebenen ECTS-Punkten). So wurden zum Beispiel im Mittel nur 68,26 Minuten in die Bearbeitung eines wöchentlich gestellten Übungsblattes investiert (bei veranschlagten 120 Minuten). Als Konsequenz wurden im Wintersemester 2014/15 die zeitlichen Anforderungen klar kommuniziert.

Den Schwierigkeiten beim Ausfüllen von Konzeptbasen wurde im Wintersemester 2014/15 dadurch begegnet, dass die erste Konzeptbasis in den Übungen mit den Studierenden gemeinsam erstellt und die erste selbstständig erstellte Konzeptbasis von einem im Umgang mit dem Instrument geschulten Korrektur „korrigiert“ wurde.

Zum Ablehnungsgrund „eigene Methoden“ wurde im Sommersemester 2014 eine Nachstudie durchgeführt, in der herausgefunden wurde, dass sich eigene Übersichten kaum von Konzeptbasen unterscheiden und eine Ablehnung der Konzeptbasis eher durch einen empfundenen Zwang, sich starr an das vorgegebene Formblatt zu halten, erfolgt sein könnte. Als Konsequenz wurde in diesem Semester die erste Konzeptbasis in der Übung gemeinsam auf der Basis eigener Übersichten der Studierenden erstellt.

Insgesamt zeigt die Evaluation des Methodenkonzeptes (hier beispielhaft an der Konzeptbasis skizziert), dass das Konzept CAT durchaus das Potential hat, den Studierenden bei der Bewältigung methodischer Probleme zu helfen, die praktische Umsetzung des Konzepts in der Lehrveranstaltung aber sehr gut durchdacht werden muss um breite Akzeptanz bei den Studierenden zu finden.

Literatur

Dietz, H.-M. (2012). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch*. Springer

Dietz, H. M. (2013). *CAT - ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfänger*. Vortrag auf der 2.Arbeitstagung des khdm 2013 in Paderborn, erscheint in: Tagungsband der 2.Arbeitstagung des khdm (voraussichtlich 2015)

Tall, D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational studies in mathematics,* 12.2, 151-169.

Marita FRIESEN, Anika DREHER und Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Lehramtsstudierende analysieren den Umgang mit Repräsentationen in Unterrichtsvideos

Das Analysieren von Unterrichtssituationen im Hinblick darauf, wie mit Repräsentationen umgegangen wird, ist oft eine notwendige Voraussetzung für professionelles Handeln und Reagieren im Unterricht. Hierzu gehört nicht nur relevante Merkmale von Unterrichtssituationen zu identifizieren, sondern auch solche Beobachtungen auf der Grundlage von Kriterienwissen zu reflektieren. In einer Studie zur Förderbarkeit des Analysierens von Unterrichtssituationen mit Blick auf den Umgang mit Repräsentationen wurden Analyseergebnisse von 18 Lehramtsstudierenden vor und nach der Teilnahme an einem Seminar ausgewertet.

Der Umgang mit Repräsentationen im Mathematikunterricht

Die Nutzung *vielfältiger Repräsentationen* im Mathematikunterricht ist Voraussetzung für den Aufbau flexibel einsetzbaren mathematischen Wissens von Schülerinnen und Schülern. Dabei ist jedoch der *Umgang* mit Repräsentationen entscheidend, um unnötige Verständnishürden beim Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen zu vermeiden (vgl. Duval, 2006; Ainsworth, 2006). Lehrkräfte sollten nicht zuletzt in der Lage sein, Hilfen zum Umgang mit Repräsentationen anzubieten, Schülerinnen und Schüler bei Repräsentationswechseln zu unterstützen und Reflexionen zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen anzuregen (vgl. Dreher & Kuntze, 2015). Hierzu wird professionelles Wissen zu Repräsentationen ebenso benötigt wie die Fähigkeit, Unterrichtssituationen im Hinblick auf den Umgang mit Repräsentationen analysieren zu können.

Das Analysieren von Unterrichtssituationen

Das Analysieren von Unterrichtssituationen vereinigt Aspekte des Noticing (z.B. van Es & Sherin, 2008) mit Aspekten der systematischen Unterrichtsbeobachtung (Schwindt, 2008). Bezieht man das Analysieren von angehenden bzw. praktizierenden Lehrkräften auf den Umgang mit Repräsentationen im Klassenraum, so erhält entsprechendes Kriterienwissen wesentliche Bedeutung. Dennoch ist nicht Wissen allein entscheidend: Elemente des Analysierens mit Blick auf den Umgang mit Repräsentationen sind (1) das *Identifizieren* einer für den Umgang mit Repräsentationen relevanten Unterrichtssituation, (2) das *kritische Interpretieren* dieser Situation durch die Verknüpfung mit Kriterienwissen zum Umgang mit Repräsentationen und (3) das *Artikulieren des Analyseergebnisses*, welches beispielsweise schriftlich erfolgen kann (Friesen, Dreher & Kuntze, angenommen).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Das fachdidaktische Seminar an der Hochschule

Zur Förderung solchen Analysierens bei Lehramtsstudierenden wurde ein entsprechendes fachdidaktisches Seminar entwickelt und durchgeführt (vgl. Dreher & Kuntze, 2012). Im Zentrum des Seminars stand die Analyse von Aufgaben und Unterrichtsvideos bezogen auf das Lernpotential von vielfältigen Repräsentationen. Basierend auf Theorieelementen (z.B. Duval, 2006) wurde ein Kriterienkatalog zur Analyse des Umgangs mit Repräsentationen in Unterrichtsvideos und in Aufgaben erarbeitet, mit Kriterien beispielsweise im Hinblick auf mögliche Verständnishürden und Hilfestellungen bei der Nutzung von Repräsentationen oder bei Repräsentationswechseln. Darüber hinaus wurde der Kriterienkatalog verwendet, um das Lernpotential vorhandener Aufgaben anzureichern und Handlungsalternativen in Unterrichtssituationen bezüglich des Umgangs mit Repräsentationen zu entwickeln. Die Lehramtsstudierenden erhielten im Rahmen des Seminars die Gelegenheit, ihre Ideen und Arbeitsergebnisse zu präsentieren und mit den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu diskutieren.

Forschungsinteresse und Forschungsfragen

Ziel der Studie ist die Beantwortung der Frage, ob und inwieweit die Analysefähigkeit von Lehramtsstudierenden zum Umgang mit Repräsentationen innerhalb eines Semesters gefördert werden kann. Daraus ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

- Wie analysieren die Lehramtsstudierenden den Umgang mit Repräsentationen in Unterrichtsvideos vor und nach dem Seminar?
- Werden mehr relevante Situationen erkannt und werden diese häufiger mit Kriterienwissen verknüpft?
- Werden mehr relevante Situationen kritisch eingeschätzt und wird häufiger Kriterienwissen herangezogen, um solche Bewertungen zu begründen?

Design und Stichprobe

Die 18 Teilnehmer/innen des Seminars wurden jeweils zu Beginn und Ende des Semesters befragt. Das hierfür entwickelte Testinstrument enthält zwei Unterrichtsvideos von ca. sechs Minuten Länge sowie einen Fragebogen mit offenen und geschlossenen Formaten. Beide Videos haben gemeinsam, dass die Lehrkräfte die unterschiedlichen Repräsentationen, die sie verwenden (z.B. Stellenwerttafel mit Plättchen und Zahlenschreibweise in Video 1; Textaufgabe, Tabelle und Gleichungen in Video 2), nicht ausreichend verknüpfen bzw. ihre Schüler/innen kaum zur Reflexion der verwendeten Repräsentationen anregen. Abbildung 1 zeigt die offenen Frageformate, die die Lehramtsstudierenden zu den beiden beschriebenen Unterrichtsvideos erhielten. Der Begriff „Darstellungen“ wurde im Seminar und im Fragebogen synonym zum Begriff „Repräsentationen“ verwendet.

Item 1	Wie wurde im Videoausschnitt das Verständnis der SuS unterstützt oder ggf. nicht optimal unterstützt? Beschreiben Sie.
Im Fragebogen: Definition von „Darstellungen“ im mathematischen Kontext	
Item 2	Wie gut hat die Lehrerin/der Lehrer Hilfen zum Nutzen von Darstellungen gegeben?
Item 3	Wie gut hat die Lehrerin/der Lehrer Hilfen zum Übersetzen zwischen Darstellungen gegeben?

Abbildung 1: Offene Fragen zu den Unterrichtsvideos

Während Item 1 noch keinen Hinweis auf Repräsentationen enthält, weisen Item 2 und 3 die Befragten auf Hilfen der Lehrkraft zum Nutzen bzw. zum Übersetzen zwischen unterschiedlichen Repräsentationen hin. Die Ergebnisse der offenen Fragen wurden von zwei Ratern kodiert ($\kappa = .83$). Bei Item 1 wurde kodiert, ob die Antworten einen Bezug zu Repräsentationen, eine kritische Einschätzung der Lehrerhandlung sowie zu Kriterienwissen zum Umgang mit Repräsentationen enthielten. Bei Item 2 und 3 wurde kodiert, ob in den Antworten der Befragten eine kritische Einschätzung der Lehrerhandlung sowie ein Bezug zu den jeweils in den Fragen genannten Theorieelementen zum Umgang mit Repräsentationen enthalten waren.

Ausgewählte Ergebnisse

Einen exemplarischen Einblick in die verbesserte Qualität der Analyseergebnisse nach dem Seminar geben zwei Antwortbeispiele in Abbildung 2. Zählt man die Ergebnisse der Kodierung aus, so zeigen z.B. die Antworten für Item 1, dass nach dem Seminar mehr Studierende auf Repräsentationen Bezug nahmen (Pretest: 72%, Posttest: 94%).

Pretest	**Posttest**
„Ich fand seine *(Anmerkung: des Lehrers)* Hilfen zum Übersetzen recht gut und ausführlich. Er hat ihr *(Anmerkung: der Schülerin)* die Lösung für die Aufgabe sogar hingeschrieben, sodass sie es verstanden hat.“	„Die Übersetzung zwischen den Darstellungen kam zu kurz. Der Lehrer hat die Darstellungen nur dargeboten und die S. aufgefordert, was zu machen. Die S. wusste auch nicht, wieso verschiedene Darstellungen überhaupt genutzt wurden.“
„keine“	„Text → Tabelle: sprachliche Erfassung der Daten und Festhalten in der Tabelle; Tabelle → Gleichung: wurde nicht vermittelt; Gleichung → Text: Erläuterung der Gleichung im Vergleich zum Text“

Abbildung 2: Antworten von zwei Lehramtsstudierenden (zu Item 3)

Zudem wurden beobachtete Lehrerhandlungen eher kritisch eingeschätzt (Pretest: 50%; Posttest: 67%) und es wurden mehr Bezüge zu Kriterienwissen zum Umgang mit Repräsentationen hergestellt (Pretest: 50%; Posttest: 56%; Beispiele jeweils zu Video 1).

Diskussion

Die Ergebnisse der Studie deuten darauf hin, dass die Analysequalität bezüglich des Umgangs mit Repräsentationen bei der Mehrheit der befragten Lehramtsstudierenden gefördert werden konnte. Deren Antworten zeigten nicht nur mehr Bezüge zu unterschiedlichen Repräsentationen, sondern auch zum Umgang mit diesen. Besonders Repräsentationswechsel wurden vermehrt beschrieben und die Hilfen der Lehrkräfte häufiger kritisch eingeschätzt, wobei diese Einschätzungen nach dem Seminar eher mit Theorieelementen verknüpft wurden. Trotzdem zeigte sich die verbesserte Qualität der Analyseergebnisse nicht bei allen Teilnehmer/innen im gleichen Maße, was Anlass zu weiterer Forschung in diesem Professionalisierungsbereich gibt. Im Projekt ANAKONDA wird daher im Rahmen des FuN-Kollegs EKoL derzeit ein Testinstrument mit zwölf Unterrichtssituationen in verschiedenen Formaten (Text, Comic und Video) entwickelt und bei Lehramtsstudierenden, Lehramtsanwärtern und praktizierenden Lehrkräften eingesetzt. Ziel der Studie ist es u.a. zu untersuchen, ob fachdidaktisches Analysieren mit Blick auf den Umgang mit Repräsentationen als hierarchisches Kompetenzkonstrukt empirisch operationalisiert werden kann.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

Dreher, A. & Kuntze, S. (2012). The challenge of situatedness in pre-service teacher education – Adapting elements of lesson study to the context of a course on ‘using multiple representations’. [ICME 2012].

Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers’ professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89-114.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Friesen, M., Dreher, A. & Kuntze, S. (angenommen). Pre-service teachers’ growth in analysing classroom videos. [CERME 2015].

Schwindt, K. (2008). *Lehrpersonen betrachten Unterricht: Kriterien für die kompetente Unterrichtswahrnehmung.* Münster: Waxmann.

van Es, E., Sherin, M. (2008). Mathematics teachers’ “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*, 244-276.

Marita FRIESEN, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg und Markus VOGEL, Heidelberg

Fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen – Vignettenbasierte Erhebung mit Texten, Comics und Videos

Setzt man Vignetten zur Kompetenzmessung bei Lehramtsstudierenden und praktizierenden Lehrkräften ein, wird durch den Bezug zu konkreten Situationen eine unterrichtsnahe Erhebung fachdidaktischer Kompetenzaspekte ermöglicht. Für die inhaltsbereichsspezifische Messung *fachdidaktischer Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen* werden im Folgenden theoretische Grundlagen skizziert, verschiedene Erhebungsformate diskutiert und ein entsprechendes Forschungsdesign vorgestellt.

Darstellungen im Mathematikunterricht

Da mathematische Objekte abstrakt und somit „unsichtbar“ sind, ist es unumgänglich, Darstellungen zu nutzen, wie z.B. Diagramme, Bilder, Sprache oder mathematische Symbole, die für diese Objekte stehen können und einen Zugang zu ihnen ermöglichen (Post, Lesh & Behr, 1987; Goldin & Shteingold, 2001). Dabei betonen unterschiedliche Darstellungen meist verschiedene Aspekte eines mathematischen Objekts ohne jeweils mit dem Objekt identisch zu sein, was die Verwendung vielfältiger Darstellungen notwendig macht (Duval, 2006). Die Nutzung vielfältiger Darstellungen ist einerseits Voraussetzung für den Aufbau mathematischen Wissens, andererseits werden damit kognitiv anspruchsvolle Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungen erforderlich, die wiederum zu Verständnisschwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern führen können (Ainsworth, 2006). Entscheidend für das Verständnis von Schülerinnen und Schülern ist demnach nicht das bloße Vorkommen von vielfältigen Darstellungen im Unterricht, sondern der *Umgang* mit diesen (Dreher & Kuntze, 2015): Lehrkräfte müssen sich der doppelten Rolle von Darstellungen als Lernhilfe und potentieller Lernhürde bewusst sein, um entsprechend gezielte Unterstützung und geeignete Reflexionsanlässe beim Umgang mit vielfältigen Darstellungen anbieten zu können.

Fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen

Neben professionellem Wissen zum Umgang mit Darstellungen benötigen Lehrkräfte die Kompetenz, Unterrichtssituationen zum Umgang mit Darstellungen analysieren zu können (Friesen, Dreher & Kuntze, angenommen). Eine solche Analyse umfasst (1) die *Identifikation* einer relevanten

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Situation zum Umgang mit Darstellungen, wie z.B. das Erkennen von Verständnisschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern bei einem Darstellungswechsel; (2) die *kritische Bewertung* dieser Situation und ihre Interpretation aufgrund von professionellem Wissen zum Umgang mit Darstellungen, z.B. die Annahme, dass die Verständnisschwierigkeiten auf eine unzureichende Verknüpfung verschiedener Darstellungen zurückgeführt werden können; und (3) die *Artikulation* des Analyseergebnisses, welche beispielsweise schriftlich erfolgen kann. Derartige Analyseprozesse lassen sich durch Vignetten in Form von verdichteten Unterrichtssituationen anregen, für die verschiedene Formate gewählt werden können. Im Folgenden wird ein kurzer Einblick in den Stand der Forschung zu verschiedenen Vignettenformaten gegeben.

Einblick in den Forschungsstand: Vignettenformate

Bei der Untersuchung verschiedener Vignettenformate (Text, Comic, Animation, Video) wurde von Lehramtsstudierenden die Authentizität von Unterrichtssituationen in Form von Videos und Animationen am höchsten eingestuft, wobei der Grad der inhaltlichen Auseinandersetzung mit den Situationen in Videos, Animationen und Comics als weitgehend vergleichbar beschrieben wurde (z.B. Herbst, Aaron & Erickson, 2013). Inwiefern verschiedene Vignettenformate die Analyse von angehenden und praktizierenden Lehrkräften bezüglich des Umgangs mit Darstellungen im Mathematikunterricht beeinflussen, ist jedoch nach wie vor unklar. Aus dem skizzierten theoretischen Hintergrund und dem aktuellen Stand der Forschung ergeben sich damit insbesondere die folgenden Forschungsfragen:

Forschungsinteresse und Forschungsfragen

- Über welchen Grad an Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen verfügen Lehramtsstudierende, Lehramtsanwärter und praktizierende Lehrkräfte?
- Beeinflussen Text-, Comic- und Videovignetten die Ergebnisse des Analyseprozesses auf unterschiedliche Weise?
- Als wie authentisch empfinden die Befragten die Vignetten und welchen Grad an Immersion, Motivation sowie Resonanz berichten sie?
- Gibt es Unterschiede zwischen angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften?

Stichprobe und Design

Um diese Fragestellungen zu untersuchen werden derzeit Lehramtsstudierende, Lehramtsanwärter sowie praktizierende Lehrkräfte befragt.

Das Testinstrument (vgl. Friesen & Kuntze, 2014) enthält insgesamt zwölf Unterrichtssituationen zu den Inhaltsbereichen Brüche und Funktionen. Alle Testpersonen erhalten die gleichen zwölf Unterrichtssituationen, jedoch in verschiedenen Formaten (s. Abbildung 1).

Abbildung 1: Beispiel einer Unterrichtssituation als Text, Comic, Video

Die Unterrichtssituationen stellen jeweils eine Übungsphase in der Klasse dar, in der die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen zusammenarbeiten. Inhaltlicher Ausgangspunkt jeder Vignette ist eine Schülerfrage zu einer Aufgabe, zu der ein Schülerdokument in Form eines Hefteintrags präsentiert wird. Die Lehrperson reagiert jeweils mit einem Darstellungswechsel, indem sie beispielsweise eine Zeichnung anfertigt. Allen Vignetten gemeinsam ist dabei vor allem die unzureichende Verknüpfung zwischen anfänglicher Schülerdarstellung und der von der Lehrperson genutzten weiteren Darstellung. Auf jede Unterrichtssituation folgt ein Fragebogenteil mit offenen und geschlossenen Antwortformaten, in dem die Testpersonen gebeten werden, die betrachtete Unterrichtssituation im Hinblick auf den Umgang mit Darstellungen einzuschätzen. Zusätzlich erfolgen Einschätzungen von den Befragten bezüglich der wahrgenommenen Authentizität der Vignetten, zur Motivation sowie zum Grad an Immersion und Resonanz (vgl. Kleinknecht & Schneider, 2013).

Diskussion

Ziel der Studie ist es, fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen zu messen. Dabei wird davon ausgegangen, dass über die Qualität der Antworten der befragten Testpersonen Rückschlüsse auf deren Kompetenzausprägung möglich sind. Zusätzlich soll die Frage beantwortet werden, ob und inwiefern die unterschiedlichen Vignettenformate Text, Comic und Video die Analyseergebnisse der Befragten beeinflussen. Sozial-motivationale Merkmale, wie Authentizitätsempfinden, Motivation sowie der Grad an Immersion und Resonanz könnten vom Format der Vignetten ebenso beeinflusst werden wie die kognitiven Analyseprozesse. Während die Unterrichtssituation in den Textvignetten beispielsweise vergleichsweise kontextinformationsarm und ohne konkrete Darstellungen von Personen präsentiert wird und die verwendeten Darstellungen jederzeit sichtbar sind, muss beim Video der Umgang mit Darstellungen erst aus der Komplexität einer konkreten Klassensituation „gefiltert" werden. Die Comicvignetten könnten hier eine Art „Zwischenstellung" einnehmen, indem sie z.B. ein gewisses Maß an Authentizität vermitteln und dennoch die Komplexität im Vergleich zum Video erheblich reduziert ist.

Förderhinweis

Die vorgestellte Studie entsteht im Rahmen des FuN-Kollegs EKoL und wird gefördert vom Wissenschaftsministerium des Landes Baden-Württemberg.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89-114.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Friesen, M. & Kuntze, S. (2014). Pre-service Teachers' Competence of Analysing the Use of Representations in Mathematics Classroom Situations. In Oesterle, S., Nicol, C., Liljedahl, P., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 6, S. 309. Vancouver, Canada: PME.

Friesen, M., Dreher, A. & Kuntze, S. (angenommen): Pre-service teachers' growth in analysing classroom videos. [CERME 2015].

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The role of representation in school mathematics* (S. 1–23). Boston, Virginia: NCTM.

Herbst, P., Aaron, W. & Erickson, A. (2013). How Preservice Teachers Respond to Representations of Practice: A Comparison of Animations and Video. [Paper presented at the 2013 Annual Meeting of the AERA, San Francisco].

Kleinknecht, M. & Schneider, J. (2013). What do teachers think and feel when analyzing videos of themselves and other teachers teaching? *Teaching and Teacher Education, 33*, 13-23.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Michael GAIDOSCHIK, Anne FELLMANN, Klagenfurt

Zählendes Rechnen im 1. Schuljahr: (Vermutlich) weder notwendig noch förderlich

1. Zählendes Rechnen zu Beginn des 1. Schuljahres – was tun?

Innerhalb unserer Community besteht Konsens darüber, dass verfestigtes zählendes Rechnen ein Hauptmerkmal mathematischer Lernstörungen ist, ebenso, dass es erstrebenswert ist, dass Kinder schon Ende des 1. Schuljahres nicht mehr zählend rechnen. Diskussionsbedarf sehen wir bezüglich der Frage, wie damit umzugehen ist, dass Kinder in der Regel bereits als zählende RechnerInnen in die Schule eintreten. Wir entnehmen der Fachliteratur dazu drei Positionen, die uns teils unklar, teils fragwürdig erscheinen.

Position 1 wird etwa von Lorenz (2003, S. 105) vertreten, der postuliert, dass zählendes Rechnen „eine *notwendige* Phase im Lernprozess jedes Kindes sei“ und „*keines* [...] diese Phase überspringen“ könne. Uns ist unklar, was daraus für den frühen Arithmetikunterrichts folgen soll. Und es erscheint uns generell fragwürdig, beim Erlernen von Kulturtechniken von quasi-naturischen „Notwendigkeiten“ zu sprechen. Das Lernen erfolgt vom ersten Tag an unter vielfältigen Einflüssen. Selbst wenn auf Basis solcher Einflüsse in unserem Kulturkreis alle Kinder eine Phase zählenden Rechnens durchlaufen, scheint zumindest denkbar, dass dies unter anderen Einflüssen anders wäre.

Position 2 finden wir etwa bei Schmassmann und Moser-Opitz (2007, S. 22): „Damit sich Kinder vom zählenden Rechnen lösen können, müssen sie – so paradox es erscheinen mag – über eine sichere Zählkompetenz verfügen.“ Das ist klar bezüglich der didaktischen Konsequenzen (Förderung der Zählkompetenzen). Unklar bleibt uns, wie dadurch die angestrebte Ablösung vom zählenden Rechnen befördert werden soll. Dass „eine sichere und flexible Zählkompetenz […] Grundlage [ist], um den Anzahlbegriff zu erwerben“ (Scherer u. Moser Opitz 2010, S. 95), bestreiten wir keineswegs. Wir verstehen aber nicht, warum von den zahlreichen „Grundlagen des Anzahlbegriffs“ gerade die Zählkompetenz als so bedeutsam für die Ablösung vom zählenden Rechnen herausgestrichen wird. Zweitens ist „Anzahlbegriff“ wohl noch nicht gleichzusetzen mit „nicht-zählendem Rechnen“.

Die dritte Position, über die wir diskutieren möchten, vertreten im deutschsprachigen Raum etwa Schipper, Wartha und von Schroeders (2011, S. 14ff). Sie lautet: Lehrkräfte sollten mit Kindern zunächst daran arbeiten, dass diese nicht mehr alleszählend, sondern weiterzählend addieren bzw. das Zurückzählen als Methode des Subtrahierens erlernen. Zählendes

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Rechnen wird dieser Position gemäß „erst bei der Behandlung des Zehnerübergang im letzten Drittel des ersten Schuljahres didaktisch anders bewertet“: Dann nämlich sollen Kinder lernen, Aufgaben nicht weiterzählend, sondern durch Ableiten aus bereits automatisierten Aufgaben zu lösen.

Diese dritte Position ist hinreichend klar, sie wird auch klar begründet: „Sicheres weiterzählendes Rechnen“ solle erarbeitet werden, weil es „für die gleiche Aufgabe immer die gleiche richtige Lösung [liefert] und so die Chance [erhöht], dass die Kinder sich nach und nach einen immer größeren Vorrat an auswendig gewussten Aufgaben aneignen“ (Schipper u.a. 2011, S. 16). Diese sollen später als Basis für das Ableiten anderer Aufgaben dienen. Das Problem an dieser dritten Position: Empirische Befunde und Theorien sprechen klar gegen sie (ausführlich dargestellt in Gaidoschik 2010). Nicht nur Alleszählen, sondern auch weiterzählendes Rechnen birgt zumindest die Gefahr, als *Prozedur* die Aufmerksamkeit des Kindes derart zu binden, dass es den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis bzw. zwischen einer Aufgabe und der zuvor gelösten oder einer bereits automatisierten Aufgabe nicht wahrnimmt. Auch das wiederholte richtige Lösen einer Aufgabe trägt unter diesen Umständen nicht dazu bei, dass das Kind die Aufgabe nach und nach automatisiert. Eher besteht die Gefahr, dass das zählende Rechnen schon bald zu einer Gewohnheit wird.

2. Versuch einer „strukturgenetischen didaktischen Analyse“

Nähert man sich der eingangs formulierten Frage mit einer „strukturgenetischen didaktischen Analyse“ (vgl. Wittmann 2013), ergibt sich unseres Erachtens folgendes: Es ist *im schulischen Kontext nicht notwendig*, Kinder im zählenden Addieren und Subtrahieren zu bestärken bzw. Strategien des (weiter-/zurück-)zählenden Rechnens mit ihnen erst zu erarbeiten, um sie später von genau diesen Strategien wieder abzubringen. Eine Sachanalyse macht deutlich, dass additive Grundaufgaben *bereits mit relativ geringen Voraussetzungen* auch nichtzählend gelöst werden können:

- Kinder, die eine Zahl als Zusammensetzung aus zwei anderen Zahlen verstehen, können lernen, daraus nichtzählend Additionen und Subtraktionen abzuleiten. Wird etwa 8 als Zusammensetzung aus 5 und 3 gedacht, kann daraus 5+3=8, 3+5=8, 8-5=3 und 8-3=5 erschlossen werden.
- Kinder, die zumindest einzelne Additionen bereits automatisiert haben, können bei Einsicht in operative Zusammenhänge lernen, daraus weitere Additionen und auch Subtraktionen abzuleiten. Wer etwa 4+4=8 weiß, kann daraus zumindest 3+4, 4+3, 4+5, 5+4, aber auch 8-4 erschließen.

Weder das Denken von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen, noch das Auswendigwissen von einzelnen Additionen kann bei SchulanfängerInnen vorausgesetzt werden. Viele Kinder bringen diesbezüglich aber bereits einiges mit. Mit anderen Kindern könnte – unseres Erachtens:

sollte – in den ersten Schulmonaten zunächst daran gearbeitet werden, dass sie diese Voraussetzungen für erfolgreiches Ableiten erwerben. Vorschläge zur Umsetzung im Unterricht sind publiziert (vgl. etwa Gaidoschik 2007).

Weiterzählendes Rechnen im Unterricht zu fördern oder gar zu erarbeiten, erweist sich auf dieser Grundlage als *überflüssig*. Vermutlich werden zwar viele Kinder diese Strategie anfangs von sich aus (auch aufgrund von Einflüssen des Elternhauses) anwenden. Sofern aber die genannten Grundlagen für das Ableiten bereits erarbeitet wurden, bestehen gute Chancen, dass alle Kinder nichtzählende Alternativen (etwa im Zuge von Strategiekonferenzen) schon frühzeitig als für sich vorteilhaft erleben.

Eine strukturgenetische didaktische Analyse umfasst Überlegungen auch zu weiter reichenden „Zielsetzungen des Unterrichts“ (Wittmann 2013). Auch in dieser Hinsicht scheint uns wenig für das Fördern des weiterzählenden Rechnens, alles für das frühe Fördern des Ableitens zu sprechen, schließt dieses doch etwa das Arbeiten an tragfähigen Zahl- und Operationsbegriffen im Sinne des Teile-Ganzes-Verständnisses, an Einsicht in Rechengesetze, weiterhin das Fördern prozessbezogener Kompetenzen (Kommunizieren über Ableitungswege, Argumentieren von Rechenvorteilen) mit ein.

3. Ein ergänzender Beitrag „empirischer Forschung zweiter Art“

Wittmann (2013) nennt strukturgenetische Analysen polemisch „empirische Forschung erster Art“. Er lässt freilich auch solche der „*zweiten* Art“ gelten, etwa Erhebungen zu dem Zweck, „genauer zu untersuchen, welche Prozesse bei unterschiedlichen Inszenierungen“ eines Unterrichtsdesigns ablaufen. In diesem Sinne ist zu berichten von einer kleinen Studie, die wir im Schuljahr 2013/2014 gemeinsam mit vier Lehrkräften und 71 Kindern aus vier ersten Klassen (A-D) aus öffentlichen Kärntner Volksschulen durchgeführt haben. Die vier Lehrkräfte hatten sich auf Basis eines von ihnen absolvierten Fortbildungsprogramms in besonderer Weise darum bemüht, ihre SchülerInnen gemäß den oben skizzierten Überlegungen gezielt beim Erlernen nichtzählender Rechenstrategien zu unterstützen. Mit den Kindern wurden in der dritt- und vorletzten Woche des ersten Schuljahres qualitative Interviews zur Ermittlung ihrer Rechenstrategien durchgeführt. Dabei wurden dieselben Additionen und Subtraktionen verwendet, die bereits in einer älteren Studie (Gaidoschik 2010) zum Einsatz gekommen waren. Der Unterricht der für diese ältere Studie befragten Zufallsauswahl war durch Schulbuchanalysen und LehrerInnenbefragung näher bestimmt worden. Hier genügt es festzuhalten, dass in den 22 Klassen der 2010-Studie *keine* systematische Erarbeitung von Ableitungsstrategien stattgefunden hatte. Der Unterricht in den vier Klassen der 2014-Studie wurde gleichfalls durch Schulbuchanalyse und Befragung der Lehrkräfte, zusätzlich durch je einen Unterrichtsbesuch erfasst. Mit der gebotenen Vorsicht lässt sich sagen, dass alle vier Lehrkräfte zentrale Punkte des oben grob skizzierten Designs umgesetzt haben: Grundlegung eines Verständnisses von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen, frühes Automatisieren weniger Kernaufgaben, gezielte Erarbeitung des Ableitens.

Eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse ist in diesem Rahmen nicht möglich (vgl. dazu Gaidoschik, Fellmann, Guggenbichler, in Vorbereitung). Hier nur so viel: In den Klassen A und B der 2014-Stichprobe wurde bei 14 Aufgaben im Zahlenraum bis 10 und acht mit Zehnerüberschreitung zählendes Rechnen *gar nicht* verwendet. In den Klassen C und D betrug die Häufigkeit von Zählstrategien 7 bzw. 14 % im ZR 10 sowie 11 bzw. 22 % bei Aufgaben mit Zehnerüberschreitung. Die Häufigkeiten in der 2010-Stichprobe: 39 % im ZR 10 sowie 52 % bei Zehnerüberschreitungen.

Mehr als die (signifikanten) Unterschiede zwischen 2010 und 2014 interessieren uns die Unterschiede zwischen den Klassen der 2014-Stichprobe. Es ergaben sich deutliche Hinweise, dass Lehrkräfte A und B beharrlicher im Einfordern von Kommunikation über Rechenstrategien waren; ein höheres Maß an Einzelzuwendung für Kinder mit Lernschwierigkeiten freimachen konnten; größeren Wert auf automatisierendes Üben von Kernaufgaben gelegt haben. Wir arbeiten im Schuljahr 2014/2015 mit drei der vier Lehrkräfte und weiteren sieben im Rahmen einer Designstudie zum kleinen Einmaleins. 2015/2016 werden einige dieser Lehrkräfte wieder eine erste Klasse führen. Wir hoffen, diese Klassen dann während ihres gesamten ersten Schuljahres zu begleiten und mit den Lehrkräften gemeinsam an der Weiterentwicklung von Designs zur Ablösung vom zählenden Rechnen zu arbeiten – gerade auch für Kinder, die sich dabei schwerer tun als andere.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht*. Frankfurt: Lang.

Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwächen vorbeugen, 1. Schuljahr.* Wien: G&G.

Lorenz, J.H. (2003). *Lernschwache Rechner fördern*. Berlin: Cornelsen.

Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2007). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 1.* Zug: Klett und Balmer.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum.

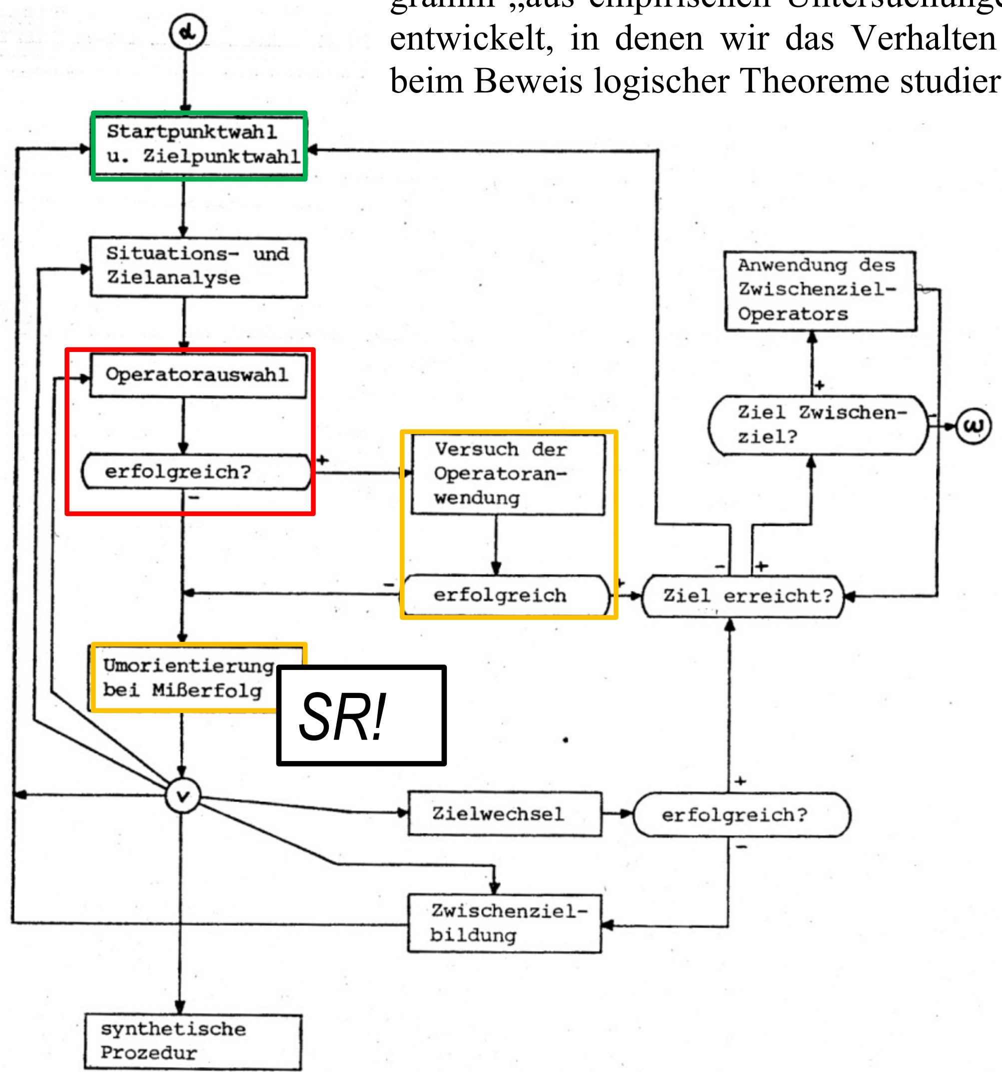
Schipper, W., Wartha, S. & v. Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2. Handbuch zur Diagnostik und Förderung.* Braunschweig: Schroedel.

Wittmann, E. Ch. (2013): Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, S. 1094-1097.

Thomas GAWLICK, Hannover

Pólya, König, Dörner - vom Nutzen Heuristischer Programme

Ein **Heuristisches Programm** ist eine deskriptive oder präskriptive Folge von Handlungsanweisungen zum Problemlösen. Es besteht aus **Heurismen** (Einsatz bestimmter heuristischer Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel) und **Kontrollanweisungen** (Sprünge, Schleifen und bedingte Anweisungen) zur Ablaufsteuerung und kann durch ein Flussdiagramm dargestellt werden, wie Königs präskriptives Programm (s. Abb. 1, Sektionstext). Es geht zurück auf die bekannte „Tabelle von Denkoperationen" aus Pólya 1949(S.0f). Diese Tabelle lässt sich auch selbst als präskriptives Programm interpretieren: Die Gliederung ist ein Ablaufplan zum Aufgabenlösen, das „Kleingedruckte" für den Umgang mit Problemen. Offen bleibt indes die Frage nach einer Kontrollstruktur, so dass in der Literatur sogar ein linearer Durchlauf diskutiert wird. Dörner (1976, 73) hat ein deskriptives Programm „aus empirischen Untersuchungen heraus entwickelt, in denen wir das Verhalten der Vpn beim Beweis logischer Theoreme studierten."

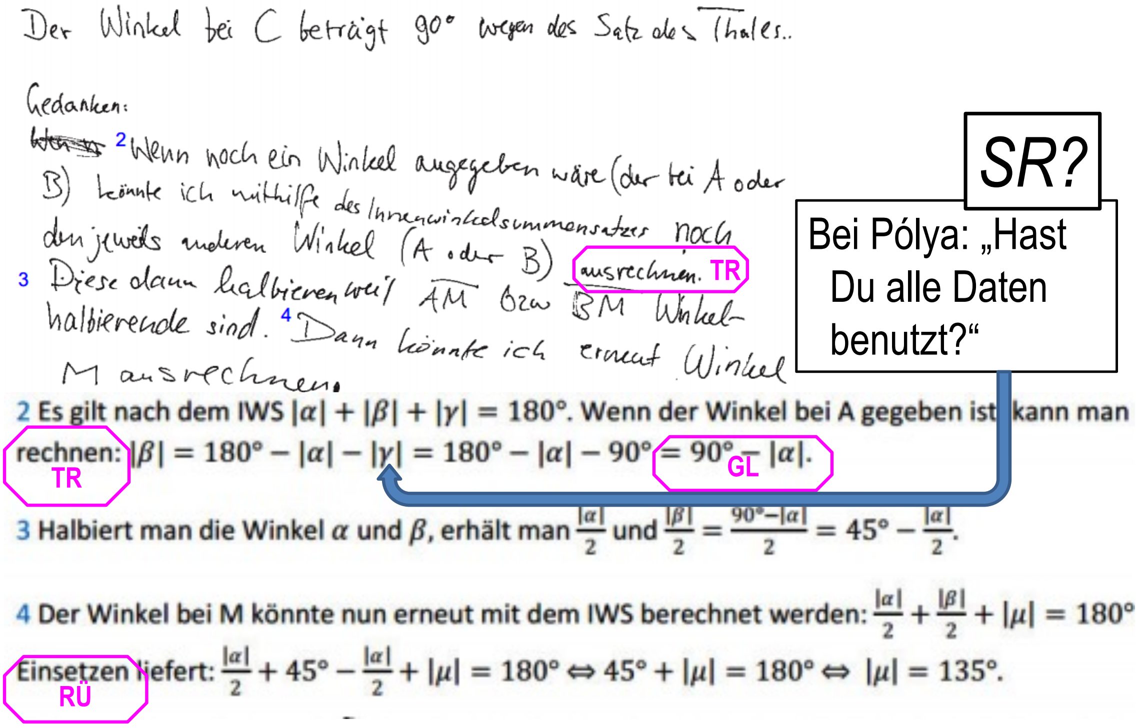


In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Auf den ersten Blick hat es mit den präskriptiven Programmen wenig gemein. Wir prüfen den Nutzen dieser drei Programme ausschnittshaft an:

- Wie generiert man einen Lösungsweg bei einer Aufgabe?
- Wie gut ist eine Bearbeitung bei einer Aufgabe beschreibbar?

Die TIMMS-Aufgabe K10 fragt nach der Größe des Winkels μ=∠AMB, wobei ABC ein Thalesdreieck ist und M sein Inkreismittelpunkt. Wie in der Vorjahressektion gezeigt, stoßen SuS beim Bearbeiten häufig auf die *α-β-Barriere*: μ ist per Innenwinkelsumme (IWS) aus α und β berechenbar, aber diese sind variabel. Die Abbildung zeigt, wie ein Schüler auf diese Barriere stößt – und wie er sie mit den Heurismen von Pólya oder König überwinden könnte: Durch TR (*Transformationsprinzip*) könnte er die IWS als Gleichung statt als Rechenausdruck sehen: Dann muss man α und β nicht ausrechnen, sondern kann mit ihnen rechnen – und kommt mit den Heurismen GL (*Gleichungen einführen*) und RÜ (*Rückführungsprinzip*, hier: Mittels Einsetzen zwei Gleichungen auf eine reduzieren) zum gewünschten Ergebnis. Allerdings nutzen viele SuS diese Möglichkeiten nicht, auch wenn sie nach Behandlung des Themas LGS auf der Hand zu liegen scheint. Dies unterstreicht die Wichtigkeit der *Selbstregulation* (SR) – was bieten die Programme diesbezüglich? Bei Königs Programm kann man sich vorstellen, dass SuS die Frage „Transformieren notwendig oder nützlich?“ erst verneinen, aber nochmals erwägen, wenn es nicht ohne geht. Pólya indes bietet eine spezifischere Hilfe, mit der man γ ins Spiel bringt:


Der Winkel bei C beträgt 90° wegen des Satz des Thales..

Gedanken:

~~Wenn~~ 2 Wenn noch ein Winkel angegeben wäre (der bei A oder B) könnte ich mithilfe des Innenwinkelsummensatzes noch den jeweils anderen Winkel (A oder B) ausrechnen. TR

3 Diese dann halbieren weil AM bzw BM Winkelhalbierende sind. 4 Dann könnte ich erneut Winkel M ausrechnen.

SR?

Bei Pólya: „Hast Du alle Daten benutzt?“

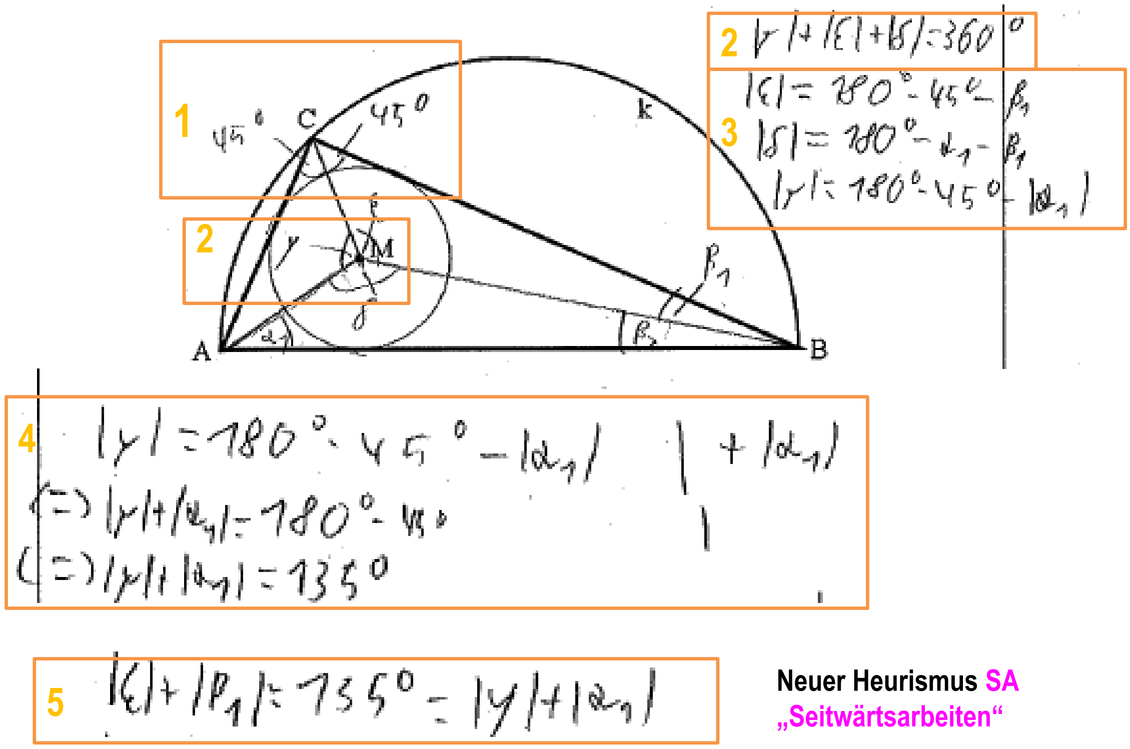
2 Es gilt nach dem IWS $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 180°$. Wenn der Winkel bei A gegeben ist, kann man rechnen: $|\beta| = 180° - |\alpha| - |\gamma| = 180° - |\alpha| - 90° = 90° - |\alpha|$.
TR GL

3 Halbiert man die Winkel α und β, erhält man $\frac{|\alpha|}{2}$ und $\frac{|\beta|}{2} = \frac{90°-|\alpha|}{2} = 45° - \frac{|\alpha|}{2}$.

4 Der Winkel bei M könnte nun erneut mit dem IWS berechnet werden: $\frac{|\alpha|}{2} + \frac{|\beta|}{2} + |\mu| = 180°$

Einsetzen liefert: $\frac{|\alpha|}{2} + 45° - \frac{|\alpha|}{2} + |\mu| = 180° \Leftrightarrow 45° + |\mu| = 180° \Leftrightarrow |\mu| = 135°$.
RÜ

Nach dieser Potentialanalyse der Programme ein Blick auf den Prozess des Probanden D11 – inwieweit lässt dieser sich durch jene erklären? D11 verfolgt zunächst auch die Absicht, μ aus α_1 und β_1 zu berechnen (Lucyga in diesem Band), betreibt dies jedoch nicht weiter, sondern macht folgende fünf Schritte, die mit 5m20‘ fast die Hälfte des Prozesses ausmachen: Er zerlegt γ in 45°-Winkel, ergänzt μ[δ bei D11] um die Nachbarwinkel zu 360°, notiert die IWS in BCM und ACM, formt sie um und setzt sie gleich.



Diese Schritte setzen weder das vorherige Rückwärtsarbeiten fort noch handelt es sich um reines Vorwärtsarbeiten, da D11 die vorige Absicht nicht aufgibt – man kann sie mit Dörner als wiederholte Startpunktwechsel auffassen, mit jeweils schneller Umorientierung, oder mit König als Rückführung auf einfachere Aufgaben. Da er diese jedoch nicht lange verfolgt, scheint uns treffender, einen neuen Heurismus anzunehmen: **Seitwärtsarbeiten (SA)**. Mit Pólya könnte man es so beschreiben: „Wenn verschiedene Wege von dem Punkt, indem man sich befindet, ausgehen, so erforsche man ein Stückchen von jedem Weg, ehe man sich zu weit auf irgendeinen einlässt – er könnte in einer Sackgasse enden.“ (1965, S.50) Im *stimulated recall* erläutert D11, dass er das bei schwierigen Aufgaben immer so macht – er verfügt also über das **Heuristische Programm** SAS: „Bei **s**chwierigen **A**ufgaben **s**eitwärtsarbeiten“. Dieses führt ihn indes nicht zur Lösung - dazu bedarf es eines Sichtwechsels: *weg* von der IWS als Rechenausdruck, mit dem $|\mu|$ nur aus $|\alpha_1|$ und $|\beta_1|$ berechenbar ist, *hin* zur IWS als Gleichung, aus der $|\alpha_1|$ und $|\beta_1|$ eliminiert werden können. Der erfolgt so:

09:24	Ok.
09:28	Ich weiß ja Betrag von Alpha 1 plus naja 2 Betrag von Alpha 1 plus 2 Betrag von Beta 1 gleich .. 90 Grad wegen dem Innenwinkelsummensatz.
	Schreibt $2\lvert\alpha_1\rvert + 2\lvert\beta_1\rvert = 90^\circ \;\vert\; :2$
09:51	Das ist ehm doch
09:56	Schwierig
09:58	jetzt
10:04	Müsste ich wohl irgendwo nach Alpha 1 auflösen.

Mit der in 9:28 durch Umformung der IWS von ABC gewonnenen Gleichung hat D11 die α-β-Barriere im Prinzip überwunden, bemerkt dies jedoch nicht – wie im obigen Vorschlag muss er erst in die IWS von ABM einsetzen: Eine Problemlösung durch Akkommodation im Sinne von Gawlick (2013), wie bei Lucyga (in diesem Band) näher ausgeführt wird.

Lässt sich dieser Schritt mit Hilfe eines der Programme erklären – oder handelt es sich um einen „plötzlichen“ Einfall ohne aktives Bemühen, vgl. Dörner(1976, 91ff)? Bei König könnte man sich vorstellen, dass nach den gescheiterten RÜ-Versuchen nun erneut TR aufgerufen wird und zur algebraischen Sicht führt. Aber gibt es etwas, dass dazu beiträgt, dass D11 anders als viele Probanden mit gleicher Wissensbasis diesen Schritt vollzieht? Wieder könnte ein SR-Impuls von Pólya dahinter stehen: „Wir sind von dem geringen Fortschritt unserer Arbeit enttäuscht. Verschiedene Ideen, die uns kamen, haben sich im Sand verlaufen … Die Figur vor uns, unsere ganze Vorstellung von der Aufgabe, ist ...verwirrend und dunkel, fast überladen und doch noch unvollständig; irgendein wesentliches Element, ein wesentliches Glied fehlt. Der Fehler ist vielleicht, daß wir uns in Beiläufigem verstrickt und mit belanglosem Material belastet haben. … Betrachten wir noch einmal die Unbekannte… *Haben wir der ganzen Bedingung Rechnung getragen?*“ (1965, S.128) Damit kann das SA-Ergebnis mit der Fragestellung verknüpft und die Aufgabe gelöst werden – ein Beleg für die Wichtigkeit von SR. Der Nutzen eines Heuristischen Programms dürfte daher v.a. davon abhängen, wie elaboriert die SR darin repräsentiert ist und wie differenziert sie von der Kontrollstruktur aufgerufen wird.

Literatur

Gawlick, Th. (2013): Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Dörner, D. (1976): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Stuttgart: Kohlhammer

Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*, Bern: Francke

Pólya, G. (1965): *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*, Bd. 2, Basel: Birkhäuser

Maximilian GEIER, Koblenz-Landau, Campus Landau

Kartographie als Anwendung von Geometrie und Topologie

Die Geographie bietet der Mathematik einige Anknüpfungspunkte für fächerübergreifenden Unterricht. Die Kartographie wird aber kaum thematisiert. Dabei stellt sie eine wunderbare Anwendung der Geometrie dar. Dem Mathematikunterricht bietet das Thema die Chance mit vielfältigem, buntem Materialeinsatz (Globus, verschiedene Weltkarten, sowohl in digitaler Form als auch auf Papier) anspruchsvolle Konzepte aus Raumgeometrie, Trigonometrie und Topologie kennenzulernen oder zu üben. Darüber hinaus können geographische Kenntnisse wie die Eigenschaften verschiedener Karten so nicht nur erlernt, sondern auch kritisch betrachtet werden. Zuletzt wird bei der Betrachtung verschiedener Abbildung der Erdkugel in die Ebene auch das Verständnis für Funktionen und den Grenzwert gefordert und gefördert.

Dem Thema entsprechend konzentrierte sich mein Vortrag auf der GDM-Jahrestagung auf methodische Vielfalt und Anschaulichkeit. Die Folien finden Sie auf meiner Seite der Homepage des Instituts für Mathematik am Campus Landau. In diesem Text, der das nicht leisten kann, folge ich ein paar im Vortrag vorgeschlagenen Unterrichtsinhalten, um zuletzt drei Weltkarten auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Alle Schritte sind mit geringen Vorkenntnissen nachvollziehbar. Um den schrittweisen Aufbau der Erkenntnisse, der aus der Betrachtung von Sphäre und Karten folgt, zu betonen, verzichte ich bewusst auf den Bezug auf weitere Literatur.

Eine kurze und oberflächliche Betrachtung einer Weltkarte kann schnell zu überraschenden Beobachtungen führen und so als Motivation für eine Beschäftigung mit diesem Thema dienen. Als erste Aufgabe können Schüler und Schülerinnen z.B. kürzeste Wege zwischen verschiedenen, auch selbstgewählten Punkten in Weltkarten zeichnen. Diese sind nur in bestimmten Fällen gerade Linien, auf den üblicherweise genutzten Karten genau dann, wenn beide Punkte auf dem Äquator oder beide Punkte auf demselben Meridian liegen. In allen anderen Fällen erhält man einfach oder sogar doppelt gekrümmte Linien. Als weiterführende Aufgabe können diese Fälle unterschieden werden. Eine zusätzliche Besonderheit fällt auf, wenn der kürzeste Weg den 180. Längengrad schneidet, man also den rechten und linken Rand seiner Karte miteinander identifizieren muss. Diese in der Regel bei Schülern und Schülerinnen bekannte Eigenschaft von Weltkarten führt uns zur möglichen Anschauung der Welt als Zylinder. Dazu kann die Lehrperson tatsächlich die Ränder einer Karte miteinander identifizieren, also einfach zusammenkleben. Die Webseite www.luftlinie.org

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bietet außerdem eine Möglichkeit die korrekten kürzesten Wege überzeugend darzustellen.

Am Ende dieser ersten Einheit stehen nun zwei Einsichten: Erstens kann die Karte als aufgeschnittener Zylinder gesehen werden. Darauf bauen wir auf, wenn wir die Abbildung von der Sphäre S^2 in die Ebene untersuchen wollen (als vereinfachtes Modell der Welt dient im Folgenden immer die Einheitssphäre). Gesucht ist also im weiteren Verlauf eine Abbildung von der Sphäre auf den Zylinder. Zweitens haben wir erkannt, dass unsere Weltkarten stark verzerrt sind. Hier schließt sich nun im nächsten Schritt die Aufgabe an, diese Verzerrungen genauer zu untersuchen.

Auf einem Globus und einer üblichen rechtwinkligen Weltkarte sind jeweils alle Längenkreise gleichlang. Die Breitkreise dagegen sind nur auf der Karte alle gleichlang. Auf dem Globus werden diese immer kürzer, je näher man sich einem Pol nähert. Mit Hilfe des Grenzwertes ist diese Beobachtung sehr schön beschreibbar. Nehmen wir für alle weiteren Überlegungen an, dass der Äquator auf Globus und Karte gleichlang ist. Dann geht, wenn wir uns immer weiter Richtung Nordpol (bzw. Südpol) bewegen, der Abstand des Breitenkreises zum Pol gegen Null; und der Verzerrungsfaktor, der am Äquator gleich Null ist, geht gegen unendlich. Eine anschließende Aufgabe, die Modellierungsfähigkeiten fordert und so echte Umwelterschließung ermöglicht, könnte wie folgt lauten: „Wie lange ist eigentlich der Breitenkreis, auf dem Basel liegt?“ Durch ein geeignetes Modell wird aus der Raumgeometrieaufgabe eine einfache Aufgabe in der Ebene. Wenn das Modell unserer Erde die Einheitssphäre, der Radius des Äquators also gleich eins ist, dann liefert uns cos(48°) den Radius des 48. Breitengrades – wohin wir Basel in unserem Modell legen. Zusätzlich werden geographische Kenntnisse oder Nachschlagewerke genutzt. Dann erhält man mit einer Äquatorlänge von 40.075 km für den 48. Breitengrad eine Länge von etwa 26.866 km. Damit ist er auf dem Globus um etwa ein Drittel kürzer als er auf einer rechteckigen Karte wirkt. Wurde das Modell einmal erstellt, können weitere Breitenkreise leicht berechnet und die unterschiedlichen Verzerrungen an verschiedenen Stellen der Karte verdeutlicht werden.

Diese Untersuchung dieser Verzerrung, die bei allen Abbildung bekannten rechteckigen Weltkarten notwendigerweise gleich ist, sei damit abgeschlossen. Die nächste Untersuchung wird zeigen, dass es auf Karten weitere, nicht notwendige, aber sinnvolle Verzerrungen gibt. Sie schließt außerdem den Kreis zur ersten Beobachtung, in der die Weltkarte als aufgeschnittenen Zylindermantel angesehen wird. Dieser nächste Schritt wird mit Hilfe bekannter Projektionen unternommen. Parallel- und Zentralprojektion decken eine Motivation für den Begriff der Bijektivität auf, da sie diese nötige Eindeutigkeit nicht liefern können. So liefert die Parallelprojektion zwar ein bekanntes Bild der Erde, allerdings nur einer Hälfte. Ähnlich verhält es sich mit Zentralprojektionen, wenn ihr Zentrum irgendwo außerhalb der Sphäre liegt. Liegt das Zentrum dagegen im Inneren der Sphäre trifft jeder Projektionsstrahl die Sphäre genau einmal. Als Projektionsfläche kommt eine Ebene dann aber nicht in Frage, stattdessen erinnern wir uns an den Zylindermantel.

Betrachten wir nun also die Abbildung der Weltkugel in die Ebene als Zentralprojektion mit dem Mittelpunkt der Einheitssphäre als Zentrum auf einen Zylindermantel, der die Sphäre entlang des Äquators berührt. Dann sind folgende Beobachtungen zu machen: alle Punkte außer Nord- und Südpol werden eindeutig abgebildet. Denn genau die zwei Strahlen vom Sphärenmittelpunkt zu den beiden Polen, die gemeinsam die Trägergerade der Erdachse bilden, haben keinen Punkt mit dem Zylindermantel gemeinsam. Zweitens liefert eine solche Projektion nicht nur die bekannten Verzerrungen der Breitenkreise, sondern auch gleiche Abstände in Nord-Süd-Richtung auf der Kugel werden auf dem Zylindermantel, je näher sie an einem Pol untersucht werden, immer größer. Konkret kann man dazu die Abstände von Breitkreisen untersuchen .So ist das Bild des Abstands zwischen Äquator und 5. Breitenkreis „klein“, der Abstand zwischen dem 45. und dem 50. Breitenkreis „groß“, und der Abstand zwischen dem 80. und 85. so groß, dass er kaum zu noch zu fassen ist. Um alle Punkte außer den Polen abzubilden müssen also der Zylinder, und damit auch die durch Aufschneiden entstehende Karte, unendlich hoch sein. Außerdem sind auf rechteckigen Weltkarten die Pole tatsächlich nicht abgebildet (oder man interpretiert den gesamten oberen und den gesamten unteren Rand als Bild des Pols, was aber der Vorstellung einer Projektion widerspricht).

Zuletzt sollen nun drei konkrete rechteckige Weltkarten untersucht werden. Die Plattkarte, die Mercator-Projektion und die Peters-Projektion zählen in der Kartographie mit weiteren zu den Zylinderprojektionen. In der Terminologie der Mathematik ist das nicht korrekt, vielmehr liegen ihnen mathematische Zylinderprojektionen nur zugrunde. Die drei Karten unterscheiden sich in der getroffenen Entscheidung, durch welche Art der Stauchung eine endlich hohe und sinnvolle Weltkarte entsteht. So hat jede der drei Karten genau eine der Eigenschaften Längen-, Flächen- und Winkeltreue. Die drei Beispiele zeigen auch schön, dass sich die drei Eigenschaften gegenseitig ausschließen. Es sei hier auf die „Tissotsche Indikatrix“ hingewiesen, die diese und folgende Zusammenhänge sehr anschaulich macht. Die Entscheidung, die für die Plattkarte getroffen wird, ist intuitiv und naheliegend: Wird hier z.B. jeder 15. Breitenkreis und jeder 15. Längenkreis eingezeichnet, dann erhalten wir ein Netz, das aus 24*12 Quadraten besteht. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen ist also überall auf der Karte gleich, und außerdem gleich dem Abstand zwischen zwei Längenkreisen. Die Plattkarte wird deshalb längentreu genannt, wobei dieser Begriff stark von der mathematischen Definition abweicht. Zunächst können wir mathematisch gar nicht von Längentreue sprechen, wenn die Karte nicht im Maßstab 1:1 gezeichnet ist. Eine solche Karte ist aber kaum vorstellbar. Stattdessen ist hier eine mathematische Streckenverhältnistreue gemeint, die aber nur in einer Richtung gilt: Lediglich Abstände auf der Karte, die auf Meridianen gemessen werden, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie auf der Sphäre. Die bereits untersuchte Verzerrung der Breitenkreise ist weiterhin notwendig. Wenn nun also eine Verzerrung in der Waagrechten vorliegt, aber keine Verzerrung in der Senkrechten, dann kann die Plattkarte keine der beiden anderen Eigenschaften erfüllen.

Die Mercator-Projektion ist eine der am häufigsten genutzten Weltkarten. Suchmaschinen wie Google, Bing und Yahoo nutzen sie, historisch liegt sie schon lange fast allen Seekarten zugrunde, da sie winkeltreu ist. Dies wird erreicht, indem die notwendige Streckung der Breitenkreise auch auf die Meridiane angewandt wird. Damit werden die Abstände zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen auf der Karte immer größer, wenn man sich einem Pol nähert. Da der Streckungsfaktor der Breitenkreise in Polnähe sogar gegen unendlich geht, gilt das auch für die Abstände auf den Meridianen. Für ein vernünftiges Kartenformat müssen daher auf dieser Karte Umgebungen der Pole abgeschnitten werden. Da die Abstände bei Annäherung an einen Pol immer weiter gestreckt werden, gilt das gleiche auch für Flächen auf der Mercator-Karte. Damit wird sie oft als eurozentristisch eingestuft. Nicht nur, dass Europa in der Mitte der Karte steht, sondern vor allem die Tatsache, dass es gegenüber den Landflächen in Äquatornähe zu groß dargestellt ist, wird kritisiert. Die moderne Peters-Projektion kann so als Antwort darauf gesehen werden, da diese flächentreu ist. Dazu wird nun die notwendige Streckung der Breitenkreise durch eine Stauchung der Meridiane ausgeglichen. Damit werden die Abstände zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen auf der Karte immer kleiner, und gehen gegen Null, wenn man sich einem Pol nähert.

Boris GIRNAT, Basel

Konstruktivistische und instruktivistische Lehrmethoden aus Schülersicht – Entwicklung eines Fragebogens

Konstruktivistische Lehrmethoden zeichnen sich u. a. durch Schülerzentriertheit, entdeckendes Lernen, Autonomie, Einbeziehung von Vorerfahrungen aus dem Alltag aus und werden oft instruktivistischen Lernformen gegenübergestellt (vgl. Leuders 2005, S. 87). Zur Entwicklung eines Fragebogens wurden Items formuliert, die wesentliche Aspekte des Konstruktivismus und Instruktivismus ausdrücken sollen. Diese Items wurden 256 Schülern des Kantons Aargau vorgelegt. Es wurde eine sechsstufige Skala von «stimme überhaupt nicht zu» bis «stimme voll und ganz zu» benutzt:

1) Ich finde es gut, wenn wir in ein neues Thema mit einer Situation aus dem Alltag einsteigen und dann das mathematische Thema daran herausarbeiten.
2) Es ist wichtig, dass uns die Lehrperson einheitliche Regeln, Verfahren und Schreibweisen vorgibt und sich dann alle genau daran halten.
3) Ich finde es hilfreich, viele ähnliche Aufgaben nacheinander zu bearbeiten, um ein Verfahren richtig zu verstehen.
4) Mathematikaufgaben sollten Raum für eigene Kreativität und verschiedene Lösungswege bieten.
5) Mathematik lerne ich gut, wenn uns die Lehrperson ein neues Verfahren vormacht und wir dieses Verfahren dann an vielen Beispielen nachmachen.
6) Ich finde es interessant, wenn wir mit der Mathematik Probleme aus dem Alltag lösen.
7) Bei den Übungsaufgaben sollten wir immer auch etwas Neues entdecken können, und nicht bloss das wiederholen, was gerade das Thema war.
8) Ich möchte gern selbst meine eigenen Regeln entwickeln, um mathematische Aufgaben zu lösen, und möchte mich nicht an ein vorgegebenes Muster halten.
9) Ich mag es, wenn ich selbst entscheiden kann, welche Themen und Aufgaben ich bearbeite.
10) Ich möchte gern Regeln und Beispiele gezeigt bekommen, die mir genau vorgeben, wie ich Aufgaben bearbeiten soll.
11) Mathematikaufgaben müssen nicht unbedingt etwas mit den Alltag zu tun haben, auf solche „Einkleidungen“ kann ich gern verzichten.
12) Eine Aufgabe sollte genau eine Lösung und genau einen Lösungsweg haben. Mehrere Lösungsmöglichkeiten stören mich.
13) Ich lerne Mathematik gut, wenn wir in Gruppen an einem Problem arbeiten und wir dann selbst zu unserer eigenen Lösung kommen.
14) Es ist am besten, wenn die Lehrperson uns erst eine Aufgabe vorrechnet und wir dann Schritt für Schritt genau dasselbe tun, um unsere Aufgaben zu lösen.
15) Ich finde es besser, wenn wir Schüler uns untereinander erklären, wie man eine Aufgabe löst, als dass das die Lehrperson tut.
16) Aufgaben sollten immer ein Thema aus dem Alltag haben, und nicht rein mathematisch sein.
17) Die Lehrperson sollte uns die mathematischen Themen und Verfahren vormachen, und uns nicht selbst etwas durch Ausprobieren herausfinden lassen.
18) Ich finde es hilfreich, wenn wir Schüler uns gegenseitig verschiedene Lösungswege vorstellen.
19) Bei Textaufgaben achte ich nur auf die Mathematik, und nicht auf das, worum es in diesen Texten sonst noch geht.
20) Ich mag vielseitige Aufgaben und Probleme, an denen man unterschiedliche mathematische Zusammenhänge selbst entdecken kann.
21) Wir sollten uns unsere Themen und Aufgaben persönlich aussuchen dürfen. Nicht alle müssen sich mit demselben beschäftigen.
22) Ein mathematisches Thema hat für mich erst dann einen Sinn, wenn ich sehe, wie man mit ihm echte Probleme aus dem Alltag lösen kann.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Der Datensatz wurde mit einer exploratorischen Faktorenanalyse ausgewertet. Eine Parallelanalyse nach Horn legte sechs Faktoren nahe. Mit Oblimin rotatiert, stellt sich das Ergebnis folgendermassen dar (zu den Verfahren vgl. Bühner 2011, S. 309ff.; alle Berechnung wurden mit dem Paket `psych` unter `R` durchgeführt, vgl. Revelle 2015; Ladungen unter 0,2 sind unterdrückt):

	MR2	MR3	MR4	MR1	MR6	MR5	h2	u2	com
01	0.57						0.388	0.61	1.3
02		0.44					0.253	0.75	1.3
03		0.49					0.279	0.72	1.1
04			0.40	0.32			0.311	0.69	2.1
05		0.46					0.293	0.71	2.1
06	0.68						0.516	0.48	1.2
07						0.32	0.292	0.71	3.2
08			0.51				0.367	0.63	1.5
09			0.77				0.597	0.40	1.0
10		0.73					0.572	0.43	1.0
11	0.63						0.395	0.61	1.1
12				0.93			0.866	0.13	1.0
13					0.48		0.281	0.72	1.3
14		0.55					0.353	0.65	1.2
15					0.63		0.394	0.61	1.1
16	0.52					-0.31	0.478	0.52	2.0
17		0.40					0.355	0.65	2.2
18					0.61		0.429	0.57	1.2
19							0.089	0.91	3.7
20						0.62	0.519	0.48	1.3
21			0.48				0.275	0.72	1.5
22	0.46						0.357	0.64	2.0

Die allgemeinen Qualitätskriterien sind gut (Tucker-Lewis-Index 0,957 und RMSEA-Index 0,03), allerdings haben einige Items geringe oder mehrfache Ladungen, hohe Komplexitäten oder geringe Kommunalitäten. Diese Items wurden entfernt. Danach deutete sich eine Fünf-Faktor-Lösung an. Die Items der fünf Faktoren wurden zu annähernd gleich langen Skalen ergänzt und inhaltlich interpretiert: Dabei steht `k_real` für den realitätsbezogener Aspekt des Konstruktivismus, `r_entd` für den entdeckenden Aspekt, `k_soz` für den sozialen Aspekt und `k_wahl` für die Autonomie des Schülers. Die Skala `inst` steht für instruktivistische Einstellungen:

k_real_1) Ich finde es gut, wenn wir in ein neues Thema mit einem Beispiel aus dem Alltag einsteigen und dann das mathematische Thema daran herausarbeiten.

k_real_2) Ich finde es interessant, wenn wir in der Mathematik Probleme aus dem Alltag lösen.

k_real_3) Mathematikaufgaben müssen nicht unbedingt etwas mit den Alltag zu tun haben, auf solche „Einkleidungen“ kann ich gern verzichten. (negativ formuliert, wurde umgepolt)

k_real_4) Aufgaben sollten immer ein Thema aus dem Alltag haben, und nicht rein mathematisch sein.

k_real_5) Ein mathematisches Thema hat für mich erst dann einen Sinn, wenn ich sehe, wie man mit ihm echte Probleme aus dem Alltag lösen kann.

k_real_6) Mathematikaufgaben sollten immer etwas mit der Realität zu tun haben.

k_entd_1) Mathematikaufgaben sollten Raum für eigene Kreativität und verschiedene Lösungswege bieten.
k_entd_2) Bei den Übungsaufgaben sollten wir immer auch etwas Neues entdecken können, und nicht bloss das wiederholen, was gerade Thema ist.
k_entd_3) Ich möchte gern meine eigenen Regeln entwickeln, um Aufgaben zu lösen, und möchte mich nicht an ein vorgegebenes Muster halten.
k_entd_4) Ich mag vielseitige Aufgaben und Probleme, an denen man unterschiedliche mathematische Zusammenhänge selbst entdecken kann.
k_entd_5) Ich mag Aufgaben, an denen man die Mathematik selbst entdecken kann.
k_entd_6) Es ist spannend, wenn wir selbst herausfinden, wie man eine Aufgabe löst, und uns die Lehrperson nicht schon vorher den Weg zeigt.
k_entd_7) Ich mag Aufgaben zum Ausprobieren und Tüfteln.
k_wahl_1) Ich mag es, wenn ich selbst entscheiden kann, welche Themen und Aufgaben ich bearbeite.
k_wahl_2) Wir sollten unsere Themen und Aufgaben persönlich auswählen dürfen. Nicht alle müssen dasselbe tun.
k_wahl_3) Ich arbeite gern mit Materialien, bei denen ich selbst aussuchen darf, was ich bearbeiten möchte.
k_wahl_4) Ich mag individuelle Aufträge lieber als Aufgaben, die alle zugleich bearbeiten sollen.
k_soz_1) Ich lerne Mathematik gut, wenn wir in Gruppen an einem Problem arbeiten und wir dann zu unserer eigenen Lösung kommen.
k_soz_2) Ich finde es besser, wenn wir Schüler uns untereinander erklären, wie man eine Aufgabe löst, als dass das die Lehrperson tut.
k_soz_3) Ich finde es hilfreich, wenn wir Schüler uns gegenseitig verschiedene Lösungswege vorstellen.
k_soz_4) Mathematik wird mir oft erst klar, wenn ich mit Mitschülern oder Kollegen über das Thema spreche.
k_soz_5) Wenn wir in Gruppen zusammenarbeiten, verstehe ich Mathematik besser, als wenn die Lehrperson etwas vorne an der Tafel erklärt.
k_soz_6) Ich lerne viel, wenn ich sehe, wie andere Schüler eine Aufgabe lösen.
inst_1) Es ist wichtig, dass uns die Lehrperson einheitliche Regeln und Verfahren vorgibt und sich dann alle genau daran halten.
inst_2) Ich finde es hilfreich, viele ähnliche Aufgaben nacheinander zu bearbeiten, um ein Verfahren richtig zu verstehen.
inst_3) Mathematik lerne ich gut, wenn uns die Lehrperson ein neues Verfahren vormacht und wir dieses Verfahren an vielen Beispielen nachmachen.
inst_4) Ich möchte gern Regeln und Beispiele gezeigt bekommen, die mir genau vorgeben, wie ich Aufgaben bearbeiten soll.
inst_5) Eine Aufgabe sollte genau eine Lösung und genau einen Lösungsweg haben. Mehrere Lösungsmöglichkeiten stören mich.
inst_6) Es ist am besten, wenn die Lehrperson uns erst eine Aufgabe vorrechnet und wir dann Schritt für Schritt genau dasselbe tun, um unsere Aufgaben zu lösen.
inst_7) Die Lehrperson sollte uns die mathematischen Themen und Verfahren vormachen, und uns nicht selbst etwas durch Ausprobieren herausfinden lassen.

Diese Items wurden in einer zweiten Fassung des Fragebogens 516 Schülern der Kantone Aargau und Solothurn vorgelegt. Die Skala `inst` lieferte ein eher mässiges Cronbachsches Alpha von 0,67. Für die übrigen Items bestätigte sich durch Parallelanalyse die zu erwartenden Vier-Faktoren-

Lösung. Allerdings mussten erneut einige Items als wenig zufriedenstellend aussortiert werden. Eine inhaltliche Diskussion ist hier aus Platzgründen leider nicht möglich. Die Faktorenanalyse Oblimin-Rotation ergibt nun folgendes Bild (Ladungen unter 0,2 sind unterdrückt):

```
           MR2   MR3   MR1   MR4   h2   u2 com
k_real_1        0.51              0.30 0.70 1.4
k_real_3        0.56              0.32 0.68 1.4
k_real_4        0.75              0.56 0.44 1.0
k_real_5        0.58              0.45 0.55 1.3
k_real_6        0.63              0.48 0.52 1.1
k_entd_1  0.49                    0.29 0.71 1.3
k_entd_4  0.70                    0.49 0.51 1.0
k_entd_5  0.77                    0.59 0.41 1.0
k_entd_6  0.65                    0.45 0.55 1.1
k_entd_7  0.79                    0.63 0.37 1.0
k_soz_1               0.43        0.24 0.76 1.4
k_soz_2               0.54        0.41 0.59 1.4
k_soz_4               0.52        0.33 0.67 1.2
k_soz_5               0.87        0.72 0.28 1.0
k_wahl_1                    0.53 0.30 0.70 1.0
k_wahl_2                    0.67 0.46 0.54 1.1
k_wahl_3                    0.65 0.46 0.54 1.1
```

Der Tucker-Lewis-Index ist 0,936, der RMSEA- 0,038. Die Cronbachschen Alphas der Skalen (als Summenscores) sind 0,74 bei `k_real`, 0,82 bei `k_entd`, 0,71 bei `k_soz` und 0,67 bei `k_wahl`. Alle Skalen sind verbesserungsfähig, aber bereits in der gegenwärtigen Fassung einsetzbar. Interessant ist die Korrelationsmatrix der vier «konstruktivistischen» Faktoren:

```
      MR2  MR3   MR1  MR4
MR2  1.00 0.03 -0.04 0.08
MR3  0.03 1.00  0.24 0.17
MR1 -0.04 0.24  1.00 0.38
MR4  0.08 0.17  0.38 1.00
```

Die niedrigen Korrelationen deuten darauf hin, dass es auf Schülerseite kein einheitliches Konstrukt «Einstellungen zum konstruktivistischen Lernen» gibt, sondern die Wahrnehmung konstruktivistischer Lehrmethoden in vier relativ unabhängige Konstrukte zerfällt. Insbesondere der «konstruktivistische Kernfaktor» MR2 korreliert nicht mir den übrigen dreien.

Literatur

Bühner, M. (2011): Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion. 3. Auflage. München: Pearson Studium.

Leuders, T. (2005): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

Revelle, W. (2015): psych: Procedures for Personality and Psychological Research, http://CRAN.R-project.org/package=psych, Version = 1.5.1.

Stefan GÖTZ, Wien, Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Baden bei Wien

Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie

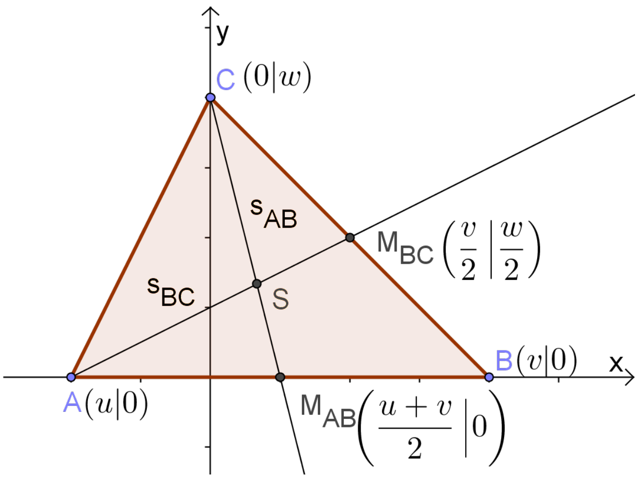
1. Einleitung und Motivation

In Pólya 1966, S. 47, findet sich das DESCARTES'sche Schema einer universellen Methode der Problemlösung:

- Man reduziere jede Art von Problem auf ein mathematisches Problem.
- Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein algebraisches Problem.
- Man reduziere jedes algebraische Problem auf die Lösung einer einzigen Gleichung.

Für ausgewählte Probleme der Dreiecksgeometrie ist eine derartige Übersetzung in Standardaufgaben der Vektorrechnung in der Sekundarstufe II möglich. Typische Aufgabenplantagen, wie sie in vielen Schulbüchern z. B. zum Schnitt zweier Geraden angeboten werden, können auf diese Weise durch sinnvolle Rechnungen ersetzt werden. Gleichzeitig ergibt sich ein für den Unterricht mächtiges Mittel zur (eigenständigen) Generierung von mathematischen Begründungen. Eine vorangehende Hypothesenbildung und damit einhergehende Motivierung der Schüler und Schülerinnen ist durch Exploration mittels DGS möglich.

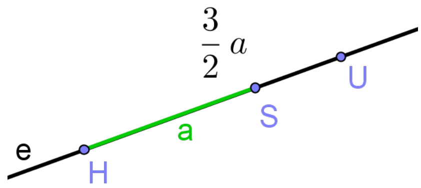
2. Ein standardisiertes Dreieck

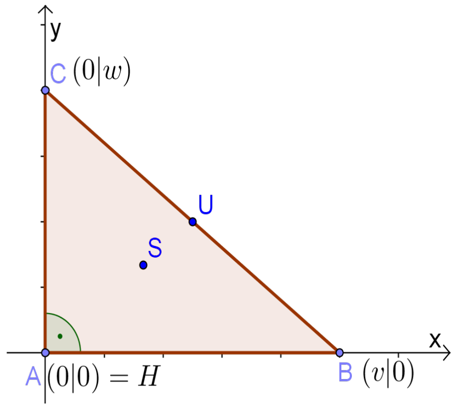


Die Abbildung zeigt ein allgemeines (zeigen!) Dreieck ABC mit $u < v$ und $w > 0$ (vgl. Götz & Hofbauer 2012, S. 325). Die Existenz des (Ecken-) Schwerpunkts S kann auf verschiedene Weise begründet werden: elementargeometrisch mit dem Satz vom Mittendreieck, mit koordinatenfreien Vektoren, mittels Flächenvergleichs oder mit dem Satz von CEVA, am einfachsten aber mittels Rechnens. Mit der Mittelpunktsformel können wir Parameterformen zweier Schwerelinien aufstellen: zum Beispiel ist $s_{AB}: \vec{X} = \binom{0}{w} + t \cdot \binom{\frac{u+v}{2}}{-w}$ und $s_{BC}: \vec{X} = \binom{u}{0} + \square \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{2}-u \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$. Ihr Schnitt liefert die (konkreten!) Parameterwerte $t = \lambda = \frac{2}{3}$. Der Schwerpunkt S teilt also

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die „Schwerelinie“ im Verhältnis 2:1. Seine Koordinaten sind (natürlich) $\left(\frac{u+v}{3}\middle|\frac{w}{3}\right)$. Die dritte Schwerelinie $s_{AC}: \vec{X} = \binom{v}{0} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{u}{2}-v \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$ (wegen $M_{AC}\left(\frac{u}{2}\middle|\frac{w}{2}\right)$) enthält *S*: eine Standardrechnung ergibt $r = \frac{2}{3} = t = \lambda$. Analog erweitern wir unser „*uvw*-Vokabelheft“: Umkreismittelpunkt $U\left(\frac{u+v}{2}\middle|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w}\right)$ und Höhenschnittpunkt $H\left(0\middle|-\frac{uv}{w}\right)$ (Götz & Hofbauer 2012, S. 326). Das führt uns geradewegs zur EULER‘schen Geraden *e*. Wir legen (ökonomisch!) die Gerade durch *H* und *S*: $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{uv}{w} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{3} \\ \frac{w}{3}+\frac{uv}{w} \end{pmatrix}$, und versichern uns, dass $U \in e$ gilt, indem wir $\mu = \frac{3}{2}$ für die *x*- und *y*-Koordinate ermitteln. Die Abbildung zeigt eine Interpretation dieses Ergebnisses. Fazit: Die durch die *uvw*-Sprache suggerierte Wahl der Punkte für das Aufstellen einer Parameterform von Geraden erleichtert die geometrische Deutung.



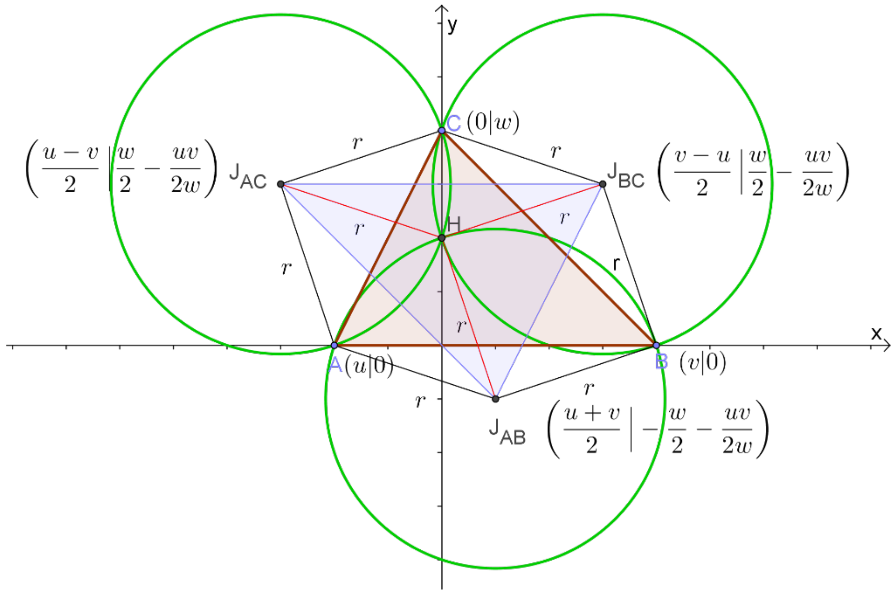


Das Betrachten von Spezialfällen und vor allem die Einbettung der Ergebnisse in andere mathematische Zugänge dienen dazu, die Eigentätigkeit von Schüler(inne)n anzuregen. Für $u = 0$ z. B. erhalten wir ein rechtwinkeliges Dreieck. Der Höhenschnittpunkt $H(0|0)$ liegt dann in der Ecke *A*, der Umkreismittelpunkt $U\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{w}{2}\right)$ ist dann der Mittelpunkt M_{BC} der Strecke $\overline{BC}$, was den THALESkreis auf den Plan ruft. Die Koordinaten für den Schwerpunkt $S\left(\frac{v}{3}\middle|\frac{w}{3}\right)$ lassen sich mittels Integralrechnung verifizieren. Der Graph der funktionalen Abhängigkeit $y = -\frac{w}{v} \cdot x + w$ stellt die Gerade durch *B* und *C* dar. Für die Koordinaten ξ und η des Schwerpunkts *S* eines Normalbereichs gelten bekanntlich die Gleichungen $\xi = \frac{\int_0^v xy\,dx}{\int_0^v y\,dx} = \frac{\int_0^v\left(-\frac{w}{v}\cdot x^2+wx\right)dx}{\int_0^v\left(-\frac{w}{v}\cdot x+w\right)dx} = \cdots = \frac{v}{3}$ und $\eta = \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_0^v y^2\,dx}{\int_0^v y\,dx} = \cdots = \frac{w}{3}$.

Weitere Übungs- und Interpretationsmöglichkeiten bieten sich z. B. beim gleichschenkeligen Dreieck mit $u = -v$ an.

3. Die JOHNSON–Kreise

Eine Abituraufgabe aus Wien im Jahre 2012 spricht drei Kreise mit gleichem Radius an, die durch jeweils zwei Eckpunkte eines Dreiecks ABC gehen und einen Punkt gemeinsam haben (Müller 2013, S. 49). Weiterhin wird gesagt, dass der gemeinsame Punkt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist. Wir berechnen in der *uvw*-Sprache die Mittelpunktskoordinaten und den Radius des Kreises, auf dem die Punkte B, C und H liegen. Genauso gehen wir für die Punkte A, B und H bzw. A, C und H vor. Jedes Mal bekommen wir für den Radius r

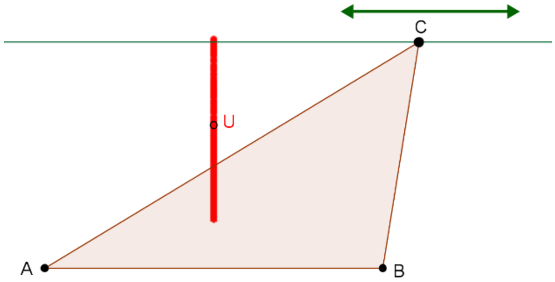


die Beziehung $r^2 = \frac{u^2+v^2}{4} + \frac{w^4+u^2v^2}{4w^2}$. Das ist das Quadrat des Umkreisradius des Dreiecks ABC (Götz & Hofbauer 2012, S. 326). Die Abbildung zeigt u. a. die Koordinaten der Mittelpunkte J_{AB}, J_{AC} und J_{BC} der drei JOHNSON-Kreise. Der gemeinsame Punkt muss der Umkreismittelpunkt des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ sein. Die Dreiecke ABC und $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ sind kongruent zueinander. Die Vektoren $\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}} = \binom{v}{-w}$, $\overrightarrow{J_{BC}J_{AB}} = \binom{u}{-w}$, $\overrightarrow{J_{BC}J_{AC}} = \binom{u-v}{0}$ haben die Längen $\sqrt{v^2+w^2} = a$, $\sqrt{u^2+w^2} = b$ und $|u-v| = c$, das sind die Seitenlängen des ursprünglichen Dreiecks ABC.

Weiterhin lässt sich eine Dualität feststellen: die Höhenlinien von ABC sind die Mittelsenkrechten von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ und vice versa. Daher ist der Höhenschnittpunkt von ABC der Umkreismittelpunkt von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ und umgekehrt. Mit der *uvw*-Sprache können wir das leicht nachrechnen, indem wir wie gehabt Parameterformen der entsprechenden Geraden betrachten. In Götz & Hofbauer 2012, S. 326, finden wir den mit der *uvw*-Sprache bewiesenen Satz: „Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Seiten eines Dreiecks, so liegen die Spiegelungspunkte am Umkreis des Dreiecks.“ Daraus folgt, dass die drei Kreise, die durch Spiegelung des Umkreises eines Dreiecks an seinen drei Seiten entstehen, einen gemeinsamen Punkt haben, eben den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

4. Dynamische *uvw*-Sprache

Wandert der Eckpunkt C eines Dreiecks parallel zur Seite AB und verfolgt man die Spur des Umkreismittelpunktes U, so bewegt sich dieser auf einem Strahl senkrecht zu AB (vgl. Götz & Süss-Stepancik 2015). Wir führen die Variable z als x-Koordinate von C ein. Ihre Veränderung entspricht der Bewegung von C. Der Schnitt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC} in der *uvw*-Sprache liefert $x = \frac{u+v}{2}$ und $y = \frac{w}{2} + \frac{(u-z)\cdot(v-z)}{2w}$ für die Koordinaten der Spur von U. Fassen wir die y-Koordinate als Funktion von z auf (die x-Koordinate ist ja fest!), dann ist ihr Graph eine nach oben offene Parabel mit Minimum an der Stelle $\frac{u+v}{2}$. In diesem Fall ist das Dreieck ABC gleichschenkelig, denn C liegt nun auf m_{AB}, und U ist „am Tiefpunkt". Wird das Dreieck dagegen immer „stumpfwinkeliger" bei A oder B, das heißt der Betrag von z immer größer, dann wandert U nach „oben".



5. Resümee

Die *uvw*-Sprache ist ein Begründungswerkzeug für geometrische Probleme. Eine entsprechende Dokumentation von Schüler(innen)seite stützt dieses Sinnangebot in der Vektorrechnung. Zum Einstieg in die *uvw*-Sprache kann mit konkreten Belegungen für u, v und w im Mathematikunterricht gearbeitet werden. Die Anschauung dient auch zur Prüfung der gemachten Interpretationen. Das Rechnen, das Operieren mit Zeichen nach bestimmten Regeln als manifest werdendes Denken, wird so als Erkenntnismittel deutlich.

Literatur

Götz, S. & Hofbauer, F. (2012). Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Für die GDM herausgegeben von M. Ludwig und M. Kleine. Band 1 (S. 325–328). Münster: WTM.

Götz, S. & Süss-Stepancik, E. (2015). Lernpfade zur Unterstützung der Ausbildung von Begründungskompetenz im Mathematikunterricht. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 49–64). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Müller, R. (2013). Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen mit dynamischer Geometrie. Gedanken ÜBER Grundkompetenzen. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, Heft 46, 43–51.

Pólya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. Band I. Basel und Stuttgart: Birkhäuser.

Irene GRAFENHOFER, Ingrid HUPP, Koblenz

Joghurtverpackungen unter der mathematischen Lupe

Ist ein Joghurtbecher aus dünnem Plastik mit Karton-Umverpackung ökologisch sinnvoll?

In diesem Artikel beschäftigen wir uns mit Joghurtverpackungen. Joghurt kommt in den unterschiedlichsten Verpackungen in den Handel. Die Vor- und Nachteile von Mehrweg-Glasbechern und Einweg-Plastikbechern wurden schon oft untersucht. In diesem Artikel geht es um einen Vergleich von reinen Plastikbechern mit Bechern, die aus dünnem Plastik mit Karton-Umverpackung bestehen, wobei das für Joghurt-Verpackungen verwendete Plastik meist Polystyrol (PS) ist. Zunächst wird mit unterschiedlichen Methoden festgestellt, wie groß die benötigten Polystyrol- und Kartonmengen bei diesen Verpackungen sind. Danach folgt eine Untersuchung der Ökobilanz dieser beiden Materialien, d.h. wir betrachten die Umweltwirkungen vom Herstellungsprozess bis zur Entsorgung des Materials (vgl. Fischer, 2014). Am Ende wird die Ausgangsfrage "Ist ein Joghurtbecher aus dünnem Plastik mit Karton-Umverpackung ökologisch sinnvoll?" beantwortet.

Motivation

Beim Kauf von Joghurt hat der Verbraucher die Auswahl zwischen den unterschiedlichsten Verpackungsformen. Gerade Anbieter von Bio-Joghurt setzen in letzter Zeit häufiger auf Becher aus dünnem Plastik, die zur Erhöhung der Stabilität mit einer Karton-Umverpackung versehen sind. Nach dem Verzehr werden die Karton-Umverpackung im Altpapier und der Plastikbecher im gelben Sack entsorgt. Wiegt der Vorteil durch die Einsparung von Plastik den Nachteil des zusätzlich verwendeten Kartons auf?

1. Teilproblem: Feststellung der verwendeten Materialmengen

Damit man berechnen kann, wie groß die Menge des eingesparten Plastiks und wie groß die Menge des zusätzlich verbrachten Kartons ist, muss man zunächst den gesamten Materialverbrauch feststellen. Dies geschieht mit drei verschiedenen Methoden: Wiegen einzelner Becher mit der Küchenwaage, Berechnung des Volumens mit anschließender Gewichtsberechnung und Wiegen einer größeren Anzahl von Bechern. Rundet man alle Gewichte auf ganze Zahlen, so erhält man mit allen Methoden 11 g PS für den dicken Becker und 9 g PS für den dünnen Becher und 6 g für den Karton. Die PS-Ersparnis liegt bei ca. 20 %.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Validierung: Vergleich mit den Angaben eines Herstellers

Es wurden mehrere Hersteller von PS-Bechern mit Karton-Umverpackung per Mail befragt, weshalb sie sich für diese Verpackungsform entschieden haben.

Ein Hersteller schrieb uns:

"Bei anderen Produkten, wie zum Beispiel den Joghurtalternativen, verwenden wir ein neues System aus Kunststoffbecher und Papierbanderole. Das spart 20% Kunststoff und macht die Verpackung zu 100% recyclebar, denn Papier ist wesentlich einfacher zu verwerten als Plastik."
(kundenservice@alpro.com, Mail vom 17.11.2014, 16:30 Uhr)
Die Aussage, dass dadurch 20 % Kunststoff eingespart werden, passt zu den oben berechneten Werten.

Fazit zum ersten Teilproblem

Für die weitere Untersuchung kann damit gearbeitet werden, dass die Öko-Bilanzen von 2 g PS und 6 g Karton verglichen werden, d.h. es ist die dreifache Menge an Karton notwendig, um das eingesparte Polystyrol zu ersetzen.

2. Teilproblem: Vergleich der Ökobilanzen von PS und Karton

Wir wissen aufgrund der vorigen Gewichtsberechnungen, dass die dreifache Masse an Karton notwendig ist, um 2g PS zu ersetzen. Jetzt gilt es nachzusehen, ob umweltrelevante Größen – wie Herstellungsenergie (Rohstoffe + Produktionsprozess), Treibhauspotential bei der Herstellung (v.a. Kohlenstoffdioxid und Methan), der Mehrverbrauch an Kraftstoff beim Transport von Joghurt aufgrund des erhöhten Kartongewichts und die Entsorgung ausschlaggebend für die Wahl zum Becher mit Umschlagkarton sind (vgl. Fischer M., 2014). Aufgrund ähnlicher Recycling-Ergebnisse von PS und Karton werden im folgenden Vergleich nur Größen von Materialien aus Primärproduktion verwendet.
PS benötigt eine Herstellungsenergie von 45 MJ/kg und Karton 16,9 MJ/kg, was aufgrund der dreifach benötigten Menge 50,7 MJ/kg ergibt (vgl. Obersteiner G., Schneider F., 2014).

Beim Vergleich des Treibhauspotentials bei der Herstellung von PS und Karton (in kg CO_2-eq/kg) fällt die Bilanz auch schlechter für Karton aus:

Für PS benötigt man 2,9 kg CO_2-eq/kg und für Karton 1,31 kg CO_2-eq/kg, was verdreifacht auch wieder bedeutend höher als beim PS ist (vgl. Obersteiner G., Schneider F., 2014).

Zusammenfassend bedeutet dies eine leicht höhere Umweltbelastung durch Verwendung des Kartons, was rein auf den höheren Materialaufwand zurückzuführen ist. Dies betrifft auch Umweltbelastungen wie Eutrophierung, Wasserverbrauch etc. (vgl. Detzel A., Kauertz B., Derreza-Greeven C., 2012). Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Entscheidung für oder gegen ein Material sehr stark vom Endgewicht bzw. Materialverbrauch abhängt.
Um dies mathematisch noch deutlicher zu machen, sehen wir uns an, wie sich dieses höhere Gewicht auf den Transport (meist durch LKW) und damit auf den zusätzlichen Dieselverbrauch auswirkt. Dazu berechnen wir den Kraftstoffmehrverbrauch pro kg Karton unter folgenden Annahmen:

- Transportwege der verpackten Joghurtbecher: 2500km – 9000km (vgl. Böge S., 1992)
- LKW Kraftstoffverbrauch (Diesel): ca. 8 l /100km mehr bei voller Beladung
- Durchschnittliche Beladung: 20t=20 000kg
- Energiegehalt von Diesel: 35,6 MJ/l
- Keine zusätzlichen LKW-Einsätze aufgrund des höheren Gewichts

Die Berechnungen des zusätzlichen Kraftstoff-Energiegehalts in MJ/kg je nach Länge der Transportwege ergeben:

- 0,356 MJ/kg (2500km)
- 1,2816 MJ/kg (9000km)

Vergleicht man nun den Energiegehalt bzgl. des Kraftstoffverbrauchs mit den vorher genannten Herstellungsenergien, bemerkt man, dass der Transportweg bzw. das höhere Gewicht auch einen nicht vernachlässigbaren Umweltfaktor spielen:

Polystyrol/kg	*Karton/kg*
47,9 MJ/kg	55,698 MJ/kg (2500km)
	58,475 MJ/kg (9000km)

Es ist aufgrund anderer Studien (vgl. Seidel K., 2012, Detzel A., Kauertz B., Derreza-Greeven C., 2012) anzunehmen, dass diese unterschiedlichen Ergebnisse in Bezug auf den Energiegehalt von PS und Karton plausibel sind und andere Umweltfaktoren ähnliche Auswirkungen aufgrund des höheren Materialverbrauchs haben.

Weitere Berechnungen ergaben, dass der Kraftstoffmehrverbrauch bei ausschließlicher Verwendung von 500g-Joghurtbechern mit Kartonumschlag, der ca. zwischen 23t und 84t je nach Transportweg betragen würde, einen Anteil von ca. 0,2% des Gesamtdieselverbrauchs für Joghurt in Deutschland einnehmen würde.

Zusammenfassung und Reflexion:

Karton ist aufgrund des höheren Materialverbrauchs und der großzügig gewählten Annahmen zugunsten des Kartons keine umweltverträgliche Alternative zu Polystyrol. Jetzt stellt sich die Frage, warum Firmen ein Bio-Produkt umweltschädlicher verpacken und den höheren Preis für Kraftstoff bzw. die Umweltmehrbelastung durch das höhere Gewicht des Joghurtbechers in Kauf nehmen, was der Bezeichnung „Bio“ schaden könnte und keinen Mehrwert bringt. Oder doch? Der einzige Grund könnte in der Verkaufsstrategie liegen. Ein Bio-Produkt lässt sich besser verkaufen, wenn es sich vom handelsüblichen Produkt abgrenzt und auch noch Umweltfreundlichkeit suggeriert. Da Karton in der Bevölkerung einen besseren Ruf als Plastik genießt, geht es hier um die Befriedigung von Meinungen und nicht um das bewusste Umgehen mit Umweltproblemen. Das Bearbeiten dieses Themas im Mathematikunterricht ist eine Möglichkeit, um Schülerinnen und Schülern Mathematik als Werkzeug zum kritischen Denken im Alltag näherzubringen.

Literatur

Detzel A., Kauertz B., Derreza-Greeven C. (2012). Kirsch, A. (1977). Untersuchung der Umweltwirkungen von Verpackungen aus biologisch abbaubaren Kunststoffen. Umweltbundesamt.

Seidel K. (2012). Best Practice-Verpackungsbeispiele für Bio Suisse Produkte. Forschungsinstitut für biologischen Landbau.

Böge S. (1992). Erfassung und Bewertung von Transportvorgängen: Die produktbezogenen Transportkettenanalyse. Wuppertal Institut.

Obersteiner G., Schneider F. (2006). Analyse des Tests von Bechern aus nachwachsenden Rohstoffen im Tiergarten Schönbrunn. Universität für Bodenkultur Wien.

Meike GRÜßING[1], Julia SCHWABE[2], Aiso HEINZE[1],
Frank LIPOWSKY[2], [1] Kiel / [2] Kassel

Anderer Unterricht - andere Rechenstrategien? Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsstrategien

In dem Beitrag werden ergänzende Analysen aus einem Forschungsprojekt vorgestellt, über das bereits 2013 auf der GDM-Tagung berichtet wurde. Entsprechend sind die Abschnitte zum theoretischen Hintergrund und der Anlage der Studie in diesem Beitrag fast identisch zu der Darstellung in Grüßing et al. (2013), da es sich um die gleiche Studie handelt.

Theoretischer Hintergrund

Obwohl die Entwicklung der Kompetenz zur adaptiven Wahl von Rechenstrategien als ein bedeutendes Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule angesehen wird, zeigen Ergebnisse verschiedener Studien, dass die Fähigkeit, verschiedene Rechenstrategien flexibel und auf die Charakteristika der jeweiligen Aufgabenstellung bezogen einzusetzen, in der Grundschule eher gering ausgeprägt ist (Selter, 2001; Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009). Schülerinnen und Schüler greifen häufig auf universelle Lieblingsstrategien zurück, auch wenn diese aus mathematischer Sicht ineffizient sind. Nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren werden diese häufig auch dann eingesetzt, wenn sie um ein Vielfaches aufwändiger sind als andere Strategien (z.B. Selter, 2001). Ergebnisse einiger Studien deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der adaptiven Strategiewahl erfolgreich gefördert werden können (z.B. Blöte et al., 2000; Rathgeb-Schnierer, 2007). Diese Studien beziehen sich in der Regel auf umfassende Konzepte für den Arithmetikunterricht, die nicht allein die adaptive Strategiewahl im Blick haben. Dabei werden z.T. moderne Ansätze mit einer Betonung der flexiblen Strategiewahl einem traditionellen Unterricht gegenübergestellt, der zunächst einen Schwerpunkt auf die Einführung und Automatisierung einer universellen Strategie legt.

Bei den modernen Ansätzen lassen sich jedoch verschiedene Instruktionsansätze zur Förderung der adaptiven Strategiewahl identifizieren. So basiert der *explizierende Ansatz* auf der Annahme, dass Strategien als prozedurales Wissen verfügbar sind, so dass beim Lösen einer Aufgabe eine adaptive Strategie aus einem Strategierepertoire ausgewählt werden kann. Entsprechend legt der explizierende Ansatz einen Schwerpunkt auf den sukzessiven Aufbau eines Strategierepertoires durch die Automatisierung vorgegebener idealtypischer Strategien in Verbindung mit dem konti-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

nuierlichen Aufbau von Metawissen über ihre Effizienz. Dem *problemlöse-orientierten Ansatz* liegt die Annahme zugrunde, dass Strategien nicht im Gedächtnis vorliegen, sondern dass bei jeder Aufgabe auf Basis des Zahlwissens individuell ein Rechenweg generiert wird (Threlfall, 2009). Ein Kompetenzaufbau wird durch die Entwicklung von konzeptuellem Zahlwissen und das kontinuierliche Selbstentdecken von Lösungswegen in Verbindung mit der Diskussion über ihre Effizienz angestrebt.

Bisher liegen wenige empirische Ergebnisse zum Einfluss dieser instruktionalen Ansätze auf den Erwerb der Fähigkeit zum korrekten und adaptiven Rechnen vor. Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde eine kontrollierte experimentelle Studie durchgeführt, in der die Instruktionsansätze in einem einwöchigen mathematischen Ferienprogramm umgesetzt wurden, das in den Herbstferien 2011 am IPN in Kiel stattfand. Insbesondere wurden dabei die folgenden Forschungsfragen untersucht:

- Zeigen sich (nachhaltige) Effekte einer Intervention im dritten Schuljahr auf den Kompetenzerwerb zur adaptiven Strategiewahl?
- Zeigen sich unterschiedliche Effekte in Bezug auf die beiden Ansätze?

Design

Die Stichprobe besteht aus 79 Schülerinnen und Schülern aus 17 Klassen der Jahrgangsstufe 3, die an diesem Ferienprogramm teilgenommen haben. Die Kinder wurden unter Kontrolle der Leistungen in einem Mathematiktest, einem Strategietest sowie des sozioökonomischen Status zufällig den beiden Instruktionsbedingungen zugewiesen. Ihre 162 Mitschülerinnen und Mitschüler bilden die Kontrollgruppe. Der Umfang der Intervention zur adaptiven Strategiewahl entsprach etwa 16 Schulstunden. Die konzeptgetreue Umsetzung der Ansätze wurde durch ein Expertenrating abgesichert. Die von den Kindern eingesetzten Rechenstrategien sowie die Korrektheit ihrer Lösungen wurden in einem Vortest (T1), einem Nachtest direkt im Anschluss (T2) sowie in zwei Follow-Up-Tests im Januar (T3) und im Juni (T4) erfasst. Die Kontrollgruppe nahm nur an den Datenerhebungen zu den Zeitpunkten T1, T3 und T4 teil, da der Nachtest während der Ferienwoche durchgeführt wurde. Die Tests zur Strategiewahl umfassen jeweils acht Items, von denen vier Ankeritems zu jedem Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Benachbarte Messzeitpunkte enthalten zwei weitere gemeinsame Items. Neben der Korrektheit der Lösung wurde die Lösungsstrategie auf Grundlage eines differenzierten Kategoriensystems mit 21 Kategorien durch zwei Personen kodiert ($\kappa > .70$). Für jede Aufgabe wurde normativ definiert, welche Strategien in Verbindung mit den jeweiligen Aufgabencharakteristika als effizient und somit als adaptiv anzusehen sind.

Ergebnisse

Wie in Grüßing et al. (2013) dargestellt, zeigte die Intervention im Vergleich zur Kontrollgruppe einen nachhaltigen positiven Effekt in Bezug auf die adaptive Strategiewahl. Für die Korrektheit der Lösungen ergab sich kein Unterschied. Beim Vergleich der beiden Instruktionsansätze ergab sich weder bei der Adaptivität noch bei der Korrektheit ein Unterschied. Beide Ansätze scheinen die Kinder gleich gut zu fördern. In zusätzlichen Analysen wurden die Effekte der beiden Gruppen auf qualitativer Ebene betrachtet. Dazu wurde mittels Chi-Quadrat-Homogenitätstest geprüft, ob die Kinder der beiden Instruktionsgruppen bei den einzelnen Messzeitpunkten Unterschiede in den verwendeten Strategien aufweisen. Dabei wurden sechs Kinder als „Ausreißer“ ausgeschlossen, da diese bereits im Vortest fast nur schriftlich rechneten oder fast nur die Strategie des gegen-/gleichsinnigen Veränderns anwendeten und damit im Curriculum schon weit voraus waren. Da der Chi-Quadrat-Test Voraussetzungen an die Zellenbesetzungen stellt und die Stichprobe mit N = 73 bereits klein war, wurden die 21 Kategorien theoriegeleitet auf 11 Kategorien vergröbert. Die Ergebnisse in Tabelle 1 zeigen, dass sich die Gruppen im Vortest kaum unterscheiden (die tendenzielle Abweichung kommt zustande, da einige Strategien nicht eindeutig zugeordnet werden konnten). Zu den anderen Messzeitpunkten gibt es signifikante Unterschiede mit mittlerer Effektgröße. Bei den spezifischen Strategien fallen vor allem die Unterschiede bei den Kategorien „Ergänzen“ und „Verändern“ sowie „Hilfsaufgabe“ auf.

Diskussion und Ausblick

Wie bereits in Grüßing et al. (2013) festgestellt, zeigt die einwöchige Intervention nachhaltige Effekte in Bezug auf den Kompetenzerwerb zur adaptiven Wahl von Rechenstrategien und keine negativen Effekte auf die Korrektheit der Lösungen. Die beiden Instruktionsstrategien zeigen keine signifikanten Unterschiede in ihren positiven Effekten auf Kompetenzebene, dagegen gibt es Unterschiede bei der Art der gewählten Strategien sowohl im direkten Nachtest, als auch in den Follow-up-Tests (jeweils mit mittleren Effektgrößen). Dabei zeigte sich, dass die Gruppe des explizierenden Ansatzes insbesondere die Strategien „Ergänzen“ und „gegen-/gleichsinniges Verändern“ häufiger verwendete, während die Gruppe des problemlöseorientierten Ansatzes häufiger die selbst generierte Strategie „Hilfsaufgabe“ einsetzte und letzteres sogar nachhaltig.

Tab. 1: Häufigkeiten der Nutzung einzelner Strategien in den Gruppen

<table>
<tr><th rowspan="2">Häufigkeiten</th><th colspan="2">T1 (Vortest)</th><th colspan="2">T2 (Nachtest)</th><th colspan="2">T3 (3 Mon.)</th><th colspan="2">T4 (8 Mon.)</th></tr>
<tr><th>Expl.</th><th>Probl.</th><th>Expl.</th><th>Probl.</th><th>Expl.</th><th>Probl.</th><th>Expl.</th><th>Probl.</th></tr>
<tr><td>schriftlich</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>11</td><td>20</td><td>10</td><td>118</td><td>103</td></tr>
<tr><td>stellenweise</td><td>32</td><td>21</td><td>55</td><td>9</td><td>59</td><td>14</td><td>31</td><td>9</td></tr>
<tr><td>kurz stellw.</td><td>7</td><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>schrittweise</td><td>101</td><td>109</td><td>42</td><td>42</td><td>48</td><td>38</td><td>4</td><td>11</td></tr>
<tr><td>kurz schrittw.</td><td>43</td><td>51</td><td>23</td><td>49</td><td>30</td><td>69</td><td>9</td><td>29</td></tr>
<tr><td>Mischung stellen/schritt</td><td>40</td><td>42</td><td>12</td><td>39</td><td>13</td><td>11</td><td>19</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Ergänzen</td><td>5</td><td>4</td><td>61</td><td>26</td><td>20</td><td>24</td><td>9</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Hilfsaufgabe</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">6</td><td>29</td><td>55</td><td>35</td><td>65</td><td>23</td><td>75</td></tr>
<tr><td>Verändern</td><td>45</td><td>18</td><td>16</td><td>12</td><td>21</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Kopfrechnen</td><td>11</td><td>19</td><td>14</td><td>17</td><td>30</td><td>10</td><td>19</td><td>11</td></tr>
<tr><td>unklar</td><td>26</td><td>8</td><td>7</td><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>χ^2</td><td colspan="2">$\chi^2(9, N = 546) = 15.27$</td><td colspan="2">$\chi^2(10, N = 562) = 96.19$</td><td colspan="2">$\chi^2(10, N = 539) = 70.52$</td><td colspan="2">$\chi^2(10, N = 537) = 58.04$</td></tr>
<tr><td>p</td><td colspan="2">.084</td><td colspan="2">$< .001$</td><td colspan="2">$< .001$</td><td colspan="2">$< .001$</td></tr>
<tr><td>Cramér's V[1]</td><td colspan="2">.17</td><td colspan="2">.41</td><td colspan="2">.36</td><td colspan="2">.33</td></tr>
</table>

[1] Effektgröße Cramér's V: $< .3$ klein, .3-.5 mittel, $>.5$ stark

Literatur

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10*, 221-247.

Grüßing, M., Schwabe, J., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2013). Adaptive Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben: eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 388-391). Münster: WTM-Verlag.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: How adaptive is German 3rd-Graders' strategy use? *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 591-604.

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28*(2), 173-174.

Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145-173.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 541-555.

Martin GUGGISBERG, Torsten LINNEMANN, Beat TRACHSLER

Forschendes Lernen mit Hilfe von Optimierungsaufgaben am Beispiel eines klassischen Lokalisierungsproblems

„Wo ist der beste Standort für einen Spielplatz?“ (Roth-Sonnen (2005): Was ist ein Mittelpunkt?). Diese Aufgabe hat keine geschlossene algebraische Lösung – und bietet damit einen Einstieg in realitätsbezogene Situationen des Forschenden Lernens.

Am Beispiel des historischen Fermat-Weber-Problems soll das für den Unterricht auf der Sekundarstufe 2 aufzeigt werden. Neben numerischen Verfahren werden Lösungen mit GeoGebra vorgestellt.

1. Gutachteraufgaben im Kontext des Forschenden Lernens

Roth hat sich mit Forschendem Lernen im Mathematikunterricht auf vielfältige Weise auseinander gesetzt, und unter anderem die Frage gestellt: „Kann man forschen lernen?“ (Roth 2014). Er beschreibt anhand konkreter Beispielen aus den Gebieten der „Kombinatorischen Optimierung“ oder den Naturwissenschaften, wie Schülerinnen und Schüler auf der gymnasialen Stufe subjektiv neue Bereiche erforschen. Oldenburg und Ludwig vermuten, dass Experimente Lernprozesse auslösen und Lernwege steuern können (Ludwig 2007), dabei werden nach ihrer Auffassung die Kompetenzen Argumentieren und Modellieren gefördert. Außerdem können Lernende in die Rolle von Forscherinnen und Forscher schlüpfen während des Arbeitens an den Fragestellungen. Sie können interaktive Werkzeuge nutzen (Gassner 2012, Guggisberg 2014), um ihre erstellten Thesen zu überprüfen.

Kaenders zeigt mit Hilfe des Mathematikwerkzeugs GeoGebra an zahlreichen Beispielen, wie forschend-entdeckender Unterricht auf konstruktivistische Art und Weise gelingen kann (Kaenders 2011). Roth-Sonnen beschreibt, wie anhand einer Fragestellung mit Alltagsbezug eine allgemeinere, abstraktere oder generalisierte Fragestellung entstehen kann. Die konkrete Frage, wo der beste Ort für einen Kinderspielplatz liegt, kann in eine allgemeinere Fragestellung nach der Definition eines Mittelpunkts (Roth-Sonnen 2005) überführt werden.

Diese Art von Fragestellungen eignen sich im Besonderen für den didaktischen Einsatz der Gutachtermethode (Barzel 2014). Schülerinnen und Schüler setzen dabei ihr mathematisches Handwerkszeug als Expertenwissen ein, um vorgegebene konkrete Fragestellungen zu bearbeiten und begründete Lösungsvorschläge zu unterbreiten. Im Folgenden werden wir, ausgehend von der Fragestellung nach einem optimalen Ort (Lokalisie-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

rungsproblem), eine mögliche Unterrichtssituation beschreiben, in welcher die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von GeoGebra verschiedene Lösungsvorschläge erforschen können.

2. Was ist der beste Ort für einen Spielplatz

Die hier vorgeschlagene Variante nutzt die dynamische Geometriesoftware GeoGebra. In Zweier- oder Dreiergruppen sollen die SuS verschiedene mögliche Standpunkte für einen Spielplatz bei einer vorgegebenen Situation erproben und Argumente für Ihre gefundene Wahl des Standortes sammeln.

In einer Gruppendiskussion erkennen manche Schülerinnen und Schüler, dass ein idealer Standpunkt von verschiedenen weiteren Rahmenbedingungen abhängen kann, wie z.B.

- möglichst sicherer und direkter Zugang,
- möglichst in der Nähe vieler Kinder (Abhängigkeit der Bewohnerstruktur),
- möglichst wenig Lärmemission zu nächsten Nachbarn.

Beim Ausarbeiten verschiedener Gutachten kann auch die Frage auftreten mit welchem Maß, respektive welcher Norm, sollen Distanzen zwischen dem Spielplatz und den einzelnen Häuser gemessen werden. Das erste Beispiel verwendet einfach die Distanzmessung von Geogebra.

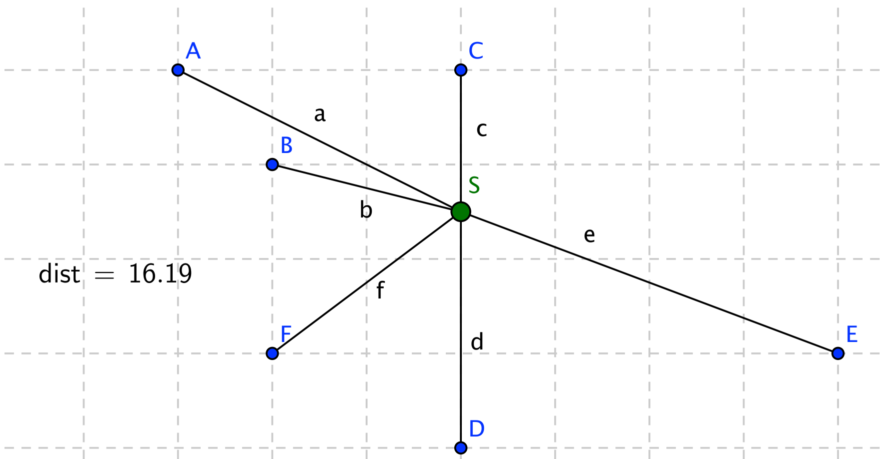


Abbildung 1 GeoGebraApplet zum interaktiven Suchen nach dem optimalen Ort für einen Spielplatz. Als Distanz von einem Haus zum Spielplatz wird die Luftinen (euklidische Norm) verwendet (http://tube.geogebra.org/material/show/id/320855)

Die Gutachten nutzen GeoGebra um einen möglichst optimalen Ort durch manuelles Experimentieren zu eruieren. Daraus eröffnet sich die Frage, ob es nicht auch eine geometrische oder algebraische Lösung für diese Art von Problemen gibt.

3. Von einem historischen Problem zu aktuellen Forschungsgebieten

„Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu allen Ecken minimal sein soll?“ (Fermat, nach Dörrie 2013)

Im Band 8 des Schweizer Mathbuch, Lernumgebung 18, (Affolter 2003) wird neben den klassisch ausgezeichneten Punkten im Dreieck auch nach dem Fermat-Punkt gesucht. Für den Fall n=3 (Dreieck) existieren geometrisch und algebraische Lösungen zur Auffindung dieses Punktes. Zahlreiche modern gefasste und für Schülerinnen und Schüler lesbare Beweise finden sich in der Publikation von Hans Engelhaupt (Engelhaupt 2004).

Eine Generalisierung des Fermat-Problem lässt sich auf natürliche Weise realisieren, z. B. mit der Fragestellung: „Existiert ein optimaler Ort, von dem die Summe aller Abstände zu $n > 3$ Punkten minimal ist ?“

4. Numerische Methode zur Bestimmung eines optimalen Orts

Ein approximatives Lösungsverfahren hat Andrew Vázsonyi bereits 1932 im Alter von 16 Jahren gefunden und dieses 1937 in einer japanischen Zeitschrift in französicher Sprache unter seinem jüdischen Namen Endre Weiszfeld veröffentlicht. Der Artikel trug den Titel „Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum“ (Weiszfeld 1937). Der Kern des Weiszfeld-Algorithmus basiert auf einer iterativen Gewichtung von Verbesserungen.

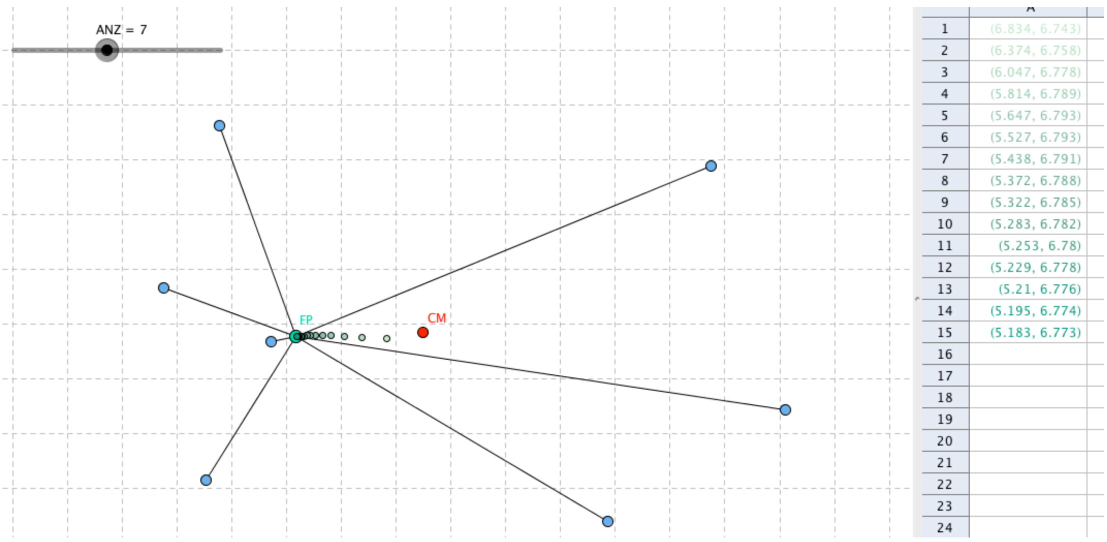


Abbildung 2 GeoGebraApplet, mit Hilfe des Weiszfeld-Algorithmus wird der Fermat-Punkt (türkis) approximiert ($\varepsilon < 0.01$), die einzelnen Iterationsschritte werden als Punkte visualisiert und als Koordinaten in der Tabellenansicht ausgegeben. (http://tube.geogebra.org/material/show/id/53072)

Die Programmierschnittstelle von GeoGebra ermöglicht eine Implementierung des Weiszfeld-Algorithmus. Bei jeder Änderung der Ausganslange lässt sich der Schwerpunkt (rot), der Fermat-Punkt (türkis), sowie die Iterationsschritte neu berechnen und visualisieren. Weiterführende Fragestellungen wie z.B. „ Welche Positionen kann der Fermat-Punkt annehmen, wenn nur eine Position eines Ausgangspunktes verändert wird?“ können mit Hilfe von interaktiven GepGebraApplets untersucht werden (GeoGebraBook http://tube.geogebra.org/book/title/id/740553).

5. Reflexion und Ausblick, Subjektives Entdecken mit Hilfe von GeoGebra

Dieser Beitrag soll zeigen, dass eine prägnant formulierte Fragestellung mit Alltagsbezug, wie z.B. das Fermat-Problem, das Potenzial für eine geschichtliche Entdeckungsreise wie auch tiefere mathematische Reflexion ermöglicht. Werkzeuge wie GeoGebra erlauben es uns Probleme zu generalisieren und komplexere Konfiguration, wie z.B. ein optimaler Ort innerhalb Europas mit Hilfe von Simulationen zu erkunden.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2003). Hat ein Dreieck eine Mitte? mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2014). Mathematik Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 11. Auflage Berlin: Cornelsen Verlag.

Dörrie, H. (2013). 100 great problems of elementary mathematics. Courier Dover Publications.

Engelhaupt, H. (2004). Kürzeste Wege, Teil I. Mathematikinformation, 41, 24-61.

Gassner, C., & Hohenwarter, M. (2012). GeoGebraTube & GeoGebraWeb. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

Guggisberg, M., & Gyalog, T. (2014). "Lernmaterial zum Informatik-Biber", SATW Broschüre, Informatische Bildung fördern, SATW INFO 2/14

Kaenders, R., & Schmidt, R. (2011). Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden.

Ludwig, M., Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren*, 141, 4-11

Roth, J., & Weigand, H. G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag

Roth-Sonnen N., Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, (2005). Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. (S. 190) Berlin: Cornelsen.

Weiszfeld, E. (1937). Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tôhoku Mathematical Journal, 43, 355–386.

Martin GULJAMOW, Berlin, Maike VOLLSTEDT, Bremen

Zur Untersuchung der Rolle affektiver Merkmale hinsichtlich mathemat. Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung

1. Mathematikdidaktische Forschung und berufliche Erstausbildung

Mathematikdidaktische Forschung ist im Feld der beruflichen Bildung unterrepräsentiert (Bakker 2014). Bislang wurden vor allem Fragen hinsichtlich der prädiktiven Kraft mathematischer Kompetenzen für den Ausbildungserfolg bzw. den Erwerb beruflicher Fachkompetenzen untersucht. Vorrangig querschnittlich durchgeführte Untersuchungen legen insbesondere für kaufmännische sowie gewerblich-technische Berufe solche Zusammenhänge nahe (Nickolaus et al. 2013). Allerdings wirft die teils hohe Erklärungskraft mathematischer Leistungsdaten auch für Fähigkeiten- und Wissenserwerb ohne expliziten mathematischen Bezug die Frage auf, welche weiteren Kompetenzfacetten und Persönlichkeitseigenschaften in diesen Daten verborgen sein könnten. Das Forschungsprojekt *ManKobE* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung,http://www.ipn.uni-kiel.de/de/forschung/projekte/mankobe) erlaubt durch sein quantitativ orientiertes Längsschnittdesign und seinen interdisziplinären Ansatz eine entsprechend differenzierte Betrachtung. An vier Erhebungswellen beteiligen sich Auszubildende ($N = 2.096$) aus sechs verschiedenen Berufen mit kaufmännischer bzw. gewerblich-technischer Ausrichtung und mathematisch-naturwissenschaftlichem Bezug. Einerseits werden mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen im allgemeinen und beruflichen Kontext sowie berufsspezifische Kompetenzen fokussiert. Andererseits wird deren Entwicklung anhand zahlreicher Einflussbedingungen wie Intelligenz, kognitiver Fähigkeiten und weiterer Persönlichkeitsmerkmale (u. a. Interessen, Motivation und Anstrengungsbereitschaft) untersucht. Die affektiven Merkmale liegen dabei im Fokus unserer Arbeitsgruppe.

2. Affektive Merkmale und Mathematik – theoretischer Hintergrund

McLeod (1992) und Hannula (2011) konstatieren im Abstand von nahezu 20 Jahren die Mängel der bis dato veröffentlichten Arbeiten hinsichtlich einer konsistenten terminologischen und (meta-)theoretischen Rahmung affektiver Merkmale in der Mathematikdidaktik. McLeod (1992) liefert eine umfangreiche wissenschaftliche Bestandsaufnahme, die in einer (meta-)theoretischen Neukonzeption des Forschungsfeldes mündete. Den Einklang mit der Kognitionspsychologie herstellend betont McLeod die Schlüsselrolle der drei Dimensionen *beliefs*, *attitudes* und *emotions* für den

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Bereich der Mathematikdidaktik. Diese Dimensionen würden demnach einen Großteil aller affektiven Merkmale umspannen und sich durch ihr dynamisches interdependentes Verhältnis sowie graduelle Unterschiede hinsichtlich Stabilität, Intensität der Reaktion, Bedeutung von Kognition und zur Ausprägung benötigte Zeit auszeichnen. Einige Arbeiten haben McLeods Modell nicht nur aufgegriffen, sondern konzeptionelle Erweiterungen etabliert (z. B. *values* als vierte Dimension, u. a. DeBellis & Goldin 2006). Einen vielversprechend aktualisierten Ansatz liefert Hannula (2011), der die wissenschaftliche Diskussion und Erkenntnisse der thematischen Arbeitsgruppe zu affektiven Merkmalen der ERME-Konferenzen in seinen Ausführungen einfließen lässt. Dazu gehört neben der Kritik an einigen Aspekten der Theorie McLeods (u. a. konzeptionelle Unschärfe der Dimension *attitudes*, zu starker Individuumsfokus und zu geringe Ausdifferenzierung emotionaler Reaktionen) die Berücksichtigung des aktuellen status quo (pädagogisch-)psychologischer, Motivations- und Emotionsforschung – etwa hinsichtlich „embodied cognition“ und des sogenannten „social turn“ (ebd., S. 45). Daraus leitet Hannula ein dreidimensionales Modell ab, welches auf folgenden Kernideen basiert: Affektive Merkmale a) besitzen kognitive, motivationale und emotionale Aspekte und b) können, wie in der Psychologie üblich, in *states* (situativ-kontextgebundene Zustände) sowie *traits* (relativ stabile Persönlichkeitseigenschaften) unterschieden werden und c) unterliegen Einflüssen auf physiologischer, psychologischer sowie sozialer Ebene (vgl. ebd., S. 46, vgl. Abb. 1). Hannulas Konzeption liefert für unser Forschungsvorhaben eine geeignete Grundlage, da sie einerseits ein sehr breites Feld umspannt, und sich andererseits für eine präzise theoretische Verortung, Beziehungsherstellung sowie Abgrenzung gegenüber anderen Studien bewährt hat (vgl. ebd., S. 43).

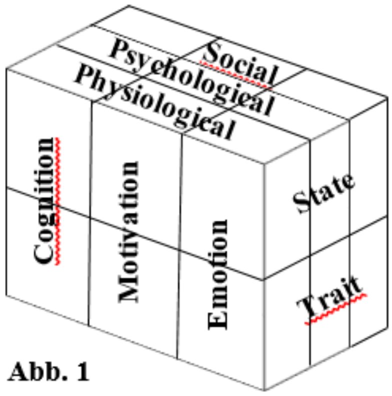


Abb. 1

3. Entwurf eines eigenen empirischen Forschungsvorhabens

Die Stärke des Projekts ManKobE liegt in seinem Längsschnittdesign und der interdisziplinären Ausrichtung. Dies erlaubt differenzierte Untersuchungen hinsichtlich des (Aus-)Bildungsverlaufs auf intra- sowie interindividueller Ebene unter Berücksichtigung zahlreicher Einflussbedingungen. Doch welche Untersuchungen lassen sich zur Rolle affektiver Merkmale hinsichtlich mathematischer Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung durchführen? Insgesamt finden sich beinahe 20 Skalen, die sich mit affektiven Aspekten beschäftigen. Sie lassen sich grob in die Kategorien

Ausbildungsbezug (berufliche Interessen, Lernmotivation u. a.), *allgemein* (Big Five Inventory, Selbstkonzept intellektueller Fähigkeiten u. a.), *Leistungssituation* (Anstrengungsbarometer, Erwartung*Wert u. a.) sowie *mathematisch* (mathematisches Selbstkonzept sowie Wahrnehmung von Mathematik im Vergleich und Übergang Schule zu Berufsschule) einordnen. Daran wird deutlich, dass ManKobE komplexe Beziehungsuntersuchungen ermöglicht.

Das Erkenntnisinteresse unserer Arbeitsgruppe liegt vor allem in den Orientierungen und dem Erfahrungswissen, welches sich im Laufe der (Schul-) Biografie der Auszubildenden entwickelt hat. Dieses implizite Wissen, welches im Alltag handlungsleitend wirkt („tacit knowledge", Di Martino & Zan 2011, S. 475), lässt sich am ehesten in den Bereich der *beliefs*, *belief systems*, Überzeugungen und Einstellungen bzw. mathematischen Welt- und Selbstbilder einordnen. Unseres Wissens nach besteht in diesem Bereich in der beruflichen (Erstaus-)Bildung eine Forschungslücke. Mögliche, bisher noch unscharf formulierte Forschungsfragen könnten lauten: *Wie stehen Auszubildende zur Mathematik? Welche Einstellungen, beliefs und Gefühle haben sie ihr gegenüber und wie erklärt sich deren Genese?* Angeschlossen an den quantitativen Datensatz von ManKobE bietet eine qualitative Follow-Up-Studie mithilfe narrativer Interviews einen Zugang zu jenem impliziten, handlungsleitenden Wissen.

Die folgende Ideenskizze dient als erster Einblick in unser Forschungsvorhaben: Als Stichprobe würde sich insbesondere die Berufsgruppe der Industriekaufleute anbieten. Die Ausbildung weist inhaltlich einen hohen mathematischen Anteil auf, ist in der Originalstichprobe in großer Anzahl vertreten ($n = 653$). Auch die berufsbezogenen mathematischen Leistungstests wurden im Projekt ManKobE speziell auf diesen Beruf zugeschnitten. Weiterhin liegen zu diesem Berufsfeld bereits umfangreiche Forschungsergebnisse aus der Berufs- und Wirtschaftspädagogik vor (vgl. z. B. Winther, 2010). Das Sampling könnte, wie in Mixed-Methods-Ansätzen durchaus üblich, als Brücke zwischen quantitativem und qualitativem Forschungsteil fungieren: Unter Berücksichtigung statistischer Zusammenhänge und theoretischer Vorüberlegungen (z. B. hinsichtlich der mathematischen Leistungsentwicklung im Ausbildungsverlauf) könnten beispielsweise Cluster- oder Klassenbildungen vorgenommen werden, um entsprechende Vertreter_innen als Interviewpartner_innen zu gewinnen. In Anbetracht des Forschungsinteresses sollte als Erhebungsmethode eine erzählgenerierende Gesprächsform gewählt werden und diese inhaltlich unbedingt an (schul-)biografische Aspekte anknüpfen. In Frage kämen demnach leitfadengestützte oder offene Einzelinterviews, welche unter Zuhilfenahme von Ton-und evtl. Videoaufnahmen sowie vollständiger Transkripte mit etablierten Analysemethoden der rekonstruktiven Sozialforschung wie z. B. Grounded Theory (Strauss & Corbin, 1996) oder Dokumentarischer Methode (Nohl, 2006) auszuwerten wären.

Wir sind überzeugt davon, mit einem solchen Forschungsvorhaben einen wichtigen Beitrag hinsichtlich eines empirisch begründeten, multiperspektivischen Blicks auf das Bild von sowie den Umgang mit Mathematik auf der Mikroebene der Auszubildenden leisten zu können. Daraus ließen sich unmittelbar wichtige Erkenntnisse für die pädagogische Praxis in Schule und Berufsschule ableiten. Ebenso wird die Grundlage für weitere, vertiefende Forschungsvorhaben geschaffen, da der von uns gewählte Ansatz sowohl explorativ als auch theoriegenerierend ausgerichtet ist. Letztendlich sehen wir in unserem Anliegen auch jene methodische Möglichkeit und Herausforderung, die „noch immer vorhandene Distanz zu Mixed-Methods-Ansätzen zu verkleinern“ (Kuckartz 2014, S. 9).

4. Literatur

Bakker, A. (2014). Characterising and developing vocational mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 86(2)*, 151–156.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and Meta-Affect in Mathematical Problem Solving: A Representational Perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63(2)*, 131–147.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM, 43(4)*, 471–482.

Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (Cerme-7)* (S. 34–60). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Kuckartz, U. (2014). *Mixed Methods: Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 575–596). New York: Macmillan.

Nickolaus, R., Retelsdorf, J., Winther, E., & Köller, O. (Hrsg.). (2013). *Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung: Stand der Forschung und Desiderata*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Nohl, A. M. (2006). *Interview und dokumentarische Methode. Anleitung für die Forschungspraxis*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Strauss, A. L. & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Belz.

Winther, E. (2010). *Kompetenzmessung in der beruflichen Bildung*. Bielefeld: Bertelsmann.

Roland GUNESCH, Feldkirch

Attention of students during mathematics lectures

Introduction

In teaching mathematics in a classroom, some of the most basic (and most important) questions are:

1. To what extent do students pay attention?
2. To what extent do they understand the content?
3. What can be done to improve their understanding?

Here we focus on the first question (whether students pay attention), since addressing the other questions requires to first address the first question.

Despite the fundamental importance of these questions, the literature contains too few answers. The topic of attention during lectures has been studied for decades (and recent debates in the literature are still controversial). The topic of attention specifically during *mathematics* lectures, on the other hand, has not received much attention. This article discusses previous approaches and presents a new approach in an attempt to gain new insight.

The "classical" literature on student attention

One of the most cited results concerning attention of students is the work of Johnstone and Percival (1976), who studied attention of students during lectures in large classrooms (300 or more students). The lectures were on chemistry. (This raises the question of the extent to which their results apply to mathematics lectures; no similar study in mathematics lectures is known to the author.) In their study, observers placed in the classroom recorded the times during the lecture when the majority of the audience showed "general lack of concentration", measured by background noise and "doodling, looking idly around, yawning, chatting, etc." The observers also recorded which topic was covered at that time. Johnstone and Percival show that a group of students displaying such "lack of concentration" perform worse at exam questions dealing with the topic covered than a control group of students who seemed more attentive while being taught the same topic. This shows (so the authors thought) that attention (as a relevant factor to understanding) of students can be easily observed by outsiders present during the lecture. Johnstone and Percival also investigated at what times during a lecture these periods of inattention occured. (Their findings are: briefly at the beginning, then after 10 to 18 minutes, then increasingly often, and approximately every 3 minutes near the end of a 50-minute lecture.) They mention that this depends on the lecturer. They moreover as-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

sume that it depends on difficulty, speed, legibility of writing, and the personality of the lecturer, but do not verify these assumptions. They give some suggestions for avoiding inattention (take breaks; change between theory and experiment; show models; solve problems). They also noted that students who were forced to view a video transmission of the lecture instead of being allowed to enter the (overflowing) lecture hall showed decreased attention. (Whether or not the latter still applies with today's transmission technology might be an interesting question to study.)

Many other articles followed Johnstone and Percival's assumption that the attention decrease can be easily and accurately measured. Based on this assumption, they tried to further analyze the decrease. See e.g. Hartley and Cameron (1967), Maddox and Hoole (1975).

Modern literature on student attention

The modern literature is critical of several of the aforementioned results and conclusions. Szpunar, Moulton and Schacter (2013) argue that visible signs of attention (or inattention) are not a good indicator of actual attention (citing Wilson & Korn, 2007), and note-taking may not be suitable either to assess attention (McClendon, 1958; Maddox & Hoole, 1975). Szpunar et al. state that psychologists understand attention well (from a cognitive and neural point of view), and that educators would greatly benefit from understanding this, but that no one has ever brought these two areas of knowledge together. They moreover indicate that there are only very few actually valid studies of attention in lectures; in particular, they are critical of Johnstone and Percival's results. But it remains unclear how attention is supposed to be measured correctly.

Mathematics-specific study of attention

The author of this article suggests to specifically study attention in *mathematics* courses. It seems plausible that patterns of attention which are optimal for understanding mathematics courses are different from patterns of attention optimal for courses in other fields (and that the latter patterns differ also). For example, in mathematics, sequential dependence is extremely high; in other words, students who fail to understand one concept (definition, equation, or theorem) will have great difficulties whenever this concept is used again; and although the same applies to some degree to any field of study, the necessity to have completely understood preceding material is especially strong in mathematics. Hence the effect of attention during lectures on student understanding should be especially strong when those lectures are *mathematics* lectures.

An attempt to measure attention in mathematics courses

The author of this article text is attempting to measure attention in mathematics courses, or more precisely a concept which might be called *attention plus retention* (explained in the following), which is closer to understanding than mere *attention* is. The class chosen for this study was a course in undergraduate Analysis at PH Vorarlberg, Austria, for students about to become secondary school teachers. The class consisted of a weekly lecture, followed by a weekly recitation/exercise session one day later.

An approach similar to Johnstone and Percival's was out of the question, primarily due to the aforementioned fundamental problems of the approach, and also because their method (measuring substantial lack of concentration in the classroom) probably only works with large classes (300 students in their case). The classes studied here are much smaller (30 students or less), tend not to produce much measureable background noise, and tend to be well-behaved, which makes it difficult to determine whether or not students are paying attention.

A method is needed which is easy to use, does not use much of the students' time (unless time used thusly is somehow beneficial in other ways), requires little or no personnel other than the lecturer, and requires no psychological self-assessment from the students (such assessments in mathematics courses are highly unreliable). The new method presented here (still work in progress, suggestions for improvement are welcome) is: During the first minutes of the recitation/exercise session, an anonymous questionnaire is handed out containing a list of approximately 20 items (keywords, statements, and formulas) from the preceding lecture. Students are asked to indicate next to each of these items whether they do or do not remember the item from the lecture. (There is also the option "I am not sure" to avoid having to extrapolate from the number of wrong answers.) In order to prevent students from ticking the "yes" column blindly, the questionnaires also contain some items (mixed in with the others) which are actually not part of the preceding lecture. There is no motivation for students to intentionally give incorrect answers; it is pointed out to them that their answers on these (anonymous) questionnaires are for research purposes only and will not affect their course grades. Students are instructed to complete the questionnaires without much pondering in about 2 minutes, thus answering each of the approximately 20 questions in just a few seconds. (No time limit is actually enforced.) The students did not seem to mind filling out a questionnaire during each exercise class, presumably because it is quick. The keywords, statements and formulas are chosen to cover the entire time span of the preceding lecture and all of its mathematically relevant content. One of the initial goals of this research was to detect some pattern of attention: Does attention drop after a certain number of minutes in class? How does attention depend on the topic? (How it depends on the lecturer and lecturing style is an interesting topic for future research.) Preliminary results indicate (somewhat surprisingly) that the measured level of *attention plus retention* is very high. For almost all of the items almost all of the students could tell correctly whether they were covered in the previous class or not. The error rate is not much larger than what would be expected due to linguistic misunderstandings and ambiguities. E.g., the names *mean value theorem* and *intermediate value theorem* (German: *Mittelwertsatz*, *Zwischenwertsatz*) are probably too difficult to distinguish for students if the class has covered one of these theorems but not yet the other. Also, if a particular lecture covered the product rule for differentiation $(fg)' = f'g+fg'$ and the explanation "in order to differentiate a product, it is incorrect to simply differentiate each factor", it is ambiguous whether the incorrect "equation" $(fg)' = f'g'$ was "covered" in class.

Conclusions of this study so far seem to be: The main problems students may have understanding mathematics seem *not* to include basic attention or *attention plus retention*. (For the small class studied here; large classes, as the ones studied by Johnstone and Percival, *do* seem to have attention problems.) The focus of the questionnaires on mathematics-specific concepts (formulas, names of theorems) seems to be helpful. While the findings are too preliminary to make suggestion yet, class size and its effect on students' understanding of mathematics merits further research. Also, gathering more data that specifically covers *mathematics* lectures is needed.

The author thanks C. Spannagel for helpful suggestions.

References

Hartley, J. & Cameron, A. (1967). Some observations on the efficiency of lecturing. *Educ. Rev.* 20, 30-37.

Johnstone, A. H. & Percival, F. (1976). Attention breaks in lectures. *Educ. Chem. 13,* 49-50.

Maddox, H. & Hoole, E. (1975). Performance decrement in the lecture. *Educ. Rev.* 28, 17-30. doi: 10.1080/0013191750280102

Szpunar, K. K., Moulton, S. T. & Schacter, D. L. (2013): Mind wandering and education: from the classroom to online learning. *Front. Psychol.* **4**:495. doi: 10.3389/fpsyg.2013.00495

Wilson, K., & Korn, J. H. (2007). Attention during lectures: beyond ten minutes. *Teach. Psychol.* 34, 85-89.

Roland GUNESCH, Feldkirch

Inquiry-based learning in academic teaching compared to traditional teaching: an example

Introduction

In academic teaching, traditional lecturing style sometimes results in the situation that the content of the lecture appears difficult to the students while at the same time the lecturer believes that the content is easy to understand for the students. This can lead to several difficulties:

- The course material is not properly learned by the students.
- The resultant knowledge gaps cause difficulty for the students in future lessons in the same class which require the preceding knowledge.
- Students can get frustrated and discouraged, which also negatively impacts future academic performance.

In this article we present an example from a mathematics course in academia that shows how students can discover mathematical content via inquiry-based learning. As a result of using inquiry-based learning, the aforementioned difficulties are avoided. Moreover, the content learned through inquiry-based learning is remembered substantially better by the students. The students are also better able to apply their new knowledge, acquire better learning strategies and show higher levels of motivation. These effects appear immediately but appear to last for a long time. These results are based on a study done at the PH Vorarlberg, Austria. For a background on inquiry-based learning (German: *Forschendes Lernen*) see the following recent literature: A theoretical overview, model, goals and key elements of inquiry-based learning in mathematics education is presented by Roth and Weigand (2014a, 2014b). Ulm (2009, 2011) also describes a theoretical framework and identifies six different phases in inquiry-based learning. Messner (2009) treats various types of inquiry-based learning and similar activities; there are also several names for these concepts. Lutz-Westphal (2014) lists some key characteristics and types of questions in inquiry-based learning. See also Dewey (1910, 1938).

Case study 1: The triangle inequality

One of the most basic and most fundamental facts in mathematics, and certainly in any course of real analysis, is the triangle inequality:

For all real numbers x, y, it is true that: $|x+y| \leq |x|+|y|$.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Here $|a|$ denotes the absolute value of the number a.

The triangle inequality requires only the definition of absolute value and some of the axioms of the real numbers. This and the fact that the proof is "easy" make it a good early example for demonstrating methods of proof.

This inequality is used extremely often in analysis courses; it is contained in a large fraction of all estimates and proofs. It occurs so frequently that it is often not even explicitly cited by name (except in the lecture where it is first taught, and a few subsequent lectures). Hence students who do not understand the triangle inequality or who are not able to apply it run into problems very often during a course on real analysis, leading to frustration and an increased likelihood of failure. On the other hand, students who master this inequality will experience personal success in doing so; later they will have many opportunities to remind them of their success, leading to increased confidence and motivation.

Useful variations of the triangle inequality

The following inequalities (all direct consequences of the triangle inequality) are useful but seem more difficult for students.

- $|x-y| \geq |x| - |y|$. (Or, more generally, $|x\text{-}y| \geq ||x|-|y||$.)
- $|x+y| = |x| + |y|$ if the signs of x and y are the same.
- $|x-y| = |x| - |y|$ if the signs of x and y are the same and $|x| \geq |y|$.
- Equality holds in the triangle inequality if x=0 or y=0.

For motivated students, these variations present only a small challenge. But discouraged students find these equations/inequalities difficult.

Typical difficulties

Students often show the following problems: confusing "≥" and "≤" (the "direction" of the inequality); trouble with all the variations of the triangle inequality; and trouble understanding the proof of the triangle inequality.

Difficulty with the proof

Proofs of the triangle inequality, while neither long nor really difficult, can nonetheless be intimidating to students. As an example, we analyze the proof given in the well-explaining and popular textbook by Barner & Flohr (1987). The proof uses just 3 arguments, making it appear to be easy:

> For all real-valued numbers $x, y,$ it is true that $-|x| \leq x \leq |x|$, and similarly it is true that $-|y| \leq y \leq |y|$.
>
> By adding these two inequalities, we obtain $-|x|-|y| \leq x+y \leq |x+y|$.

From this we deduce $|x+y| \leq |x|+|y|$, as desired. Q.E.D.

Students may not find this proof quite so easy. It uses several facts: $x \leq |x|$, $-|x| \leq x$, and the fact that $|a| \leq b$ if and only if both $a \leq b$ and $-a \leq b$ are true. These facts are all elementary, and students will be able to prove them by themselves if asked; yet students who have not seen them before will not easily understand them *in the middle of this proof.*

A study was done with courses in (undergraduate) Analysis for students about to become secondary school teachers in Austria, which consisted of weekly lectures followed by recitation/exercise sessions. In previous years, when the proof of the triangle inequality was taught in the textbook manner as illustrated above, some students found this approach too theoretical and were not able to understand and correctly remember the triangle inequality. Hence the following inquiry-based learning method was used.

An inquiry-based teaching and learning approach

Students were given a large table whose columns are labelled x, y, $x+y$, $x-y$, $|x|$, $|y|$, $|x+y|$, $|x|+|y|$, $|x-y|$, $|x|-|y|$, plus space for extra columns. The columns for x and y were already completed with pairs of numbers; the other columns were empty. The students were asked to do the following steps:

1. Complete the table (calculate the values in the empty columns).
2. Find relations – such as inequalities – between the columns.
3. Document the findings by writing down precise inequalities between the quantities involved. Present the results to the other students.

Step 2 (finding inequalities) is of course the relevant part in this learning activity. Step 1 (forcing the students to complete the table themselves) serves the purpose of activating the students and giving them a possibility to present something to the rest of the class; this works particularly well in a small classroom setting with 30 students or less. Step 1 may appear too elementary, but in actuality it takes only a small amount of time and actively engages the students in the problem solving activity, probably better enabling them to deal with step 2. Step 3 (documentation) is useful because it asks the students to come up with precise mathematical statements, forcing them to think clearly. It may also enhance students' understanding of their own findings so far, for example due to realizing that some assumptions (e.g. "x is positive") can be dropped and hence the statement they are about to write down can be made simpler and/or more general. Step 3, in particular presenting the results to other students, helps students to memorize their findings. The documentation step is an important part of inquiry-based learning (Ulm 2009, Roth & Weigand 2014a, Roth & Weigand 2014b).

Summary of results and conclusion

The students discovered the triangle inequality and many variations (including all of those mentioned earlier) entirely by themselves, participated very actively, appeared to find this exercise enjoyable, became acutely aware of the direction of the inequalities, showed a working knowledge of how to apply the inequalities, and showed substantially increased interest to learn the abstract proof of the triangle inequality later in the lecture part of the course. When the triangle inequality was used later in the course (during more theoretical arguments), students displayed no difficulty following. In the written final examination for this course, students' answers showed no difficulties with the triangle inequality; in particular, the "typical difficulties" mentioned earlier were not seen. These results show clearly that inquiry-based learning is a useful teaching approach for this topic, especially when compared to the "traditional" method. It appears reasonable to assume that a similar approach could work well with a variety of other mathematical teaching topics. An interesting task for the future will be to create a "catalog" of topics particularly suitable for inquiry-based learning, or even to find some general criteria to decide whether inquiry-based learning should be attempted for topics where this has not been done before.

References

Barner, M. & Flohr, F. (1987). *Analysis I*, 3. Auflage. Berlin: de Gruyter.

Dewey, J. (1910). *How we think.* Boston, New York, Chicago: D. C. Health & Co. Publishers.

Dewey, J. (1938). *Logic – the theory of inquiry.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Lutz-Westphal, B. (2014). Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 779–782). Münster: WTM-Verlag.

Messner, R. (Hrsg.) (2009). *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen*. Hamburg: edition Körber-Stiftung.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014a). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren 184,* S. 2-10.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014b). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung – Forschendes Lernen in der Mathematik. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 89–105). Hamburg: edition Körber-Stiftung.

Ulm, V. (2011). Forschendes Lernen – ein Konzept für individuelle Förderung im Mathematikunterricht. In A. Füchter & K. Moegling (Hrsg.), *Diagnostik und Förderung* (S. 40-55). Kassel: Prolog Verlag.

Roland GUNESCH, Feldkirch

Video recordings of mathematics lectures by students: some data on usage patterns

Introduction and background on lecture recording

Lecture video recordings have been a considerable focus of interest in the last years. The practice of recording lectures is not new, but recent developments of the internet have substantially increased the amount of lectures which are available online. Motivation for lecture recordings include: Students cannot process and remember everything that is said during a lecture (Hartley & Cameron, 1967). Thus it would be useful if students could "rewind" the lecturer and the lecture (Fischer, Werner et al., 2012).

This article tries to assess how students use such recordings. Relevant feedback was obtained from students at the University of Hamburg (Germany), University of Koblenz-Landau (Germany), Technical University Darmstadt (Germany) and PH Vorarlberg (Austria), where some of the author's lectures were recorded (Gunesch, 2010; Gunesch, 2012). Here we focus on lectures in academia (Apel, 1999), although presumably many points made in this article apply lectures in other settings also. Lectures can be either classical chalk-on-blackboard lectures which are then recorded with video cameras or a blended form consisting of presentation slides plus a video recording. See (Gunesch, 2013) for a more detailed description of the various formats and for a discussion of why lecture recordings of mathematics courses may be very different from lecture recordings of courses in other fields of study.

Apart from recording traditional classroom lectures where the classroom setting is still supposed to be the primary method of teaching the students and the recordings are seen as supplementary, secondary or "extra material", the newer *inverted classroom model* (Handtke & Sperl, 2012; Fischer & Spannagel, 2012) uses lecture recordings as the primary method of disseminating the content of the course. Also, short internet-only lectures are popular, e.g. (Loviscach, 2013). Regardless of length, recording lectures only make sense if the lecturer embraces the concept of recordings and is at least moderately comfortable with technology (Petko, 2012).

Are video lecture recordings actually beneficial to students?

Students like having video recordings made available to them, and strongly support their continuation (Rust & Krüger, 2011). On the other hand, does the subjective assessment of the recordings' benefits actually correspond to actual benefits not provided by other means (such as books or lecture

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

notes)? Do lecture recordings actually help students learn better? Do students' course grades improve? The question how students' use of lecture recordings affects their academic performance (measured by course grades) is hotly disputed in the literature. Zupancic (2002) notes that students who spend a lot of time on the lecture recordings also spend a lot of time on homework. Zimmermann et al. (2013), as well as Pursel and Fang (2012), claim that video usage improves students' learning despite negative correlations between high levels of "download server access numbers" and exam grades.

Some aspects that the research described in this article focuses on are: What types of students actually use lecture videos? Why, how, and where do they watch the lecture videos? Which parts of lecture videos are actually watched? How do students use pauses and reviews when watching? Are students actively learning the course material while watching recordings, or are they "passive consumers"? Do different student populations (here: primary school teacher students and secondary school teacher students) differ in their usage patterns concerning lecture recordings? Course evaluations of a recorded mathematics lecture of the author at the Technical University Darmstadt provide some new insights. These evaluations included an online evaluation with special research questions for this study, plus lengthy personal interviews with some (volunteering) students. The interviews allow correlating behavior with course grades and offer detailed insights, but suffer from (possibly strong) selection bias (students who agreed to be interviewed may have been particularly satisfied with the course, etc.) The online evaluation was anonymous and hence its results cannot be correlated with student grades. The combination of the two shows interesting results. This article summarizes some key findings. Due to space constraints, the data and detailed analysis results will be published separately.

Why do students use lecture videos?

The question is justified since the course, lecture notes, and books already cover the course material completely. In the aforementioned evaluations, students state that:

- Videos are easier to understand than books and lecture notes. Videos contain many informal remarks, and this is very helpful.
- On the other hand, for course material that is already understood by a student, the student finds reading the lecture notes faster than watching the recordings.

Watching video lecture recordings seemed more popular than reading lecture notes when dealing with new or difficult topics.

- The number of students who are in favor of having video recordings of lectures is larger than the number of students who actually use them regularly.

Who uses video lecture recordings?

A common assumption is that weaker students prefer video recordings while stronger students do not. However, the aforementioned interviews show that it may not be that simple:

- Students whose academic performance in the final exam was average or below show high levels of video usage.
- Many students whose academic performance in the final exam was strong show low levels of video usage. Some of these students viewed not a single video recording.
- However (and this is surprising): Several strongly performing students, including some with perfect grades on the final exam, show very high levels of video usage. In particular, some strong students decided to watch *all* of the recordings *again* before the final exam even though they had already understood the course material.

Students' lecture recording usage patterns may be more heterogeneous than thought so far.

When and where do students watch the recordings?

Their behavior is inhomogeneous here also: Some watched after each lecture, some only once before the exam, some did both, some watched only "on demand" when the material was difficult. Locations differed also; some students preferred academic environments, some used "recreational" places (couch, TV), some watched while traveling.

A remark on primary school vs. secondary school teacher students

Primary school teacher students appear to be less interested to learn abstract course material than secondary school teacher students (Kortenkamp, 2015). This may cause (at least initially) lower levels of understanding and retention of such material when learning it for the first time in a course. One conclusion to draw from this might be that the more abstract parts of a mathematics course may need more reviewing and repeating of the abstract parts when the course is taught to elementary school teacher students.

This, in turn, may work better with video lecture recordings than with written course material. Separate research is needed to specifically test this.

References

Apel, H. J. (1999). Die Vorlesung. Einführung in eine akademische Lehrform. Köln: Böhlau.

Fischer, M., Werner, J., Strübig, T. & Spannagel, C. (2012). YouTube-Vorlesungen: Der Mathematikprofessor zum Zurückspulen. In M. Zimmermann, C. Bescherer & C. Spannagel (Hrsg.), Mathematik lehren in der Hochschule. Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen (S. 67-77). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Fischer, M., Spannagel, C. (2012). Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In J. Desel, J. M. Haake & C. Spannagel (Hrsg.), DeLFI 2012 – die 10. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V. (S. 225-236). Bonn: Köllen.

Gunesch, R. (2010). Einführung in dynamische Systeme (Vorlesung). http://lecture2go.uni-hamburg.de/veranstaltungen/-/v/10763 (last accessed 2015-03-02).

Gunesch, R. (2012). Differentialgeometrie (Vorlesung). https://openlearnware.hrz.tu-darmstadt.de/sammlung/60 (last accessed 2015-03-02).

Gunesch, R. (2013). Improving university courses in mathematics with new lecturing technology: practical studies of classroom video recording and dissemination on the web. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (S. 392–395). Münster: WTM-Verlag.

Handtke, J. & Sperl, A. (2012). Das Inverted Classroom Model. München: Oldenbourg.

Hartley, J. & Cameron, A. (1967). Some observations on the efficiency of lecturing. Educ. Rev. 20, 30-37.

Kortenkamp, U. (2015). Private communication. Basel, 2015-02-11.

Loviscach, J. (2013). Videos (link collection). http://www.j3l7h.de/videos.html (last accessed 2015-03-02).

Petko, D. (2012). Hemmende und förderliche Faktoren des Einsatzes digitaler Medien im Unterricht: Empirische Befunde und forschungsmethodische Probleme. In R. Schulz-Zander et al. (Hrsg.), Jahrbuch Medienpädagogik 9, 29-50, Wiesbaden: Springer VS.

Pursel, B. & Fang, H.-N. (2012). Lecture capture: current research and future directions. State College: The Schreyer Institute for Teaching Excellence.

Rust, I. & Krüger, M. (2011). Der Mehrwert von Vorlesungsaufzeichnungen als Ergänzungsangebot zur Präsenzlehre. In T. Köhler & J. Neumann (Hrsg.), Wissensgemeinschaften Digitale Medien – Öffnung und Offenheit in Forschung und Lehre. Münster: Waxmann Verlag.

Zimmermann, M., Jokiaho, A. & May, B. (2011). Vorlesungsaufzeichnung in der Mathematik – Nutzung und Auswirkung auf die Studienleistung. In H. Rohland, A. Kienle & S. Friedrich (Hrsg.), DeLFI – Die 9. E-Learning-Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V. (S. 163-170). Bonn: Köllen Druck+Verlag.

Zupancic, B., Horz, H. (2002). Proceedings of the 7th annual conference on Innovation and technology in computer science education. New York: ACM, 24-28.

Uta HAESEL-WEIDE, Siegen & Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

Praxisbezogene Förderung von Kindern in der Grundschule. Einblick in die Unterrichtsinitiative »Sicher mit Zahlen«

Zentrales Ziel im Mathematikunterricht der Schuleingangsphase ist die Ausbildung von grundlegenden Zahl- und Operationsvorstellungen. Dazu ist es bedeutsam, dass Kinder mathematische Zusammenhänge erkennen und beschreiben lernen. Dieses Ziel dient zugleich dazu, einer möglichen Verfestigung zählender Strategien vorzubeugen und gravierende Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu verhindern. Die handlungsleitende Idee der Unterrichtsinitiative »Sicher mit Zahlen« ist es, Lehrkräfte in dieser Hinsicht zu unterstützen. Anders formuliert, es geht darum, die Kinder bereits im Anfangsunterricht zum Erkennen und Beschreiben von Strukturen anzuregen und diese Prozesse produktiv zu begleiten.

Ausgangspunkt und Rahmenbedingungen

Im Rahmen des Projekts ZebrA (Zusammenhänge erkennen und besprechen – Rechnen ohne Abzählen) wurden Förderbausteine für das 2. Schuljahr entwickelt (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2014), die auf zentrale kritische Stellen des mathematischen Anfangsunterrichts abzielen und über formale Kooperationsformen durchgehend die Interaktion zwischen Kindern mit unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen anregen. Forschungsergebnisse aus dem Projekt ZebrA zeigen auf, dass unterrichtsintegrierte Fördermaßnahmen, die Entwicklungsprozesse von struktur-fokussierenden Deutungen anstoßen, Ablöseprozesse vom zählenden Rechnen unterstützen können (Häsel-Weide, 2015). In der im Weiteren skizzierten und von der Dortmund-Stiftung unterstützten Unterrichtsinitiative „Sicher mit Zahlen“ dienten die Förderbausteine einerseits als Ausgangspunkt für eine praxisbezogene Fortbildung von Lehrkräften und andererseits in modifizierter Form als Grundlage der Förderung von Kindern im 1. Schuljahr. In dem Projekt wurden Lehrkräfte durch Fortbildung, Reflexion und Rückmeldung in die Lage versetzt, die Erkenntnisse über die bereitgestellten Bausteine hinaus auch auf andere Mathematikstunden zu übertragen und ihren Unterricht weiterzuentwickeln. An der Unterrichtsinitiative nahmen 22 Schulklassen aus zehn Dortmunder Grundschulen teil. Die Aktivitäten der Initiative enthielten folgende Elemente: (1) Befragung der Lehrkräfte, (2) Fortbildung und Kontakttreffen, (3) Dokumentation und Reflexion der Förderung, (4) Schulbesuche mit Videographien und Rückmeldung sowie eine (5) Elterninformation und (6) Abschlusstagung. Die unterrichtsnahen Aktivitäten und Inhalte, die Möglichkeit der Partizipation und die begleitenden

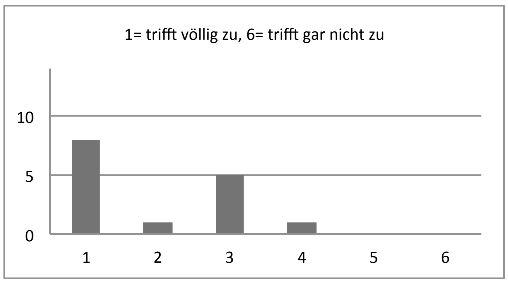
In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Aufgaben und Angebote sollen dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler von der Unterrichtsinitiative profitieren (Desimone, 2012; Lipowsky & Rzejak, 2012). Einzelne Aspekte werden im Folgenden kurz beleuchtet.

Befragung der Lehrkräfte

Die Befragung der Lehrkräfte diente dazu, die einführende Fortbildung und die Kontakt- und Kooperationsangebote möglichst passend an die Erwartungen, Erfahrungen und das Wissen der Lehrkräfte anzupassen. Dazu wurde ein Fragebogen mit offenen und geschlossenen Fragen entwickelt. Die offenen Fragen zielten auf die Praxis der Lehrkräfte in Bezug auf die Förderung der Kinder mit Lernschwierigkeiten („Skizzieren Sie exemplarisch, wie Sie Kinder mit mathematischen Schwierigkeiten an ihrer Schule diagnostizieren. Geben Sie – wenn möglich – konkrete Beispiele an.“). Mit den geschlossenen Fragen wurde die Einschätzung der Lehrkräfte zum Mathematiklernen von schwächeren Schülerinnen und Schülern und zu günstigen Aspekten der Förderung erhoben (Abb. 1).

Eine Förderung von schwächeren Schülerinnen und Schülern zeichnet sich dadurch aus, dass die Kinder viel Gelegenheit haben, über mathematische Entdeckungen zu sprechen und diese zu begründen.



Schwächere Schülerinnen und Schüler profitieren vom Austausch mit ihren Klassenkameraden im Mathematikunterricht

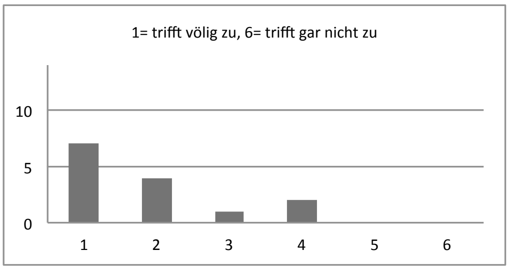


Abb. 1: Items und Ergebnisse der Befragung der Lehrkräfte

Wie die oben abgebildeten Fragebogenitems exemplarisch zeigen, scheinen die Lehrkräfte von der Tendenz die Einschätzung zu teilen, dass (auch) eine Förderung leistungsschwacher Kinder auf dem Beschreiben und Begründen mathematischer Entdeckungen beruht und dass die Kinder von einem Austausch miteinander profitieren können. In wesentlichen Aspekten scheint somit – optimistisch interpretiert – eine Übereinstimmung zwischen den Einschätzungen der Lehrkräfte und den Schwerpunkten der Unterrichtsinitiative zu bestehen.

Erprobung und Dokumentation

Die Lehrkräfte wurden aufgefordert, die Bausteine nicht nur durchzuführen, sondern zwei von ihnen ausgewählte Kinder besonders im Unterricht zu beobachten und im Anschluss an die Stunden ihre Beobachtungen gemeinsam mit den Schülerdokumenten zu dokumentieren. Auf diese Weise entstand ein Portfolio von Dokumenten und Notizen, das sowohl als Erinnerungsstütze für einzelne Prozesse fungierte als auch die Entwicklung der Kinder im Verlauf des ersten Schuljahres im Rahmen der 20 Bausteine widerspiegelte.

Die Auswertung der Dokumentationen deutet darauf hin, dass die Lehrkräfte den Lösungsprozess der zu fördernden Kinder kompetenzorientiert in den Blick nehmen. Im Kern hielten sie z.B. fest, ob bereits *eigenständig mathematische Strukturen erkannt* werden (z. B. „benennt die Aufgaben richtig; kann verschiedene Zerlegungen darstellen“ oder „N. hat die 5er-Bündelung verstanden und nutzt diese Darstellung zum schnelleren Zählen“) oder ob die Kinder *direktive Unterstützung* benötigen (z. B. „Selbständig Plusaufgaben finden, fällt ihnen schwer – brauchen Anleitung von Lehrer/in“). Allerdings konzentriert sich die kompetenzorientierte Perspektive der Lehrkräfte vornehmlich auf die gelingende Bearbeitung der Aufgaben. Nur in Einzelfällen wurde auf die Art und Weise, wie die Kinder vorgegangen sind, eingegangen. Letzteres ist selbstverständlich in einem unterrichtsintegrierten Fördersetting eine große Herausforderung.

Reflexion und Feedback

Die Reflexion des eigenen Unterrichts ist eine Möglichkeit der Verbesserung des Mathematikunterrichts (Scherer & Steinbring, 2006). Im Rahmen der Unterrichtsinitiative wurden die Lehrkräfte angeregt anhand der Dokumentation über gelingende Lernprozesse im eigenen Unterricht nachzudenken und diese Erkenntnisse bei der Planung weiterer Förderanregungen zu nutzen. Zudem wurde zu einer Unterrichtsstunde ein Feedback von außen gegeben. Dazu wurde die videographierte Stunde von Experten analysiert, die eine schriftliche Rückmeldung für die Lehrkräfte verfassten. In dieser wurde insbesondere die Kommunikation und Kooperation der Schülerinnen und Schüler betrachtet (z. B. „Die Arbeitsphase ist auch unserer Erfahrung nach dann besonders produktiv, wenn die Kinder abwechselnd die Zahlen an die Rechenstriche legen. Die Kinder Ihrer Klasse sind vor allem arbeitsteilig vorgegangen, was naturgemäß weniger Kommunikation zur Folge hat“ oder „In der Kooperation zeigt sich, dass Jona versucht Jule zu helfen, indem er ihr versucht, Dinge zu erklären und nur selten, indem er ihr die richtigen Aufgaben vorsagt“).

Zusammenfassung und Fazit

In der Unterrichtsinitiative »Sicher mit Zahlen« wurden unterschiedliche Elemente verwendet, mit dem Ziel den Mathematikunterricht so zu gestalten, dass sich zählendes Rechnen nicht verfestigt. Dabei zeigte sich eine hohe Anfangsmotivation, ein großes Interesse der Lehrkräfte und mit den Zielen der Initiative übereinstimmendes Verständnis von Inhalten und Lernprozessen. Die Bausteine wurden von den Lehrkräften mehrheitlich als passend und die Kooperation produktiv anregend bewertet. Dennoch ergab sich ein „Drop Out" – und zwar in dem Sinne, dass die Lehrkräfte insgesamt nicht alle der Bausteine umsetzten. Auch die Kontakt- und Kooperationsangebote wurden nicht immer angenommen. Als Grund gaben die Lehrkräfte z.B. an, dass die Belastung im 1. Schuljahr besonders hoch sei. Dies führe in der Konsequenz dazu, dass nur wenig Kapazität und Zeit für die Einarbeitung und Durchführung der Bausteine zur Verfügung stehe.

Obwohl die durchgeführten Bausteine also als passend und sinnvoll angesehen wurden und die Unterrichtsinitiative aktivierend und praxisnah angelegt war (Lipowsky & Rzejak, 2012), scheinen die Auswirkungen auf den konkreten Unterricht auf dem ersten Blick gering. Allerdings ist es durchaus möglich, dass die Kinder und die Lehrkräfte dennoch von der Unterrichtsinitiative profitierten. So nahmen die Lehrkräfte sensibler kritische Stellen im ersten Schuljahr wahr. Auch haben sie womöglich den regulären Unterricht oder externe Fördereinheiten anders gestaltet, was allerdings mit den Mitteln der Unterrichtsinitiative nicht erfasst werden konnte. Bei weiteren Maßnahmen könnte möglicherweise die sichtbare Umsetzung durch eine höhere Exklusivität und Verbindlichkeit sowie größere Partizipation bei der Entwicklung der Unterrichtsbausteine erhöht werden.

Literatur

Desimone, L. M. (2012). Improving Impact Studies of Teachers´Professional Development: Toward Better Conceptualiziations and Measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181-199.

Häsel-Weide, U. (erscheint 2015). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen (2. Aufl.).* Seelze: Klett Kallmeyer.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lernen – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamener Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute, 3*(5), 1-17.

Scherer, P. & Steinbring, H. (2006). Noticing children´s learning processes – teachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of mathematics Teacher Education*, 9(2), 157-185.

Maike HAGENA, Lüneburg/Dominik LEISS, Lüneburg/
Astrid NEUMANN, Lüneburg/Knut SCHWIPPERT, Hamburg

Durch Sprachförderung zum fachlichen Erfolg?

Im Rahmen des interdisziplinären Forschungsprojekts FaSaF wird der Einfluss einer evidenzbasierten Sprachförderung auf die Deutsch- und Mathematikfachleistung von Schülerinnen und Schülern untersucht. In diesem Zusammenhang werden zwei verschiedene Sprachförderkonzepte in der schulischen Praxis mit N=256 Schülerinnen und Schülern erprobt und bezüglich ihrer Effekte auf fachspezifische Leistungszuwächse wissenschaftlich untersucht. Aus mathematikdidaktischer Perspektive steht dabei vor allem der Einfluss der beiden Sprachförderkonzepte auf die Entwicklung der Modellierungskompetenz im Fokus der Forschungsarbeiten.

1. Sprachförderung in allen Fächern

Sprachförderung zur Ermöglichung bildungssprachlich gestützten Lernens gilt als Schlüssel zum Kompetenzerwerb in allen Fächern (Becker-Mrotzek et al., 2013). Dies gilt nicht nur für die vermeintlich sprachnahen, sondern ebenso für die sprachfernen Fächer. Daher ist bei Schülerinnen und Schüler mit Defiziten in der deutschen Sprache auch mit Benachteiligungen in den naturwissenschaftlichen Fächern oder etwa in der Mathematik zu rechnen (Bos et al., 2007). Diese Erkenntnis ist vor allem in den letzten Jahren in das Problembewusstsein der deutschsprachigen Mathematikdidaktik gerückt (Prediger, 2013) und hat nachdrücklich zur Forderung nach Sprachförderung in allen Fächern beigetragen.

Diese Forderung nach Sprachförderung in allen Fächern impliziert, dass die Aufmerksamkeit im Fachunterricht nicht mehr nur dem Aufbau fachlicher Inhalte, sondern ebenso der Entwicklung sprachlicher Fähigkeiten gelten sollte. Insbesondere der Umgang mit Schriftprodukten, der das sinnentnehmende Lesen sowie die Fähigkeiten, sich schriftlich ausdrücken zu können, umfasst, gilt in diesem Zusammenhang als bedeutsam für die Anregung fachspezifischer Lernprozesse. Während der Stellenwert der Schriftsprache in allen Fächern zwar weitestgehend anerkannt ist, wird die Förderung schriftsprachlicher Fähigkeiten in der Praxis jedoch allein dem Deutschunterricht zugeschrieben (Schmölzer-Eibinger, 2013). Ein Ungleichgewicht, welches es im Sinne der Förderung fachspezifischer Lernprozesse von Seiten anderer Unterrichtsfächer auszugleichen gilt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Sprachförderung am Beispiel des mathematischen Modellierens

Die fächerübergreifende Bedeutung schriftsprachlicher Fähigkeiten lässt sich nicht nur für den Mathematikunterricht im Allgemeinen, sondern auch am mathematischen Modellieren im Speziellen beschreiben. So konnte gezeigt werden, dass es Schülerinnen und Schüler mit eingeschränkter Lesekompetenz nur begrenzt gelingt, sich bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit der situationalen Aufgabenstellung auseinanderzusetzen (Reusser, 1989), wodurch die Qualität der letztendlichen Aufgabenbearbeitung zwangsläufig beeinträchtigt wurde (Leiss et al., 2010). Ein Zusammenhang von Lesekompetenz und der erfolgreichen Bearbeitung mathematischer Modellierungsaufgaben liegt hier nahe. Ähnliches ist für die Verbindung von Modellierungsaktivitäten mit weiterführenden (insbesondere argumentativen) Schreibaufgaben zu vermuten. Schließen argumentative Schreibaktivitäten an das Bearbeiten von Modellierungsaufgaben an, könnte hierdurch eine intensivere Auseinandersetzung mit dem Modellierungskontext angeregt werden.

3. Das Projekt Fach-an-Sprache-an-Fach (FaSaF)[1]

Das interdisziplinäre Forschungsprojekt FaSaF untersucht, inwieweit Sprachförderung Schülerinnen und Schülern im Fachlernen stützen kann. Dafür werden die Effekte von zwei verschiedenen Sprachförderkonzepten auf die Fachleistung untersucht.

- **Sprachförderkonzept I:** Integriertes Sprach- und Fachlernen (im Folgenden **iSF**)

  Offene, komplexe Modellierungsaufgaben stellen den Ausgangspunkt des Unterrichts dar. Dabei werden die Aufgaben zunächst unter Verwendung spezifischer Lesestrategien bearbeitet. Eine intensive Auseinandersetzung mit dem außermathematischen Kontext der Aufgaben erfolgt anschließend durch das Bearbeiten argumentativer Schreibaufgaben.

- **Sprachförderkonzept II:** Separiertes Sprach- und Fachlernen (im Folgenden **sSF**)

  In dieser Förderbedingung erhalten die Schülerinnen und Schüler in der ersten Hälfte des Förderzeitraums ein Lesestrategietraining sowie eine Einführung in das argumentative Schreiben. In der zweiten Hälfte des Förderzeitraums werden dann dieselben Modellierungs-

[1] *Fach-an-Sprache-an-Fach: Projektleitung A. Neumann (Lüneburg), D. Leiss (Lüneburg), K. Schwippert (Hamburg) gefördert durch das Mercator-Institut für Sprachförderung und Deutsch als Zweitsprache an der Universität zu Köln*

aufgaben, die in der Förderbedingung iSF behandelt wurden, bearbeitet.

Während das Förderkonzept iSF somit an die Forderung nach Sprachförderung in allen Fächern anschließt, geht Förderkonzept sSF der Fragestellung nach, inwieweit in einem Fach erworbene sprachliche Kompetenzen Entwicklungen in einem anderen Fach beeinflussen können. Aus mathematikdidaktischer Perspektive ergeben sich daraus die folgenden Forschungsfragen, die maßgeblich für die Untersuchungen im Rahmen des Projektes sind:

FF I: Inwieweit unterstützt Sprachförderung Schülerinnen und Schüler beim Aufbau mathematischer Modellierungskompetenzen?

FF II: Unterscheiden sich verschiedene Förderkonzepte (iSF versus sSF) bezüglich ihrer Auswirkungen auf den Aufbau mathematischer Modellierungskompetenzen?

4. Untersuchungsmethode

Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden 256 Schülerinnen und Schüler an sieben verschiedenen Schulen aus dem Raum Hamburg und Niedersachsen über einen Zeitraum von fünfzehn Wochen sprachlich gefördert. An jeder Schule wurden hiermit einhergehend zwei verschiedene, nach Leistung parallelisierte Fördergruppen (iSF und sSF) mit maximal sechszehn Schülerinnen und Schülern eingerichtet. Die Zuteilung zu den Fördergruppen erfolgte aufgrund der individuellen Leseleistungen und der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, die im Rahmen eines Screenings im Oktober 2014 erhoben wurden. Anschließend wurde mit Hilfe eigens entwickelter fachspezifischer Leistungstests die Ausgangslage der Schülerinnen und Schüler im Bereich des mathematischen Modellierens und des argumentativen Schreibens erfasst (siehe im Detail Abbildung 1).

Im Rahmen eines Posttests werden Ende März 2015 erneut die Modellierungskompetenzen der Schülerinnen und Schüler sowie deren Fähigkeiten im Bereich des schriftlichen Argumentierens erfasst, um Aussagen über den Erfolg der beiden Förderkonzepte treffen zu können.

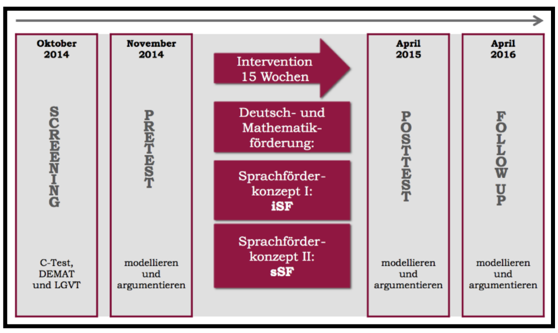


Abbildung 1: Design der Studie

5. Ausblick

Nach Ablauf der fünfzehnwöchigen Förderphase kann im Frühjahr 2015 mit der Auswertung bzgl. des Erfolgs der beiden Sprachförderkonzepte begonnen werden. Rückmeldungen von Seiten der Schülerinnen und Schüler sowie erste Einsichten in die Schülerprodukte, die im bisherigen Förderzeitraum entstanden sind, legen schon jetzt eine erfolgreiche Umsetzung der Förderkonzepte nahe.

Literatur

Becker-Mrotzek, M., Schramm, K., Thürmann, E. & Vollmer, H. J. (Hrsg.) (2013). *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen.* Münster: Waxmann.

Bos, W., Hornberg, S., Arnold, K.-H., Faust, G., Fried, L., Lankes, E.-M. et al. (Hrsg.) (2007). *IGLU 2006. Lesekompetenzen von Grundschülern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.*

Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schweirgikeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In E. Özdil & S. Prediger (Hrsg.): *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektive der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S.35-54). Münster: Waxmann.

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role oft he situation model in mathematical modeling – Task analyses, student competencies and teacher interventions. *JMD, 31*(1), 119-141.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek et al. (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–185). Münster: Waxmann.

Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung – Kognitive Simulation vom Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben.* Bern.

Schmölzer-Eibinger, S. (2013). Sprache als Medium des Lernens im Fach. In M. Becker-Mrotzek et al. (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 25–41). Münster: Waxmann.

Tanja HAMANN, Hildesheim

Die Neue Mathematik in der Grundschule – Mengenlehre statt Rechnen?

Die Reform des mathematischen Unterrichts, die in der Bundesrepublik Deutschland mit den Richtlinien der Kultusministerkonferenz vom Oktober 1968 offiziell und ab 1972 an allen Schulformen umgesetzt wurde und in Anlehnung an ihren internationalen Ursprung die Bezeichnung *Neue* oder *Moderne Mathematik* trug, wurde in der deutschen Öffentlichkeit vor allem als eine Reform des Grundschulunterrichts wahrgenommen und hat als „*Mengenlehre*“ ihren Weg ins kollektive Gedächtnis gefunden. Die öffentliche Rezeption der Reform (als beispielhafte Quelle kann hierzu der *Spiegel* mit dem Titel „*Macht Mengenlehre krank?*“ gelten, vgl. Der Spiegel (1974)) lässt dabei vermuten, dass der Kern der Reform darin bestanden habe, den inhaltlichen Schwerpunkt des mathematischen Primarstufenunterrichts vom Rechnenlernen zur Behandlung von Mengenlehre zu verschieben. Zum anderen scheinen die Reaktionen darauf hinzuweisen, dass es sich um ein in der Geschichte des deutschen Mathematikunterrichts einmaliges Ereignis gehandelt habe; unterstützt wird diese Vermutung dadurch, dass die mit der Reform neu ins Curriculum aufgenommenen Inhalte – wie Mengen und algebraische Strukturen – nach nur etwa 10 Jahren wieder aus den Lehrplänen gestrichen wurden, so dass sich der Eindruck einer gescheiterten Reform ergibt.

Eine nähere Betrachtung der Reform, ihrer zugrundeliegenden Ideen sowie ihrer Wirkung zeigt jedoch, dass es sich um eine weit komplexere Episode gehandelt hat, die weder auf inhaltliche Neuerungen beschränkt blieb (Ellrott & Schindler (1975), 43 sehen den Kern z. B. vielmehr in einer „völligen Veränderung der Lehr- und Lernmethoden und der Unterrichtsorganisation“) noch isoliert von gesellschaftlichen wie unterrichtshistorischen Bedingungen gesehen werden kann. Es ergeben sich hier zahlreiche Fragen, die Anlass zu einer differenzierten Beschreibung im Sinne einer historischen Untersuchung geben, von denen hier nur einige genannt werden sollen: Inwiefern handelt es sich tatsächlich um eine gescheiterte Reform[1]? Worin lag die Besonderheit der Reform und worin liegt insbesondere ihre Bedeutung für die Geschichte des Mathematikunterrichts? Und welchen Beitrag zum Reformverlauf hat die mutmaßliche Nichtbeachtung vorheri-

[1] Es muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass der Autorin diverse ehemalige „Mengenlehre-SuS“ bekannt sind, die sich durchweg positiv über ihren Unterricht äußern, auf ein Scheitern im Sinne einer Schädigung der Kinder oder eines Mangels an mathematischen Fähigkeiten gibt es hingegen bislang keinerlei Hinweise.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ger Arbeiten der Rechendidaktik (vgl. exemplarisch Karaschewski (1969), dagegen aber auch Griesel (1970)) geleistet?

Um sich Antworten auf diese Fragen zu nähern, sind eine Beschreibung des Konzepts bzw. der Konzepte zur Neuen Mathematik sowie insbesondere eine historische Einordung der den Konzepten zugrundeliegenden didaktischen Ideen vonnöten. Aufgrund der Komplexität des Themas sowie der Fülle der zur Verfügung stehenden Quellen kann eine entsprechende Bearbeitung nur exemplarisch erfolgen – im Folgenden sollen beispielhaft für die Ideen der Neuen Mathematik die Lehrwerke von H. Bauersfeld et al. (*alef*) (vgl. Bauersfeld et al. (1970)) und W. Neunzig & P. Sorger (*Wir lernen Mathematik*) (vgl. Neunzig & Sorger (1968)) herangezogen werden. Als maßgebliche Einflüsse auf den Rechenunterricht, der vor der Reform an den Volksschulen stattgefunden hat, nennt die Literatur (z. B. Wagemann (1984), 110-112) u. a. den sogenannten traditionellen Rechenunterricht nach J. Kühnel (vgl. Kühnel (1919)) und den ganzheitlichen Rechenunterricht nach J. Wittmann (vgl. Wittmann (1958)), weshalb an dieser Stelle auf diese Beispiele Bezug genommen wird.

Ein Vergleich der grundlegenden didaktischen Prinzipien fördert zunächst zahlreiche Parallelen zutage (zu den – durch verschiedene wissenschaftliche Kontexte bedingten – Unterschieden bei Kühnel vgl. Schmidt (1978), für einen weitergehenden und detaillierteren Vergleich siehe Hamann (2014)). Die Psychologie stellt für die Vertreter der Neuen Mathematik wie die der Rechendidaktik eine zentrale Bezugswissenschaft dar. Ausdrücklich beziehen sich erstere auf zeitgenössische Vertreter wie J. Piaget (z. B. Bauersfeld et al. (1970), 55) und Z. P. Dienes (vgl. insgesamt Neunzig & Sorger (1968)), Wittmanns Konzept eines ganzheitlichen Rechenunterrichts ist an die Ideen der Ganzheitspsychologie angelehnt, während Kühnel seine Vorschläge mit den Ergebnissen von E. Meumann und W. Wundt stützt (vgl. Kühnel (1919), Schmidt (1978)). Die Vorstellung, dass Begriffe gelehrt, also gewissermaßen von außen in die Kinder hineingetragen werden (können) – zumal einheitlich – , wird durchweg abgelehnt, stattdessen finden sich methodische Vorgaben, die – ganz im Sinne eines genetischen Zugangs und konstruktivistischer Lerntheorien – individuelle Begriffsbildung durch Anschauung, materialgestützte Handlungsorientierung und stetigen Wechsel der Repräsentationsformen fördern. Es erstaunt vor diesem Hintergrund, dass die Autoren von *alef* die Darbietung von Inhalten gemäß vorgefertigter Abstraktionsstufen als gängige Unterrichtsform darstellen (Bauersfeld et al. (1970), 9 und 18). Man muss hierin wohl einen Hinweis auf die Praxis des Rechenunterrichts sehen, die offenbar in wesentlichen Punkten nicht der Theorie folgte. Vergleichbares gilt für die Bewertung der

Reform durch Ellrott & Schindler als eine vorwiegend methodische Neuerung, denn auch hier finden sich zentrale Ideen der Neuen Mathematik bereits in den rechendidaktischen Schriften: Neben der individuellen Arbeit an konkreten Materialien sind dies z. B. Gruppenarbeit als generelle Sozialform bzw. als Mittel zur Differenzierung oder der Einsatz von Schülerinnen und Schülern als „Hilfslehrer“ (vgl. Kühnel (1919), II, 143), in jedem Fall Methoden, die eine veränderte Lehrerrolle erfordern (ebd. 149).

Die Gemeinsamkeiten in den didaktisch-methodischen Leitideen lenken den Blick neben der Praxis auf den inhaltlichen Teil der Reform. Der Zahlbegriff wird bei Kühnel wie insbesondere bei Wittmann auf der Basis des kardinalen Zahlaspekts grundgelegt; neu ist hingegen eine unterrichtliche Behandlung der Mengenbegriffe und -operationen an sich. Die Menge wird zur zentralen Idee des mathematischen Unterrichts, als „[t]ragende[r] Grundbegriff[]“ (KMK (1968), 2) kommt ihr eine den Unterrichtsstoff organisierende Funktion zu. Die Menge ist dabei nicht alleiniges Leitmotiv, sondern innerhalb des Konzepts, den Rechenunterricht der Volks- bzw. Grundschule durch einen propädeutischen Mathematikunterricht zu ersetzen, eine grundlegende Idee neben anderen, wie der Abbildung und der (algebraischen) Struktur (ebd.). Die öffentlich wahrgenommene Vorrangstellung des Begriffs der Menge war wohl kaum ursprünglich intendiert, zumindest nicht explizit, ergab sich jedoch von mehreren Seiten: Die curricularen Vorgaben der Kultusministerkonferenz legten entgegen anderslautender Absichten selbst den Schwerpunkt auf die Mengen (vgl. KMK (1968)), weit verbreitete Lehrwerke taten es ihnen gleich (in besonderer Weise Neunzig & Sorger (1968)), entscheidend bedingt durch ihre den Zahlbegriff fundierende Funktion. Aus der starken und – zumindest in der Praxis – gegen Reformen relativ resistenten Tradition des Rechenunterrichts (Hinweise darauf finden sich z. B. bei Wittmann (1958), 117 und 120) heraus, dessen inhaltliche Ziele auf den Erwerb des Zahlbegriffs, der Operationen sowie deren Anwendungen in Alltagssituationen beschränkt waren, kommt den Mengen im Gegensatz zu weiteren mathematischen Leitideen eine besondere Rolle zu. Die Relevanz des Mengenbegriffs für das Rechnenlernen war einer weitgehend nicht mathematisch gebildeten Öffentlichkeit in anderem Maße vermittelbar als die Bedeutung abstrakter Strukturbegriffe für eine generelle Fähigkeit mathematisch zu denken.

Der eigentliche Kern der Reform dagegen, nämlich die faktische Ablösung des alten Faches Rechnen durch das neue Fach Mathematik in der Grundschule, ist durch diese Schwerpunktsetzung in den Hintergrund geraten. Dabei birgt diese in der Tat nahezu revolutionäre – da in der Geschichte des Primarstufenunterrichts in Deutschland beispiellose – Neuerung ihre ganz eigenen Herausforderungen; ein über alle Schularten und -stufen einheitliches Fach Mathematik erfordert ein völlig neues Konzept für einen propädeutischen Mathematikunterricht in der Grundschule, dieses wiederum erfordert klare Kriterien zur Auswahl der zu unterrichtenden Inhalte und damit einen breiten Diskurs zu Fragen wie der nach den Grundlagen des Faches oder nach der Rolle des Rechnens innerhalb der Mathematik. Im Hinblick auf einen solchen Diskurs und eine damit einhergehende umfassende Ablösung des traditionellen Rechenunterrichts muss die Reform eher als gescheitert gelten.

Literatur

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Görner, U., Homann, G., Lubeseder, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1970). *alef 1: Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang*. Hannover: Schroedel.

Ellrott, D. & Schindler, M. (1975): *Die Reform des Mathematikunterrichts: Grundlagen mit Beispielen aus dem Unterricht der Primarstufe*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Griesel, H. (1970): *Die sogenannte Moderne Mathematik an Grund- und Hauptschule als Weiterentwicklung der traditionellen Rechendidaktik (und nicht als Irrweg)*. BzMU 1970 (S. 55-62). Hannover: Schroedel.

Hamann, T. (2014): Die Neue Mathematik am Beispiel des *alef*-Programms im Vergleich zu Kühnels *Neubau des Rechenunterrichts* – Eine didaktische Revolution? *Siegener Beiträge zu Geschichte und Philosophie der Mathematik 4*, 31-47.

Karaschewski, H. (1969): *Irrwege moderner Rechendidaktik: Eine kritische Analyse*. Bonn: Dürr.

KMK (1968): Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen: Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968. *Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland*.

Kühnel, J. (1919): *Neubau des Rechenunterrichts: ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben*. Leipzig: Klinkhardt. Bd I und II.

Neunzig, W. & Sorger, P. (1968): *Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr ; Lehreranleitung*. Freiburg [u. a.]: Herder.

Schmidt, S. (1978): *Die Rechendidaktik von Johannes Kühnel (1869-1928): Wissenschaftsverständnis, deskriptive und normative Grundlagen sowie deren Bedeutung für die Vorschläge zur Gestaltung des elementaren arithmetischen Unterrichts ; eine metatheoretische Analyse zu einem historischen Versuch zur Verwissenschaftlichung der Didaktik des elementaren arithmetischen Unterrichts*. Köln: Päd. Hochschule Rheinland.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Wagemann, E. B. (1984).: Anmerkungen zur Rechendidaktik von 1945 bis 1967 aus persönlicher Sicht. *JMD 5, 1/2*, 101-129.

Wittmann, J. (1958): *Einführung in die Praxis des ganzheitlichen Gesamtunterrichts insbesondere des ganzheitlichen Rechenunterrichts im ersten Schuljahr*. Dortmund: Crüwell.

Maren HATTEBUHR, Martin FRANK, Christina ROECKERATH,
Aachen

Optimierung der Spiegel in einem Solarkraftwerk Projekttag des EducationLabs CAMMP der RWTH Aachen

Der Energiesektor befindet sich momentan in einem großen Umbruch. Der Ausstieg aus der Kernenergie und die Forderung nach umweltschonenden Energiequellen rücken u.a. solarthermische Kraftwerke, die besonders gut in sonnenreichen Ländern eingesetzt werden können, in den Vordergrund. Diese sind somit Teil aktueller Forschung im Bereich der Energiegewinnung.

Beim Bau solcher Kraftwerke möchte man möglichst wirtschaftlich sein, d.h. man möchte die vorhandene Sonneneinstrahlung optimal ausnutzen. Lösungsansätze für diese Problematik können Schüler/innen im EducationLab CAMMP der RWTH Aachen mittels mathematischer Modellierung erforschen. CAMMP steht für Computational and Mathematical Modelling Program und ist ein Schülerlabor für mathematische Modellierung und Simulation an der RWTH Aachen. Weitere Informationen zu CAMMP finden sich unter www.cammp.rwth-aachen.de.

Betrachtet werden solarthermische Kraftwerke, die mittels langer ebener Spiegel, sogenannter Fresnelspiegel, das Sonnenlicht auf ein Absorberrohr konzentrieren und somit das im Rohr enthaltene Wasser erhitzen. Auf diese Weise entsteht Wasserdampf, welcher eine Turbine zur Stromerzeugung antreibt. Ein Sekundärreflektor, welcher um das Absorberrohr herum angebracht ist, sorgt dafür, dass auch Sonnenstrahlen, die unmittelbar am Rohr vorbeigehen, auf das Rohr reflektiert werden (vgl. Abb. 2: Modell eines Spiegels).

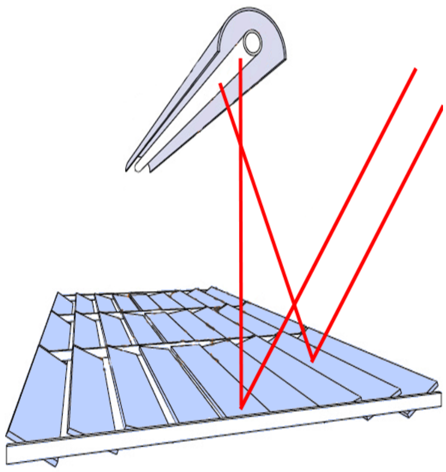


Abb. 1: links: Solarfeld eines Fresnelsolarkraftwerks (Quelle: Novatec Solar GmbH); rechts: Modell eines Solarfeldes eines Fresnelsolarkraftwerks

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Im Workshop erarbeiten Mathematikkurse der Mittel- und Oberstufe einen Tag lang weitgehend eigenständig ein mathematisches Modell zur Energiegewinnung anhand eines Fresnelkraftwerks. Dazu verwenden sie echte Daten, welche von einem Solarkraftwerk in Kalifornien stammen und von der Firma Novatec Solar GmbH zur Verfügung gestellt wurden. Weiter erhalten sie einen vorbereiteten Matlab-Code, in dem sie die entscheidenden Modellierungsschritte selbst ergänzen müssen. Der Matlab-Code erlaubt zusätzlich eine graphische Interpretation der Ergebnisse durch eine Simulation des modellierten Kraftwerks. So erhalten die Schüler/innen eine direkte Rückmeldung bezüglich ihrer Ergebnisse und werden zum wiederholten Durchlaufen des Modellierungskreislaufs angeregt.

Im Rahmen des Workshops wird zunächst der Frage nachgegangen, wie ein Spiegel in Abhängigkeit vom aktuellen Sonnenstand ausgerichtet werden muss, damit ein Sonnenstrahl, der am Spiegelmittelpunkt reflektiert wird, das Absorberrohr trifft. Dazu werden die folgenden Modellannahmen vorgenommen (vgl. Abb. 2): Alle Betrachtungen sollen im 2-Dimensionalen stattfinden, wobei eine Übertragung ins 3-Dimensionale in einer Erweiterung möglich ist. Es wird weiter angenommen, dass alle Sonnenstrahlen parallel einfallen und alle Strahlen, die von unten auf den Sekundärreflektor fallen, auf das Absorberrohr reflektiert werden. Außerdem wird zunächst nur einen Spiegel betrachtet, dessen Spiegelmittelpunkt direkt unter dem Rohr steht.

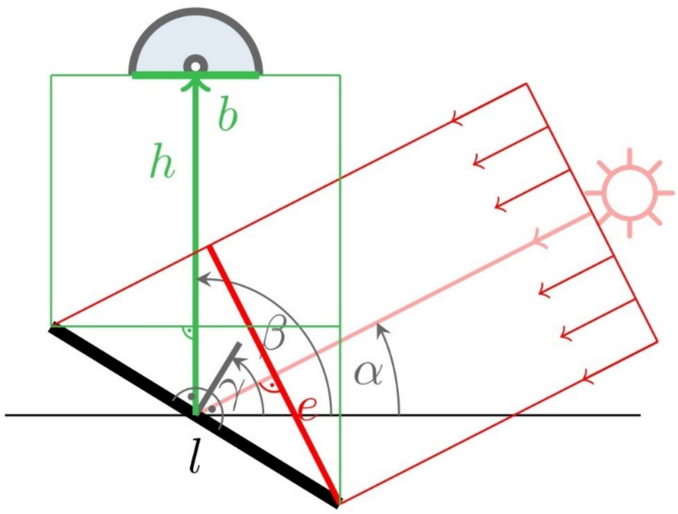


Abb. 2: Modell eines Spiegels: in rot: einfallendes Sonnenband; in grün: reflektiertes Sonnenband; Sonneneinfallswinkel α; Reflexionswinkel β; Normalenwinkel γ; Sekundärreflektorbreite b; Sonnenbandbreite e; Absorberrohrhöhe h; Spiegelbreite l

Zur mathematischen Beschreibung wird der Sonneneinfallswinkel mit α bezeichnet. Weiter wird der Spiegelneigungswinkel zwischen der Horizontalen und der Spiegelnormalen im Spiegelmittelpunkt mit γ sowie der Winkel zwischen dem reflektierten Sonnenstrahl und der Horizontalen mit β bezeichnet. Für den einfachen Fall, dass der Spiegel direkt unter dem Absorberrohr steht, ist $\beta = \frac{\pi}{2}$. Gesucht ist also der Neigungswinkel γ in Abhängigkeit vom Sonneneinfallswinkel α. Aus der Physik ist bekannt, dass der Einfallswinkel und der Ausfallswinkel gleich groß sind. Unter Ausnutzung einfacher Winkelbeziehungen erhält man $\beta - \gamma = \gamma - \alpha$ und somit $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Nachdem der Spiegel richtig ausgerichtet ist, möchte man wissen, welche Leistung am Absorberrohr anliegt. Dazu ist zunächst die Leistung L_S pro Meter, die am Spiegel anliegt, zu modellieren. Anschließend ist der Anteil a des reflektierten Strahlenpakets, das den Sekundärreflektor trifft, zu ermitteln, um abschließend aus diesen beiden Ergebnissen die am Absorberrohr anliegende Leistung L_R zu bestimmen.

Es sind nun die Breite l des Spiegels und die Leistung L der Sonnenstrahlung pro Meter gegeben. Durch Anwenden von Winkelsätzen kann die Sonnenbandbreite e durch $e = l \cdot cos(\gamma - \alpha)$ ermittelt werden. Daraus erhalten wir für die am Spiegel anliegende Leistung $L_S = e \cdot L$.

Auch das reflektierte Strahlenbündel hat die Breite e und damit die Leistung L_S. Da die Strahlen auf der gesamten Breite b des Sekundärreflektors senkrecht einfallen, kann der Anteil a des reflektierten Strahlenbündels, das den Sekundärreflektor und damit das Absorberrohr trifft, durch $a = min\{1, b/e\}$ beschrieben werden. Die am Absorberrohr ankommende Leistung L_R lässt sich nun mit $L_R = a \cdot L_S$ berechnen.

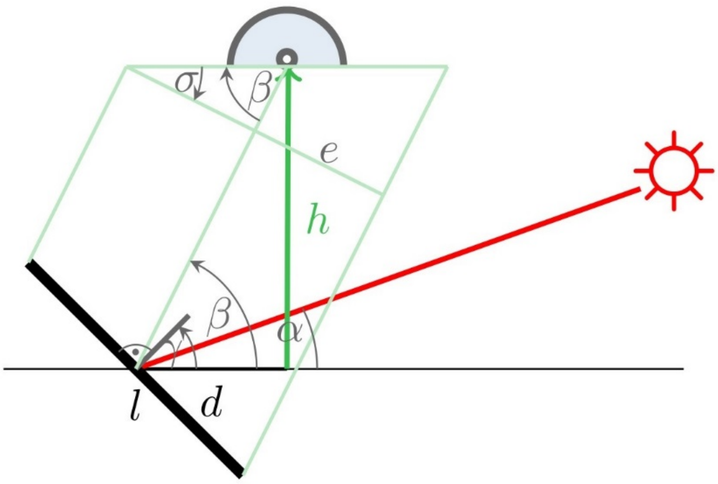


Abb. 3: Modell eines um d verschobenen Spiegels: in rot: einfallender Sonnenstrahl; in grün: reflektiertes Sonnenband; Sonneneinfallswinkel α; Reflexionswinkel β; Normalenwinkel γ; Spiegelverschiebung d; Sonnenbandbreite e; Absorberrohrhöhe h; Spiegelbreite l

Im nächsten Schritt soll ein seitlich verschobener Spiegel modelliert werden (vgl. Abb. 3). Die Verschiebung des Spiegelmittelpunktes sei mit d und die Höhe des Absorberrohrs mit h bezeichnet. Unter Verwendung des Tangens erhält man

$$\beta = \begin{cases} \arctan\frac{h}{d}, & d < 0 \\ \pi/2, & d = 0. \\ \pi - \arctan\frac{h}{d}, & d > 0 \end{cases}$$

Mit β lässt sich der Neigungswinkel γ auch im Falle des verschobenen Spiegels mit $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ bestimmen.

Weiter ist auch für den verschobenen Spiegel die am Absorberrohr ankommende Leistung in drei Schritten zu bestimmen: Die Berechnung der auf dem Spiegel einfallenden Sonnenleistung verändert sich nicht. Es gilt $L_S = e \cdot L$ mit $e = l \cdot cos(\gamma - \alpha)$. Zur Berechnung des Anteils a des reflektierten Strahlenbündels, welches den Sekundärreflektor trifft, gilt $a = min\{1, b \cdot \cos\sigma/e\}$, wobei $\sigma = |\beta - \pi/2|$. Die am Absorberrohr an kommende Leistung L_R lässt sich nun wie zuvor mit $L_R = a \cdot L_S$ bestimmen.

Die bisher vorgestellten Inhalte wurden mehrfach im Rahmen eines Projekttages, der etwa vier reine Arbeitsstunden umfasst, von Schulklassen ab der neunten Jahrgangsstufe erfolgreich bearbeitet. Eine Erweiterung des Moduls ist durch verschiedene Ergänzungen möglich. Beispielsweise kann das Modell um mehrere Spiegel erweitert werden oder es können Reflexionsstörungen durch Wind oder Sand einbezogen werden. Interessant ist auch eine Modellierung der pro Tag oder pro Jahr eingefangenen Energie, sowie der Entwicklung von Optimierungsstrategien auf Basis des Modells.

Literatur

Frank, M. & Roeckerath, C. (2012). Gemeinsam mit Profis reale Probleme lösen. In: *Mathematik Lehren*, Heft 174*, S. 59 - 61.*

Mertins, M. (2009): Technische und wirtschaftliche Analyse von horizontalen Fresnel-Kollektoren, Universität Karlsruhe (TH). Dissertation.

Roeckerath, C. (2012): Mathematische Modellierung der Spiegel eines solarthermischen Kraftwerks im Rahmen einer Modellierungswoche und einer Projektwoche in der Sekundarstufe II. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen.

Matthias HEINRICH, Oldenburg

Welche Konsequenzen ziehen Lehramtsstudierende aus dem Lernstand der eigenen SchülerInnen für ihre Unterrichtsplanung?

„Lernförderlicher Unterricht setzt voraus, dass das Unterrichtsangebot hinreichend an die Lernvoraussetzungen der Schüler angepasst wird" (Helmke 2014). Ein solcher sich anpassender Unterricht bedarf einer präzisen Diagnose der Lernvoraussetzungen der Lernenden, damit die Förderung für den Einzelnen passend gestaltet werden kann (Hesse & Latzko 2011). Um dies leisten zu können, müssen Lehrpersonen diagnostisch kompetent sein.

Theoretischer Hintergrund

Die große Bedeutung der diagnostischen Kompetenz für das Lernen in der Schule ergibt sich zum einen daraus, dass das Anforderungsniveau von Fragen und Aufgaben an die individuellen Lernvoraussetzungen der Lernenden angepasst werden muss (Helmke 2014). Zum anderen ist sie aber auch längst empirisch belegt (vgl. z.B. Karing et al. 2011).

Um Konsequenzen aus dem Lernstand der eigenen Lernenden für die Unterrichtsplanung ziehen zu können, müssen Lehrpersonen auf den folgenden drei Ebenen agieren: Identifikation benötigter fachbezogener Voraussetzungen, Diagnose der Lernausgangslage und anschließende Auswahl an Fördermaßnahmen. Grundlage für diesen Prozess ist hier der von Jahnke & Hößle (2011) entwickelte Diagnosezyklus, der sich wiederum an dem Zyklus von Helmke sowie an theoretischen Überlegungen von Hesse & Latzko orientiert:

Zunächst gilt es die zu überprüfenden Kompetenzen auszuwählen. Dafür müssen die benötigten fachbezogenen Voraussetzungen der geplanten Stunde identifiziert worden sein. Anschließend sollten Erwartungen zu den Ergebnissen formuliert werden. Dies hilft sowohl bei der Beschränkung auf wesentliche Kompetenzen als auch bei der Aufgabenauswahl. Im dritten Schritt muss ein Diagnoseinstrument gewählt oder konstruiert werden. Hier bieten sich insbesondere Aufgaben mit hohem diagnostischem Potential an. Das heißt, sie sollten nicht nur valide, sondern darüber hinaus auch Auslöser für Eigenproduktionen, niveaudifferent, offen und kompetenzorientiert sein (Büchter 2005, Dannenhauer et al. 2008). Dann werden Daten zur Erfassung der zu überprüfenden Kompetenzen erhoben und im folgenden Schritt ausgewertet sowie interpretiert. Auf der Grundlage der Ergebnisse und ihrer Interpretation werden im Zuge des letzten Schritts individuelle Fördermaßnahmen geplant und durchgeführt. Im Idealfall kann es dann zu

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

einem Zyklus kommen, indem der Erfolg der Fördermaßnahmen mit einem weiteren Durchlauf überprüft wird.

Forschungsfragen

Laut den deutschen Standards der Lehrerbildung sollten Lehrpersonen bereits am Ende ihrer Ausbildung Lernvoraussetzungen diagnostizieren und Lernende gezielt fördern können (KMK 2004). Denn später stehen sie vor der ständigen Herausforderung Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht miteinander zu verbinden (Fischer & Sjuts 2014) und dies in Niedersachsen sogar schon zu Beginn des Referendariats. Daher beschäftigt sich das hier vorgestellte Promotionsprojekt mit der Frage, wie dies Mathematikstudierenden des gymnasialen Lehramts bereits in ihrem zweiten und somit letzten Schulpraktikum gelingt, um so mögliche Schwierigkeiten bei der Umsetzung von Diagnose und Förderung identifizieren zu können. Deshalb verfolgt das Projekt die nachfolgenden Forschungsfragen:

- Inwiefern können Studierende die erforderlichen fachbezogenen Lernvoraussetzungen für eine von ihnen geplante Unterrichtsstunde einschätzen?
- In welchem Maße sind Studierende in der Lage, ein geeignetes Diagnosetool zur Feststellung der Lernausgangslage zu entwickeln?
- Inwieweit ziehen die Studierenden passende Schlussfolgerungen aus den Schülerlösungen in Bezug auf die Lernausgangslage?
- Inwiefern sind die Studierenden fähig, entsprechend den Ergebnissen des Diagnosetools geeignete Fördermaßnahmen abzuleiten?

Design der Studie

Im Rahmen einer qualitativen Studie planten fünfzehn Mathematikstudierende des gymnasialen Lehramts im Zuge ihres Schulpraktikums eine Mathematikstunde. Hierzu gehörte u.a. die Identifikation von benötigten fachbezogenen Voraussetzungen. Anschließend erstellten sie ein Diagnoseinstrument, um die Lernausgangslage ihrer Lernenden zu bestimmen. Daraufhin überarbeiteten sie – sofern sie es für nötig hielten – ihre Planung und führten den Unterricht durch. Zusätzlich wurde mit jedem der Studierenden im Anschluss ein offenes, teilstandardisiertes Leitfadeninterview geführt, in dem ihre Gedanken und Entscheidungen sowie deren Begründungen detaillierter in den Fokus gerückt wurden. Somit liegen die nachfolgenden schriftlichen Dokumente vor: der erste Unterrichtsentwurf, das Diagnoseinstrument samt Schülerantworten, der überarbeitete Unterrichtsentwurf sowie die Transkripte der Interviews.

Zur Untersuchung der Daten wurden die ersten Unterrichtsentwürfe Expertinnen und Experten (Lehrpersonen mit langjähriger Berufserfahrung) vorgelegt, die die benötigten fachbezogenen Voraussetzungen der jeweiligen Stunde benennen sollten, um so die von den Studierenden identifizierten Voraussetzungen einordnen zu können. Die Diagnosebögen werden mit den von Büchter (2005) und Dannenhauer et al. (2008) genannten Kriterien für die Verwendbarkeit von Aufgaben zu Diagnosezwecken kategorisiert.

Erste Ergebnisse – Analyse eines Fallbeispiels

Der Studierende Manuel beabsichtigte in einer neunten Klasse Vierfeldertafeln zu erarbeiten, indem die Schüler zunächst fehlende Daten innerhalb eines Baumdiagramms mit Hilfe der ihnen bekannten Regeln ergänzen und diese dann anschließend in eine vorgegebene Vierfeldertafel übertragen sollten. Manuel benannte die folgenden benötigten fachbezogenen Voraussetzungen: Baumdiagramme aufstellen und ihre Struktur erkennen sowie deuten können, Pfadregeln, absolute und relative Häufigkeiten sowie Techniken der Prozentrechnung kennen und Wahrscheinlichkeiten mit der Laplace-Formel berechnen können. Die beiden hinzugezogenen Experten benannten – bis auf die Laplace-Formel – dieselben Voraussetzungen. Somit identifizierte Manuel die wesentlichen Voraussetzungen seiner Stunde, erwähnte allerdings auch eine weitere, für seine Stunde nicht relevante Voraussetzung.

Im Diagnoseprozess erstellte Manuel einen Diagnosebogen mit drei Aufgaben zu verschiedenen Kompetenzaspekten. Er entschied sich ausschließlich für geschlossene Aufgaben, die zwar größtenteils valide, aber weder Auslöser für Eigenproduktionen noch kompetenzorientiert oder niveaudifferent waren. Mit Manuels Diagnoseinstrument zeigte sich, dass die meisten seiner Lernenden relative Häufigkeiten korrekt angeben und die Pfade von Baumdiagrammen richtig beschriften konnten. Probleme hatten sie allerdings bei der Angabe der absoluten Häufigkeit sowie der Pfadwahrscheinlichkeiten. Insgesamt lässt sich hier vermuten, dass die Schüler lediglich vergessen hatten, was der Begriff „absolute Häufigkeit“ bedeutet und wie man die Pfadwahrscheinlichkeit berechnet. Manuel selbst zog allerdings den Schluss, dass die Schüler große Probleme mit Baumdiagrammen und relativen sowie absoluten Häufigkeiten hatten und entschied sich deshalb für eine Umgestaltung seines Unterrichts: Baumdiagramme entfielen nun komplett. Zusätzlich erstellte er für den Beginn seiner Stunde ein Info-Blatt, auf dem sich Erläuterungen zu relativen und absoluten Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten im Allgemeinen sowie zur Laplace-Formel wiederfanden. Dieser Zettel sollte besprochen werden, bevor dann ein Übungsblatt mit Übungsaufgaben zu relativen und absoluten Häufigkeiten sowie dem Berechnen von Wahrscheinlichkeiten ausgeteilt wurde. Erst dann wollte Manuel Daten bestehend aus 2x2 Merkmalen vorstellen, um so zur Vierfeldertafel zu gelangen. Aufgrund seines Diagnosebogens entschied er sich also für eine ausgiebige Wiederholung von Inhalten aus Klasse 6.

Ausblick

Die Analyse weiterer Fälle zeigt, dass es durchaus Studierende gibt, die Aufgaben mit einem weitaus höheren diagnostischen Potential konstruieren. Genauso lassen sich auch Konsequenzen für den Unterricht auf unterschiedlichen Niveaus beobachten. Ferner werden im Rahmen der weiteren Auswertung neben den Einschätzungen der Experten ausführliche didaktisch orientierte Sachanalysen der jeweiligen Unterrichtsinhalte zur Beurteilung der identifizierten fachbezogenen Voraussetzungen herangezogen.

Literatur

Büchter, A. (2005): Aufgaben für kompetenzorientierte Diagnose. URL: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/B_chter_Pr_sentation_20_05_09_19.pdf, Aufruf: 02.03.2015.

Dannenhauer, U.; Debray, P.; Kliemann, S. & Thien, I. (2008): Aufgaben mit diagnostischem Potential selbst erstellen. In: S. Kliemann (Hrsg.): Diagnostizieren und Fördern in der Sek. I. Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. Berlin: Cornelsen, S. 57-73.

Fischer, A. & Sjuts, J. (2014): Prozessdiagnostik in Mathematik. In: A. Fischer, C. Hößle, S. Jahnke-Klein, H. Kiper, M. Komorek, J. Michaelis, V. Niesel, J. Sjuts (Hrsg.): Diagnostik für lernwirksamen Unterricht. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, S. 251-275.

Helmke, A. (2014): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. 5. Aufl. Seelze: Kallmeyer.

Hesse, I. & Latzko, B. (2011): Diagnostik für Lehrkräfte. 2. Aufl. Opladen, u.a.: Verlag Barbara Budrich.

Jahnke, L. & Hößle, C. (2011): Ansätze zur Vernetzung der ersten und zweiten Ausbildungsphase in Lehr-Lern-Labor-Situationen im Fach Biologie. In: A. Fischer, V. Niesel, J. Sjuts, (Hrsg.): Lehr-Lern-Labore und ihre Bedeutung für Schule und Lehrerbildung. OLAW-Tagungsband. Oldenburg: BIS-Verlag, S. 71-84.

Karing, C.; Pfost, M. & Artelt, C. (2011): Hängt die diagnostische Kompetenz von Sekundarstufenlehrkräften mit der Entwicklung der Lesekompetenz und der mathematischen Kompetenz ihrer Schülerinnen und Schüler zusammen? In: Journal for Educational Research Online, 3, S. 121-149.

KMK (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf, Aufruf: 02.03.2015

Friederike HEINZ, Gießen

Spiele zum Rechnenlernen? Erste Erfahrungen

Spiele sind im kindlichen Alltag von großer Bedeutung und können eine hohe Motivation, Aufmerksamkeit und Fokussierung auf das Spielgeschehen erzeugen. Die Idee, diese Motivation für die Schule zu nutzen, ist nicht neu. Schon das lateinische Wort „ludus“ bedeutet sowohl „Spiel“ als auch „Schule“. Allerdings existiert keine allgemeingültige Definition für den Begriff „Spiel“. Konsens herrscht lediglich über die Beschreibung von Spiel als zweckfreie, freiwillige, lustbetonte und motivierte Tätigkeit - wobei nicht alle Merkmale in jeder Spielform vorhanden sein müssen. Im Gegensatz zum „Spiel“ sind die Begriffe „Arbeit“ und „Lernen“ auf ein Ergebnis ausgerichtet: Bei der Arbeit wird das Ergebnis für den Alltag benötigt, beim „Lernen“ für die eigene Entwicklung (vgl. Flitner 1998).

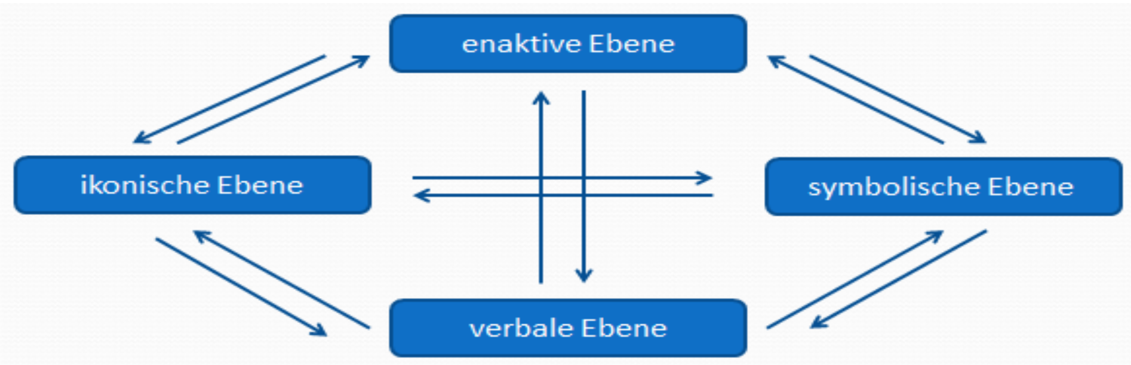
Spielen und Lernen bzw. Arbeit sind dennoch nicht als Widerspruch zu sehen, denn die Übergänge sind fließend: Arbeit kann ebenso wie Spiel eine lustvolle Tätigkeit sein und Kinder können z.B. beim spielerischen Erkunden durchaus lernen. Folglich kann auch dann von Spiel gesprochen werden, wenn es Lernzwecken dient (vgl. Pausewang 1997).

Besonders bei der Förderung rechenschwacher Kinder kann mit mathematischen Spielen ein alternativer Zugang geboten werden. Aufgrund der Zwanglosigkeit der Spielsituation blühen häufig insbesondere Kinder, die aufgrund von Misserfolgen im Fach Mathematik demotiviert oder sogar verängstigt sind, geradezu auf und vergessen im Spiel ihre Vorbehalte gegenüber Mathematik. Dass geeignete Spiele *eine* effektive Möglichkeit zur mathematischen Bildung sein, mathematische Kompetenzen und somit einen Lernzuwachs vermitteln können, belegen bereits verschiedene Studien (vgl. für einen Überblick Gasteiger 2013). Nun stellt sich die Frage, was eigentlich ein *geeignetes Lernspiel* ausmacht. Zahlreiche im Handel erhältliche Lernspiele werben damit, dass „spielend Neues“ gelernt wird. Bei der Sichtung solcher Spiele fällt jedoch auf, dass es fast immer um die Automatisierung von Lerninhalten geht (z.B. die Ergebnisse der 1x1-Reihen). Das Ziel, mathematisches Verständnis hervorzubringen und geeignete Grundvorstellungen im Themenfeld aufzubauen, gerät bei diesen Spielen oft aus dem Blick.

Ziel meines Promotionsvorhabens ist die Entwicklung und Evaluation von Spielen zur Bearbeitung ausgesuchter „Lernhürden beim Rechnenlernen“ (vgl. Meyerhöfer 2011). Dabei soll der Schwerpunkt der Spiele auf dem mathematischen Verstehen sowie dem Aufbau von geeigneten Grundvorstellungen liegen.

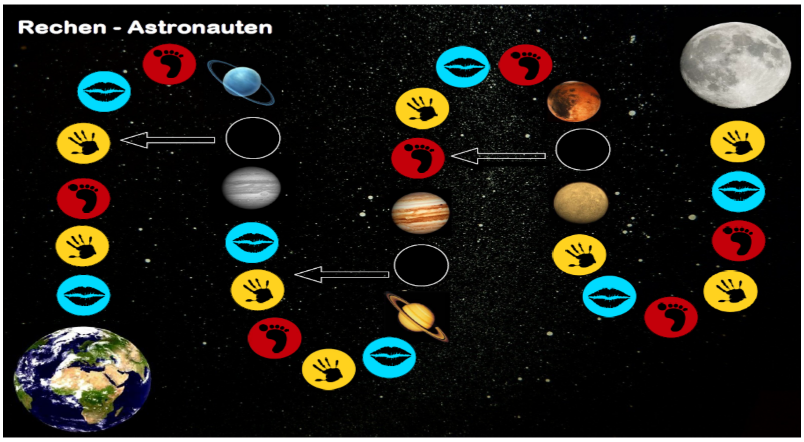
In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Mathematische Lernhürden sind das verfestigte zählende Rechnen, einseitiges Zahlverständnis, Probleme mit dem Stellenwertsystem, einseitiges Operationsverständnis sowie Intermodalitätsprobleme (vgl. u.a. Schipper 2009, Wartha / Schulz 2013). Besonders die Intermodalität findet im Mathematikunterricht der Grundschule häufig zu wenig Beachtung. Mathematiklernen findet auf der enaktiv-handelnden, ikonisch-bildhaften und symbolischen Ebene statt. Häufig wird dies jedoch als „Einbahnstraße“ umgesetzt, d.h. die Kinder rechnen zunächst mit Material (enaktiv), entnehmen dann Bildern im Schulbuch (ikonisch) Rechenaufgaben und sollen diese schließlich ohne derartige Unterstützungen lösen (symbolisch). Allerdings ist gerade der *Transfer zwischen allen Ebenen*, zusätzlich zur verbal-sprachlichen Ebene (d.h. Sachaufgaben, Rechengeschichten, Erklärungen zu Zahlen, Aufgaben, Bildern und Handlungen) für ein erfolgreiches Mathematiklernen und sicheres Operationsverständnis besonders wichtig:



(vgl. Bönig 1993, zit. von Rechtsteiner-Merz 2013, Gerster/Schulz 2004, Kaufmann-Wessolowski 2006)

Im Folgenden wird eine Spielidee gezielt für die Bearbeitung von Intermodalitätsproblemen vorgestellt, wobei inhaltlich das Stellenwertsystem und Zahlverständnis als Lernhürden ebenfalls eine Rolle spielen. Wie die folgende Abbildung zeigt, handelt es sich um ein Regelspiel mit klassischem Spielplan: Die Spielfiguren starten auf der Erde, die Reise geht zum Mond. Hierzu wird gewürfelt, was ein wichtiges Glückselement in das Spiel einbringt, da so nicht immer das mathematisch stärkste Kind gewinnt. Unterwegs gibt es verschiedene Ereignisfelder: Kommt man auf ein schwarzes Loch, fällt die Spielfigur zurück. Felder mit kleinen Planeten sind Schätzaufgaben: Eine Menge Bohnen wird kurz in der Hand gezeigt und soll ungefähr geschätzt werden, ohne abzuzählen. Hier wird als Aspekt die quasi simultane Mengenerfassung mit aufgenommen um zu sehen, ob die Kinder ein kardinales Zahlverständnis haben. Bei erfolgreicher Bearbeitung darf die Spielfigur um ein weiteres Feld vorgerückt werden. Ebenso bei den blauen, roten und gelben Feldern. Diese stehen für entsprechend farbige Karten, von denen jeweils eine gezogen wird, und die gezielt die Intermodalität sowie das Verständnis der Stellenwerte Zehner und Einer schulen.



(Idee: E. Aue, V. Becker, M. Hannes, S. Rühberg. Seminar „Rechenschwäche begreifen“ WS 2014/15)

Auf den *blauen Karten* wird je eine Zahl durch Dienes-Material dargestellt. Das Kind soll diese laut benennen. Geübt wird der intermodale Transfer von der *ikonischen zur verbalen Ebene*. Eine *rote Karte* wird vom *rechten Nachbarn* gezogen, er nennt dem Kind die Zahl, die in Zifferform darauf steht. Es soll die Zehner der genannten Zahl stampfen und die Einer klatschen. Der Transfer erfolgt von der *(auditiv-)verbalen zur enaktiven Ebene.* Auch die *gelbe Karte* wird vom *rechten Nachbarn* gezogen und er nennt dem Kind die Zahl, die darauf steht. Es soll die genannte Zahl mit Dienes-Material legen. Der *Transfer ist derselbe, wie bei den roten Karten*, allerdings machen die gelben Karten den kardinalen Zahlaspekt am Material sichtbarer. Bei den roten Karten wird allenfalls über die Intensität der Bewegung deutlich, dass ein Zehner (Stampfen) mehr ist als ein Einer (Klatschen). Dennoch ist nicht sicher, ob stellenweise abgezählt oder die Menge mitgedacht wird. Daher wird das Mengenverständnis zusätzlich über die Schätzaufgaben geschult. Je nach Förderziel können leicht Karten zu weiteren Transfers erstellt werden, um das Spiel entsprechend anzupassen. Anhand einer Videoanalyse wurde die Spielgüte im Hinblick auf die Lernhürden und das diagnostische Potenzial bzw. auf im Spiel erkennbare Anknüpfungspunkte für die individuelle Förderung analysiert. Es zeigt sich, dass der Transfer bei den *blauen Karten* durchweg gut gelingt, allerdings zählen alle Kinder die abgebildeten Zehnerstangen und Einerwürfel einzeln ab. Hier kann man in der Förderung gut anknüpfen, z.B. laut vorzählen lassen und prüfen, ob das kardinale Zahlverständnis (1 Zehner = 10 Einer) aufgebaut ist und nicht nur ziffernweise vorgegangen wird. Bei den *roten und gelben Karten* tritt zum Teil folgendes Problem auf: die gehörte Zahl kann erst gestampft und geklatscht bzw. gelegt werden, als das Kind die Karte vor Augen hat. Ohne visuelle Unterstützung werden Zehner- und Einerstelle vertauscht. Die Intermodalität zwischen symbolischer und enaktiver Ebene gelingt also, die zwischen (auditiv-)verbaler und enaktiver noch nicht. Eine mögliche Ursache ist, dass die meisten zweistelligen Zahlen anders gesprochen werden, als man sie schreibt. Man hört z.B. bei 24 zuerst die Einer - also vier - und das Kind legt vier Zehnerstangen hin und dann zwei Einerwürfel. Auch hier gewinnt man anhand des Spiels konkrete Hinweise auf die individuelle Förderung: Zunächst kann der Transfer von verbaler zur symbolischen Ebene geübt werden, z.B. als Zahlendiktat. Gelingt dieser Zwischenschritt, kann der Transfer von verbal zu enaktiv erneut versucht werden. Leistungsunterschiede werden im Spiel ebenfalls deutlich: Ein Kind zählt laut acht Zehnerstangen zunächst einzeln ab, zählt aber dann von sich aus in Zehner- und sogar in Zwanzigerschritten. Dies ist eine Situation, in der voneinander gelernt werden kann und die Anlass gibt, mit den Kindern darüber zu reden, wie sie jeweils begründen, wieso mit ihrer Zählweise die gelegte Menge der genannten Zahl ermittelt werden kann.

In der Analyse zeigt sich das große diagnostische Potenzial des Spiels, da deutlich sichtbar wird, welche Lerninhalte die Kinder *noch* nicht beherrschen bzw. wo Förderbedarf besteht. Anhand der bisher erprobten Spiele stellt sich die Frage, in wie weit das Spielen selbst die Kompetenzen fördert oder ob vor allem das Diagnosepotential von Spielen gewinnbringend ist. Dies soll an weiteren Spielideen untersucht werden.

Literatur

Flitner, A. (2002). Spielen-Lernen. Praxis und Deutung des Kinderspiels. Basel: Beltz.

Gasteiger, H. (2013). Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele-Ergebnisse einer Interventionsstudie. In Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (S. 336-339). Münster: WTM.

Gerster, H. & Schulz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche–Erkennen, Beheben, Vorbeugen (S. 351-354, 387-388). Päd. Hochschule Freiburg.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze: Friedrich.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden. In: Pädagogische Rundschau, 4, S. 401-426.

Pausewang, F. (1997). Dem Spielen Raum geben. Berlin: Cornelsen.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen. Münster: Waxmann.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Wartha, S. & Schulz, A. (2013). Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100. Berlin: Cornelsen.

Markus A. HELMERICH, Eva S. HOFFART, Siegen

Mathematik rund um meinen Körper – ein Praxisbericht aus der MatheWerkstatt zum differenzierten Lernen

1. Differenzierung in Mathematik-Projekten – Begriffsklärung und Analyserahmen

Heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht erfordern eine besondere Sorgfalt in der Gestaltung von differenzierenden Lernumgebungen. Vor allem die offene Differenzierung und selbstdifferenzierende Angebote verändern klassische Lernsettings für alle Beteiligten, in dem die Verantwortung für den Lernprozess zwischen Lehrperson und Lernenden geteilt wird. Die Lernenden suchen sich ihre Ziele und Wege selbst, arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus und verwenden verschiedene Strategien zur Lösung der mathematischen Aufgaben. Dies erfordert ein abgestimmtes Zusammenspiel der angebotenen Materialien sowie die Öffnung von Strukturen, Methoden, Aufgaben und Inhalten (vgl. Peschel 2011). Über eine mitbestimmte Auswahl von Arbeitsmaterialien, einem Wechsel von Sozialformen des (Zusammen)arbeitens und eine weitgehende schülerbestimmte Organisation des Lernprozesses kann diese Öffnung umgesetzt werden. Entscheidend für eine gelungene Differenzierung sind aber besonders die inhaltliche Öffnung und das Zulassen von divergenten Bearbeitungswegen, Ergebnissen und Lösungen, sowie individuelle Interpretationen der Bedeutung für die Lebenswelt.

Das Differenzieren zeigt sich in konkreten Kernprozessen des Lernens (vgl. Barzel et al., 2011a und 2011b). Die folgenden Kernprozesse werden als Analyse-Perspektiven auf das Arbeiten und die Produkte der Schüler(innen) eingesetzt: Anknüpfen an Vorerfahrungen und Interessen, Erkunden neuer Zusammenhänge, Austauschen unterschiedlicher Wege und Ordnen als Systematisieren und Sichern. Der Kernprozess des Vertiefens durch Üben und Wiederholen wird im Rahmen des hier vorgestellten Projektes nicht behandelt.

2. Praxisbericht aus der MatheWerkstatt am Beispiel eines Projekts

Im weiteren Praxisbericht wird am Beispiel des Projekts „Mathematik rund um meinen Körper“ aus der Mathekartei des Lehrwerks „Spürnasen Mathematik“ (Helmerich, & Lengnink, 2013) vorgestellt, wie das Arbeiten in Projekten Möglichkeiten des Differenzierens bietet. Die Mathekartei stellt mit ihren Mathematik-Projekten ein Material zur Verfügung, das handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik anregt, enaktive Erfahrungen ermöglicht und das Arbeiten auf verschiedenen Repräsentationsebenen för-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

dert. Mathematik wird über lebensweltlich fundierte Kontexte, Forscheraufträge und Experimente erlebbar und sinnstiftend. Somit ermöglichen diese Projekte auch das Arbeiten im jahrgangsübergreifenden Unterricht (Mischung Klasse 1/2 und Klasse 3/4). Sie bieten über Lernbegleitungen eine lernfördernde, zielorientierte Struktur und eine Möglichkeit der Begegnung mit Heterogenität.

Für den Einsatz in der MatheWerkstatt mit einer jahrgangsgemischten Lerngruppe (Klasse 1-4) der Gemeinschaftsgrundschule Düren-Hoven wurde die Projektkarte „Ich messe meinen Körper“ aus dem Projekt „Mathematik rund um meinen Körper“ ausgewählt und leicht modifiziert. Die Arbeitsaufträge wurden auf das Messen der Körperlänge fokussiert, um eine selbstdifferenzierende Lernumgebung für alle zu schaffen (vgl. Abb.1).

Mein Körperfaden

1. Schneide einen Faden ab, der so lang ist wie du.

Beschrifte deinen eigenen Körperfaden mit einem Namensschild.

2. Sortiere in deiner Gruppe die Körperfäden nach der Größe.

3. Wie bist du vorgegangen?

Abbildung 1: Arbeitsaufträge für die Schülerinnen und Schüler im Projekt

Als gemeinsamer, jahrgangsübergreifender Auftrag sollen die Schüler(innen) ihre Körperlänge mittels eines Fadens messen und als Körperfaden darstellen. Der Vergleich und das Sortieren der Körperfäden erfolgt dann in jahrgangsgetrennten Gruppen. Die Beschreibung und Darstellung der Arbeitsprozesse wird in Einzelarbeit durchgeführt, bevor die Körperfäden jeder Jahrgangsgruppe auf einem Plakat dokumentiert werden.

3. Analyse von Schülerprodukten im differenzierenden Arbeiten

Die Arbeit im Projekt wurde im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit zum Ersten Staatsexamen von Sarah Theisen dokumentiert und ersten Analysen unterzogen (vgl. Theisen, 2014).

Im ersten Arbeitsschritt des Erstellens von Körperfäden zeigen die Schüler(innen) ein differenziertes Arbeitsverhalten im Kernprozess des Anknüpfens an Vorerfahrungen. Die Körpergröße als lebensweltliche Rahmung ermöglicht allen mitzumachen und einen eigenen Körperfaden als Repräsentant für die Körpergröße zu erstellen. Das Material regt die Handlung und den Vorstellungsaufbau zum Vorgang des Messens und zum Begriff der Länge an.

In den Dokumentationen der Schüler(innen) zum Vorgehen beim Vergleichen und Sortieren zeigt sich ein facettenreiches Spektrum beim Erkunden von Zusammenhängen. Während Schüler(innen) aus den Gruppen des Anfangsunterrichts (Klasse 1 und 2) ihre Körperfäden nacheinander „vergleichen" und in ihrer Einzigartigkeit würdigen, ist der Drang der Schüler(innen) aus Klasse 3 und 4, Ordnung in die Körperfäden zu bringen deutlich ausgeprägter. Hier führt der Prozess des Vergleichens zu einer Sortierung nach der Länge der Fäden. Die Prozesse des Vergleichens und Sortierens differenzieren sich im Kernprozess des Erkundens von Zusammenhängen stark nach den eingesetzten Strategien und nach dem Abstraktionsniveau in der Repräsentation bzw. Notation der Prozesse und Ergebnisse:

- Schüler(innen) aus Klasse 1 zeigen den Vergleich der Körperfäden als Zusammenstellung der einzelnen Fäden ohne auf die unterschiedlichen Längen oder eine Größensortierung einzugehen. Die Körperfäden werden alle in gleicher Länge oder ungeordnet über ein Plakat verteilt dargestellt.
- Die rein bildlichen Darstellungen des Vorgehens beim Vergleichen und Sortieren der Schüler(innen) aus Klasse 2 lassen erkennen, dass die Unterschiede in der Länge der Körperfäden wahrgenommen werden, aber eine Größensortierung noch nicht erfolgt.

In den Dokumentationen der Schüler(innen) aus Klasse 3 und 4 werden auch schriftliche Erläuterungen zu den Prozessen geliefert. Eine genaue Beschreibung der Strategien beim Sortieren können aber nur einige Schüler(innen) der Klasse 4 liefern. Es lassen sich drei wesentlich unterschiedliche Vorgehensweisen erkennen:

- Sortieren durch paarweises Vergleichen: je zwei Körperfäden werden in ihrer Länge verglichen bis alle der Größe nach geordnet sind.
- Sortieren durch simultanes Vergleichen: alle Körperfäden werden zu einem Strang gebündelt und der jeweils längste Faden wird herausgezogen.
- Sortieren durch arithmetisches Vergleichen: Die Körperfäden werden mit einem Maßband ausgemessen und die Zahlenwerte miteinander verglichen.

Im letzten Arbeitsschritt des Dokumentierens der Körperfäden wird differenziert im Kernprozess des Ordnens gehandelt. Für die Analyse der Prozesse werden Kriterien nach Hussmann & Prediger verwendet (vgl. Hussmann, & Prediger, 2007). Im „Reflektieren“ über die Erfahrungen aus dem Arbeitsprozess werden Schwierigkeiten und Strategien zur Überwindung bewusst gemacht. Im „Regularisieren“ können die individuellen Darstellungen mit dem regulären mathematischen Vorgehen abgeglichen werden und für die Weiterarbeit an Diagrammen zur Repräsentation von Körperfäden genutzt werden. Durch die Vorstellung der verschiedenen Arbeitsprodukte mit ihrer Vielfalt von Darstellungen lernen die Schüler(innen) ihre eigenen Wege mit anderen Strategien zu „vernetzen“ und in ihren Vor- und Nachteilen miteinander in Beziehung zu setzen.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Offene Mathematik-Projekte, die handlungsorientiert und entdeckend mathematische Inhalt erschließen und lebensweltliche Verknüpfungen herstellen, ermöglichen ein differenziertes Arbeiten in heterogenen Lerngruppen. In allen Kernprozessen des Lernens der Schüler(innen) lassen sich differenzierte Arbeitsweisen und Strategien beobachten, was die Arbeit an Projekten in Lehr-Lern-Laboren für die Lehrer(innen)bildung sehr bereichernd macht: Studierende können das Arbeiten in inhaltliche geöffneten Lernumgebungen erleben und zielorientierte Lernbegleitungen erproben.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2011a). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule* 53 (37).

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011b). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 71-74.

Helmerich, M., Lengnink, K. (2013). *Spürnasen Mathematik. Mathekartei für Klasse 3/4.* Berlin: Duden Schulbuchverlag.

Hußmann, S., Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule* 49 (2007) 17.

Peschel; F. (2011). *Offener Unterricht. Idee, Realität, Perspektive. Teil II: Fachdidaktische Überlegungen.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, 6. Aufl.

Theisen, Sarah (2014). *Leitideen und Vorstellungen der beschreibenden Statistik im Mathematikunterricht der Grundschule – didaktische Analyse und vergleichende Fallstudie.* Staatsarbeit zum 1.Statsexamenan der Universität Siegen.

André HENNING, Berlin

Lineare Approximation als ein Zugang zur Differentialrechnung am Ende der Sekundarstufe I

Lineare Approximation stellt einen Zugang zur Differentialrechnung dar, der im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I nur selten eine Rolle spielt, jedoch in der Mathematik aktuell wie auch historisch von Bedeutung ist. Im Artikel wird ein Ausschnitt einer Konzeption eines Unterrichtsgangs vorgestellt, der den in der Schule üblichen Weg der Einführung der Differentialrechnung verlässt und sich diesem Gebiet über die lineare Approximation nähert. Der Zusammenhang zum Aspekt der mittleren und lokalen Änderung wird dabei jedoch nicht aus dem Blick verloren. Chancen und Hürden werden aufgezeigt.

Zugänge zum Ableitungsbegriff

Es gibt verschiedene Wege, sich dem Begriff der Ableitung zu nähern. Der in der Schule vorherrschende ist derjenige des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und damit des Übergangs von der Steigung von Sekanten zur Steigung einer Tangente. Dieser Weg wird ausführlich z.B. in Danckwerts & Vogel (2006) dargestellt und sowohl aus fachlicher wie auch aus didaktischer und unterrichtlicher Sicht aufgearbeitet. Über den Zugang der linearen Approximation wird zwar geschrieben, so in Danckwerts&Vogel (2006) oder auch im DIFF Studienbrief (1978), allerdings wird nach einigen Erwägungen davon abgegangen, diesen Zugang tatsächlich im Sinne eines Unterrichtsganges aufzuarbeiten. Die Hürden scheinen zu hoch zu sein und so stärker für einen anderen Zugang zu sprechen.

Wittmann (1972) beschreibt, wie Approximation als verbindendes Element der Analysis dienen kann. Für ihn erscheint es wesentlich, dass „bereits bei der Einführung in die Analysis diejenigen Züge herausgearbeitet werden, die einen Rahmen für ein Gesamtverständnis schaffen und einen nachträglichen Einbau von Einzelheiten erlauben." Seine Erläuterungen bleiben jedoch auf eher abstraktem Niveau und stellen keine Konzeption einer Unterrichtseinheit dar.

Weitere Zugänge, wie die stetige Fortsetzung der Differenzenquotientenfunktion usw. (siehe z.B. DIFF Studienbrief (1978)), sollen hier unberücksichtigt bleiben und seien nur des Überblicks halber erwähnt.

Historischer Anstoß

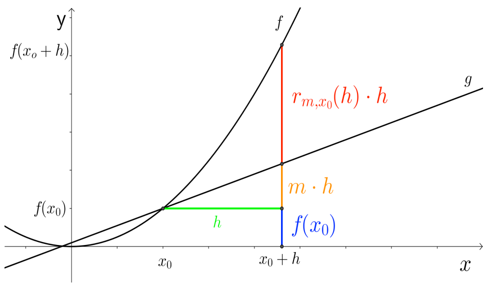
Bereits vor der eigentlichen Entwicklung der Differentialrechnung stellten sich Mathematiker und Physiker ihrer Zeit die Frage nach Tangenten an be-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

stimmte Kurven. Körle (2009, S.40f.) gibt ein Beispiel von Fermat. Letztlich nutzte dieser eine Zerlegung, wie sie der weiter unten bei der linearen Approximation beschriebenen entspricht. Er rechnete zwar zumindest unlauter, kam jedoch tatsächlich auf das richtige Ergebnis. Auch wenn er annahm, er hätte bereits die Tangente gegeben und dann den Wert der sog. Subtangente sucht, ist darin ein wichtiger Schritt auf dem Weg der Entwicklung der Differentialrechnung enthalten. Dieser lässt sich durchaus auch für Mathematikunterricht fruchtbar machen.

Lineare Approximation

Die Grundfrage lautet, welche Bedingungen an eine Gerade g gestellt werden sollen, damit diese als in einem gewissen Sinn beste lokale lineare Approximation für die Funktion f akzeptiert wird.



Ist f eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion und $g = m \cdot x + n$ eine lineare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- $g(x_0) = f(x_0)$ und
- $f(x_0+h) = f(x_0) + m \cdot h + r_{m,x_0}(h) \cdot h$,

  wobei $\lim\limits_{h\to 0} r_{m,x_0}(h) = 0$,

dann heißt m die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Abbildung 1 **Abbildung 2**

Zunächst sollen f und g an der Stelle x_0 übereinstimmen. Damit erhält man jedoch ein ganzes Geradenbüschel durch den Punkt $(x_0,f(x_0))$. Für alle Geraden dieses Büschels strebt der absolute Fehler der Approximation mit h gegen null. Um eine Gerade als beste Approximation auszuzeichnen, wird zusätzlich gefordert, dass nicht nur der absolute Fehler, sondern auch der zu h relative Fehler $r_{m,x0}$ mit h gegen null geht. Dies liefert dann die Definition der Differenzierbarkeit wie in Abbildung 2.

Chancen und Hürden

Jede Wahl eines Zugangs zur Einführung eines neuen mathematischen Begriffes oder Konzeptes im Unterricht birgt in sich bestimmte Chancen und Hürden.

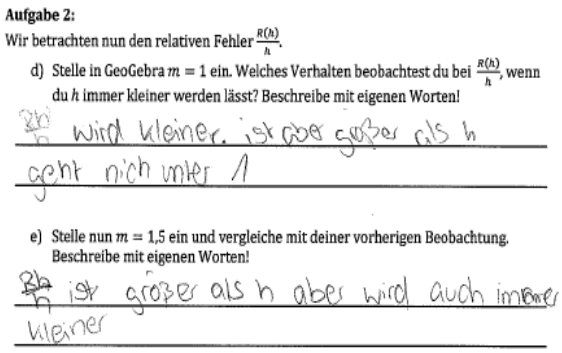
Eine Chance ist, dass eine Grundidee der Analysis integraler Bestandteil des vorgestellten Zugangs ist: die Idee der Linearisierung, das heißt „Krummes" durch „Geradliniges" möglichst gut anzunähern und so beschreiben zu können. Dies ist jedoch eine vornehmlich innermathematische und verhältnismäßig abstrakte Motivation – letzteres ist durchaus als eine Hürde einzuordnen. Der gewählte Zugang erlaubt es hervorzuheben, wie Funktionen als

Modell und Prognose(-instrumente) verwendet werden können. Eine Hürde stellt der Übergang vom absoluten zum relativen Fehler dar. Der für die Differentialrechnung charakteristische Vorgang der Bildung von Grenzwerten kommt bei der Betrachtung des Fehlers der Approximation zum Tragen. Allerdings müssen dabei im Wesentlichen „nur“ Nullfolgen von nicht-Nullfolgen bzw. Grenzwerte gleich und ungleich null unterschieden werden. Im Umgang mit konkreten Beispielen zeigt sich auch, dass Schüler hier einen Begriff vom Grenzwert als Schranke erwerben, der geeignet aufgefasst eine statische Sicht auf den Grenzwert ermöglichen kann. Weiterhin ist der Zugang nützlich, will man beispielsweise im Rahmen eines Leistungskurses Ableitungsregeln beweisen, da sich die Beweise bei dieser Definition der Ableitung durch direktes Ausrechnen ergeben. Außerdem trägt dieser Zugang auch weiter als andere, da er eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zulässt.

Unterricht

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Unterrichtseinheit zur Einführung des Ableitungsbegriffs aus der Perspektive der linearen Approximation dargestellt. Ziel ist es aufzuzeigen, welche Vorstellungen zum Grenzwertbegriff Schüler der 10. Klassenstufe bei einer Einführung des Ableitungsbegriffs über lineare Approximation entwickeln können. Die Schülerlösungen in den Abbildungen 3 und 4 stammen aus einem Unterrichtsversuch in einem Wahlpflichtkurs Mathematik Klasse 10 eines Berliner Gymnasiums.

Dem vorgestellten Ausschnitt vorangegangen waren verschiedene vorbereitende Aufgaben und Problemstellungen zum Themenbereich „(lineare) Funktionen als Modell und Prognose“, die der Auffrischung von Wissen aus der Mittelstufe und gleichzeitig der Einleitung in den neuen Themenkomplex dienten. Hierauf aufbauend wurde die Frage aufgeworfen, welche Gerade bzw. lineare Funktion denn eine gegebene Funktion in einer Umgebung einer bestimmten Stelle besonders gut beschreibt – denn natürlich sind die wenigsten Zusammenhänge selbst linear, lassen sich jedoch lokal mit Hilfe von linearen Funktionen beschreiben. Zunächst wurde eine zur Abbildung 1 ähnliche Grafik für ein konkretes Funktionsbeispiel entwickelt. Den Schülern standen Arbeitsblätter mit konkreten Aufgabenstellungen und GeoGebra Applets zur Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung. Die Applets sind bewusst so gestaltet, dass die Schüler sich auf die wesentlichen Vorgänge konzentrieren können, indem sich ihnen einige, jedoch nicht zu viele, Möglichkeiten der Variation bieten.



Aufgabe 2:
Wir betrachten nun den relativen Fehler $\frac{R(h)}{h}$.

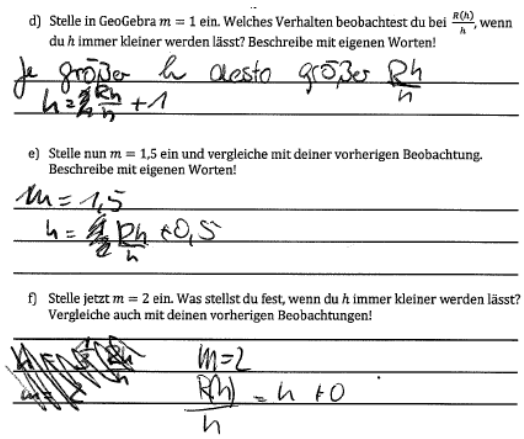
d) Stelle in GeoGebra $m = 1$ ein. Welches Verhalten beobachtest du bei $\frac{R(h)}{h}$, wenn du h immer kleiner werden lässt? Beschreibe mit eigenen Worten!

$\frac{Rh}{h}$ wird kleiner, ist aber größer als h
geht nich unter 1

e) Stelle nun $m = 1{,}5$ ein und vergleiche mit deiner vorherigen Beobachtung. Beschreibe mit eigenen Worten!

$\frac{Rh}{h}$ ist größer als h aber wird auch immer
kleiner

Abbildung 3



d) Stelle in GeoGebra $m = 1$ ein. Welches Verhalten beobachtest du bei $\frac{R(h)}{h}$, wenn du h immer kleiner werden lässt? Beschreibe mit eigenen Worten!

je größer h desto größer $\frac{Rh}{h}$
$h = \frac{Rh}{h} + 1$

e) Stelle nun $m = 1{,}5$ ein und vergleiche mit deiner vorherigen Beobachtung. Beschreibe mit eigenen Worten!

$m = 1{,}5$
$h = \frac{Rh}{h} + 0{,}5$

f) Stelle jetzt $m = 2$ ein. Was stellst du fest, wenn du h immer kleiner werden lässt? Vergleiche auch mit deinen vorherigen Beobachtungen!

$m = 2$
$\frac{R(h)}{h} = h + 0$

Abbildung 4

Die in den Abbildungen 3 und 4 gezeigten Ausschnitte zeigen gut, wie die Schüler mit der für sie unvertrauten Grenzwertbildung umgehen (die an dieser Stelle nicht explizit so genannt und nicht thematisiert wird). Die Schülernotizen prägten das anschließende Unterrichtsgespräch. Die Schüler haben hier eine Sicht auf Grenzwerte als Schranke gewonnen: „geht nicht unter 1“(Abbildung 3). Abbildung 4 zeigt ein Beispiel für den Versuch, dies arithmetisch zu greifen. Im Unterrichtsgespräch ergab sich hieraus dann, dass als beste Approximation die Gerade gewählt werden sollte, bei der null diese Schranke ist, denn im Umkehrschluss hieße das ja, dass der Fehler so klein wird, wie wir wollen, wenn nur h klein genug gewählt wird.

Ausblick

Die Unterrichtseinheit wird ein weiteres Mal im Frühjahr 2015 im regulären Mathematikunterricht einer 10. Klasse eines Berliner Gymnasiums erprobt. Auf theoretischer Ebene wird die Frage beantwortet, welchen Zielen im Sinne von Allgemeinbildung und von extern normativ formulierten Leitideen man mit einem solchen Zugang (eher) gerecht werden kann und welche horizontalen und vertikalen Vernetzungsmöglichkeiten sich eröffnen.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

DIFF (1978). Analysis MA1 Zugänge zur Differentialrechnung. *MATHEMATIK Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II.* Tübingen: Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen.

Körle, H.-H. (2009). *Die phantastische Geschichte der Analysis.* München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

Wittmann, E. (1972). Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte*, 174-186.

Diana HENZ, Mainz; Reinhard OLDENBURG, Augsburg; Wolfgang I. SCHÖLLHORN, Mainz

Förderung visuell-räumlicher Lösungsstrategien bei Algebra und Geometrie durch Bewegung: eine EEG-Studie

Aktuelle Studien aus dem Bereich der Kognitions- und Neurowissenschaft belegen Zusammenhänge von körperlichen Bewegungen und kognitiven Verarbeitungsprozessen. Angelehnt an diese Erkenntnisse erfährt das Konzept der bewegten Schule seit einigen Jahren größere Aufmerksamkeit (z. B. Högger, 2013). Für den mathematischen Bereich finden sich Hinweise auf einen Zusammenhang von körperlicher Bewegung und mathematischen Fertigkeiten (Correa-Burrows, Burrows, Orellana & Ivanovic, 2014). Wenig untersucht ist bisher die genaue Schnittstelle zwischen kognitiven Prozessen auf Verhaltensebene und der korrespondierenden Gehirnaktivität bei mathematischen Arbeitsprozessen unter Bewegung. Eine Kenntnis dieser Zusammenhänge kann für die Gestaltung des Mathematikunterrichts, etwa im Sinne eines Einsatzes von Bewegungen während des Lernprozesses, für die Förderung mathematischer Leistungen, insbesondere solcher, die eine visuell-räumliche Verarbeitung erfordern (Alibali et al., 2013), von entscheidendem Nutzen sein.

Algebraischer Symbolraum

Ausgehend von der – nicht unumstrittenen – These von Lakoff und Núñez (2000), dass auch abstrakte Ideen durch konzeptuelle Metaphern aus körperlichen Erfahrungen gebildet werden, hat sich eine Forschungsrichtung entwickelt, die insbesondere Gesten bei algebraischen Transformationsprozessen analysiert. Wittmann, Flood und Black (2012) belegen, dass es angemessen ist, die Bewegung der Symbole beim Arbeiten im algebraischen Kalkül analog zur Bewegung physikalischer Objekte zu beschreiben.

Erklärungen für eine bewegungsbezogene Verarbeitung von Algebra lassen sich aus dem Bereich der Kognitionswissenschaft ableiten. Das Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1986) etwa postuliert verschiedene Subsysteme, die modalitätsspezifisch Informationen verarbeiten, wobei empirische Studien zeigen, dass visuell-räumliche Informationen und Bewegungsinformationen im gleichen Subsystem verarbeitet werden (Logie & Della Sala, 2005). Direkte empirische Evidenz für eine visuell-motorische Repräsentation von Algebra findet sich im Bereich der Neurowissenschaft (Fields, 2013). Eine fMRT-Studie von Leikin, Waisman, Shaul und Leikin, (2014) belegt Übergänge von einer visuell-räumlichen zu symbolischer Verarbeitung bei Algebra und Geometrie.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zusammenfassend kann aus diesen Arbeiten die Hypothese vom algebraischen Symbolraum abgeleitet werden: Algebraische Manipulationen finden in einem Symbolraum statt, der analog zu unserem räumlichen Anschauungsraum strukturiert ist. Mit der vorliegenden Untersuchung soll untersucht werden, ob (1) durch bewegtes Sitzen visuell-räumliche Verarbeitungsstrategien bei Algebra gefördert werden, (2) algebraisches Handeln, vergleichbar räumlichem Manipulieren, eine Aktivierung von Gehirnarealen herbeiführt, die mit visuell-räumlicher Verarbeitung assoziiert sind. (3) Einflüsse des Expertisegrades hinsichtlich der Gehirnaktivierung bei der Aufgabenbearbeitung unter Bewegung eine Rolle spielen.

Die vorliegende Studie schließt inhaltlich und methodisch an eine Studie von Henz, Schöllhorn und Oldenburg (2014) an, in der die Wirkung von bewegtem Sitzen auf die mathematische Leistung in den Bereichen Algebra, Arithmetik und Geometrie und die korrespondierende Gehirnaktivität mittels Elektroenzephalogramm (EEG) untersucht wurde.

Studiendesign

In der vorliegenden Studie wurden n = 12 gesunde Probanden im Alter von 22.1 bis 24.2 Jahren getestet. Sechs Probanden wurden der Gruppe der Geübten (Studierende der Mathematik, Bachelor of Arts im 5. Fachsemester), sechs Probanden der Gruppe der Ungeübten (Studierende der Sportwissenschaft, Bachelor of Arts im 5. Fachsemester) nach einer Selbsteinschätzung der mathematischen Kompetenz auf einer zehnstufigen Likert-Skala in den drei getesteten Bereichen zugeteilt. Zur Erfassung der mathematischen Leistung wurde ein Arithmetiktest (Num) eingesetzt, der ad hoc, aber theoriebasiert (vgl. Padberg, 2007) entwickelt wurde, sowie ein Algebratest (Alg) zur Lösung linearer Gleichungen, die auf Niveau 1 und 2 rein arithmetisch durch Rückwärtsrechnen gelöst werden konnten, während auf Niveau 3 die Unbekannte beidseitig auftritt, so dass sie mental von einer Seite der Gleichung zur anderen bewegt werden muss. Das Raumvorstellungsvermögen (Geo) wurde mit dem Bausteine-Test von Birkel, Schein und Schumann (2002) erfasst. In einem 2 (körperliche Haltungskontrolle im Sitzen: statisch und dynamisch) x 3 (mathematischer Teilbereich: Num, Alg, Geo) x 3 (Schwierigkeitsniveau: leicht, mittel, schwer) Design wurden die Testaufgaben im Multiple-Choice-Format für die Kombinationen von Aufgabentyp und Niveau geblockt am PC bearbeitet, wobei die Blöcke randomisiert dargeboten wurden.

Die elektrische Gehirnaktivität wurde mittels EEG von 19 Elektroden nach dem internationalen 10-20 System mit einer Frequenz von 256 Hz vor, während und nach der Aufgabenbearbeitung aufgezeichnet. Für die EEG-

Daten wurden die Leistungsdichtespektren für das Theta- (4-7.5 Hz), Alpha- (8-13 Hz), Beta- (13-30 Hz) und Gamma-Band (30-40 Hz) ermittelt. Die Anzahl der erzielten korrekten Antworten in den mathematischen Tests sowie die Leistungsdichtespektren der EEG-Frequenzbänder wurden Varianzanalysen mit Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests unterzogen.

Ergebnisse

Die Verhaltensdaten belegen bessere Leistungen in allen Teilbereichen unter bewegtem Sitzen, $F(1, 11) = 5.46$, $p < .05$. Es zeigt sich ein signifikanter Effekt des Expertiselevels, $F(2, 22) = 4.38$, $p < .05$, mit einer signifikanten Interaktion von Expertiselevel und Art des Sitzens, $F(2, 22) = 4.21$, $p < .05$. Anhand der EEG-Spontanaktivität lassen sich Effekte der Haltungskontrolle in Abhängigkeit von der Art der Mathematikaufgabe und des Schwierigkeitsgrades auf die Zusammensetzung der Frequenzbänder beobachten. Bei Alg3 und Geo3 tritt eine erhöhte Theta- und Alpha-Aktivität in den visuellen, somatosensorischen und motorischen Arealen (jeweils $p < .05$), bei Num3 eine erhöhte Gesamtaktivität im Beta- ($p < .05$) und Gamma-Band ($p < .01$) bei dynamischem Sitzen auf. Während bei den Ungeübten das beschriebene Muster der Gehirnaktivierung mit stärkerer Aktivierung des Theta- und Alpha-Bandes auftritt, zeigt sich in der Gruppe der Geübten eine geringe Ausprägung der beschriebenen Gehirnaktivierung.

Diskussion

Die Ergebnisse belegen, dass dynamisches Sitzen visuell-räumliche Verarbeitungsstrategien bei Algebra und Geometrie fördert. Algebraisches Handeln führt dabei eine Aktivierung von Gehirnarealen herbei, die mit visuell-räumlicher Verarbeitung assoziiert sind, wobei eine Stimulation des motorischen Systems durch bewegtes Sitzen eine visuell-räumliche Verarbeitung fördert. Der Expertisegrad spielt hierbei eine entscheidende Rolle. Während bei Ungeübten eine sehr starke Gehirnaktivierung in den visuellen und motorischen Arealen zu beobachten ist, fällt diese bei den Geübten in den gleichen Arealen geringer aus. Experten scheinen eher auf automatisierte Verarbeitungsstrategien zurückzugreifen. Zusammenfassend stützen die Ergebnisse die These des algebraischen Symbolraumes. Die Ergebnisse legen den Einsatz von visuell-motorischen Lern- und Vermittlungsstrategien nahe, da das Gehirn eine physiologische Bereitschaft für eine visuell-räumliche Verarbeitung bei Algebra und Geometrie aufweist. Ferner regen die Ergebnisse an, im Algebra- und Geometrieunterricht Lernumgebungen einzusetzen, die Bewegungen und somit eine visuell-räumliche Verarbeitung fördern. Die vorliegenden Ergebnisse liefern ein wichtiges Argument für den Einsatz von Medien und Geräten, die ein perzeptuell-motorisches

Handeln beim Mathematiklernen im Bereich Algebra und Geometrie fördern (vgl. Hewitt, 2014; Nemirovsky, Kelton & Rhodehamel, 2013).

Literatur

Alibali, M.W., Young, A.G., Crook, N.M., Yeo, A., Wolfgram, M.S., Ledesma, I.M., Nathan, M.J., Church, R.B. & Knuth, E.J. (2013). Students learn more when their teacher has learned to gesture effectively. *Gesture, 13*(2), 210–233.

Baddeley, A.D., & Hitch, G.J. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 47–89). New York: Academic Press.

Birkel, P., Schein, A., & Schumann, H. (2002). *Bausteine-Test*. Hogrefe. Göttingen.

Correa-Burrows, P., Burrows, R., Orellana, Y. & Ivanovic, D. (2014). Achievement in mathematics and language is linked to regular physical activity: a population study in Chilean youth. *Journal of Sports Sciences, 32*(17), 1631-1638.

Fields, C. (2013). Metaphorical motion in mathematical reasoning: further evidence for pre-motor implementation of structure mapping in abstract domains. *Cognitive Processing, 14*(3), 217–229.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. New York: Springer.

Henz, D., Schöllhorn, W.I. & Oldenburg, R. (2014). Bessere Mathematikleistungen durch bewegtes Sitzen? Eine EEG-Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 523–526). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Hewitt, D. (2014). A symbolic dance: the interplay between movement, notation, and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 1–31.

Högger, D. (2013). *Körper und Lernen. Wie Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen*. Bern: Schulverlag.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Leikin, M., Waisman, I., Shaul, S. & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation from a visual to a symbolic representation in algebra and *geometry. Journal of Integrative Neuroscience, 13*(1), 35–59.

Logie, R.H. & Della Sala, S. (2005). Disorders of visuo-spatial working memory. In A. Miyake & P. Shah (Hrsg.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 81–121). New York: Cambridge University Press.

Maus, J., Henz, D. & Schöllhorn, W.I. (2013). Increased EEG-beta activity in attentional tasks under dynamic postural control. In U. Ansorge, E. Kirchler, C. Lamm & H. Leder (Eds.), *TeaP 2013. Abstracts of the 55th Conference of Experimental Psychologists* (p. 396). Lengrich: Pabst Science Publishers.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments; Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372–415.

Padberg, F. (2007). *Didaktik der Arithmetik*. München: Spektrum.

Wittmann, M.C., Flood, V.J. & Black, K.E. (2012). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 169–181.

Raja HEROLD, Essen

Problemlösen lernen mit Strategieschlüsseln – Eine Pilotstudie

1. Hintergrund

Problemlösen gilt als eine Schlüsselkompetenz und wichtige prozessbezogene Kompetenz im Mathematikunterricht, findet aber in der Schule wenig Umsetzung. Problemlösen wird hier als zielorientierter Prozess verstanden, bei dem es gilt, eine Barriere zu überwinden. Ein Problem ist also eine Aufgabe, die für den Lernenden keinen direkt erkennbaren Lösungsweg aufzeigt und i.d.R. als schwierig empfunden wird (vgl. Schoenfeld 1985).

Wie aber können Lernende zu guten Problemlösern werden? Zwei Faktoren scheinen dafür wichtig: Heurismen und Metakognition (vgl. ebd.). Heurismen werden hier als Problemlösestrategien verstanden, die als Werkzeug zur Problembearbeitung dienen (vgl. Leuders 2010). Viele Trainings wurden entwickelt und in Studien evaluiert, um Heurismeneinsatz und Metakognition explizit zu fördern. Leider zeigen Probanden solcher Studien trotz eines hohen Zeit- und Trainingsaufwands kaum bessere Leistungen als TeilnehmerInnen entsprechender Kontrollgruppen (siehe u.a. Hembree 1992). Erschwert wird dies noch durch die begrenzte Bereitschaft von Lehrkräften, Mathematikstunden für ein explizites Training zu „opfern".

Ergänzend zu den expliziten Trainings wurden sogenannte Strategieschlüssel (siehe Abb. 2) entwickelt (vgl. Barzel et al. 2014). Sie werden als *prompts*, ähnlich wie Hilfekärtchen, verwendet und benötigen weder ein vorheriges Training, noch eine besondere Einführung. Die Lernenden haben während des Problemlöseprozesses Zugang zu den Schlüsseln und können diese folglich für neue Hinweise und Stimuli nutzen, die ggf. alternative Perspektiven auf das Problem und den Problemlöseprozess eröffnen.

2. Forschungsfragen

Basierend auf den Ergebnissen von Philipp (2013) und den Erfahrungen aus „Mathe sicher können" (Barzel et al. 2014) lässt sich ein hohes Potential der Strategieschlüssel vermuten, Problemlöseprozesse von SchülerInnen positiv zu beeinflussen und so indirekt Problemlösestrategien zu vermitteln.

Hauptziel der hier vorgestellten Pilotstudie besteht darin, Nutzertypen der Strategieschlüssel zu identifizieren. Dazu wird untersucht, (1) wie Lernende mit den Strategieschlüsseln umgehen und (2) inwiefern der Einsatz von Strategieschlüsseln den Problemlöseprozess beeinflusst.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

3. Design der Studie und Methode

Wahl der Probanden: 10 SchülerInnen (7 bis 10 Jahre) aus den Klassen 3 und 4 nahmen an der Studie teil. Sie besuchen freiwillig die AG „Mathe für schlaue Füchse“ an der Universität Duisburg-Essen, beschäftigen sich gerne mit Mathematik, sind motiviert – also für diese Studie gut geeignet. Ein Eingangstest zur Teilnahme an der AG fand nicht statt. Aussagen über den mathematischen Wissensstand der Kinder sind also nicht möglich.

Wahl der Aufgaben: Die Problemaufgaben sollten von Kindern der Klassen 3 bis 7 bearbeitet werden können und die folgenden Kriterien erfüllen:

- Die Aufgabe sollte bzgl. der Anzahl der Lösungswege möglichst offen sein (vgl. Schoenfeld 1985).
- Um eine Aufgabe lösen zu können, sollte das benötigte Vorwissen so gering wie möglich sein dürfen (vgl. Schoenfeld 1985, Leuders 2010).
- Mindestens zwei der angebotenen Strategieschlüssel (Heurismen) sollten potentiell hilfreich sein, um die Aufgabe zu lösen.

Bauernhof	**Sieben Tore**
Auf dem Bauernhof gibt es ein Freigehege für die Hühner, in dem auch Kaninchen gehalten werden. Jens steht am Zaun und zählt 20 Tiere mit insgesamt 70 Beinen. Wie viele Hühner sind es?	Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er durch 7 Tore gehen. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele Äpfel hatte er am Anfang?

Abb. 1: Zwei der gewählten Aufgaben (Bauernhof: Collet 2009, Sieben Tore: Bruder et al. 2005)

Mit diesen Kriterien wurden insgesamt 6 Problemaufgaben aus verschiedenen mathematischen Bereichen gewählt. Zwei arithmetische, am häufigsten gewählte Probleme mit interessanten Prozessen werden in diesem Beitrag vorgestellt (siehe Abb. 1). Jedes Kind bearbeitete 1 bis 4 Problemaufgaben. Dadurch wurden insgesamt 27 Prozesse aufgezeichnet und analysiert.

Wahl der Strategieschlüssel: Von den 8 angebotenen Strategieschlüsseln (siehe exemplarisch Abb. 2) zielt jeder auf mindestens einen bestimmten Heurismus ab, der sich unter anderem an Pólya (2004) orientiert.

Abb. 2: Ein exemplarischer Strategieschlüsselbund

Methodologische Entscheidungen: Es wurden *task-based interviews* durchgeführt, bei denen jede/r SchülerIn ein Problem bearbeitet und dabei ggf. die Strategieschlüssel einsetzt. Während der Aufgabenbearbeitung sollten die SchülerInnen laut denken und so ihr Vorgehen erklären.

Auswertung der Videodaten: Die insgesamt 27 Problemlöseprozesse wurden entsprechend der 6 Problemlöseepisoden von Schoenfeld (1985) kodiert und mit Hilfe des Kodiermanuals von Rott (2013) konkret durchgeführt. Zusätzlich wurden die Phasen des Schlüsseleinsatzes markiert.

4. Ergebnisse

Es folgt die Beschreibung von vier typischen Schülerprozessen.

Tim (8 J., 3. Kl., Bauernhof): Er liest und analysiert das Problem. Er entscheidet sich dafür, ausgehend von den 70 Beinen, solange 4 Beine abzuziehen, bis es nicht mehr weiter geht. Die Schlüssel scheinen auf den Verlauf seines Prozesses keinen Einfluss zu haben.

Carolin (8 J., 4. Kl., 7 Tore): Sie liest, analysiert und exploriert intensiv. Sie versucht die Anfangszahl zu ermitteln. Nach 8 min wählt sie 2 Schlüssel („Male ein Bild." und „Arbeite von hinten."). Sie malt die Wächter in den Toren und erkennt die Möglichkeit, nicht die Start- sondern die Endzahl zu notieren – also rückwärts durch die Tore zu gehen. Durch den Einsatz der Schüssel hat sie ihre anfängliche Strategie verändert.

Rik (9 J., 4. Kl., Bauernhof): Nach Lesen, Analyse und versucht er verschiedene Ansätze und greift nach 5:30 min zum Schlüssel „Erstelle eine Tabelle". Nun variiert er systematisch die Anzahl der Tiere und kommt nach weiteren 3 min erfolgreich zur Lösung. Er wählt einen Schlüssel, bearbeitet ihn, behält aber seine vorherige Strategie bei.

Alwin (7 J., 3. Kl., 7 Tore): Alwin liest und analysiert das Problem intensiv. Er arbeitet rückwärts – erst im Kopf, dann schriftlich. Er scheint auf einen Heurismenpool zurückzugreifen, ohne dabei die Schlüssel zu nutzen.

Bei der Analyse der 27 Prozesse wurden unterschiedliche Beispiele kontrastiert und ähnliche Problembearbeitungen zusammengefasst (Kelle & Kluge 2010). Letztlich konnten vier Nutzertypen identifiziert werden, von denen jeweils ein Vertreter durch die oben aufgeführten Bearbeitungsprozessen vorgestellt wurde.

- Die Strategieschlüssel werden eingesetzt und bearbeitet. Danach ändert sich die bisherige Strategie. (siehe Carolin)
- Die Strategieschlüssel werden eingesetzt und bearbeitet. Die bisherige Strategie wird beibehalten. (siehe Rik)
- Die Strategieschlüssel werden *nicht* eingesetzt. Strategien werden dennoch verwendet und scheinen internalisiert. (siehe Alwin)
- Die Strategieschlüssel werden *nicht* eingesetzt. Eine Strategie wird verfolgt. (siehe Tim)

5. Diskussion und Ausblick

Der Einsatz von Heurismen ist ein essentielles Element für (erfolgreiches) Problemlösen. Allerdings sind bisherige Heurismentrainings oft zeitaufwändig und/ oder zeigen nur eingeschränkten Erfolg. Deswegen wurde ein alternativer Ansatz entwickelt, der den SchülerInnen den Einsatz von Heurismen ohne vorheriges Training näher bringen kann: heuristische Hilfekarten in Form von Strategieschlüsseln.

Es wurden vier Nutzertypen der Strategieschlüssel identifiziert. Bisher wurden keine weiteren Typen gefunden. In weiteren Studien wird diese Typologie überprüft. Durch die bisherigen Ergebnisse und Erfahrungen ist davon auszugehen, dass die Schlüssel auch in höheren Jahrgangsstufen und mit anderen Aufgaben wirkungsvoll sind. Vermutlich können sie langfristig als eine Art Werkzeugkoffer dabei helfen, Heurismen flexibel einzusetzen. Weitere Studien werden deshalb in den Klassen 5 bis 7 durchgeführt.

Bemerkung

Ich danke Benjamin Rott und Timo Leuders für ihre konstruktiven Anmerkungen und Vorschläge bei diesem Promotionsvorhaben.

Literatur

Barzel, B., Ehret, M., Herold, R. & Leuders, T. (2014). Lernförderliche Unterrichtskultur. In Ch. Selter u.a. (Hrsg.), *Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Berlin: Cornelsen, S. 13-16.

Bruder, R., Büchter, A., & Leuders, T. (2005). Die "gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In G. Graumann (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*. Münster: WTM.

Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242-273.

Kelle, U., & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung*. 2. ed. Wiesbaden: VS Verlag.

Leuders, T. (2010). Problemlösen. In T. Leuders (Ed.), *Mathematik-Didaktik. Praxishand-buch für die Sekundarstufe I und II.* 5. Auf. Berlin: Cornelsen-Scriptor, 119-135.

Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pólya, G. (2004). *How to Solve it. A New Aspect of Mathematical Method* (10 ed.). USA: Princeton.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, London: Academic Press Inc.

Kurt HESS, Barbara HOHL, Zug

Mathwelt 1 – ein Lehrmittel für Kindergärten bis 2. Klassen

1. Anliegen und Adressaten

‚Mathwelt 1' entspricht einem in Entwicklung begriffenen, kompetenzorientierten Lehrmittel, welches vielfältige Lernbedürfnisse und -kulturen im Unterricht mit 4- bis 8-jährigen Kindern bedienen möchte. Dieses richtet sich betont an altersdurchmischte Klassen und (entwicklungs-/lernbedingt) heterogene Jahrgangsklassen. Die gemeinsamen Lernanlässe für heterogene Gruppen werden durch progressiv angelegte Aufgaben für homogenere Lerngruppen ergänzt. Als gemeinsamer Nenner gilt: Reichhaltige und natürlich differenzierende Aufgabenstellungen, dialogischer Austausch, Erforschen und Argumentieren, Mathematisieren und Darstellen sowie Eigenproduktionen sollen dazu beitragen, dass Kinder tragfähige mathematischen Kompetenzen aufbauen (vgl. Hess & Streit, 2015).

2. Struktur und Aufbau des Lehrmittels

Das Lehrmittel orientiert sich an 10 Themen (z.B. ‚Muster', ‚Wie viele', ‚Feste feiern' oder ‚Geheimnisse im 1+1'). Diese sind jeweils in die Lernphasen Zugänge, Fokussierung, Training und Ergebnissicherung unterteilt.

Die *Zugänge* regen mit offenen Aufträgen u.a. zum Mathematisieren von Sachsituationen (Anwendungsorientierung) und zum Experimentieren mit sog. konstruktiven Materialien wie Muggelsteinen, Spielwürfeln oder Patternblocks an (Strukturorientierung). Die natürlichen Differenzierungsmöglichkeiten erlauben ein gemeinsames Lernen von Kindern mit betont heterogenen Lernvoraussetzungen.

Die *Fokussierung* enthält Aufgabenstellungen entlang der Kompetenzen des Schweizer Lehrplans 21. Die Aufgaben sind in Kompetenzniveaus aufgeteilt (hingegen *betont* nicht nach Klassen- oder Altersstufe) und etwas geschlossener gehalten als die Aufträge im Bereich Zugänge. Dennoch geben die Anregungen im didaktischen Begleitkommentar zahlreiche Hinweise zur Anreicherung, damit sie Kinder mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen gleichermaßen herausfordern.

Das Automatisieren in der Phase *Training* erfolgt mehrheitlich durch bekannte Regelspiele wie Memory oder Elfer raus, welche Gelegenheiten zum kommunikativen Austausch bieten.

Die *Ergebnissicherung* erfolgt gegen Ende der Themen, indem die Kinder z.B. ihre Ergebnisse und Erkenntnisse in einer Ausstellung präsentieren oder in einer Mathekonferenz diskutieren.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

3. Aufbau von Grundkompetenzen. Beispiele aus ‚Wie viele?' und ‚Muster'

Das Lehrmittel ermöglicht – analog dem Spiralprinzip, unter Berücksichtigung intra- und interindividuell divergierender Entwicklungen – wiederkehrend mathematisch grundlegende Einsichten. So werden z.B. ab Beginn *Vergleiche zwischen Anzahlen* angestellt (Wo hat es mehr / weniger?), die zu notwendigen *Zahlbeziehungen* führen, um Rechenstrategien zum 1+1 ‚Sinn-voll' nutzen zu können (vgl. Abschnitt 5).

Auch die folgenden Beispiele zeigen, wie Grundkompetenzen frühzeitig (im Sinne vorwegnehmenden Lernens) und über einen längeren Zeitraum aufgebaut werden. So lädt das Thema ‚Wie viele?' mit einem Wimmelbild zu *Zählanlässen* und zur Auseinandersetzung mit *Mengenvergleichen oder -veränderungen* ein. Die Bilder regen die Kinder an, selber mit einer ‚Zählbrille' Zahlen und Mengen in der Umwelt zu suchen und zu erforschen. Die Entdeckungen und Erkenntnisse werden mit Bildern, Zählstrichen oder geschriebenen Zahlen festgehalten und dialogisch ausgetauscht.

Auch in eher niveauspezifischen Angeboten liegt der Fokus wiederkehrend auf verschieden dargestellten und strukturierten Anzahlen wie Zählstrichen, Finger-, Punkte- oder Würfelbildern. Das 20er- und 100er-Punktefeld sollen - in Verbindung mit konstruktiven Materialien - sehr früh, explorativ und spielerisch genutzt werden. Bereits wenig fortgeschrittene Kinder würfeln, legen und vergleichen Karten mit Darstellungen, welche z.B. die *Kraft der 5* betonen oder *rasche Anzahlerfassungen* verlangen. Die frühzeitig und längerfristig aufgebauten Kompetenzen sollen schließlich zu einem denkenden Rechnen führen, zu dem nicht zuletzt eine 5er- und 10er-Orientierung beitragen (vgl. Abschnitt 5). In späteren Lernprozessen und allenfalls spezifischer ausgerichteten Übungen können die Kinder auf diesen Erfahrungen bauen.

Ein weiteres Beispiel: Die Einsicht, dass sich eine Menge unterschiedlich zerlegen und zusammensetzen lässt (*Teile-Ganzes-Prinzip*), ist eine grundlegende Voraussetzung für den Erwerb der Grundoperationen (Scherer & Moser Opitz, 2010). Vor diesem Hintergrund erhalten die Kinder im Thema ‚Wie viele?' offene und geführte Gelegenheiten, um Anzahlen mit konstruktiven Materialien zu legen, aufzuteilen, zu verändern, anzugleichen etc. Spätere Lerngelegenheiten regen an, Anzahlen in einer ‚guten Gestalt' darzustellen, so dass sie rasch erfasst werden können.

Schliesslich ein letztes Beispiel dafür, wie erste Themen Kompetenzen zum 1+1 aufbauen. Auch das Verdoppeln wird mit Handlungen und Anschauungsmitteln, gerne Fächer verbindend – z.B. mit Klecksbildern, Spiegeln, Gestalten mit Muggelsteinen, Plättchen oder Streifen am 20er- und 100er-Feld – vorbereitet.

4. ‚Geheimnisse im 1+1'

Die Beispiele zeigen, dass ab Vorschulalter Kompetenzen in Richtung Zählen, Teile-Ganzes-Prinzip, Kraft der 5, Bündeln und Verdoppeln aufgebaut werden. Auch das Thema ‚Geheimnisse im 1+1' geht von bildlich gestellten, offenen Sachaufgaben und Herausforderungen mit konstruktiven Materialien aus. Die Kinder knüpfen an ihren Vorerfahrungen und ihrem Vorwissen an und bereiten sich individuell und gemeinsam auf kommende Herausforderungen vor (vgl. Hess & Streit, 2015).

Die folgende Beschreibung beleuchtet den Aufbau von Strategien zum 1+1. Üblicherweise erfolgt dies in einer 1. Klasse, obschon das Lehrmittel weniger auf eine Stufung nach Schuljahren als auf sukzessive Kompetenzerweiterungen vom Kindergarten bis Ende der 2. Klasse setzt.

5. Strategien zum 1+1 bis 20

Die eher spielerischen Angebote im Vorschulbereich konzentrieren sich auf Handlungserfahrungen und Einsichten im Umgang mit Materialien und Anschauungsmitteln. Es wird (wie oben dargestellt) mit Würfeln gespielt, welche Anzahlen in Form von Zählstrichen, linear angeordneten Punkten, Fingerbildern oder Würfelbildern von 0 bis 5 oder von 1 bis 6 zeigen. Darin wird ein durchgehendes Prinzip deutlich: Nicht Belehren, Beibringen und A4-Formate Bekritzeln stehen im Zentrum, sondern die singuläre Orientierung an arithmetischen Bedeutsamkeiten, in Spielsituationen.

Die schulmathematische Ausrichtung geht von einer schrittweisen Erarbeitung einzelner Strategien zum 1+1 aus. Erst in einer zweiten Lernphase werden Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen in produktiven Übungen oder sog. Entdeckerpäckchen erweitert und flexibilisiert.

Die erste Strategie geht von den Fingern bzw. Händen aus, welche Kinder von sich aus nutzen, wenn sie zählend rechnen. Diese dienen aber nicht als Zählinstrumente, sondern als Anschauungsmittel für die Beziehungen zwischen spontan gezeigten Fingerbildern und den Summen von 5+1 bis 5+5. Zur Strategie ‚Hände' gehören auch Tausch- (z.B. 5+3 / 3+5) oder Umkehraufgaben (8–3 / 8–5). Die Hände können veranschaulichen: Entweder verschwinden die 3 Einzelfinger oder die ganze Hand (vgl. Abb.1). Solche operativen Beziehungen werden mit sog. ‚Hütchen' (vgl. Gaidoschik, 2007; Abb. 2) auch grafisch dargestellt und sind in jeder weiteren Strategie integrativer Bestandteil des Lernangebots.

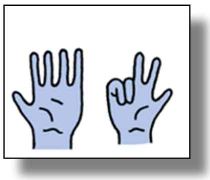


Abb. 1: Fingerbild 8

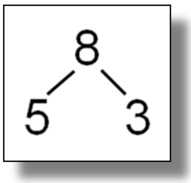


Abb. 2: Darstellung mit ‚Hütchen'

Es folgen die Strategien ‚immer 10', ‚1 mehr, 1 weniger, 1 Unterschied', ‚2 mehr, 2 weniger, 2 Unterschied', ‚doppelt und Hälfte' mit Beziehungen zu Nachbaraufgaben, ‚Kraft der 5' als Variante des Zehnerübergangs (z.B. 8+7 = 5+5+3+2) sowie ‚Kraft der 10', bestehend aus Summen mit 10 im einen oder anderen Summanden und Ableitungen im Sinne von Hilfsaufgaben (9+7 = 10+7–1).

Zu jeder Strategie gehört auch ein intensives Training mit sog. Strategie-Karten in einer klassischen Übungsanlage mit Lernkartei. Die Vorderseite einer Karte enthält jeweils die Rechnung und die Rückseite gibt Hinweise auf die Strategie. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Beispiele für solche Rückseiten: z.B. ein Fingerbild oder ein Hütchen. Auf der Vorderseite könnten die Rechnungen 5+3, 3+5, 8–5 oder 8–3 stehen. Es ist entscheidend, dass die Rückseite auf die Strategie hinweist und nicht das Ergebnis verrät (vgl. Hess, 2015).

Es gibt viele Operationen, die je nach Kind und Situation mit anderen Strategien als den vorgeschlagenen gelöst werden (vgl. Hess, 2012). Deshalb dürfen die Kinder Karten auch neu beschriften, einer anderen Strategiegruppe zuordnen und in dieser üben. Wichtig ist, dass die Strategien nicht Privatsache der Kinder bleiben, sondern öffentlich besprochen werden.

Literatur

Gaidoschik, M. (2007): Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. Wien: öbv – hpt.

Hess, K. & Streit, Ch. (2015). Anliegen und Absichten eines Lehrmittels für die Schuleingangsstufe. In Ch. Müller, L. Amberg, T. Dütsch, E. Hildebrandt, F. Vogt, E. Wannack (Hrsg.), Perspektiven und Potentiale in der Schuleingangsstufe (S. 113-125). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Hess, K. (2015). Heterogene Lehr- und Lernbedürfnisse. 4bis8, H1, 20-22.

Hess, K. (2012). Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen. Seelze: Klett&Kallmeyer.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum

Tobias HOCK, Aachen

Extrinsische Rechtfertigung im Mathematikunterricht: Welche Axiomensysteme setzen sich durch?

„Schülern sollte bewusst gemacht werden, dass es Axiome in der Mathematik gibt, welche Rolle sie spielen und wie Mathematiker zu einer Einigung darüber gelangen, welche Axiome akzeptiert werden sollten.“ (Jahnke, Wambach 2013, S. 469, meine Übers.)

Die in diesem Zitat zum Ausdruck gebrachte Haltung wird von mir in vollem Umfang geteilt. Sie bildet das Fundament der hier angestellten Überlegungen, die Teil meines Promotionsprojekts sind. Kernanliegen ist die Entwicklung zeitgemäßer Unterrichtsmaterialien zur axiomatischen Methode für die Sekundarstufe II.

In Abschnitt 1 des vorliegenden Beitrags wird in kompakter Form dargestellt, welche Begriffe für eine Einführung in axiomatisches Denken und Arbeiten aus meiner Sicht mit Schülern erarbeitet werden sollten. Abschnitt 2 ist ein fachlicher und theoretischer Exkurs, der als Hintergrundwissen für den Leser gedacht ist und in dem die Bedeutung des Begriffs der Hypothese bzw. Forderung bei der Entwicklung und Bewertung mathematischer Theorien geschildert wird. Da dieser Aspekt im Themenbereich Zahlbereichserweiterungen besonders deutlich wird, skizziere ich in Abschnitt 3 ein Unterrichtskonzept für die Einführung der komplexen Zahlen, das den Fokus auf die Frage legt, warum sich diese anfangs auch als „absurd“ bezeichneten Zahlen letztendlich durchgesetzt haben.

1. Begriffliche Vorarbeit

Die unterrichtliche Kommunikation über Beweise und deren Aussagekraft erfordert einen überschaubaren Begriffsapparat, der anhand einfacher und den Schülern bekannter Beispiele (z.B. Innenwinkelsummensatz oder binomische Formeln) aufgebaut werden kann. Wichtig ist die Erkenntnis, dass ein *Beweis* die logische Herleitung einer *Behauptung* (oder auch *Vermutung*, *Hypothese*) aus bereits akzeptierten bzw. bewiesenen *Aussagen* ist: ein Beweis liefert eine gesicherte Aussage der Form „*Wenn* … gilt, *dann* gilt zwingend auch …“. Um die dabei theoretisch entstehende, rückwärts unendliche Folgerungskette zu vermeiden, muss man gewisse Aussagen unbewiesen an den Anfang einer Theorie setzen, die sogenannten *Axiome*. Eine bewiesene Aussage nennt man *Satz* oder *Theorem*.

Dieser Blick auf Beweise, welcher die logische Abhängigkeit von zu beweisender Aussage und dazu benötigten Sätzen in Form von Wenn-Dann-Aussagen betont und somit die Notwendigkeit von Ausgangssätzen ver-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

deutlicht, ist wesentlicher Bestandteil eines angemessenen Bildes von Mathematik.

2. Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung

Eine der prägendsten Entwicklungen der modernen Mathematik war die Abkehr von einer Auffassung von Axiomen als aus sich heraus evidenten Tatsachen, die der Mathematik einen absoluten Wahrheitsanspruch einräumten, hin zu einer formalistischen Auffassung, die lediglich die Widerspruchsfreiheit der Axiome (und damit der daraus deduzierbaren Theorie) fordert und auf ihre inhaltliche Interpretation verzichtet. Allerdings erklärt eine solche Sichtweise nicht, warum sich bestimmte Theorien und Axiomensysteme durchsetzen, andere jedoch nicht.

Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung (wie es Maddy 1990 verwendet) liefert einen Erklärungsansatz für dieses Phänomen: Anstatt Axiome intrinsisch – d.h. aufgrund ihrer Selbst-Evidenz – zu rechtfertigen, fasst die Mathematik diese häufig als Hypothesen auf und untersucht die (inner- wie außermathematische) Fruchtbarkeit der sich daraus (via Deduktion) ergebenden Konsequenzen. Der Terminus Fruchtbarkeit umfasst dabei – ähnlich wie in den empirisch arbeitenden Naturwissenschaften – Aspekte wie „verifiable consequences, lack of disconfirmation, breadth and explanatory power, intertheoretic connections, simplicity, elegance, and so on“ (Maddy 1990, S. 75).

Aufbauend auf dem in Abschnitt 1 geschilderten Wenn-Dann-Charakter mathematischer Aussagen kann mit Schülern ein erweitertes Verständnis mathematischer Theorieentwicklung erarbeitet werden, welches auch extrinsische Rechtfertigungsmuster umfasst. Die für die Schule relevante Erkenntnis sollte sein, dass die Ausgangssätze einer Theorie in bestimmten Fällen eher den Charakter von Annahmen als von Grundwahrheiten haben und sich demnach am Nutzen der daraus deduzierbaren Theorie messen lassen müssen. Für unterrichtliche Zwecke erscheint es daher sinnvoll, statt des Begriffs *Axiom* den der *Hypothese* oder *Forderung* zu benutzen.

3. Unterrichtsreihe: Komplexe Zahlen

Zur unterrichtspraktischen Ausgestaltung des Prinzips der extrinsischen Rechtfertigung empfehle ich einen historisch-genetischen Ansatz für die Einführung der komplexen Zahlen, der in ähnlicher Weise von Malle 2007 geschildert wird und beispielsweise für Zusatzkurse in der Sekundarstufe II geeignet ist. Meine Wahl fiel auf dieses Thema, da die Wichtigkeit von Hypothesen in Form des Permanenzprinzips hier deutlich zu Tage tritt und intrinsische Rechtfertigungen aufgrund der anfangs rein symbolisch auftretenden neuen Zahlen nicht möglich sind.

Die Auseinandersetzung mit komplexen Zahlen begann im 16. Jh. n.Chr. und resultierte aus dem Versuch, allgemeine Lösungsformeln für kubische Gleichungen zu finden. Der italienische Mathematiker und Arzt Gerolamo Cardano entwickelte eine Formel, bei der in bestimmten Fällen Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten. Beispielsweise erhält man für die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ als Lösung $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Ein Vorteil gegenüber einer Heranführung an komplexe Zahlen über quadratische Gleichungen mit negativer Diskriminante ist, dass Schüler anschaulich direkt einsehen können, dass eine kubische Gleichung (mindestens) eine reelle Lösung haben muss, wodurch die Frage nach dem Nutzen dieser zunächst seltsam anmutenden Lösungen von Anfang an eine zentrale Rolle spielt; bei quadratischen Gleichungen mit nicht-reellen Lösungen könnte man hingegen argumentieren, dass es auch geometrisch sinnlos sei, nach einer Lösung der Gleichung überhaupt zu fragen.

Dem Ingenieur und Mathematiker Rafael Bombelli gelang es, seine Vermutung, dass sich „Zahlen" des Typs $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ immer auch in der Form $c + d \cdot \sqrt{-1}$ darstellen lassen, anhand einzelner Beispiele und unter Forderung der Gültigkeit der bekannten Rechengesetze sowie der Gleichung $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$ zu verifizieren. Beispielsweise konnte er zeigen, dass obige Lösung gleich $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ ist, was offensichtlich eine Lösung der Ausgangsgleichung $x^3 = 15x + 4$ liefert. Die Erkenntnis, dass das Rechnen mit diesen neuen Zahlen – das sich hier keinesfalls intrinsisch rechtfertigen lässt, da zunächst nur auf rein symbolischer Ebene ohne konkrete Anschauungen oder Intuitionen operiert wird – zu sinnvollen und brauchbaren Ergebnissen führt, motivierte einige Mathematiker, sich weiter mit ihnen zu beschäftigen. Nach der Einführung des Symbols i für eine Zahl mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ durch Euler und der geometrischen Visualisierung in der Zahlenebene durch Gauss fanden die komplexen Zahlen schließlich durch Hamiltons Definition als Zahlentupel ihren endgültigen Platz in der Mathematik. In der Folge wurden auch zahlreiche außermathematische Anwendungen gefunden.

Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung kann Schülern bei dieser historisch orientierten Betrachtung der komplexen Zahlen leicht verdeutlicht werden: Ausgehend von einer Problemstellung (Lösen von Gleichungen) wurden hypothetische Annahmen formuliert (die Existenz einer Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ sowie die Forderung, mit komplexen Zahlen „wie gewohnt" rechnen zu können), Konsequenzen deduziert (Rechnen auf Grundlage der postulierten Gesetze) und auf ihre Fruchtbarkeit untersucht. Im vorliegenden Fall kann man festhalten, dass sich die den komplexen

Zahlen zugrunde liegenden Hypothesen u.a. deshalb durchgesetzt haben, weil sie sich inner- wie außermathematisch als äußerst ergiebig erwiesen – und nicht etwa, weil sie evident wären.

4. Fazit und Ausblick

Das geschilderte Unterrichtskonzept ist geeignet, um Schülern den hypothetisch-deduktiven Charakter der Mathematik näherzubringen, indem die zentrale Rolle von (vorläufigen) Forderungen/Hypothesen deutlich wird. Von deren Nützlichkeit – geschweige denn „Richtigkeit" – muss man anfangs nicht überzeugt sein, um mathematisch mit ihnen arbeiten zu können. Eine Entscheidung für oder gegen die Ausgangshypothesen geschieht a posteriori durch Betrachtung der darauf aufgebauten Theorie.

Im Anschluss an diese Unterrichtseinheit kann auch anhand anderer Zahlbereiche die Bedeutung von Hypothesen/Forderungen und deren extrinsische Rechtfertigung verdeutlicht werden:

- Die Frage „Warum ist $(-1)\cdot(-1)=1$?" kann mathematisch nur dann ehrlich beantwortet werden, wenn Schülern der hypothetisch-deduktive Zusammenhang zum Distributivgesetz bewusst ist: Wenn $(-1)\cdot(-1)=-1$ *gefordert* wird, muss man auf das Distributivgesetz verzichten; *fordert* man umgekehrt die Gültigkeit des Distributivgesetzes für negative Zahlen, ergibt sich $(-1)\cdot(-1)=1$ als logisch zwingende Konsequenz.
- Ausgehend von der *Forderung* „$0 \cdot b = 1$" für eine hypothetisch neue Zahl b kann man Schülern mit Rechnungen wie beispielsweise

  $$1 = 0\cdot b = (0+0)\cdot b = 0\cdot b + 0\cdot b = 1+1 = 2$$

  eine „Theorie" präsentieren, die sich aufgrund der daraus folgenden Ungültigkeit vieler fundamentaler Rechenregeln (zumindest im Schulbereich) nur schwer rechtfertigen lässt.

Literatur

Jahnke, H. N., Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM, 45,* 469–482.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Malle, G. (2007). Die spannende Suche nach dem *i*. *Mathematik lehren, 142,* 60–63.

Andrea HOFFKAMP, Sabine LÖHR, Bettina ROESKEN-WINTER, Berlin

Binnendifferenzierung und pädagogisches Handeln – Entwicklungsforschung an einer Brennpunktschule

In diesem Beitrag stellen wir ein Unterrichts- und Schulentwicklungsprojekt an einer sogenannten Brennpunktschule einer Großstadt vor, das sich zum Ziel setzt, gemeinsam mit den Lehrpersonen aus der Praxis ein Konzept der Binnendifferenzierung zu erarbeiten, welches zugleich das pädagogische Handeln stärker berücksichtigt als herkömmliche Ansätze. Im Zentrum unserer bisherigen 1,5-jährigen Arbeit steht dabei die Entwicklung der Schule bezogen auf den Mathematikunterricht in stark heterogenen Gruppen. In der (mathematik-)didaktischen Forschungslandschaft sind einige praxisbezogene Ansätze und Konzepte binnendifferenzierenden Unterrichts entstanden (z. B. Leuders & Prediger 2012). Eine derartige Schule ist allerdings in ihrer (Problem-)Struktur so komplex, dass Konzepte für Unterricht an die spezifischen Strukturen anknüpfen müssen, wenn sie erfolgreich sein sollen. Um dies zu erreichen, stellen wir uns der Komplexität in einem systemischen Zugang, welcher in einem Handlungsforschungsansatz auf evolutionäre Innovation (Reinmann 2005) ausgerichtet ist. In der praktischen Arbeit äußert sich dies in einer Form des fachspezifischen Unterrichtscoachings (Staub & Kreis 2013). Dabei übernehmen die Forscherinnen im Entwicklungs- und Unterrichtsprozess Mitverantwortung für die Gestaltungsarbeit. Die Datenerhebung erfolgt durch ethnographische Feldnotizen, dokumentarische Methoden und Interviews. Dabei liegt der Fokus auf der Erarbeitung eines Konzeptes zum binnendifferenzierten Mathematikunterricht unter den spezifischen Gegebenheiten und der Dokumentation des Entwicklungsprozesses aus verschiedenen Perspektiven – vornehmlich einer mathematikdidaktischen, pädagogischen und soziologischen Perspektive. Ziel des Artikels ist es, die Intention und Richtung der bisherigen Entwicklungsforschungsarbeit aufzuzeigen.

Bedingungsfeld und Ansatzpunkte

Bei der Schule handelt es sich um eine Gemeinschaftsschule mit gymnasialer Oberstufe. Der Anteil an Kindern nichtdeutscher Herkunft liegt bei knapp 90 %; ca. 70 % der Familien sind von der Zuzahlung zu Lernmitteln befreit. Die Klassenverbände sind von starker Heterogenität geprägt, darüber hinaus müssen die Anforderungen inklusiver Arbeit gemeistert werden. Die Schule versteht sich als eine lernende Schule, die in den letzten Jahren sehr erfolgreich ihre konzeptuelle pädagogische Arbeit weiterentwickelt. In unserem Projekt steht nun unter den Bedingungen der besonderen pädagogischen Herausforderung die *mathematische* Bildung im Zentrum.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Ausgehend vom 7. Jahrgang[1] wird hierfür gemeinsam mit den Lehrpersonen der Mathematikunterricht weiterentwickelt. Anders als an früheren Hauptschulen in sozialen Brennpunkten (vgl. Straehler-Pohl 2014) ist im Gemeinschaftsschulkonzept der Bildungsaufstieg institutionell angelegt. Mathematikunterricht spielt hierfür eine wesentliche Rolle. Dem Konzept des „fachspezifischen Unterrichtscoachings" (Staub & Kreis 2013) folgend leiten die Forscherinnen das Team des 7. Jahrgangs (ca. 130 Kinder) während des gesamten Schuljahres an, sind im Unterricht aktiv und erstellen in gemeinsamer Verantwortung mit den Lehrpersonen Unterrichtsmaterial.

Drei Säulen binnendifferenzierten Unterrichtens

Bisherige praxisbezogene Konzepte und Vorschläge für binnendifferenzierten Mathematikunterricht kombinieren zumeist inhaltsbezogene und methodische Aspekte. Dabei werden lerntheoretisch begründete Zugänge vorgeschlagen, die den Kindern individuelle Wege zu mathematischen Inhalten – zumeist in Gruppen- oder Partnerarbeit – ermöglichen sollen (Leuders & Prediger 2012, Bruder & Reibold 2010). Voraussetzung für eine erfolgreiche innere Differenzierung ist dabei allerdings eine hohe intrinsische Motivation bei den Schülerinnen und Schülern. Die Kinder unserer Klassen lernen aber in besonderem Maße personenbezogen, weswegen Schülerorientierung und Beziehungsarbeit in spezifischer Weise mitgedacht werden müssen. Gruppenarbeitsmethoden haben aufgrund mangelnder Selbstregulationsmechanismen und mangelnder Selbstwirksamkeitserwartung kaum eine Chance. Hingegen ist eine klare Struktur mit wenigen ausgewählten Zugängen zu mathematischen Inhalten erfolgversprechend. Dies stärkt sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrpersonen, die mit klarem Fokus auf geeignete Zugänge mehr Flexibilität im unterrichtlichen Handeln auf der Mikroebene erhalten. Um Unterrichtsentwicklung voranzutreiben, verfolgen wir einen globalen Ansatz, welcher die Anthropologie aller Beteiligten (Schülerschaft und Lehrpersonen mit ihren Ressourcen und Entwicklungsständen) berücksichtigt und dem die einzelnen Maßnahmen untergeordnet sind (s. Abb., nächste Seite).

Die tragende Säule unterrichtlichen Handelns bildet dabei das „fachlich aufbauende Lernen" (Wittmann 2014). Da der Unterricht in hohem Maße von pädagogischen Herausforderungen geprägt ist, ist es nicht leicht den fachlichen Aufbau so zu gestalten, dass die mathematische Bildung ins Zentrum des Unterrichtsgeschehens rückt. Unsere bisherigen Beobachtungen zeigen, dass pädagogische Probleme oftmals durch einen ungünstigen

[1] In Berlin endet mit Grundschule mit der 6. Klasse, so dass in der 7. Klasse Kinder verschiedener Grundschulen an unserer Schule zusammenkommen.

fachlichen Aufbau bedingt sind und Pädagogik und Fach in einer besonderen wechselseitigen Beziehung stehen. Dies gilt es, bei der Planung und Gestaltung des Fachunterrichts zu berücksichtigen. Zwei umrahmende Säulen sind entsprechend das fachbezogene Feedback und die Schülerorientierung (vgl. Hattie 2009), wobei dem Feedback eine Schlüsselrolle für Binnendifferenzierung und Individualisierung zukommt. Das fachbezogene Feedback ist in seiner Qualität abhängig vom fachlichen Aufbau.

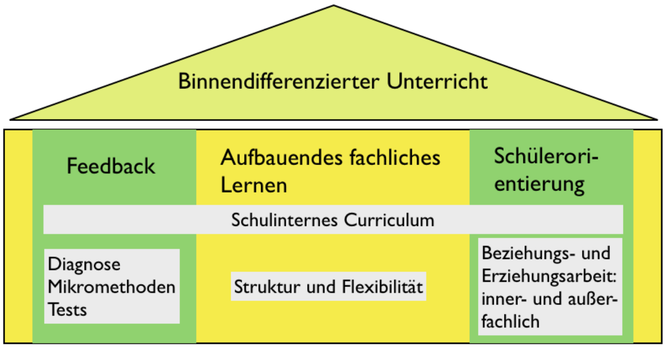


Abb.: Drei Säulen binnendifferenzierten Unterrichtens

Den Säulen sind im Gesamtkonzept des Projektes verschiedene Maßnahmen zugeordnet. Ihre verbindende Ausprägung findet sich in der Konzeption des schulinternen Curriculums wieder, das im Unterrichtsalltag aus der Praxis heraus entwickelt wird.

Konzeption des schulinternen Curriculums

Unter dem schulinternen Curriculum fassen wir ein „Konzept für einen Unterrichtsprozess“, das eine Einheit aus Lehrplan, Lehrbüchern, Planungs- und Unterrichtsmaterialien und Ausgestaltungshinweisen bildet (Sill 2000). Die Entwicklung eines solchen Curriculums ist im Land Berlin den Schulen übertragen worden und ist eine Aufgabe, die ohne Wissens- und Beratungsressourcen von außen nicht zufriedenstellend von einer Schule und ihrem Kollegium geleistet werden kann. Die Konzeption des schulinternen Curriculums ist an den drei Säulen unseres Modells ausgerichtet. Aus mathematikdidaktischer Perspektive orientiert sich der Aufbau an ausgewählten mathematischen Leitlinien und Grundvorstellungen, deren Auswahl sich im Spannungsfeld inhaltlicher Beschränkung und fachlicher Erweiterbarkeit bewegt. Dies beinhaltet sowohl eine pädagogische als auch eine soziologische Komponente: Zum einen muss aus pädagogischer Sicht der Unterricht möglichst vielen Schülerinnen und Schülern „gerecht werden“, und zum anderen darf der Weg zum Bildungsaufstieg nicht abgeschnitten werden. Mathematikdidaktisch wird dies durch das exemplarische Prinzip und die Formulierung von Leitfragen für den Unterricht umgesetzt, methodisch durch das Üben und Festigen in verschiedenen Ausprägungen (Wittmann et al. 2001). Die Entwicklung aus der Praxis heraus sichert zum einen die Praktikabilität und die Berücksichtigung der Ressourcen aller Beteiligter („Was kann ich als Lehrkraft in diesem Kontext leisten?“). Zum anderen sichert die wissenschaftliche Perspektive in Planung und Reflexion die fachliche und didaktische Angemessenheit. Die Unterrichtsmaterialien, die im Laufe der Entwicklung entstehen, beinhalten differenzierende Elemente und Aufgaben und werden nach dem Unterrichtseinsatz reflektiert und ggf. umgearbeitet. Bei den Ausgestaltungshinweisen finden sich Feedbackhinweise und (Mikro-)Feedback-methoden, die einerseits individualisierend wirken, aber auch dem Ziel der „Stärkung des Kindes vom Fach aus“ dienen.

Der Reflexions- und Entwicklungsprozess ist nicht abgeschlossen, er kann hier nur verkürzt dargestellt werden. Im Zuge des Entwicklungsforschungsprojektes entstehen auf der Basis empirischer Daten lokale Theorien, welche das Modell weiter ausschärfen.

Literatur

Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht (S. 67–92). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Hattie, J. (2009). Visible learning: A synthesis of meta-analyses relating to achievement. New York: Routledge.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Differenziert differenzieren – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In A. Ittel & R. Lazarides (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht (S. 35–66). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt Verlag.

Reinmann, G. (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. Unterrichtswissenschaft, 33(1), 52-69.

Sill, H.-D. (2000). Ziele und Methoden einer Curriculumforschung. In M. Neubrand (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 611–614). Hildesheim: Franzbecker.

Staub, F. C. & Kreis, A. (2013). Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen. Journal für LehrerInnenbildung, 2, 8–13.

Straehler-Pohl, H. (2014). Wie Bildung scheitert – Mathematikunterricht im Kontext eingeschränkter Erwartungen. In M. Sertl & I. Erler (Hrsg.), Bildung und Ungleichheit: zur Reproduktion sozialer Ungleichheit in der Schule (S. 63–83). Verein der Förderer der Schulhefte Nr. 154.

Wittmann, E. Ch. (2001). Grundkonzeption des Zahlenbuchs. In E. Ch. Wittmann et al. (Hrsg.), Das Zahlenbuch: Mathematik im 1. Schuljahr, Lehrerband. Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2014). Von allen guten Geistern verlassen. Fehlentwicklungen des Bildungssystems am Beispiel Mathematik. Der Bundesvorsitzende des DPhV e.V. (Hrsg.). Profil. Das Magazin für Gymnasium und Gesellschaft (S. 20–30). Heft 6.

Martina HOFFMANN, Essen

Förderdiagnostische Kompetenzen von Grund- und Förderschullehrkräften im inklusiven Mathematikunterricht

1. Ausgangslage

Die Diagnose vorhandener Kompetenzen von Lernenden, die Anpassung der Lernangebote an die Lernvoraussetzungen in alltäglichen Unterrichtssituationen sowie die differenzierte Förderung gehört zum Tätigkeitsfeld von Lehrkräften und erfordert diesbezüglich Kompetenzen.

Im Umgang mit Heterogenität, mit der Lehrkräfte zunehmend konfrontiert werden, erhalten Diagnose- und Förderkompetenzen eine besondere Bedeutung. Das Heterogenitätsspektrum wird dabei durch die zunehmende Umsetzung von Inklusion hinsichtlich differierender Lernvoraussetzungen erweitert. Für die Realisierung eines inklusiven Mathematikunterrichts ist eine Kooperation der am Unterricht beteiligten Grund- und Förderschullehrkräfte erforderlich (Wember 2013, S. 380), was sich u. a. aufgrund personeller Ressourcen, schulischer Rahmenbedingungen, unterschiedlicher Einstellungen und insbesondere aufgrund fachspezifischer Anforderungen als eher schwierig erweist (Scherer 2015, S. 267 f.).

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Förderdiagnostische Kompetenzen im Mathematikunterricht der Grundschule

Die Förderdiagnostik ist ein typisches sonderpädagogisches Fachgebiet mit einer langen Tradition und entwickelte sich in Abgrenzung zur Selektionsdiagnostik (vgl. u. a. Moser Opitz 2006, S. 10 ff.). Da es im inklusiven Unterricht zu einer Vernetzung der Expertise von Grund- und Förderschullehrkräften und somit auch der Fachdidaktiken kommen muss, könnte der Begriff auch innerhalb der Grundschuldidaktik an Bedeutung gewinnen.

Moser Opitz (2006) definiert Förderdiagnostik fachübergreifend als Diagnose auf der Basis fachlicher, fachdidaktischer, pädagogischer sowie lern- und entwicklungspsychologischer Grundlagen sowie als Planung und Durchführung von Förderung auf der Basis dieser Diagnose (ebd., S. 11 ff.). Als grundlegend und handlungsleitend kann aufgrund der wechselseitigen Beziehung von Diagnose und Förderung die theoretische Expertise identifiziert werden (ebd.). Richtungsweisend ist zudem das Treffen von Wertentscheidungen, d. h. generelle Einstellungen und Haltungen der Lehrkräfte, die Einfluss auf die Gestaltung des Unterrichts nehmen (vgl.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ebd., S. 16 ff.). Eine Diagnostik gibt keinen Aufschluss über die Stabilität von Merkmalen, weshalb aufgestellte Hypothesen kontinuierlich überprüft werden müssen (vgl. ebd., S. 22 f.). Die Förderdiagnostik kann dynamisch und lernprozessorientiert verstanden werden (vgl. Werner 2003, S. 324) und lenkt den Blick auf Entwicklungen und Veränderungen der Lernenden. Hierbei werden deren vorhandene Kompetenzen betrachtet sowie nach möglichen Ursachen für Schwierigkeiten gesucht (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 24). Zudem muss bei jeder Diagnostik eine gewisse Transparenz in Form einer „schulzimmergerechten" Einhaltung der Gütekriterien gewahrt werden (Moser Opitz 2006, S. 21).

Förderdiagnostische Kompetenzen können aufgrund ihrer handlungsleitenden Funktion im Umgang mit Heterogenität als substanziell erachtet werden. Für deren Operationalisierung können verschiedene Konzeptionen zum Professionswissen zugrunde gelegt werden. Das DZLM (2013) unterscheidet bezogen auf die professionelle Kompetenz von Lehrkräften mathematisches und mathematikdidaktisches Fachwissen. Daneben werden auch mathematikbezogene Überzeugungen der Lehrkräfte berücksichtigt. In der Konzeption von Lindmeier (2011) wird aufgrund des starken Zusammenhangs und der wechselseitigen Beeinflussung keine Trennung zwischen dem mathematischen und dem mathematikdidaktischen Fachwissen vorgenommen, womit den handlungsrelevanten Lehrerkompetenzen eher entsprochen wird.

Bezogen auf die förderdiagnostischen Kompetenzen können u. a. mathematikdidaktisches Fachwissen sowie mathematikbezogene Überzeugungen als grundlegend angesehen werden und stehen daher im Vordergrund der Untersuchung.

2.2. Sachrechnen im Mathematikunterricht der Grundschule

Krauthausen und Scherer (2014, S. 154) heben die Bedeutung eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts sowie einer Verknüpfung von Anwendungs- und Strukturorientierung hervor. Dies gilt auch für den inklusiven Mathematikunterricht. Im Unterricht dient das Sachrechnen einerseits als Ausgangspunkt für die Erarbeitung mathematischer Inhalte, andererseits als Feld für deren Anwendung (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 161). Konzeptionell ist das Einbeziehen verschiedener mathematischer Inhalte sowie verschiedener prozessbezogener Kompetenzen möglich (vgl. KMK 2004).

Das Lösen von Sachaufgaben ist aufgrund ihrer Komplexität ein eher schwieriger Bereich (Scherer/Moser Opitz 2010, S.201), da sowohl fachliche als auch sachliche Aspekte aufgegriffen werden. Zudem stellen Sachaufgaben Anforderungen an sprachliche Fähigkeiten. Das Sachrechnen stellt daher eine Herausforderung für Lernende aller Leistungsniveaus und insbesondere für lernschwache Lernende dar (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 201). Schwierigkeiten im Bearbeitungsprozess können dabei beim Modellieren/Mathematisieren, Verarbeiten von Daten, Interpretieren und Validieren auftreten (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 163 ff.).

Da das Sachrechnen auch eine Herausforderung für Lehrkräfte darstellt (ebd., S. 201), sind diesbezüglich deren förderdiagnostische Kompetenzen von besonderem Interesse.

3. Fragestellung und Methode

a) Ziel ist eine Darstellung und Erfassung förderdiagnostischer Kompetenzfacetten, die den Entscheidungen und Handlungen von Grund- und Förderschullehrkräften zugrunde liegen und Rückschlüsse auf Kompetenzkonstrukte ermöglichen. Im Fokus stehen Erkenntnisse bezüglich Diagnose und Förderung, mathematischem und mathematikdidaktischem Fachwissen sowie mathematikbezogener Überzeugungen.

b) Die Untersuchung soll weiterhin Aufschluss darüber geben, wie Lehrkräfte förderdiagnostische Kompetenzen bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht nutzen.

c) Auf der Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse werden Leitideen für zukünftige Fortbildungsmaßnahmen entwickelt. Hierzu werden erneut die unter Forschungsfrage a) genannten Aspekte betrachtet.

Von Interesse sind insbesondere die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Grund- und Förderschullehrkräften. Exemplarisch erfolgt dies für den Bereich des Sachrechnens.

Die förderdiagnostischen Kompetenzen werden mithilfe leitfadengestützter Interviews untersucht, deren Grundlage typische Situationen aus dem Lehreralltag sind, z. B. didaktische Analysen von Aufgaben und entsprechender Schülerbearbeitungen sowie fiktive Planungen zur Förderung. Hierzu werden u. a. selbst generierte Videovignetten genutzt, die realitätsnahe Situationen im inklusiven Mathematikunterricht abbilden und somit eine Annäherung an situationsrelevante Kompetenzen der Lehrkräfte ermöglichen (vgl. u. a. Lindmeier 2013). Die Videovignetten zeigen beobachtbare und zu analysierende Schwierigkeiten von Lernenden der 3. Klasse bei der Bearbeitung von Sachaufgaben. Die Bearbeitung erfolgt in Partnerarbeit und kann gegebenenfalls durch Materialeinsatz sowie Lehrerinterventionen unterstützt werden. Die Gruppenzusammensetzung ist bezüglich der Leistungsniveaus heterogen und homogen. Lernende ohne und mit Förderbedarf arbeiten gemeinsam, wobei kein bestimmter Förderbedarf bevorzugt wird.

Die Sachaufgaben sind angelehnt an typische Schulbuchaufgaben der Grund- und Förderschule und thematisieren funktionale Zusammenhänge. In den Bildungsstandards wird deren Erkennen, Darstellen und Beschreiben im Bereich Muster und Strukturen verortet (KMK 2004, S. 10 f.). Dieser Bereich spielt sowohl in der Grund- als auch in der Förderschule als grundlegendes Prinzip eine übergeordnete Rolle.

Basierend auf den entwickelten Videovignetten werden förderdiagnostische Kompetenzen von Grund- und Förderschullehrkräften am Beispiel des Sachrechnens qualitativ untersucht.

Literatur

DZLM (2013). Mathe. Lehren. Lernen. Theoretischer Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik. URL: http://www.dzlm.de/files/uploads/DZLM_Theorierahmen.pdf [20.01.2014].

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf [29.01.2015].

Krauthausen, G./Scherer, P. (2014). Einführung in die Mathematikdidaktik (3. Auflage, Nachdruck). Berlin/Heidelberg: Springer.

Lindmeier, A. (2011). Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A Threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In Riegel, U./Macha, K. (Hrsg.). Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken. Münster: Waxmann.

Moser Opitz, E. (2006). Förderdiagnostik: Ziele, Leitideen, Beispiele. In M. Grüßing/A. Peter-Koop (Hrsg.). Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren (2. Auflage), S. 10-28. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Scherer, P. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht der Grundschule. Anforderungen und Möglichkeiten aus fachdidaktischer Perspektive. In T. Häcker/M. Walm (Hrsg.). Inklusion als Entwicklung – Konsequenzen für Schule und Lehrerbildung, S. 267-284. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Scherer, P./Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Wember, F. B. (2013). Herausforderung Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. Zeitschrift für Heilpädagogik 64 (10), S. 380-388.

Werner, B. (2003). Förderdiagnostisch orientierte Verfahren für den Mathematikunterricht. Chancen und Grenzen – ein Erfahrungsbericht. Zeitschrift für Heilpädagogik 54 (8), S. 324-331.

Katharina HOHN, Freiburg

Die Bedeutung der Qualität selbstgenerierter Repräsentationen für das Lösen von Textaufgaben

Das selbstständige Lösen von Textaufgaben erfordert u.a. das Generieren von Repräsentationen im Rahmen der mathematischen Modellbildung. Dabei müssen Schüler-generierte Repräsentationen nicht per se von guter Qualität sein. Die nachfolgende Studie widmet sich der Frage nach der repräsentationalen Qualität mathematischer Modelle und ihrer Bedeutung für den Lösungserfolg.

1. Theoretischer Hintergrund

Im Hinblick auf den Umgang von Schülerinnen und Schülern mit Textaufgaben fokussieren viele Forschungsarbeiten vorrangig auf das Verstehen der Testaufgaben (z.B. Mayer & Hegarty, 1996; Thevenot, 2010). Das Lösen der Aufgaben ist dabei weniger bzw. gar nicht von Interesse. Wie bereits Kintsch und Greeno (1985) feststellten, geht es beim Bearbeiten von Textaufgaben jedoch nicht ausschließlich um deren Verstehen, sondern auch um deren (richtige) Lösung. Das Verstehen der Textaufgabe stellt hierbei jedoch ein bedeutsames Teilziel im Bearbeitungsprozess dar. Schülerinnen und Schüler, die eine Textaufgabe nicht richtig verstehen, werden sie mit großer Wahrscheinlichkeit auch nicht richtig lösen können.

Das Lösen von Textaufgaben kann als Modellierungsprozess aufgefasst werden (vgl. Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). In Anlehnung an diese Betrachtungsweise werden im Nachfolgenden vorrangig das Situationsmodell und das mathematische Modell als Teilkomponenten des Modellierungsprozesses näher betrachtet. Dabei sind vor allem deren Qualitäten von Interesse. Bearbeiten Schülerinnen und Schüler Textaufgaben selbstständig, so können sie für die Konstruktion eines mathematischen Modells auf verschiedene Repräsentationsformen zurückgreifen. Dabei können zwei grundlegende Repräsentationsformen unterschieden werden (vgl. Cox, 1999; Schnotz, 2005; Borromeo Ferri, 2010): ikonische (z.B. Skizzen, Zeichnungen, Diagramme) und symbolische (z.B. Rechnungen, Gleichungen, Formeln). Da der Fokus der hier beschriebenen Forschung auf Schüler-generierten Repräsentationen lag, kann nicht davon ausgegangen werden, dass dieses per se von guter bzw. hoher Qualität sind.

Vor diesem Hintergrund ergaben sich zwei Forschungsfragen:

1. Wie „gut“ sind Schüler-generierten Repräsentationen im Rahmen der mathematischen Modellbildung?

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Wie bedeutsam ist die Qualität Schüler-generierten Repräsentationen für den Lösungserfolg unter Berücksichtigung des Textverstehens?

2. Methodisches Vorgehen

Insgesamt nahmen 203 Schülerinnen und Schüler aus unterschiedlichen Klassenstufen an der Studie teil. Sie waren im Mittel circa 12 Jahre alt (M = 11.89, SD = 9.62). 37.3% aller Teilnehmer waren Mädchen. Die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die einzelnen Klassenstufen war wie folgt: Viertklässler: N = 85, Sechstklässler: N = 81 (Gymnasium), und Neuntklässler: N = 37 (Gymnasium).

Alle Schülerinnen und Schüler erhielten insgesamt vier verschiedene problemhaltige Textaufgaben (vgl. Rasch, 2008) zur individuellen Bearbeitung, wie z.B. folgende: „Mutti, Vati und Paul fahren mit dem Dampfer. Für Kinder kostet es nur die Hälfte. Sie bezahlen insgesamt 30€. Wie viel kostet die Karte für einen Erwachsenen und wie viel kostet sie für ein Kind?" Jede Textaufgabe wurde einmal durch die Versuchsleitung vorgelesen. Im Anschluss daran erfolgte die Aufgabenbearbeitung durch die Schülerin/den Schüler. Dafür standen verschiedene Hilfsmittel zur Verfügung: Aufgabenblatt, Stifte, Einerwürfel und Zehnerstangen. Durch die Versuchsleitung wurden keine Hilfestellungen oder konkreten Instruktionen zur Aufgabenbearbeitung gegeben. Auch gab es kein offizielles Zeitlimit, um die Schülerinnen und Schüler nicht unter Druck zu setzen.

Das individuelle Lösungsvorgehen wurde videographiert. Darüber hinaus wurde nach jeder Aufgabenbearbeitung ein kurzes, halbstrukturiertes, retrospektives Interview durchgeführt, um z.B. Details im Lösungsvorgehen zu erfragen. Das Videomaterial und die Interviews wurden durch drei geschulte Kodierer quantifiziert. Grundlage dafür bildete ein Kodiersystem, welches im Rahmen einer Pilotstudie entwickelt wurde. Die Intraklassenkorrelationen, als Kennwert für die Beobachterübereistimmungen (Shrout & Fleiss, 1979), lagen zwischen .82 und 1.00, was für sehr gute Beobachterübereinstimmungen spricht.

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurden folgende Merkmale des individuellen Lösungsprozesses pro Aufgabe dichotom kodiert: eine symbolische Repräsentation wurde generiert, eine ikonische Repräsentation wurde generiert, und die Aufgabe wurde richtig gelöst. Darüber hinaus wurden pro Aufgabe die Qualität der symbolischen und ionischen Repräsentation (falls generiert), und die Qualität des Situationsmodells auf einer dreistufigen Skala kodiert: 0 = richtig und vollständig, 1 = richtig oder vollständig, aber nicht beides, 2 = weder richtig noch vollständig. Alle aufgabenspezifischen Kodiereinheiten wurden anschließend über die vier

Textaufgaben gemittelt. Die nachfolgenden Ergebnisse basieren auf diesen Mittelwerten.

3. Ergebnisse

Über alle Schülerinnen und Schüler hinweg wiesen die Schüler-generierten Repräsentationen im Rahmen der mathematischen Modellbildung eine mittlere Qualität auf ($M = .79$, $SD = .48$). Dabei fielen die ikonischen Repräsentationen besser aus ($M = .65$, $SD = .50$) als die symbolischen ($M = .84$, $SD = .51$). Intraindividuelle Vergleiche der Qualitäten der beiden Repräsentationsformen bei Schülerinnen und Schülern, die sowohl ein ikonisches als auch ein symbolisches mathematisches Modell generierten, ermöglichten die inferenzstatistische Absicherung dieses Befundes ($t(116) = 7.95$, $p < .001$). Ikonischen Repräsentationen waren somit von signifikant besserer Qualität als symbolische.

Um den Einfluss der Qualität Schüler-generierten Repräsentationen auf den Lösungserfolg, unter Berücksichtigung des Textverstehens, zu ermitteln, wurden hierarchische Regressionsanalysen durchgeführt. Hier zeigte sich in einem ersten Analyseschritt, dass neben der Klassenstufe ($\beta = .20$, $p = .001$) auch die Qualität des Situationsmodells ($\beta = -.58$, $p < .001$.) mit einem besseren Lösungserfolg (i.S. von mehr richtig gelösten Aufgaben) einherging. Diese beiden Prädiktoren klärten zusammen 49% der Gesamtvarianz auf ($R^2 = .49$, $F(2, 199) = 95.51$, $p < .001$). Ein zweiter Analyseschritt zeigte, dass neben der Klassenstufe ($\beta = .18$, $p < .001$) und der Qualität des Situationsmodells ($\beta = -.70$, $p < .001$) auch die Qualität der Schüler-generierten Repräsentationen ($\beta = -.68$, $p < .001$) für den Lösungserfolg bedeutsam war. Höhere Qualitäten gingen hier mit einem höheren Lösungserfolg einher. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass auch die Interaktion zwischen der Qualität des Situationsmodells und der Qualität der Schüler-generierten Repräsentationen ein signifikanter Prädiktor für den Lösungserfolg war ($\beta = .71$, $p < .001$). Bessere Situationsmodelle gingen also mit besseren mathematischen Modellen einher. Die zusätzliche Berücksichtigung der repräsentationalen Qualität und des Interaktionsterms erklärten weitere 13% der Varianz ($\Delta R^2 = .13$, $F(2, 197) = 33.23$, $p < .001$).

4. Diskussion und Ausblick

Die beschriebene Studie konnte zeigen, dass die Qualität Schüler-generierter Repräsentationen im Rahmen der mathematischen Modellbildung von mittlere Güte ist. Dabei wurde deutlich, dass im Besonderen das Generieren eines richtigen und vollständigen symbolischen mathematischen Modells eine besondere Herausforderung darstellt. Relevante Informationen und ihre Relationen zu selektieren und mathematisch zu repräsentieren, ist somit kein trivialer Schritt, auch bei der Lösung von Textaufgaben. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass neben dem Textverstehen die Qualität des mathematischen Modells für den Lösungserfolg bedeutsam ist. Ferner konnte empirisch bestätigt werden, dass die Konstruktion des mathematischen Modells nicht unabhängig von der Konstruktion des Situationsmodells ist.

Einschränkend muss jedoch berücksichtigt werden, dass es sich bei der beschriebenen Studie um einen ersten Versuch handelt, die Qualitäten des Situationsmodells und mathematischen Modells zu operationalisieren und inferenzstatistisch im Hinblick auf den Lösungserfolg zu berücksichtigen. Weitere Forschung ist jedoch notwendig, um eine differenzielle Befundlage zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang wäre eine größere Bandbreite an Textaufgaben und auch klassischen Modellierungsaufgaben wünschenswert. Ebenso sollte zukünftige Forschung weitere schülerbezogene Merkmale berücksichtigen, wie z.B. deren Lesekompetenz, räumlich-visuelle Intelligenz, Präferenzen von Repräsentationen, etc.

Literatur

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *Journal für Mathematikdidaktik*, *31*(1), 99-118.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343-363.

Kintsch, W. & Greeno, J. (1985). Understanding word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Hrsg.), *The nature of mathematical thinking* (S. 29-53). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rasch, R. (2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Seelze: Kallmeyer.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Hrg.), *Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Shrout, P.E. & Fleiss, J.L. (1979). Intraclass correlations: Uses in assessing rater reliability. *Psychological Bulletin*, *86*, 420-434.

Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a situation model. *Acta Psychologica*, *133*, 90-95.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Axel HOPPENBROCK, Paderborn

Wie diskutieren Studenten über Votingfragen in Anfängervorlesungen? – eine Fallstudie

Einleitung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Votingfragen in eine Vorlesung zu integrieren. Beim Einsatz nach den Prinzip von Mazur (2009) liegt der Schwerpunkt in dem so genannten Peer Instruction. Hierbei wird den Studenten ein und dieselbe Frage zwei Mal gestellt. Zwischen den beiden Fragen haben die Studenten einige Minuten Zeit, sich mit den Kommilitonen über die richtige Lösung zu unterhalten. Die lernfördernde Wirkung dieses Einsatzes wurde in zahlreichen Studien mit quantitativen Methoden gezeigt (z.B. Deslauriers, Schelew, & Wieman, 2011; Hake, 1998; M. K. Smith et al., 2009). Nur wenig bekannt ist jedoch, wie die Studenten miteinander diskutieren und ob bzw. wie sie neues Wissen generieren. Mit dieser Studie soll ein Schritt gemacht werden, diese Lücke zu schließen.

Theoretischer Hintergrund

Die Votingfrage, anhand der das Diskussionsverhalten hier dargestellt wird, hatte das Ziel, den Umgang mit der mathematischen Sprache, insbesondere mit der Verschachtelung von Quantoren, zu schulen, denn viele Studenten haben gerade zum Studienbeginn großer Schwierigkeit mit diesem Verständnis (Nardi, 2011).

Die mathematische Sprache zeichnet sich gegenüber der Umgangssprache durch Präzision und Abstraktion aus. Ein Beispiel für mathematiktypische Ausdrucksweisen ist die Verschachtelung der Quantoren ∀ („für alle“) und ∃ („es gibt“). Hier zeigte Dubinsky, dass viele Studenten große Schwierigkeiten haben, AE („für alle…es gibt…“) und EA („es gibt…für alle…“) Aussagen zu verstehen oder die unterschiedlichen Bedeutungen zu erkennen. *„Most students […] could not distinguish between AE and EA statements in mathematics and did not seem to be aware of the standard mathematical conventions for parsing statements.*” (Dubinsky & Yiparaki, 2000, p. 239).

2.1 Definition lokales Maximum

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ mit $x_o \in D$:
Geben Sie an, welches eine mögliche und sinnvolle Definition für ein lokales Maximum ist:
x_o heißt lokale Maximumsstelle von f genau dann,

a) wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in D$ mit $|x - x_o| < \varepsilon$ gilt: $f(x_0) \geq f(x)$.
b) wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_o| < \varepsilon$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$.
c) wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt: Es gibt ein $x \in D$ mit $|x - x_o| < \varepsilon$ und $f(x_0) \geq f(x)$.

Abb. 1: Votingfrage zur Maximumsdefinition

Methodik

Die hier präsentierte Frage (siehe Abb. 2) wurde zu Beginn der zweiten Vorlesung im Rahmen der Studie eingesetzt, die in Hoppenbrock (2014) genauer

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

beschrieben ist. Das zentrale Lernziel lag darin, dass die Studenten sich mit Deutung von Variationen von VE und AE in einem mathematischen Kontext auseinandersetzen.

Sieben studentische Gruppendiskussionen wurden mit Hilfe von Diktiergeräten aufgezeichnet und anschließend transkribiert. Zur Auswertung wurde ein interpretativer Ansatz nach Voigt (1984) sowie Krummheuer und Naujok (Krummheuer & Naujok, 1999) gewählt.

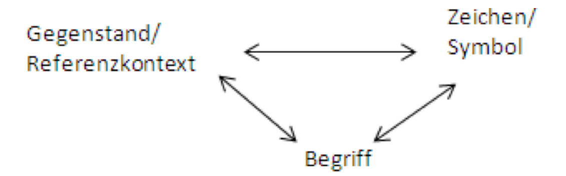


Abb. 2: Epistemologisches Dreieck

Um die Bedeutungsaushandlungen während der Diskussionen sichtbar zu machen, wurde auf die Theorie von Steinbring (2000) zurückgegriffen. Sie bietet eine gute Basis, um anhand des epistemologischen Dreiecks (Abb. 2) Bedeutungsaushandlungen – insbesondere zwischen Zeichen/Symbolen sowie Gegenstand/Referenzkontext – während eines Diskussionsprozesses offenzulegen, zu verstehen und zu veranschaulichen.

Ergebnisse

Nur 5 der 7 aufgezeichneten Diskussionen konnten nach der beschriebenen Methode analysiert werden, da eine Gruppe ihr Diktiergerät nach 17s ausstellte und eine andere Gruppe, nicht über die Frage diskutierte.

Schwierigkeiten und Fehldeutungen

Im Rahmen der fünf verschiedenen Diskussionen waren vier Fehldeutungen in mehreren Gruppen zu beobachten.

Ein Problem, das trotz Inhalt in den Lehrplänen vieler Bundesländern zu Beginn der Diskussionen häufiger auftrat, war die Differenzierung zwischen absoluten und lokalen Maximum: *„ich kenn ein Maximum aber was ist denn ein lokales Maximum."*

Des Weiteren entschieden sich viele Studenten zunächst gegen Definition b, da sie den Ausdruck „es gibt ein ε ϵ IR" in der Form „es gibt genau ein festes ε ϵ IR" interpretierten, wie z.B. in der Aussage „es gibt ein ε ϵ IR mit $5^{\varepsilon}=27$".

Der Favorit vieler Studenten war zunächst Definition a. Dabei wurde der Ausdruck „für alle ε ϵ IR" als in „für beliebig kleine Epsilon" (siehe Abbildung 3) mit dem Hinweis auf Definitionen zur Folgenkonvergenz und Stetigkeit gedeutet:

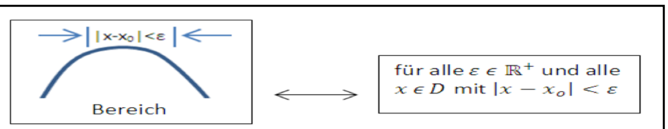


Abb. 3: Interpretation zu Definition a

> *Norbert: ich hätte das jetzt an den konvergenzbegriff angelehnt dass du diesen abstand immer kleiner machen kannst*

Eine Gemeinsamkeit war, dass alle Studenten von $f(x)<f(x_0)$ sprachen, anstatt von $\leq$.

Zusammenarbeit der Gruppen

Zwei der fünf Gruppen konnten im Rahmen ihrer Diskussion die oben beschriebenen drei ersten Fehldeutungen überwinden und kamen nach weniger als 3 und knapp 6 Minuten zu der Erkenntnis, dass Definition a ein globales Maximum beschreibt und Definition b ein lokales. Eine weitere Gruppe stellte das Diktiergerät aus, als sie anfingen, sich mit dem Unterschieden von „für alle … für alle" (Def. a) und „es gibt…für alle" (Def. b) zu beschäftigen. Die vierte Gruppe traf auf den Kern des Problems zwischen diesen beiden Definitionen, beenden die Diskussion aber mit der Äußerung eines Studenten: „*[...] also meine intuition ist jetzt im prinzip gefestigt dass es eher a ist (-) mir fällt jetzt nur kein argument ein warum es b nicht ist*." Alle diese vier Gruppen haben im Gegensatz zur fünften Gruppe die Gemeinsamkeit, dass Anschauung und Definition auf einander bezogen, um so die richtige Definition zu finden. Die fünfte Gruppe hingegen versuchte, durch Rückgriff auf vorherige Definitionen und Sätze, in denen Epsilon verwendet wurde, zur Lösung zu kommen, entschieden sich aber für die Definition a. Wie angestrebt, fokussieren sich alle fünf Gruppen auf die Deutung der Kombinationsvariationen von „für alle" und „es gibt". Sie diskutierten intensiv und kooperierten auf Gute Art und Weise. Alle Äußerungen wurden ernst genommen und es wurde sachlich über die Inhalte diskutiert. Dabei machte es keinen Unterschied, ob die Gruppe eher homogen oder heterogen bzgl. des Leistungsvermögens[1] war; leistungsstarke profitierten ebenso wie leistungsschwächere.

Fazit/Diskussion

Nicht alle Gruppen kamen zum richtigen Ergebnis. Trotzdem waren diese Diskussionen nicht nutzlos. Diese Gruppen wurden erfolgreich auf Verständnisprobleme aufmerksam gemacht, wodurch die abschließende Besprechung der richtigen Lösung nach der zweiten Abstimmung, auf fruchtbaren Boden fallen würde und somit einen weiteren Lernfortschritt bewirken könnte. Diese lernfördernde Wirkung der Besprechung entspricht auch den Ergebnissen von Smith et al (2011).

---

[1] Als Maßstab für das Leistungsvermögen wurde die Note in der Abschlussklausur am Ende des Semesters genommen. Dabei kam es zu recht heterogenen Gruppen, bei denen sehr gute Studenten mit solchen diskutierten, die durch die Klausur gefallen waren.

Die Diskussionen bieten einen Einblick, wie schwer es für viele Studenten ist, mathematische Ausdrücke korrekt zu deuten und dass Diskussionen mit Kommilitonen und Verbalisierungen dieses Verständnis fördern können. Die Diskussionen zwischen den Abstimmungen bieten einen Anlass, sich in Umgangssprache über Mathematik zu unterhalten. Ein Gegenstand, der häufig zu kurz kommt, aber wichtig für das Verständnis ist (Nardi, 2011). Hierin liegt aus meiner Sicht ein wesentlicher Nutzen des Einsatzes von Votingfragen in Vorlesungen.

Literatur

Deslauriers, L., Schelew, E., & Wieman, C. (2011). Improved Learning in a Large-Enrollment Physics Class. *Science, 332*, 862-864.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On Student Understanding of AE and EA Quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *CMBS Conference Board of the Mathematical Sciences* (Vol. 8, pp. 239-289). Wahington, D.C.

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics Teachers, 66*(1), 64-74.

Hoppenbrock, A. (2014). Was sind lehrreiche Votingfragen für Mathematikstudenten in Erstsemestervorlesungen? – eine Studentenbewertung. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 551-554.

Krummheuer, G., & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung* (Vol. 7). Opladen: Leske + Budrich.

Mazur, E. (2009). Farewell, lecture? *Science, 323*(5910), 50-51.

Nardi, E. (2011). *'Driving noticing' yet 'risking precision': University mathematicians' pedagogical perspectives on verbalisation in mathematics*. Paper presented at the Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education.

Smith, M. K., Wood, W. B., Adams, W. K., Wieman, C., Knight, J. K., & Su, T. T. (2009). Why Peer Discussion Improves Student Performance on In-Class Concept Questions. *Science, 323*, 122-124.

Smith, M. K., Wood, W. B., Krauter, K., & Knight, J. K. (2011). Combining Peer Discussion with Instructor Explanation Increases Student Learning from In-Class Concept Questions. *CBE-Life Sciences Education, 10*(1), 55-63.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik–Didaktik, 21*(1), 28-49.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim, Basel: Beltz.

Martin Erik HORN, Berlin

Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra

Die Mathematik ist eine Geisteswissenschaft: Unser Gehirn erfindet Axiome, auf denen wir mit Hilfe logischer Schlussfolgerungen ein Gerüst an mathematischen Beziehungen aufbauen. Die Physik ist eine Naturwissenschaft: Sie beruht auf zielgerichteter Beobachtung unserer Außenwelt, wobei die Überprüfung von Hypothesen mit Hilfe von Experimenten das zentrale wissenschaftliche Instrument darstellt.

Es muss also zu Konflikten kommen, wenn physikalisch und physikdidaktisch geprägte Wissenschaftler sich in Mathematik und Mathematikdidaktik einmischen – Sie bringen ein anderes Wissenschaftsbild mit. Im Bereich der Linearen Algebra führt dies dazu, dass ich als ein solcher Mensch mit physikorientierter Vorprägung der derzeit üblichen konventionellen Lineare Algebra skeptisch gegenüber stehe und eine alternative Fassung der Linearen Algebra auf Grundlage der Geometrischen Algebra (Horn 2015) als didaktisch tragfähiger vorziehe. Grund dafür ist ein Experiment.

1. Diracs Belt Trick – Makroskopische Veranschaulichung des Spins ½

Mit Hilfe einer Zeitschrift, die durch Schnüre in der Umgebung befestigt wird, kann gezeigt werden, dass in unserer Welt makroskopische Situationen mit einer Rotationssymmetrie von 4π (also einem Spin von ½) existieren (Misner et al. 1973, S. 1149), (Penrose & Rindler 1984, S.43), (Snygg 1997, S. 12). Spin ½-Teilchen sind nichts rein Quantenmechanisches, sondern Teil unserer Alltagserfahrungen, die wir leider nur allzu oft übersehen.

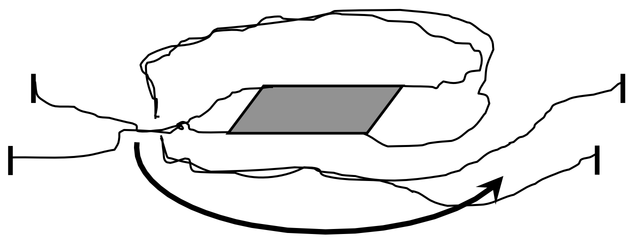


Abb. 1: Diracs Veranschaulichung des Spins ½: Nach einer Rotation um 4π können die an der Zeitschrift befestigten Schnüre entwirrt werden, ohne die Zeitschrift zurückzudrehen.

Die Schlussfolgerung aus diesem Experiment ist so simpel wie zwingend: Wollen wir die Welt, in der wir leben, mathematisch möglichst einfach beschreiben, benötigen wir eine mathematische Sprache, mit der sich auch 4π-Symmetrien mathematisch einfach und zugänglich beschreiben lassen. Die mathematische Sprache, die dies leistet, wird Geometrische Algebra

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

genannt (Hestenes 2003), (Doran & Lasenby 2003). Im dreidimensionalen Fall entspricht die Geometrische Algebra der Pauli-Algebra (Horn 2012).

2. Konzeptionelle Grundlagen der Geometrischen Algebra

Die Geometrische Algebra verknüpft geometrische Größen auf algebraischer Grundlage. Mit Vektoren, orientierten Flächenstücken oder orientierten Volumina kann in der Geometrischen Algebra genauso wie mit Skalaren gerechnet werden (Hestenes 2003). Die einzig neu zu beachtende Regel ist, dass unterschiedliche Basisvektoren antikommutieren (Parra Serra 2009, S. 823), was in Abbildung 2 anschaulich gezeigt wird.

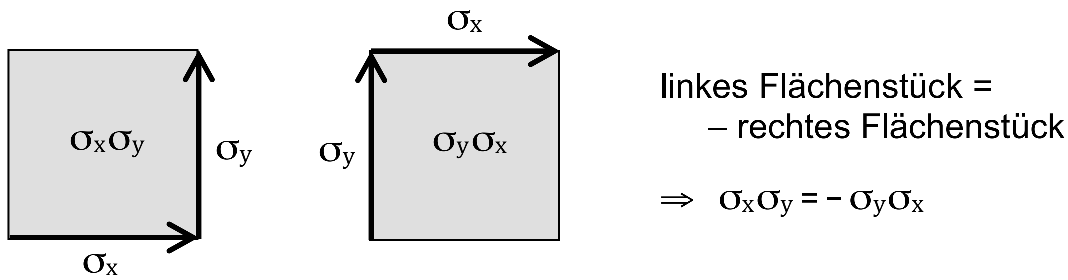


Abb. 2: Die Orientierung von Flächenstücken (Bivektoren) begründet die Vertauschungsregeln der Pauli-Algebra.

Die Multiplikation geometrischer Größen verdient in der Geometrischen Algebra besondere Aufmerksamkeit, da sich das Produkt zweier Vektoren **a** und **b** in Anteile unterschiedlicher Symmetrie aufspalten lässt:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \text{inneres Produkt} + \text{äußeres Produkt} \qquad (1)$$

In der Linearen Algebra nutzen wir insbesondere aus, dass das äußere Produkt zweier Vektoren mit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ antikommutativ ist. Somit können in Linearen Gleichungssystemen Vektoren durch äußere Multiplikation mit sich selbst gezielt eliminiert werden.

3. Geometrische Interpretation von Linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme (LGS) werden geometrisch oft zeilenweise interpretiert, indem jede Zeile als Geradengleichung gelesen und graphisch durch Schnittpunktermittlung ausgewertet wird.

Eine alternative graphische Darstellung bietet die spaltenweise Analyse eines LGS. So führt das lineare Gleichungssystem mit drei Unbekannten von Gl. (2) auf die drei Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = a_{11}\,\sigma_x + a_{21}\,\sigma_y + a_{31}\,\sigma_z$, $\mathbf{b} = a_{12}\,\sigma_x + a_{22}\,\sigma_y + a_{32}\,\sigma_z$ und $\mathbf{c} = a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{33}\,\sigma_z$ sowie den Ergebnisvektor $\mathbf{d} = d_1\,\sigma_x + d_2\,\sigma_y + d_3\,\sigma_z$.

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = d_1$$

$$a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = d_2 \tag{2}$$
$$a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = d_3$$

Wir sehen im LGS (2) also nicht drei verschiedene Gleichungen, sondern lediglich eine einzige Gleichung

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{d} \tag{3}$$

Nichts anderes verfolgt die moderne Physik: Durch Geometrisierung algebraisch aufgefundener Naturgesetze werden diese in einen einheitlichen Rahmen gesetzt und als ein einziges geometrisches Konstrukt verstanden.

Die Lösung des vorgegebenen LGS besteht nun darin, die Unbekannten x, y und z so zu ermitteln, dass das x-fache des Vektors **a**, das y-fache des Vektors **b** und das z-fache des Vektors **c** dem Ergebnisvektor **d** entspricht.

4. Lösung des Linearen Gleichungssystems

Mit Hilfe des äußeren Produkts lässt sich Gl. (3) leicht auswerten. So können die beiden Variablen y und z durch äußere Multiplikation von Gl. (3) mit den Vektoren **b** und **c** eliminiert und der Wert für x gefunden werden. Analog lassen sich y und z bestimmen:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\, x = \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \tag{4}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{c}) \tag{5}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\, z = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) \tag{6}$$

Anstelle von Determinantenberechnungen, die für Lernende unvermittelt abstrakt wirken, führen die Gleichungen (4) bis (6) auf konkrete Volumenberechnungen der Parallelepipede, die durch die Vektoren **a**, **b**, **c** und **d** aufgespannt werden. Dies liefert einen gleichwohl anschaulichen wie eingängigen Zugang zu Determinanten: Die Determinante eines n-dimensionalen LGS entspricht dem Volumen des n-dimensionalen Hyper-Parallelepipeds, das mit Hilfe der Koeffizientenvektoren gebildet werden kann.

5. Transfer einer physiknahen Mathematik in physikferne Domänen

Historisch ist die Geometrische Algebra ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt, das von David Hestenes und zahlreichen Wissenschaftlern insbesondere im englischsprachigen Raum sehr zielgerichtet als eine oder sogar als die mathematische Sprache der Physik (Hestenes 2003) entwickelt wurde.

Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie sich sehr erfolgreich auch in Bereichen außerhalb der Physik zur Modellierung unterschiedlichster Fragestellungen einsetzen lässt. So wurden die hier vorgestellten Grundlagen einer modernen Linearen Algebra unter Bezug auf die Ideen der Geometrischen Algebra in einem Kurs zur Wirtschaftsmathematik an der HWR Berlin (Horn 2015) unterrichtet und zur Lösung einfacher wirtschaftswissenschaftlicher Fragestellungen herangezogen. Diese Ergänzung zur üblichen Darstellung der Linearen Algebra umfasste zwölf Vorlesungs- und Übungsstunden, wobei die Hälfte davon auf die Vermittlung der Grundlagen der Geometrischen Algebra verwendet wurde (Horn 2014/2015, Teil 1). Zur Lösung einfacher Linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten wurde ein Vorlesungstermin im Umfang von vier Vorlesungsstunden benötigt, wobei Fragestellungen aus dem Bereich der Materialverflechtung als grundlegende ökonomische Anwendungsbeispiele gewählt wurden (Horn 2014/2015, Teil 2). In einem Ausblick im Umfang von zwei Stunden wurde abschließend mit Hilfe des direkten Produktes die Modellierung von LGS höherer Dimension diskutiert. Dies führt dazu, dass über die Pauli-Algebra hinaus auch einfache geometrische Beziehungen auf Grundlage der Dirac-Algebra besprochen werden konnten (Horn 2014/2015, Teil 3). Auch komplexere wirtschaftswissenschaftliche Themenstellungen wie beispielsweise die Input-Output-Analyse lassen sich so konzeptionell recht einfach erschließen.

Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics 71 (2), 104–121.

Horn, M. E. (2012). Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. www.bookboon.com/de, London/Kopenhagen: Ventus.

Horn, M. E. (2014/2015). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part I: Basics & Introduction, Part II: Solving systems of linear equations, Part III: The direct product & Solving higher-dimensional systems of linear equations. OHP slides of LV 200691.01 – Mathematics for Business and Economics, HWR Berlin.

Horn, M. E. (2015). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. Beitrag zur DPG-Jahrestagung in Wuppertal. Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de

Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. (1973). Gravitation. New York: Freeman.

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras 19 (3/4), 819–834.

Penrose, R. & Rindler, W. (1984). Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. Cambridge: Cambridge University Press (CUP).

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York: Oxford University Press.

Martin Erik HORN, Berlin

Strukturierte Beschreibung von Reflexionen

In Lehrbüchern erfolgt die mathematische Darstellung von Reflexionen oft wenig strukturiert, konzeptuell ungeordnet und in vielen Fällen nicht leicht nachvollziehbar. Insbesondere die unterschiedlichen Darstellungen von Operatoren und Operanden (beispielsweise von Operatoren als Reflexionsmatrizen, die auf Vektoren als Operanden einwirken), steht einem tieferen Verständnis von Reflexionen im Wege.

Deshalb soll hier eine Möglichkeit aufgezeigt werden, bei der Operatoren und Operanden durch gleichartige mathematische Objekte dargestellt werden. So sollte es keinen Unterschied machen, ob ein Vektor als Operand fungiert und reflektiert wird, oder ob der gleiche Vektor als Repräsentant einer Achse und damit als Operator fungiert, der die Reflexion an dieser Achse vermittelt. In einer konsistenten Beschreibung werden gleiche Größen gleichartig ausgedrückt werden. Die mathematische Sprache, die dies gestattet, wird Geometrische Algebra genannt (Doran & Lasenby 2003).

1. Überblick über die Reflexionsformeln

Reflexionen von Punkten (Skalare), Vektoren (orientierte Streckenstücke), Bivektoren (orientierte Flächenelemente), Trivektoren (orientierte dreidimensionale Volumenelemente), Quadrovektoren (orientierte vierdimensionale Hyper-Volumenelemente), Pentavektoren (orientierte fündfimensionale Hyper-Volumenelemente) an Punkten, Achsen, Ebenen, dreidimensionalen Räumen oder beliebig höherdimensionalen Hyperräumen werden dann durch das Sandwich-Produkt beschrieben:

$$\begin{matrix}\textbf{reflektiertes}\\ \textbf{Objekt}\end{matrix} = \pm \begin{pmatrix}\textbf{reflektierendes}\\ \textbf{Objekt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textbf{ursprüngliches}\\ \textbf{Objekt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textbf{reflektierendes}\\ \textbf{Objekt}\end{pmatrix}^{-1} \qquad (1)$$

Hier werden Reflexionen als links- und rechtsseitige Multiplikation von Größen der Geometrischen Algebra (Clifford Algebra) ausgedrückt. Zum Verständnis dieser Beziehung ist eine Kenntnis der Matrizenmultiplikation nicht notwendig. Reflexionen können somit als einfache Produkte unter Berücksichtigung der Vertauschungsregeln berechnet werden (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2010). Dies ist mit Sicherheit einfacher als ein Umgang mit Matrizen, die nicht immer problemlos zu konstruieren sind.

Im Folgenden werden diese Formeln explizit ausgeführt. Gleichungen (9) – (11) und (15) – (17) sind bekannt (Vince 2010, S. 258). Die anderen Formeln wie auch ihre höherdimensionalen Verallgemeinerungen (Horn 2015) folgen zwanglos und gelten auch in raumzeitlichen Geometrien.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Reflexion an einem Punkt, der durch den Skalar ℓ repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \ell\, k\, \ell^{-1}$	(2)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = -\ell\, \mathbf{r}\, \ell^{-1}$	(3)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \ell\, \mathbf{A}\, \ell^{-1}$	(4)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = -\ell\, \mathbf{V}\, \ell^{-1}$	(5)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \ell\, \mathbf{H}\, \ell^{-1}$	(6)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = -\ell\, \mathbf{B}\, \ell^{-1}$	(7)

Reflexion an einer Achse, die durch den Vektor n repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \mathbf{n}\, k\, \mathbf{n}^{-1}$	(8)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = \mathbf{n}\, \mathbf{r}\, \mathbf{n}^{-1}$	(9)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \mathbf{n}\, \mathbf{A}\, \mathbf{n}^{-1}$	(10)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = \mathbf{n}\, \mathbf{V}\, \mathbf{n}^{-1}$	(11)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \mathbf{n}\, \mathbf{H}\, \mathbf{n}^{-1}$	(12)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = \mathbf{n}\, \mathbf{B}\, \mathbf{n}^{-1}$	(13)

Reflexion an einer Ebene, die durch den Bivektor N repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \mathbf{N}\, k\, \mathbf{N}^{-1}$	(14)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = -\mathbf{N}\, \mathbf{r}\, \mathbf{N}^{-1}$	(15)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \mathbf{N}\, \mathbf{A}\, \mathbf{N}^{-1}$	(16)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = -\mathbf{N}\, \mathbf{V}\, \mathbf{N}^{-1}$	(17)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \mathbf{N}\, \mathbf{H}\, \mathbf{N}^{-1}$	(18)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = -\mathbf{N}\, \mathbf{B}\, \mathbf{N}^{-1}$	(19)

Reflexion an einem dreidimensionalen Raum, der durch den Trivektor T repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \mathbf{T}\, k\, \mathbf{T}^{-1}$	(20)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = \mathbf{T}\, \mathbf{r}\, \mathbf{T}^{-1}$	(21)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \mathbf{T}\, \mathbf{A}\, \mathbf{T}^{-1}$	(22)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = \mathbf{T}\, \mathbf{V}\, \mathbf{T}^{-1}$	(23)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \mathbf{T}\, \mathbf{H}\, \mathbf{T}^{-1}$	(24)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = \mathbf{T}\, \mathbf{B}\, \mathbf{T}^{-1}$	(25)

Reflexion an einem vierdimensionalen Hyperraum, der durch den Quadrovektor Q repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \mathbf{Q}\,k\,\mathbf{Q}^{-1}$	(26)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = -\mathbf{Q}\,\mathbf{r}\,\mathbf{Q}^{-1}$	(27)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \mathbf{Q}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}$	(28)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = -\mathbf{Q}\,\mathbf{V}\,\mathbf{Q}^{-1}$	(29)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \mathbf{Q}\,\mathbf{H}\,\mathbf{Q}^{-1}$	(30)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = -\mathbf{Q}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Q}^{-1}$	(31)

Reflexion an einem fünfdimensionalen Hyperraum, der durch den Pentavektor P repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k	$k_{ref} = \mathbf{P}\,k\,\mathbf{P}^{-1}$	(32)
Vektor **r**	$\mathbf{r}_{ref} = \mathbf{P}\,\mathbf{r}\,\mathbf{P}^{-1}$	(33)
orientiertes Flächenstück **A**	$\mathbf{A}_{ref} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$	(34)
orientiertes Volumenelement **V**	$\mathbf{V}_{ref} = \mathbf{P}\,\mathbf{V}\,\mathbf{P}^{-1}$	(35)
vierdimensionales Hyper-Volumenelement **H**	$\mathbf{H}_{ref} = \mathbf{P}\,\mathbf{H}\,\mathbf{P}^{-1}$	(36)
fünfdimensionales Hyper-Volumenelement **B**	$\mathbf{B}_{ref} = \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}$	(37)

Nein, es stellt keine Zeit- oder Platzverschwendung dar, die Formeln in dieser Vollständigkeit ausführlich niederzuschreiben. Nur so wird die Vorzeichenstruktur, die andere Autoren abweichend setzen, anschaulich klar. Um beispielsweise ein negatives Vorzeichen in Gl. (9) zu generieren, wird in (Doran & Lasenby 2003, Abs. 2.6), einem Standardwerk zur Geometrischen Algebra, die Reflexion an einem Vektor durch die Reflexion an einem Bivektor ersetzt und konzeptuell verwischt. Manche Autoren schlussfolgern deshalb, dass „a line reflection is actually not a reflection, but a rotation“ (Dorst et al. 2007, S. 169). Wie die folgenden Abschnitte zeigen, gibt es didaktische Gründe, die Wirkungsrichtung dieser Aussage umzukehren. Eine Rotation ist nicht nur eine Rotation, sondern im formalen Sinne von Gl. (1) auch eine Reflexion.

2. Rotationen als Reflexionen an Parallelogrammen

In der Geometrischen Algebra (Clifford Algebra) können orientierte Parallelogramme $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ als Linearkombination eines Skalars ℓ und eines Bivektors **N** aufgefasst werden. Eine Rotation stellt deshalb analog zu Gl. (1) immer ein Sandwich-Produkt eines mathematischen Objektes mit einem orientierten Parallelogramm $\mathbf{n_1 n_2} = \ell + \mathbf{N}$ dar. So führt die Zweifach-Reflexion eines Vektors $\mathbf{r}$ an Achsen in Richtung der Vektoren $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$ auf die Rotation eines Vektors:

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = (\mathbf{n_1 n_2})\ \mathbf{r}\ (\mathbf{n_1 n_2})^{-1} = (\ell + \mathbf{N})\ \mathbf{r}\ (\ell + \mathbf{N})^{-1} \quad (38)$$

Dies entspricht der Reflexion an einem orientierten Parallelogramm.

3. Hyperbolische Rotationen als Reflexionen

Rotationen als Reflexionen an Parallelogrammen stellen Transformationen dar, bei der Vektoren in transformierte Vektoren überführt werden. Mindestens ebenso interessant ist jedoch der Fall, dass Vektoren bei der Reflexion ihre geometrische Qualität ändern und in Bivektoren überführt werden. Dies gelingt mit der Reflexion an einer Linearkombination $\mathbf{W} = \ell + \mathbf{n}$ aus einem Skalar und einem Vektor.

Hyperbolische Rotation: $$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{W}\ \mathbf{r}\ \mathbf{W}^{-1} = (\ell + \mathbf{n})\ \mathbf{r}\ (\ell + \mathbf{n})^{-1} \quad (39)$$

Streckenelemente werden dabei mathematisch in Flächenstücke überführt, wie auch das Beispiel mit $\mathbf{W} = \cosh\alpha + \sinh\alpha\ \sigma_x$ (siehe Abb. 1) zeigt.

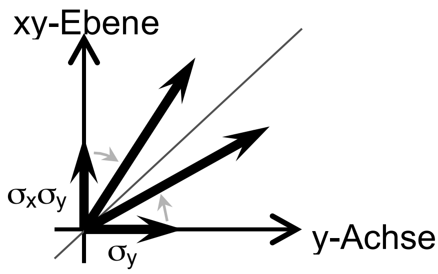


Abb. 1: Der Vektor σ_y wird in $\mathbf{W}\,\sigma_y\,\mathbf{W} = \cosh(2\alpha)\,\sigma_y + \sinh(2\alpha)\,\sigma_x\sigma_y$ überführt, während der Bivektor $\sigma_x\sigma_y$ in $\mathbf{W}\,\sigma_x\sigma_y\,\mathbf{W} = \sinh(2\alpha)\,\sigma_y + \cosh(2\alpha)\,\sigma_x\sigma_y$ überführt wird.

Diese Reflexion an $\ell + \mathbf{n}$ entspricht somit einer hyperbolischen Rotation.

4. Ausblick: Konforme Geometrische Algebra (CGA)

Die hier diskutierte Betrachtung von Reflexionen bezieht sich einzig auf Richtungsinformationen geometrischer Größen. Mit Hilfe der CGA können in ähnlicher Weise auch Ortsinformationen reflektiert werden.

Literatur

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Dorst, L., Fontijne, D. & Mann, S. (2007). Geometric Algebra for Computer Science. An Object-oriented Approach to Geometry. San Francisco: Morgan Kaufmann.

Horn, M.E. (2010). Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. BzMU, S. 417–420, Münster: WTM.

Horn, M.E. (2015). Sandwich Products and Reflections. Beitrag zur DPG-Jahrestagung 2015 in Wuppertal. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de.

Vince, J. (2010): Mathematics for Computer Graphics. 3. Aufl., Heidelberg: Springer.

Martin Erik HORN, Berlin

Wie ein Betrunkener, der doppelt sieht: Die Mathematik der Relativitätstheorie

Zwei Ereignisse stehen in einem engen Spannungsverhältnis: 2014 war der 150. Geburtstag von Hermann Minkowski, 2015 jährt sich die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein zum 100. Mal. Hermann Minkowski war – in doppeltem Sinne – der Mathematiklehrer Einsteins (Biener 2005). Zum einen war er dies ganz direkt an der ETH Zürich, an der Einstein studierte. Zum anderen veröffentlichte Einstein 1905 die Spezielle Relativitätstheorie in mathematisch recht kruder Formulierung. Erst durch die mathematische Genese eines einheitlichen raumzeitlichen Bildes durch Minkowski konnte hier Klarheit geschaffen werden.

Für Lernende klafft heute jedoch ein tiefer Graben zwischen der Mathematik der SRT (Spezielle Relativitätstheorie), die auf Minkowskis Idee einer imaginären Einbettung räumlicher Koordinaten aufbaut und die wir bereits im schulischen Bereich unterrichten können, und der Mathematik der ART (Allgemeinen Relativitätstheorie) des hochschulischen Kontextes, die ko- und kontravariante Koordinatendarstellungen nutzt. Hier eine Brücke zwischen beiden mathematischen Ansätzen zu errichten, wird die Überquerung dieses Grabens zwischen SRT und ART erheblich vereinfachen (Horn 2015). Eine solche Brücke kann mit Hilfe der Geometrischen Algebra (Hestenes 1986), (Doran & Lasenby 2003) gebaut werden:

$$\mathrm{r} = \begin{pmatrix} ct \\ i\,x \\ i\,y \\ i\,z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{r} = \mathrm{ct}\,\gamma_t + \mathrm{x}\,\gamma_x + \mathrm{y}\,\gamma_y + \mathrm{z}\,\gamma_z \quad \rightarrow \quad \mathrm{r} = \mathrm{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{x}^\mu\,\mathrm{x}^\nu$$

Dass eine solche Brücke zwischen SRT und ART bisher nicht existiert, liegt auch in der Geschichte der SRT begründet, die durch drei missliche Umbrüche charakterisiert ist: Zum einen stirbt Minkowskis 1909 an einem Blinddarmdurchbruch, so dass die mathematische Interpretation der SRT unvollendet bleibt. In einem zweiten Umbruch veröffentlicht Einstein 1915 die ART. Auf einmal ist die Mathematik der ART für Minkowskis Kolleginnen und Kollegen weit interessanter, so dass die Mathematik der SRT (obgleich noch nicht vollständig verstanden) in den Hintergrund tritt.

1928 endlich formuliert Dirac mit den Dirac-Matrizen die mathematisch relevanten Konstrukte, mit denen die Mathematisierung der SRT zu einem Abschluss hätte gebracht werden können. Doch in einer absonderlichen Wendung werden die Dirac-Matrizen als rein quantenmechanische Entitä-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ten komplett missgedeutet. Ihre wahre Natur als Basisvektoren pseudo-Euklidischer Raumzeiten der SRT bleibt undiskutiert und wird – zumindest im deutschsprachigen Raum – bis heute oft nicht sachrichtig eingeordnet. Eine kurz gehaltene Einführung in diese Thematik ist in (Horn 2015), eine ausführlichere Darstellung ist in (Doran & Lasenby 2003) zu finden.

1. Kernthese dieses Beitrags

In der Relativitätstheorie stellt ein raumzeitlicher Ortsvektor r keine invariante Größe dar. Stattdessen ist das Raum-Zeit-Intervall als Quadrat des raumzeitlichen Abstands $r^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ eine solche invariante Größe, die bei Lorentz-Transformationen unverändert erhalten bleibt. Es ergeben sich jedoch zwei prinzipiell unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten des raumzeitlichen Abstandsquadrats.

Zum einen kann es in Anlehnung an Minkowski unter Nutzung räumlich imaginärer und zeitlich reeller Koordinaten als Artefakt eines einzigen Koordinatensystems $r^2 = c^2t^2 + (i\,x)^2 + (i\,y)^2 + (i\,z)^2$ beschrieben werden. Dabei werden alle Koordinatenwerte, da konzeptionell gleichartig, als Bestandteile eines einzigen Koordinatensystems gedacht. Zum anderen jedoch kann ein Raum-Zeit-Intervall in Anlehnung an die ko- und kontravariante Darstellungsweise der ART als Kombination

$$r^2 = x_0\,x^0 + x_1\,x^1 + x_2\,x^2 + x_3\,x^3 = ct\,ct + (-x)\,x + (-y)\,y + (-z)\,z$$

eines rechtshändigen Koordinatensystems mit $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und eines linkshändigen Koordinatensystems mit $x_0 = ct$, $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$ gedacht werden. Diese beiden Koordinatensysteme sind in der Mathematik der ART unabdingbar verknüpft und strikt gleichberechtigt.

In einer Mathematisierung unter Nutzung der heute gebräuchlichen konventionellen Vektorrechnung sind beide Bilder möglich und richtig. Allerdings weist die konventionelle Vektorrechnung entscheidende Defizite auf: Sie rechnet nur mit Vektoren, also orientierten Strecken. Flächen oder Volumina werden nicht in natürlicher Weise beschrieben, sondern mathematisch recht mühsam dazugebastelt.

Ganz anders stellt sich die Situation in der Geometrischen Algebra dar, in der die Beschreibung von Flächen, Räumen und Raumzeiten in natürlicher Art und Weise enthalten ist: So stellen die vier Dirac-Matrizen γ_t, γ_x, γ_y, γ_z Repräsentanten der Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit (in der wir seit 1905 leben) dar. Die sechs Dirac-Matrizenprodukte $\gamma_x\gamma_y$, $\gamma_y\gamma_z$, $\gamma_z\gamma_x$, $\gamma_x\gamma_t$, $\gamma_y\gamma_t$, $\gamma_z\gamma_t$ repräsentieren Basis-Bivektoren und somit orientierte Einheits-Flächenstücke, während die vier Dirac-Matrizenprodukte dritten Grades $\gamma_x\gamma_y\gamma_z = I\gamma_t$, $\gamma_y\gamma_z\gamma_t = I\gamma_x$, $\gamma_z\gamma_x\gamma_t = I\gamma_y$, $\gamma_x\gamma_y\gamma_t = I\gamma_z$ Basis-Trivektoren und somit orientierte dreidimensionale Volumenelemente repräsentieren.

Das vierdimensionale raumzeitliche Hyper-Volumenelement $I = \gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t$ quadriert als Basis-Quadrovektor zu minus eins und verhält sich algebraisch wie eine imaginäre Einheit. Eine Multiplikation mit dieser imaginären Einheit I ändert die geometrische Qualität der Faktoren. So stellen Produkte dieses Basis-Quadrovektors mit Vektoren wie z.B. $I\gamma_t$, $I\gamma_x$, $I\gamma_y$, $I\gamma_z$ keine Vektoren mehr dar, sondern dreidimensionale Volumenelemente. In einer Geometrie, die wie hier nicht nur Vektoren, sondern auch höher-dimensionale Größen umfasst, verbietet sich das Minkowskische Bild imaginärer räumlicher Koordinaten der Werte ix, iy, iz. Somit verbietet sich auch die Interpretation, wir lebten in einem einzigen Koordinatensystem.

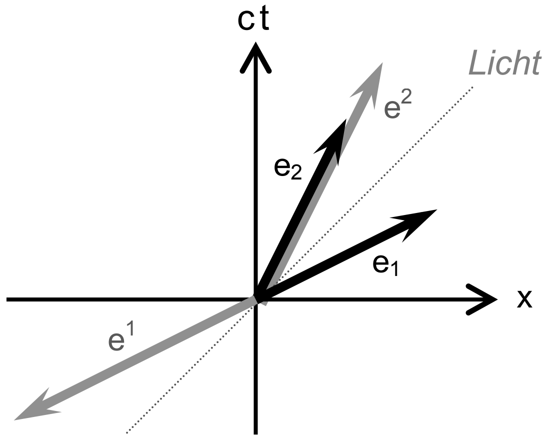
In der Relativitätstheorie leben wir in der Welt eines Betrunkenen, der doppelt sieht und uns einen gleichsam doppelten Blick auf die Welt eröffnet. Mit einem Auge sehen wir die Welt in einem rechtshändigen, mit dem anderen Auge die gleiche Welt in einem linkshändigen Koordinatensystem.

2. Die Brücke: Reziproke Koordinaten

Mit Hilfe des n-dimensionalen Volumenelements $E_n = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_n$ können die zu den Basisvektoren e_i des ersten Koordinatensystems reziproken Basisvektoren e^i eines zweiten Koordinatensystems

$$e^i = (-1)^{i-1}\, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge \check{e}_i \wedge \ldots \wedge e_n\, E_n^{-1} \qquad \text{mit} \qquad e^i \bullet e_j = \delta^i_j$$

konstruiert werden (Doran & Lasenby 2003, Abs. 4.3), wobei der Vektor e_i entfällt. Die Vektoren e_i und e^i sind nicht notwendigerweise orthonormiert, so dass hier auch schräge stehende Koordinatenachsen beschrieben werden. Es ist dann leicht zu zeigen, dass beispielsweise die beiden orthogonalen raumartigen Vektoren $e_1 = \sigma_x + {}^1\!/_2\,\sigma_y$ und $e_2 = -{}^1\!/_2\,\sigma_x + \sigma_y$ auf die reziproken Vektoren $e^1 = {}^4\!/_5\,\sigma_x + {}^2\!/_5\,\sigma_y = {}^4\!/_5\,e_1$ und $e^2 = -{}^2\!/_5\,\sigma_x + {}^4\!/_5\,\sigma_y = {}^4\!/_5\,e_2$ führen, die Koordinatensysteme gleicher Händigkeit aufspannen (Horn 2015).



$e_1 = \gamma_x + {}^1\!/_2\,\gamma_t \quad e_2 = {}^1\!/_2\,\gamma_x + \gamma_t$

$E_2 = e_1 \wedge e_2 = {}^3\!/_4\,\gamma_x\gamma_t$

$\Rightarrow \quad E_2^{-1} = {}^4\!/_3\,\gamma_x\gamma_t$

$e^1 = -{}^4\!/_3\,\gamma_x - {}^2\!/_3\,\gamma_t = -{}^4\!/_3\,e_1$

$e^2 = {}^2\!/_3\,\gamma_x + {}^4\!/_3\,\gamma_t = {}^4\!/_3\,e_2$

Abb. 1: Beispiel reziproker raumzeitlicher Koordinatensysteme.

Ganz anders verhält es sich bei einem Koordinatensystem, das von einem raumartigen Vektor e_1 und einem zeitartigen Vektor e_2 aufgespannt wird. Hier bilden die reziproken Vektoren e^1 und e^2 ein Koordinatensystem mit umgekehrter Händigkeit, da der raumartige Vektor e^1 entgegengesetzt zu e_1 orientiert ist (siehe Abb. 1).

3. Weiteres Vorgehen: Raumzeitliche Ableitungen

Die Brücke zwischen SRT und ART kann nun ausgebaut werden und in einem sich sachlogisch anschließenden Schritt die Differentialrechnung erschließen. Hier bietet sich der Lorentzoperator ***lor*** an, der in geometrisch-algebraischer Formulierung einen Übergang zum Dirac-Operator und damit einen didaktisch tragfähigen Weg in raumzeitliche Ableitungen weist.

$$\boldsymbol{lor} = \begin{pmatrix} \partial / c\partial t \\ \partial / i\partial x \\ \partial / i\partial y \\ \partial / i\partial z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Box = \gamma_t \frac{\partial}{c\,\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \Box = \sum_{\mu=0}^{3} e_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

4. Die Ambivalenz des metrischen Tensors

Es gibt Wege, die Mathematik der ART ohne expliziten metrischen Tensor zu formulieren (Hestenes 1986). Sollten wir uns dennoch für die Nutzung des metrischen Tensors entscheiden, muss uns klar sein, dass wir uns dabei ein konzeptuelles Dilemma einhandeln:

$$\mathbf{r} = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = g^{00} x_0 e_0 + g^{11} x_1 e_1 + g^{22} x_2 e_2 + g^{33} x_3 e_3$$

So werden dann anstelle der Koordinaten eines rechtshändigen Koordinatensystems x^0, x^1, x^2, x^3 und der Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems e_0, e_1, e_2, e_3 (siehe linke Teilformel) bei Nutzung des metrischen Tensors die Koordinaten eines linkshändigen Koordinatensystems x_0, x_1, x_2, x_3 mit den Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems e_0, e_1, e_2, e_3 verknüpft (siehe rechts Teilformel). Für Lernende ist dies unübersichtlich, und wir sollten uns überlegen, ob wir diese konzeptionelle Ambivalenz nicht übersichtlicher handhaben oder gar auflösen können.

Literatur

Biener, K. (2005). Hermann Minkowski – Mathematiklehrer Einsteins. cms-jn 27, 77–78.

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (1986). Curvature Calculations with Spacetime Algebra. IJTP 25, 581–588.

Horn, M. E. (2014). An Introduction to Geometric Algebra with some Preliminary Thoughts on the Geometric Meaning of Quantum Mechanics. J. Phys. Conf. Ser. 538.

Horn, M. E. (2015). Bridging the Gap between School Mathematics and the Mathematics of General Relativity. http://vixra.org/abs/1502.0044 [05.02.2015].

Hans HUMENBERGER, Wien

Stochastische Überraschungen beim Spiel BINGO

BINGO ist ein sehr einfaches Spiel. Man hat dabei eigentlich keine Strategien zu verfolgen, sondern muss nur schnell sein, das ist alles, was man selbst steuern kann. Trotzdem besitzt BINGO interessante stochastische Aspekte, welche im Folgenden behandelt werden sollen, z. B. wie viele Ziehungen muss man im Durchschnitt abwarten, bis man „BINGO!“ rufen kann? Oder: Wie wahrscheinlich ist es, dass man erst nach der letzten gezogenen Kugel „BINGO!“ rufen kann? Welche Anzahl der nötigen Ziehungen, bis man „BINGO!“ rufen kann, ist die wahrscheinlichste?

Spielanleitung

Beim BINGO gibt es verschiedene Versionen, wobei wir uns speziell für die Version außerhalb Amerikas interessieren. Viele Personen können gleichzeitig spielen, entweder online oder in einer Halle. Man kauft zuerst einen realen oder (bei der online-Version) elektronischen BINGO-Schein, dieser besteht bei der uns interessierenden Version aus drei Zeilen (Reihen) zu je fünf Zahlen im Bereich von 1 bis 90. Die Scheine haben meist neun Felder in einer Reihe, aber in nur fünf stehen Zahlen, so dass man die Felder ohne Zahlen (in Abbildung 1 durch Seepferdchen symbolisiert) eigentlich ausblenden kann.

Abbildung 1 Spielschein aus Spanien

In der ersten Spalte können nur die Zahlen 1–10, in der zweiten 11–20, . . ., in der neunten 81–90 stehen (aus Übersichtlichkeitsgründen). Nun zieht ein Quizmaster (Halle) oder ein Zufallszahlengenerator (online) beständig Zahlen aus der Menge {1, . . ., 90} (ohne Zurücklegen). In der Regel wird alle zehn Sekunden eine Gewinnzahl aufgerufen, so dass sich BINGO-Spielende während des Spiels permanent konzentrieren müssen und rasch reagieren sollten, denn sie haben oft 30 Scheine und mehr bei einem Spiel, und da ist es schon eine kleine Kunst, den raschen und richtigen Überblick zu bewahren (nur der/die erste, der/die „BINGO!“ ruft, bekommt einen

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Preis!). Es gibt verschiedene Arten von BINGO, hier konzentrieren wir uns auf die Version „Full House“ bzw. „coverall“, d. h. man kann dann „BINGO!“ rufen, wenn alle Zahlen des eigenen Scheines gezogen wurden.

Möglicher Einstieg im Schulunterricht

Zu Beginn könnten Schüler/innen schätzen:

1. Wie viele Ziehungen sind im Durchschnitt nötig, bis alle 15 Zahlen des eigenen Scheines gezogen wurden? („Full House“, „coverall“)
2. Welche Anzahl benötigter Ziehungen (unter den folgenden) ist am wahrscheinlichsten: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man alle 90 Ziehungen benötigt?

Die meisten werden sich hier ziemlich verschätzen, und das ist auch nicht schlimm, es zeigt nur, dass wir (hiermit sind auch mit Stochastik vertrautere Personen gemeint) in stochastischen Situationen oft ein sehr schlechtes Gefühl haben. Andererseits sind dies aber oft Anlässe, „es“ genauer wissen zu wollen, d. h. sie können sehr förderlich für die Motivation sein.

Die auf den ersten Blick verblüffenden Antworten auf obige Fragen sind:

1. ca. 85,3
2. 90 – dies ist die wahrscheinlichste unter allen möglichen Anzahlen nötiger Ziehungen, die Wahrscheinlichkeiten nehmen von 15 bis 90 streng monoton zu, d. h. von allen möglichen Fällen ist es am wahrscheinlichsten, dass man bis zur letzten Kugel warten muss!
3. 1/6

Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Fragen auf elementare Art zu beantworten, aber bei den ersten beiden ist dies nicht so ohne weiteres als selbständige Schüleraktivität möglich, dazu sind sicherlich Hinweise durch die Lehrkraft nötig. Wir greifen hier stellvertretend eine Möglichkeit heraus und verweisen für weitere Details auf Henze/Humenberger 2011.

Als erstes definieren wir die zugehörige Zufallsvariable X: diese möge zählen, wie viele Ziehungen nötig sind, bis alle Zahlen am eigenen BINGO-Schein gezogen wurden (bis man also „BINGO!“ rufen könnte). Dann ist a priori klar: $15 \leq X \leq 90$, und für unsere Fragen brauchen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X = j)$ für $j = 15, \ldots, 90$. Wenn man diese hat, dann kann man die Fragen 2 und 3 direkt beantworten, und mit einem Computer (CAS oder TK) auch die erste Frage mit der Formel $\mathrm{E}(X) = \sum_{j=15}^{90} j \cdot \mathrm{P}(X = j)$

Es empfiehlt sich hier die Werte $\mathrm{P}(X=j)$ von hinten beginnend bei $j=90$ zu berechnen (nicht nur, weil nach dem letzten Wert $\mathrm{P}(X=90)$ in Frage 3 explizit gefragt wird), dies ist z. B. ein möglicher Hinweis durch Lehrkräfte. Das Ereignis $\{X=90\}$ tritt genau dann ein, wenn die letzte gezogene Kugel (bzw. Zahl) eine von den 15 Zahlen $b_1,\ldots,b_{15}$ am BINGO-Schein ist. Da keine der 90 Zahlen für irgendeine Stelle der Ziehungsreihenfolge bevorzugt ist (auch für die letzte Stelle nicht), ist die Wahrscheinlichkeit, als letzte gezogen zu werden, für jede Zahl gleich, nämlich 1/90. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 15-BINGO-Schein-Zahlen als letzte gezogen wird, ist daher 15/90 (auch so: für die letzte Zahl gibt es 90 Möglichkeiten, 15 davon sind günstig für das Ereignis $\{X=90\}$):

$$\mathrm{P}(X=90)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}.$$

Für $\{X=89\}$ muss an der 90. Stelle eine aus den anderen 75 Zahlen gezogen werden, die 89. Ziehung muss eine Zahl aus $b_1,\ldots,b_{15}$ ergeben. Daher folgt $\mathrm{P}(X=89)=\frac{75}{90}\cdot\frac{15}{89}$. Analog erhält man: $\mathrm{P}(X=88)=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{15}{88}$ und $\mathrm{P}(X=87)=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{73}{88}\cdot\frac{15}{87}$. Nun springt das Muster schon ins Auge, wie es allgemein aussieht (incl. Begründung):

$$\mathrm{P}(X=90)=\frac{15}{90},\quad \mathrm{P}(X=j)=15\cdot\frac{75\cdot 74\cdot\ldots\cdot(j-14)}{90\cdot 89\cdot\ldots\cdot j};\; j=89,\ldots,15 \qquad (*)$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man einerseits die Verteilung von X bestimmen (vgl. Tab. 1) und andererseits auch den zugehörigen Erwartungswert. Dabei muss klarerweise ein Computer eingesetzt werden (EXCEL, CAS).

j	$\mathrm{P}(X=j)$	j	$\mathrm{P}(X=j)$
90	0,1667	85	0,0693
89	0,1404	84	0,0578
88	0,1181	83	0,0480
87	0,0991	82	0,0398
86	0,0830	81	0,0329

Tabelle 1 Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariable X

Man kann mit (*) rasch erkennen: Die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X=20), \mathrm{P}(X=30), \ldots, \mathrm{P}(X=70)$ unterscheiden sich kaum von Null, $\mathrm{P}(X=80) \approx 0{,}027$ ist auch noch sehr klein, $\mathrm{P}(X=90)=\frac{1}{6}$ ist also der bei weitem größte Wert bei Frage 2. Nicht nur unter den vollen Zehnerzahlen hat 90 die größte Wahrscheinlichkeit, sogar unter allen möglichen Zahlen, denn die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X=j)$ sind mit j streng monoton wachsend. Dies „sagen" nicht nur die mittels Computer berechneten Werte, man kann das auch leicht (aber vermutlich erst a posteriori, intuitiv ist dies a priori wohl kaum zu vermuten) einsehen, denn es gilt ja (siehe oben):

$$\mathrm{P}(X=j+1)=\mathrm{P}(X=j)\cdot\underbrace{\frac{j}{j-14}}_{>1}$$

Aus Tab. 1 kann man übrigens auch erkennen: Man kann getrost darauf wetten, dass mindestens 87 Zahlen gezogen werden müssen, bevor man „BINGO!" rufen kann, denn $\mathrm{P}(X \geq 87) \approx 0{,}5243 > 0{,}5$.

Für den hier interessierenden Erwartungswert erhält man mittels Computer: $\mathrm{E}(X)=\sum_{j=15}^{90} j \cdot \mathrm{P}(X=j) \approx 85{,}3$, ein verblüffend großer Wert.

Es gibt auch verschiedene Plausibilitätserklärungen für dieses Phänomen des so großen Erwartungswerts. Solche sind auch nötig, denn es ist ja wichtig zu verstehen, warum dieser so groß ist (wie es dazu kommt, Verständnis für das Phänomen), nicht nur zu wissen – wie hier gezeigt –, dass er so groß ist. Aus Platzgründen muss hier dafür auf Henze/Humenberger 2011 verwiesen werden, in einem möglichen Unterricht sollten allerdings solche Plausibilitätsbetrachtungen keinesfalls fehlen.

Betont werden soll zum Schluss, dass es beim interessierenden Erwartungswert nicht um den aus der Sicht der Spielpraxis relevanten Wert geht, wie lange es durchschnittlich braucht, bis irgendjemand der an einem Spiel Beteiligten „BINGO!" ruft (und damit diese Runde beendet; diese Dauer hängt sehr von der Anzahl der Beteiligten ab und ist niedriger), sondern um die hypothetische Frage: Wie lange bräuchte der „BINGO!"-Ruf durchschnittlich, wenn es nur einen Spielschein (den eigenen) gäbe.

Literatur

Henze, N., Humenberger, H. (2011): Stochastische Überraschungen beim Spiel Bingo. In: Stochastik in der Schule 31, 3, 2–11.

Sabrina JANZEN, Paderborn

Sprachliche Charakteristika der Textsorten im Mathematikschulbuch am Beispiel des Strukturelements „Kasten mit Merkwissen“

In der einschlägigen mathematikdidaktischen Literatur lassen sich zahlreiche Aussagen über sprachliche Charakteristika von mathematischen Texten finden. Welche dieser Merkmale Texte in Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe I aufweisen und welche Rolle die Textsorte in diesem Zusammenhang spielt, wird auf der Grundlage eines inhaltsanalytischen Zugangs am Strukturelementtyp „Kasten mit Merkwissen“ konkretisiert.

Sprachliche Charakteristika mathematischer Texte

Angelehnt an die Ergebnisse der Metaanalyse von Österholm und Bergqvist (2013) wird davon ausgegangen, dass die Charakteristika mathematischer Texte sich anhand der Kategorien *vocabulary & precision*, *compactness*, *style & persons*, *relations* und *structure* beschreiben lassen. Die Kategorie *vocabulary & precision* umfasst laut Österholm und Bergqvist (2013) Schwierigkeiten auf der Wortebene. Insbesondere gehören dazu Schwierigkeiten aufgrund einer hohen Anzahl fachspezifischen Vokabulars oder aufgrund des Vorhandenseins nicht bekannter Wörter bzw. der häufig ambivalenten Bedeutung von Begriffen abhängig von dem Kontext, in dem sie genutzt werden. Die Satzebene betreffend wird unter *compactness* die häufig beschriebene hohe Informationsdichte aufgrund komplexer Nominalphrasen und zahlreicher Nominalisierungen gefasst. Die Kategorie *style & persons* beschreibt die Erscheinungsform des Textes geknüpft an die Frage nach der Einbindung von Adressaten. So zeichnen sich mathematische Texte durch die spezielle Form der Prosa mit dem Ziel der Informationsdarstellung sowie die dominante Verwendung von Imperativen und Passivkonstruktionen aus. Die Vielzahl an Präpositionen, Konjunktionen und Nebensatz-konstruktionen bilden die Kategorie *relations*, die sich Schwierigkeiten aufgrund von komplexen Referenzbezügen widmet. Der formale Aufbau fällt unter die Kategorie *structure* und wird bezüglich mathematischer Texte als fachspezifisch bezeichnet (Österholm & Bergqvist, 2013, S.759f.). Viele dieser Ausprägungen werden in der einschlägigen mathematikdidaktischen Literatur nicht nur als Besonderheit, sondern darüber hinaus als mögliche Hürde für Schülerinnen und Schüler beim Lesen und Verstehen mathematischer Texte bezeichnet (Österholm & Bergqvist, 2013, S.752). In diesem Zusammenhang kommt die Frage auf, wie ein mathematischer Text zu definieren ist. Gibt es den einen „mathematischen Text“? Der Terminus des mathematischen Textes scheint eine

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ganze Klasse von Texten zu beschreiben. Dabei ist jedoch anzunehmen, dass ein Aufgabentext beispielsweise nicht gleichzusetzen ist mit einem wissenschaftlichen Text. Entsprechend folgern Österholm und Bergqvist (2013, S. 752): "[It] is difficult to find a common description of all kinds of mathematical texts, since, as in any text genre, there are different sub-genres. (…). Therefore, it seems difficult to make claims that are valid for all mathematical texts (…), and it is important to critically examine such claims". Es bedarf folglich einer Ausdifferenzierung des Terminus „mathematischer Text". Dabei wird im Folgenden von der textlinguistischen Definition ausgegangen, dass ein Text als eine komplexe sprachliche Handlung aufgefasst wird, mit der eine kommunikative Beziehung hergestellt wird (Brinker, Cölfen, Pappert, 2014, S.17). Während der Begriff der Textsorte die Existenz bestimmter charakteristischer Merkmale beschreibt, gibt das Textmuster ein Schema vor, an dem sich die Umsetzung der Textsorte in einer konkreten Situation orientiert (Sandig, 1997, S.27f.). Texte können somit unter dem Terminus Textsorte zu einer Klasse zusammengefasst werden, innerhalb derer alle Texte einem gemeinsamen Textmuster folgen. Folglich bedarf es zunächst einer Analyse des Textmusters, um zu bestimmen, ob bestimmte Texte, indem Sie die dem gleichen Textmuster folgen, zu einer Textsorte zusammengefasst werden können.

Mögliche Identifizierung mathematischer Textsorten

Angelehnt an die Annäherung an Textsorten des Mathematikschulbuchs von Rezat (2009) und mit dem Ziel einer stärkeren Ausdifferenzierung der sprachlichen Ebene, wird als Quelle möglicher mathematischer Textsorten das Artefakt ‚Mathematikschulbuch' ausgewählt. Ziel ist die Beantwortung der Frage, ob die Strukturelemente des Mathematikschulbuchs aus textlinguistischer Perspektive als Textsorte bezeichnet

Textmuster(wissen)im Mathematikschulbuch	
Handlungstyp	**Handlungsmittel: Textsorte** **Prototypische Textsorteneigenschaften**
Gesellschaftlicher Zweck • Sozialer Sinn • Art der Problemlösung	**Thema und Themenentfaltung** • lokale Orientierung • temporale Orientierung • Grundform • Realisationsform → *structure*
Situationseigenschaften • Problemsituation • Institution/ Handlungsbereich • Kanal • Medium	**Formulierungsmuster** • allgemeine Textherstellungsmuster: → *vocabulary & precision* → *compactness* → *relations* → *style & persons*
Situationsbeteiligte (Rollen) • Sprecherschreiber • Adressaten • Beziehungsart	**Materielle Textgestalt** **Durchschnittsumfang**

(angelehnt an Sandig 1997, S.27)

werden können. Im Folgenden soll anhand des Strukturelements „Kasten mit Merkwissen“ exemplarisch gezeigt werden, wie mit Hilfe des Textmustermodells von Sandig (1997), welches mathematikspezifisch erweitert wird (siehe Abbildung), eine Analyse des Textmusters erfolgen kann. Das Textmustermodell zeichnet sich vor allem durch die Vereinigung nichtsprachlicher und sprachlicher Bestandteile aus, was sich in der Aufteilung des Textmusters in den *Handlungstyp*, der die funktionalen Aspekte der Textsorte umfasst, und das *Handlungsmittel* in Form von strukturellen Textsorteneigenschaften zeigt (Sandig, 1997). Der *Handlungstyp* umfasst Angaben über den gesellschaftlichen Zweck, die Situationsbeteiligten und die Situationseigenschaften. Er beinhaltet somit die Textfunktion als dominierenden Sinn, der durch den Text in einer Kommunikationssituation erfüllt wird. Die Frage nach dem *Kanal*, also der Erscheinungsform, betrifft die Realisierung des *Handlungstyps*, dient der Textsorte und steht in wechselseitiger Beziehung zu dem vorliegenden *Handlungsbereich* und *Medium*. Um die Textstruktur als Verbindung der grammatischen und der thematischen Ebene zu betonen, wird das von Sandig (1997) benannte *Handlungsmittel* anhand der von Brinker et al. (2014) entwickelten Analysekategorien *Textthema* und *Form der Themenentfaltung* modifiziert. Somit besteht das *Handlungsmittel* aus der Beschreibung prototypischer Textsorteneigenschaften mittels der Kategorien *Thema*, *Themenentfaltung*, *Formulierungsmuster*, *materielle Textgestalt* und *Durchschnittsumfang*.

Exemplarisch Analyse einer mathematischen Textsorte

Die exemplarisch analysierten „Kästen mit Merkwissen“ sind den Lehrwerken „Elemente der Mathematik 5“ (2014), „Mathematik Neue Wege 6“ (2006) und „Schnittpunkt Mathematik 5“ (2013) entnommen. Der *gesellschaftliche Zweck* besteht jeweils daraus wichtiges Wissen durch ein visuell hervorgehobenes Strukturelement „Kasten mit Merkwissen“ zu konsolidieren (Rezat 2009). Die *Situationseigenschaften* lassen sich dabei durch den *Handlungsbereich* des Unterrichts und des häuslichen Lernens von Mathematik beschreiben. Das *Medium* ist durch das Schulbuch auf den monologisch schriftlichen *Kanal* festgelegt. Entsprechend können Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte und Eltern als *Situationsbeteiligte* bezeichnet werden. Die Analyse zeigt, dass innerhalb der betrachteten Kästen durch dominierende Teilthemen anhand einer *explikativen Entfaltung* zu dem eigentlichen *Textthema,* der Definition des Bruchbegriffs, geführt wird (Brinker et al., 2014, S.69). Entsprechend der *explikativen Themenentfaltung* gilt die Definition des Bruches folglich als das zu Erklärende und wird mit Hilfe der Teilthemen in Form der Beschreibung der Art und Weise der Teilung, der Bezeichnung der Teile sowie der Erläuterung der Sprech- und

Schreibweise eines Bruches expliziert. Unter *Formulierungsmuster* fallen charakteristische grammatikalische Elemente (Sandig, 1997, S.32) und somit die typischen sprachlichen Besonderheiten mathematischer Texte, die anhand der oben beschriebenen Kategorien gefasst werden. Von diesen typischen *Mustern* lassen sich in den vorliegenden Kästen Ausprägungen innerhalb der Kategorien *vocabulary & precision*, *relations* und *style & persons* festhalten. Während innerhalb der Kategorie *vocabulary& precision* die Verwendung von Fachvokabular wie „Bruch, Zähler, Nenner, Bruchstrich, …" und nicht alltagssprachlichen Begriffen *(„Skala, Messinstrument, ...)* als charakteristisch verzeichnet werden kann, ist die Katgorie *relations* durch uneingeleitete Konditionalgefüge, komplexe Wortgruppen mit Präpositionen, Aneinanderreihungen von Aussagesätzen und Objektsätze gekennzeichnet. Im Hinblick auf die Kategorie *style & persons* fällt der Gebrauch des Indefinitpronomens „man" als Passivsynonym, die konkrete Verwendung des Passivs und der Imperativgebrauch auf. Hinsichtlich der *materiellen Textgestalt* und des *Durchschnittsumfangs* ist die farbliche Umrandung oder Hinterlegung Hinweis auf die Zusammenfassung wichtiger Inhalte mit einem Umfang von 30 bis 50 Wörtern. Dabei werden wichtige Begriffe innerhalb des Textthemas („Bruch", „Zähler", „Nenner") durch eine kursive oder fette Schrift betont. Darüber hinaus lassen sich die Verwendung von *„ ... "* oder der Abkürzung *„usw."* als Signale der Fortsetzbarkeit und Verallgemeinerung ausmachen.
Zusammenfassend lässt sich das Textmustermodell als ein geeignetes Analysemodell für die Identifizierung mathematischer Textsorten im Mathematikschulbuch ausmachen. In einem nächsten Schritt ist zu prüfen, ob die in der exemplarischen Analyse herausgestellten Merkmale tatsächlich prototypische Eigenschaften von „Kästen mit Merkwissen" sind, sodass dieses Strukturelement folglich aus funktionaler und struktureller Perspektive als eine Textsorte bezeichnet werden könnte.

Literatur

Brinker, K., Cölfen, H., Pappert, S. (2014). *Linguistische Textanalyse. Eine Einführung in Grundbegriffe und Methoden*. Berlin: Erich Schmidt Verlag.

Österholm, M. & Bergqvist, E. (2013). What is so special about mathematical texts? Analyses of common claims in research literature and of properties of textbooks. *ZDM the international journal on mathematics education, 45 (5),* 751–763.

Rezat, S. (2009): *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen.* Wiesbaden: Viehweger + Teubner.

Sandig, B. (1997): Formulieren und Textmuster. Am Beispiel von Wissenschaftstexten. In Jakobs, E.-M. & Knorr, D. (Hrsg.), *Schreiben in den Wissenschaften* (S. 25-44). Frankfurt am Main: Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Solveig JENSEN, Osnabrück

Aufbau und Stärkung von Prozessvorstellungen zu Rechenprozessen bei Schulanfängern anhand einer mathematischen Spielwelt

Die Konstruktion von Zahlen und das Rechnen mit ihnen beruhen auf dem Zählen. Das Zählen kann durch die Nachfolgerfunktion beschrieben werden und beruht so auf dem Anwenden einer Erzeugungsvorschrift (Mainzer 1992; Dedekind 1969). Für das Verständnis der Zahlkonstruktion und um dieses für geschicktes Rechnen ausnutzen zu können sind demnach Konstruktionsvorstellungen elementar (Schwank 2008, 2013a). Am Treffpunkt ‚Mathematisch-informatische Frühförderung' (wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank) werden für die Unterstützung dieser Konstruktionsvorstellungen Mathematische Spielwelten wie die Rechenwendeltreppe (vgl. Schwank 2013a) und der ZARAO (vgl. Schwank 2013b) eingesetzt, in denen Figurenbewegungen im Vordergrund stehen. Sie repräsentieren die Rechenvorgänge.

In Studien am Treffpunkt hat sich gezeigt, dass unterschiedliche Perspektiven auf Figurenbewegungen eingenommen werden (vgl. Brückel 2013, Schwank, I. & Schwank, E. 2015). Aus Prozesssicht werden die die Nachfolger- bzw. Vorgängerfunktion repräsentierenden Schritte gezählt und somit die Veränderungsprozesse in den Blick genommen. Aus Objektsicht werden nicht die Bewegungen fokussiert, sondern die von der Figur besuchten Plätze gezählt:

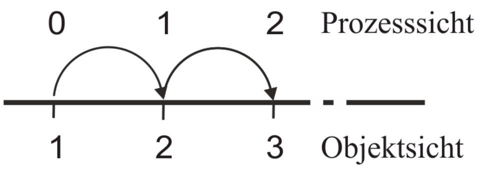


Abb. 1: Prozess- und Objektsicht, angelehnt an Schwank, I. &Schwank, E. 2015

Abb. 2: Ein Lopserzwerg

Abb. 3: Wettlopserbahn mit Zielfähnchen nach neunmal lopsern

Neben der Bildung von Konstruktionsvorstellungen wird die Einbindung der Null aus dieser Sichtweise heraus erschwert. Die Überlegung, eine Spielwelt ohne zählbare Objekte zu konzipieren und so den Blick verstärkt auf die Aktionen zu lenken, führte zur Entwicklung eines „Lopserzwerges" (**L**aufen, H**opser**). Diese Figur hat Räder, die oben und unten abgeflacht sind. Durch die Drehung der Räder von einer flachen Seite zur anderen entsteht eine getaktete Bewegung, nach immer gleich langen Strecken pau-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

siert die Figur. Ortsmarkierungen sind nicht nötig, um eine Bewegung in gleichmäßigen Abständen zu erzielen.

Die Spielwelt wurde in einer empirischen Studie mit neun Schulanfängern eingesetzt, die seit knapp drei Wochen eine erste Klasse besuchten. Pro Kind hat die Autorin fünf wöchentlich stattfindende Spielstunden durchgeführt und videografiert. Für jeden Durchgang der Spielstunden wurden bestimmte Spiele konzipiert. Sie boten z.B. die Möglichkeit, über Zahlbeziehungen zu sprechen und Vergleiche zwischen Standorten der Lopserzwerge anzustellen. Von Anfang an wurden für die Bewegungsaufträge der Lopserzwerge Operations- und Zahlzeichen verwendet (z.B. ‚+2' für zweimal vorwärtslopsern). Ziel war der Aufbau eines prozessgebundenen Verständnisses von Additions- und Subtraktionszeichen.

Um die Bedeutung der für die Beschreibung einer Zahlkonstruktion verwendeten Notation 0+1, 0+2, … vertiefend zu thematisieren, wurden in der vierten Spielstunde symbolische Repräsentationen anhand einer weiteren am Treffpunkt eingesetzten Spielwelt thematisiert. Die Kinder spielten mit Fröschen, die sich auf einem Weg aus Moosgummiplatten analog zu einem Zahlenstrahl bewegen. Aus Holzplättchen mit Zahl- und Operationszeichen konnten Aufgaben gelegt werden. Zunächst wurden Aufgaben mit Null als erstem Argument angesprochen, auch Kompositionen mehrerer Additionen bzw. Subtraktionen, dann Aufgaben mit erstem Argument ungleich Null.

Die Analyse der Videos erfolgte unter mehreren Fragestellungen, von denen hier die folgende thematisiert wird: „Welche Bedeutung schreiben die Kinder den eingeführten Zeichen bzw. Zeichenkombinationen im Laufe der Spielstunden zu? Ist diese an Prozessvorstellungen gebunden?"

Im Folgenden werden drei Transkriptausschnitte diskutiert.

Gelungene Verbindung von Pluszeichen und Prozess

Jannek spielt in der vierten Spielstunde mit den Fröschen. Ein Frosch soll den Auftrag ‚1+3' erfüllen. Für Jannek ist dies die erste Additionsaufgabe, die nicht Null als erstes Argument hat. Jannek lässt den Frosch vom Start aus einmal und dann dreimal hüpfen und repräsentiert damit ‚0+1+3'. Auf Nachfrage der Spielleiterin (SL) hin fordert er noch ein Plättchen mit Null und eines mit ‚+', sodass die Aufgabe ‚0+1+3' liegt. Der Unterschied zwischen ‚0+1+3' und ‚1+3' wird besprochen. Die Frage ist, wo der Frosch bei ‚1+3' anfangen muss. Jannek erkennt den Unterschied zwischen Zahlzeichen, vor denen kein Operationszeichen steht (erstes Argument), und Zahlzeichen nachfolgend einem Operationszeichen (zweites Argument):

SL: Wo muss der anfangen (.) mit der *[fährt mit dem Finger die Aufgabe entlang]*?

Jannek: *[setzt den Frosch ein Wegstück weiter]* Da.

SL: Warum?

Jannek: Wegen eins *[zeigt auf das Plättchen]*

SL: Was heißt denn das?

Jannek: Und plus, also, ach das ist das Startzeichen die Eins! Und dann soll er drei vor. Eins, zwei, drei *[versetzt den Frosch um drei Wegstücke]*.

Jannek unterscheidet durch seine Handlung und die sprachliche Hervorhebung des „Startzeichens" den Anfang der Bewegung und die Bewegung selbst. Er versteht eine Zahl einerseits als schon erreichten Ort und andererseits gemeinsam mit einem Operationszeichen als Teil einer Bewegung.

Fokussierung auf zu besuchende Orte

Auch Henry spielt in der vierten Spielstunde mit den Fröschen. Er legt selbst aus Holzplättchen die Aufgabe ‚6+8+3'. Er übersetzt sie so in eine Handlung, dass der Frosch auf dem Wegstück drei Hüpfer vom Start entfernt landet. Auf die Nachfrage der Spielleiterin hin, wo der Frosch bei der Aufgabe anfangen muss, antwortet Henry: „Bei der Null, da fehlt noch eine Null" und ersetzt die Plättchen so, dass hinterher ‚0+1+2+3' liegt:

Henry: *[nimmt den auf dem Start stehenden Frosch und setzt ihn zweimal ein Wegstück vorwärts]* eins, zwei, ahhh, *[setzt den Frosch zurück auf den Start]* Null, eins, zwei, drei. *[setzt den Frosch dreimal ein Wegstück vor]* Das klappt.

Henry versteht hier die Zahlen einseitig als Orte, die es zu besuchen gilt. Die Deutung gemeinsam mit dem Pluszeichen als Angabe einer Bewegung nimmt er nicht vor. Welche Bedeutung Henry dem Pluszeichen zuschreibt, wird hier nicht ersichtlich.

Zusätzliche Handlung für das Operationszeichen

Johannes spielt in der fünften Spielstunde u.a. mit Lopserzwergen, die wie die Frösche Aufträge erfüllen sollen. Die Lopserzwerge sind an der Startlinie und der rote Lopserzwerg soll so lopsern, dass es zu ‚0+7' passt.

Johannes: Ok *[fasst den roten Lopserzwerg an]* nullmal lopsern (.) hab ich schon. Pluuus *[schiebt den Zwerg etwa einen halben Lopser vor]* ist das *[der Lopserzwerg rollt zurück auf den flachen Teil des Rades]* hier. Pluuus *[lässt den Zwerg wieder ca. einen halben Lopser vorrollen und verharrt]* sieben *[beendet den angefangenen Lopser]* eins *[lässt den Zwerg noch sechsmal lopsern]* zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben.

Johannes verortet das Pluszeichen dort, wo der Lopserzwerg ungefähr ein halbes Mal gelopsert ist. Bei den Fröschen verortet er es in zwei Spielsituationen in der vorherigen Spielstunde zwischen dem Start- und dem folgenden Wegstück. Johannes scheint nicht unmittelbar einsichtig zu sein, dass zwei Zeichen zusammen für eine Bewegung stehen und so durch eine gemeinsame Handlung repräsentiert werden.

Fazit und Ausblick

Um eine Addition oder Subtraktion von einer symbolischen in eine enaktive Repräsentation in einer der beiden Spielwelten zu übersetzen, muss unterschieden werden, ob eine Zahl als Ort oder als Teil eines Bewegungsauftrags verstanden werden muss. Jannek gelingt diese Unterscheidung, während Henry zwischenzeitlich das Operationszeichen nicht zu beachten scheint und Zahlen nur als Orte deutet. Johannes verbindet zwar das Pluszeichen anscheinend mit der Richtung, unklar ist aber, ob das Zeichen für ihn zur Bewegung gehört. Aus weiteren Szenen mit Johannes geht hervor, dass er zeitweise alle Zahlen als Bewegungsauftrag deutet, was erklären würde, weshalb er das Pluszeichen zwischenzeitlich separat übersetzt.

Henry und Johannes hätte es evtl. geholfen, der betonten Beschreibung des Weges zu einem Ort die Beschreibung des Ortes gegenüberzustellen und den Unterschied zu thematisieren. Andernfalls kann eine Symbolfolge wie ‚0+2‘ trotz Betonung des Weges auf den Ort bezogen werden und der Bezug der Zeichen zur Bewegung verloren gehen.

Literatur

Brückel, L. (2013). Arithmetisches Denken von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern: eine qualitativ empirische Studie zum Zahlraum- und Rechenoperationsverständnis. Osnabrück: Universität Osnabrück.

Dedekind, R. (1969). Was sind und was sollen die Zahlen? Zehnte Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Mainzer, K. (1992). Von den natürlichen zu den komplexen und p-adischen Zahlen. In H.-D. Ebbinghaus et al., Zahlen. Berlin, Heidelberg: Springer.

Schwank, I. (2008): Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In S. Kliemann (Hrsg.), Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe II – Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen (S. 174-185). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schwank, I. (2013a): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In: von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage (S. 93-138). Göttingen: Vandehoeck & Ruprecht.

Schwank, I. (2013b): ZARAO-Flyer (Hintergrund). In: http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/fileadmin/home/ischwank/literatur/flyer_zarao_hintergrund_k.pdf (30.3.15)

Schwank, I. & Schwank, E. (erscheint 2015): Development of mathematical concepts during early childhood across cultures. In The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences, Second Edition. Oxford: Elsevier.

Knud JÜRGENSEN, Hannover

Strukturelle Analyse von Problemlöseerfolg und Heurismeneinsatz

Im Rahmen des HeuRekAP-Projekts wurden vier achte Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums über eineinhalb Jahre untersucht. Mix, Fränzel & Soyta (2014) haben im Rahmen einer Bachelorarbeit Teile dieser Daten ausgewertet und dabei folgende Fragestellungen untersucht:

1. Lässt sich der Problemlöseerfolg aus den Mathematiknoten oder dem Bearbeitungserfolg (einer) der Routineaufgaben vorhersagen?
2. Wirkt sich der Einsatz von Heurismen positiv auf den Bearbeitungs- bzw. Problemlöseerfolg aus?
3. Lässt sich anhand der erhobenen Daten ein Trainingseffekt erkennen?

Erhebungshintergrund

Abbildung 1 – Vortest-Aufgabe Raute

In diesem Artikel werden die Ergebnisse für zwei Klassen vorgestellt. Beide Klassen haben ein mathematisch-naturwissenschaftliches Profil. Eine der Klassen diente als Kontroll-Klasse. Die andere Klasse erhielt ein explizites Heurismen-Training, dessen Idee auf König (1992, S. 24) zurückgeht: „Ausgewählte heuristische Vorgehensweisen sollten (als eine spezielle Art von Verfahrenskenntnissen) im Prozeß der Tätigkeit bewußt vermittelt werden. Das heißt, es geht um ein zielgerichtetes Aneignen und Anwenden im Unterricht und um ein explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen. Ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung reicht nicht aus."

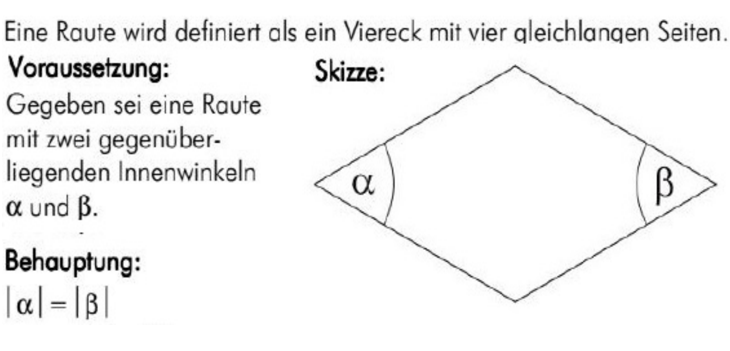


Abbildung 2 – Nachtest-Aufgabe Raute

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Auswertung der Daten

Um die Bearbeitungen bewerten zu können, wurde zu jeder der Aufgaben ein Satz Musterlösungen entwickelt. Zu jeder dieser Musterlösungen wurde ein Lösungsgraph erstellt. Jeder Bearbeitung wurde eine Musterlösung zugeordnet und anhand des entsprechenden Lösungsgraphen die Bearbeitung bewertet. Es wurde für jeden genannten Knoten und für jede genannte Kante – die eine Verknüpfungsabsicht darstellt – jeweils ein Punkt vergeben. Für falsche oder fehlende Elemente wurden keine Punkte vergeben. Für mathematisch korrekte Zwischenziele, die zu einem anderen als dem gegangenen Lösungsweg entsprechen, wurde jeweils ein halber Punkt gegeben. Da verschiedene Lösungswege auf unterschiedlich komplexe Lösungsgraphen führen können, wurden die Punkte jedes Lösungsgraphen auf 100 Punkte gewichtet. Wegen der Bonuspunkte ist es möglich, mehr als 100 Punkte für die Bearbeitung einer Aufgabe zu erhalten.

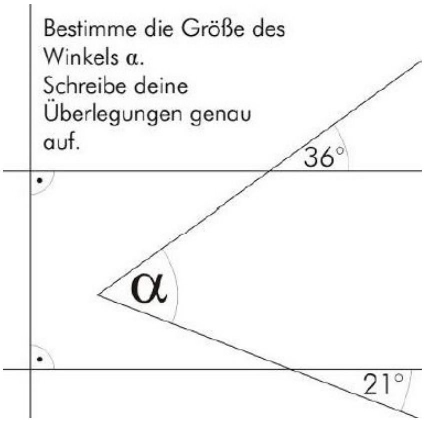


Abbildung 3 – Routine-Aufgabe Winkel

Da von den Aufgaben nur schriftliche Bearbeitungen vorliegen, wurden nur Heurismen untersucht, die sich an den Bearbeitungen eindeutig ablesen lassen. Das sind für beide Klassen zum einen das Einführen sinnvoller, mathematisch korrekter Bezeichnungen und das verwenden einer Hilfslinie andererseits. Da in der D-Klasse zusätzlich der Zwei-Spalten-Beweis eingeübt wurde, wurde dieser in der D-Klasse als dritter Heurismus herangezogen. Für jeden verwendeten Heurismus wurde ein Punkt vergeben. Da die Klassen eine unterschiedliche Anzahl an Heurismen-Punkten erzielen konnten, wurde auch hier die Punktzahl auf 100 gewichtet.

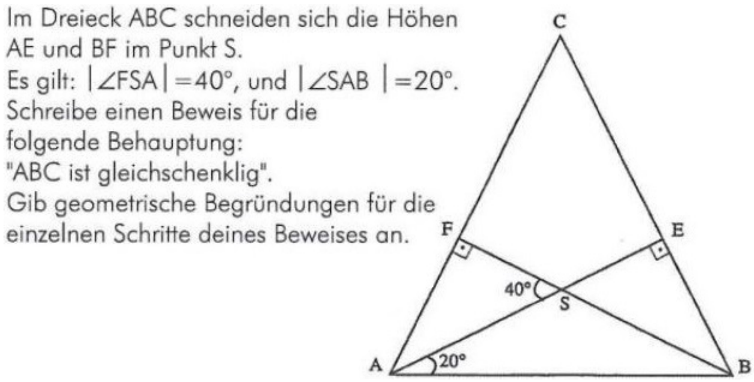


Abbildung 4 – Problemaufgabe K18

Zur Beantwortung der ersten Frage wurden die Korrelationskoeffizienten nach Pearson zwischen den Routineaufgabe und K18 und die Spearman-Korrelationskoeffizienten zwischen K18 und den Mathematiknoten ermittelt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zu finden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

	Klasse A	*Klasse D*	*Klasse A + D*
Mathematiknoten	0,19	0,23	0,20
Vortest Raute	0,29	-0,26	0,05
Vortest Winkel	0,18	0,25	0,18
Vortest	0,32	-0,13	0,11
Nachtest Raute	0,11	0,33	0,43
Nachtest Winkel	0,53	0,37	0,56
Nachtest	0,47	0,44	0,56

Tabelle 1 – Korrelation von Problemlöseerfolg mit Mathematiknoten und Routineaufgaben

Zur Beantwortung der zweiten Frage wurden die Korrelationskoeffizienten nach Pearson zwischen den betrachteten Aufgaben und den verwendeten Heurismen berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt.

	Klasse A	*Klasse D*	*Klasse A + D*
K18	-0,06	0,43	0,30
Vortest Raute	-0,18	0,13	-0,03
Vortest Winkel	0,73	0,65	0,69
Vortest	0,12	0,39	0,24
Nachtest Raute	0,12	0,53	0,44
Nachtest Winkel	0,74	0,14	0,67
Nachtest	0,36	0,48	0,68

Tabelle 2 – Zur Lösungsförderlichkeit von Heurismen

Die dritte Frage wurde beantwortet, indem der Bearbeitungserfolg der beiden Routine-Aufgabe – getrennt und kumuliert – der einzelnen Klassen aus Vor- und nachtest verglichen wurde. Dazu wurden die Punkte in Boxplots dargestellt. In Tabelle 3 sind die Mediane der Routine-Aufgaben aufgeführt.

	Klasse A		*Klasse D*	
	Vortest	*Nachtest*	*Vortest*	*Nachtest*
Raute	13,5	26,1	33,3	45,8
Winkel	11,4	8,6	10,0	31,4
Raute + Winkel	13,9	17,8	21,3	44,6

Tabelle 3 – Mediane der Routine-Aufgaben

Diskussion der Ergebisse

Betrachtet man die Ergebnisse in Tabelle 1 so fällt zunächst auf, dass sich der Problemlöseerfolg nicht aus den Mathematiknoten ableiten lässt. Auch anhand des Bearbeitungserfolgs der Routineaufgaben im Vortest lässt sich ein Problemlöseerfolg nicht ableiten. Am ehesten lässt sich ein Zusammenhang zwischen Problemlöseerfolg und Bearbeitungserfolg der Routine-Aufgaben im Nachtest erkennen. Dieses Ergebnis ist insoweit nachvollziehbar, als dass die Aufgaben zum selben Zeitpunkt bearbeitet wurden. Damit lässt sich eine Beeinflussung des Bearbeitungserfolgs von der Tagesform ausschließen. Aber auch hier ist der niedrige Korrelationskoeffizient zwischen der Routine-Aufgabe Raute und der Problemaufgabe K18 ein Indikator dafür, dass sich Problemlöseerfolg schlecht aus dem Bearbeitungserfolg von Routineaufgaben ableiten lässt.

Auch aus den Daten in Tabelle 2 lässt sich kein Zusammenhang zwischen Heurismen-Einsatz und Aufgabenbearbeitungs-Erfolg ableiten. Dies könnte unter anderem daran liegen, dass in der Trainings-Klasse im Nachtest deutlich mehr Heurismen verwendet wurden als im Vortest. Hier haben auch Schülerinnen und Schüler meistens alle gezählten Heurismen verwendet.

Betrachtet man die Daten in Tabelle 3, so lässt sich deutlich ein Trainingseffekt erkennen. Bei der Raute-Aufgabe haben sich die Mediane beider Klassen um etwa 12 Punkte verbessert. Dies lässt zunächst nicht auf eine Verbesserung der Trainingsklasse im Vergleich zu Kontroll-Klasse schließen. Allerdings fallen im Nachtest in der Trainings-Klasse das erste Quartil und der Median fast zusammen. In der Kontroll-Klasse lässt sich hingegen eine Regression zur Mitte erkennen.

Bei der Winkel-Aufgabe ist hingegen auch auf den ersten Blick ein deutlicher Trainingseffekt zu erkennen. Während sich der Median der Trainings-Klasse deutlich erhöht hat, ist der Median der Kontroll-Klasse sogar ein wenig gesunken.

Auch bei der Betrachtung beider Aufgaben zusammen, lässt sich ein Trainingseffekt erkennen. Während der Median der Kontroll-Klasse weitgehend unverändert bleibt, hat sich die Trainings-Klasse deutlich verbessert.

Literatur

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In *Der Mathematikunterricht, 38, (3)* (S. 24–38). Münster: Waxmann.

Mix, A.-Chr.; Fränzel, R. & Soyta, W. (2014). *Strukturelle Analyse von Problemlöseerfolg und Heurismeneinsatz in Schülerbearbeitungen der Aufgaben K18, Raute und Winkel*. unveröffentlichte Bachelorarbeit an der Leibniz-Universität Hannover

Judith JUNG, Dresden, Marcus SCHÜTTE, Dresden

Der Erwerb bildungssprachlicher Kompetenzen im Fach – Umgang mit Generalisierungen beim Mathematiklernen in Kita und Grundschule

Die Bedeutung dekontextualisierter Sprache

Untersuchungen der erziehungswissenschaftlichen Migrationsforschung (vgl. Gogolin 2006) ebenso wie aktuelle Untersuchungen der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. z.B. Schütte 2009) kommen zu dem Schluss, dass nicht die Beherrschung von allgemeinen sprachlichen Kompetenzen für das erfolgreiche Lernen im Fach (Mathematik) bedeutsam sind, sondern Kompetenzen in einer fachbezogenen Bildungssprache. Ein entscheidendes Charakteristikum dieser Bildungssprache stellt ihre konzeptionelle Schriftförmigkeit dar, wodurch sie ein hohes Maß an Informationsdichte sowie eine Situationsentbundenheit aufweist und im Wesentlichen nicht den Merkmalen der mündlichen Kommunikation des Alltags vieler Schülerinnen und Schüler entspricht (vgl. Gogolin 2006). Unterschiedliche Autoren weisen darauf hin, dass Dekontextualisierungen ein wesentliches Charakteristikum des schulischen bildungssprachlich geprägten Diskurses darstellen (vgl. Bernstein 1996, Cloran 1999). Im Folgenden wird auf Studien von Hasan (1973, 2001) und Cloran (1994, 1999) Bezug genommen, die einen Zusammenhang zwischen frühkindlichem familiären Sprachlernen und der in der Schule vorherrschenden Sprachform herstellen. Eine Definition von dekontextualisierter Sprache nach Hasan (1973, S. 284) lautet: „Kontextunabhängige Sprache ist eine Sprache, die explizit alle relevanten Merkmale der unmittelbaren Situation in sich trägt, in welche die sprachliche Interaktion eingebettet ist.“ Cloran (1994) greift diese Definition auf und identifiziert in Gesprächen von Müttern und ihren Vorschulkindern zehn verschiedene Typen von rhetorischen Einheiten (rhetorical units), die sie anhand deren Grades an Dekontextualisierung in eine Reihenfolge bringt. Sie beschreibt die Gegenpole der Grade der Dekontextualisierungen wie folgt: „The two characterizations – co present versus generalized entities and concurrent versus habitual events – represents the extremes, this means most contextualized and the most decontextualized uses of language“ (Cloran 1999, S.37). Betrachtet man diese Reihenfolge, so stellt die rhetorische Einheit „action“, die kontextabhängigste Sprachform dar. Sie bezieht sich auf eine in der Situation anwesende Person und stellt in der Regel eine Handlungsanweisung dar. Die rhetorische Einheit „generalization“ weist nach Cloran den höchsten Grad an Dekontextualisierung auf, weil sich die sprachliche Äußerung auf eine allgemeine Klasse von Objekten oder Indi-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

viduen bezieht. Zur Untersuchung der Ontogenese von dekontextualisierter Sprache erweitert Hasan diese Betrachtung durch die Begriffe actual und virtual, welche sich auf den Bezugskontext der sprachlichen Äußerung beziehen. „A context is actual, if it can be actually, that is physically sensed by the interactants. [...] A context is virtual if no possibility exists for experiencing it physically: The phenomena are, in fact, not available to the senses" (Hasan 2001, S. 53). Sie folgert aus ihren Beobachtung von Mutter-Kind-Diskursen, dass die beste Lernumgebung für den Gebrauch von dekontextualisierter Sprache Situationen sind, in denen ein kontinuierlicher Wechsel zwischen den Kontexttypen actual und virtual (im Folgenden als „gegenwärtig" und „virtuell" bezeichnet) hergestellt wird. So erhalten Kinder die Möglichkeit den sprachlichen Abstraktionsprozess vom Sprechen über konkret Erfahrbares zum Sprechen über abstrakte Generalisierungen schrittweise zu erlernen. Des Weiteren geht Hasan davon aus, dass die Schule aufgrund der dort vorherrschenden Diskursstrukturen kein geeigneter Ort für das Erlernen von dekontextualisiertem Sprachgebrauch ist, sondern diese Fähigkeiten zu großen Teilen vorausgesetzt werden. Folgt man dieser Annahme, müsste ein solcher Sprachgebrauch in vor- und außerschulischen Lernorten erlernt werden (s. a. Tiedemann 2012). Betrachtet man Anforderungen, die der Mathematikunterricht an Kinder stellt, fällt auf, dass gerade dort die Fähigkeit sich von konkreten Kontexten zu lösen und dies sprachlich auszudrücken von besonderer Bedeutung ist. Insbesondere auch die Grundschulmathematik ist von einer Ablösung von konkreten Alltagserfahrungen hin zu abstrakten und allgemeingültigen Aussagen geprägt (vgl. Gellert 2011). Es ist demnach anzunehmen, dass der Erwerb von dekontextualisierten sprachlichen Diskursfähigkeiten vor Schuleintritt - im Speziellen der Gebrauch von rhetorischen Einheiten, welche einen hohen Grad an Dekontextualisierung aufweisen (z.B. conjectures und generalizations) – eine Hilfe für spätere schulische mathematische Lernprozesse darstellen. In diesem Zusammenhang rückt neben dem schulischen Unterricht auch die Kita in das Zentrum der weiteren Betrachtung.

Methodologie und methodisches Vorgehen

Die zugrundeliegende Studie ist qualitativ orientiert und lässt sich im Bereich interaktionistischer Ansätze der Interpretativen (Unterrichts)forschung der Mathematikdidaktik verorten (vgl. Schütte 2009). Als empirische Grundlage der Studie dienen Videoaufnahmen von Spiel- und Erkundungssituationen im Bereich Raum und Form in der Kita von Kindern im Alter zwischen 4;7 und 5;5 Jahren, welche mit Situationen aus Klassengesprächen von vierten Klassen kontrastiert werden. Die transkribierten Videosequenzen werden mit Hilfe der Interaktionsanalyse (vgl.

Schütte 2009) und einer an die Untersuchung von Cloran (1994) angelehnten Analyse der verwendeten rhetorischen Einheiten analysiert. Die Untersuchung geht folgenden forschungsleitenden Fragen nach:

1. Welchen Umgang mit Generalisierungen finden wir im Unterricht der Jahrgangsstufe 4?

2. Lassen sich in den Diskursen der Kindergartenkinder mit den Erzieherinnen Situationen rekonstruieren, die den Kindern einen Wechsel zwischen gegenwärtigen und virtuellen Kontexten ermöglichen und somit dekontextualisierten Sprachgebrauch anbahnen?

Der Umgang mit Generalisierungen in Kita und Jahrgangsstufe 4

Im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 4 finden sich vielfach Situationen, in denen an die Kinder die Anforderung gestellt wird, Sachverhalte sprachlich zu generalisieren und von dem Hier und Jetzt auf eine allgemeinere Ebene zu transformieren. Die sprachliche Form der Äußerungen der Kinder scheinen hierbei vielfach nicht den Anforderungen der Lehrperson zu genügen. Eine explizite sprachliche Hilfestellung seitens der Lehrkraft bleibt jedoch meist aus. Die Analysen verdeutlichen des Weiteren, dass auch schon im Bereich der Grundschulmathematik einige mathematische Konzepte, wie bspw. das einer Geraden, nur auf einer sprachlichen und vom gegenwärtigen Kontext gelösten Ebene exakt beschrieben werden können. In der Kita finden sich vor allem vielfältige Situationen, in denen die Teilnehmenden Bedeutungen mit Bezug zu gegenwärtigen Kontexten aushandeln und Potentiale zum Wechseln von gegenwärtigen zu virtuellen Kontexten innerhalb der Gespräche seitens der Erzieherinnen nur selten ausgeschöpft werden. Dies scheint einerseits durch die Auswahl von Situationen im Bereich Raum und Form bedingt und andererseits in Bezug auf das Alter der Kinder in der Kita kaum zu überraschen. Betrachtet man jedoch die Ergebnisse von Cloran (1999) und Hasan (2001), so konnten diese sehr wohl schon in frühen Mutter-Kind-Diskursen Wechsel zwischen gegenwärtigen und virtuellen Kontexten rekonstruieren. Anhand dieser Ergebnisse lässt sich die Annahme Hasans (2001) stützen, dass sich im schulischen Unterricht für Kinder nur wenig Gesprächssituationen mit individuell unterschiedlichen Möglichkeiten für Wechsel zwischen gegenwärtigen und virtuellen Kontexten ergeben und somit von Kindern die Fähigkeit des dekontextualisierten Sprachgebrauches erwartet wird ohne dass sie hierbei Hilfestellungen erhalten. Zudem ließe sich mutmaßen, dass die Diskurse in der Kita ebenfalls nur wenig Anknüpfungspunkte zum Erlernen solcher sprachlichen Fähigkeiten bieten beziehungsweise dass zumindest Spielsituationen aus dem Bereich Raum und Form nur wenig Potential für die schrittweise Einführung in dekontextualisierten Sprachgebrauch bieten. Dies liegt eventuell daran, dass dieser Bereich insbesondere in frühkindlichen Lernprozessen über gegenwärtige enaktive, visualisierende Zugänge erschlossen wird. Durch die Betrachtung von anderen Inhaltsbereichen ließe sich diese Hypothese ausdifferenzieren und das theoretische Konstrukt von ersten Typisierungen des Umgangs mit dekontextualisierter Sprache in der frühen Bildung in Bezug zu unterschiedlichen mathematischen Inhalten erweitern. Weiterhin stellt sich die Frage, ob sich die Initiierung von Wechseln zwischen kontextualisierten und dekontextualisierten Sprachformen bzw. Hilfestellungen für den Erwerb dekontextualisierter Sprachformen zu einem früheren Zeitpunkt im Grundschulunterricht finden lassen.

Literatur

Bernstein, B. (1996). *Pedagogy, Symbolic Control and Identity.* London: Taylor & Francis.

Cloran, C. (1994). *Rhetorical units and decontextualisation: An equiry into some relations of context, meaning and grammar.* Monograph in Systemic Linguistics, No. 6. Nottingham: Department of English Studies, University of Nottingham.

Cloran, C. (1999). Contexts for learning. In F. Christie (Ed.): *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes*. London: Casell.

Gellert, U. (2011). Mediale Mündlichkeit und Dekontextualisierung. In S. Prediger, & E. Özdil (Eds.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (pp. 97-116). Münster: Waxmann.

Gogolin, I. (2006). Bilingualität und die Bildungssprache der Schule. In P. Mecheril & T. Quehl (Eds.), *Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule* (pp. 79–85). Münster: Waxmann.

Hasan, R. (1973). Code, register and social dialect. In B. Bernstein (Ed.), *Class, code and control*, Volume 2 (pp. 253-292). London: Routledge & Kegan Paul.

Hasan, R. (2001). The Ontogenesis of Decontextualised Language: Some Achievements of Classification and Framing. In A. Morais, I. Neves, B. Davies &, H. Daniels (Ed.), *Towards a sociology of pedagogy: the contribution of Basil Bernstein to research* (pp. 47-79). Peter Lang: New York.

Schütte, M. (2009). *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule. Zur Problematik einer Impliziten Pädagogik für schulisches Lernen im Kontext sprachlich-kultureller Pluralität.* Münster u. a.: Waxmann.

Tiedemann, K. (2012). *Mathematik in der Familie. Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen.* Münster u. a.: Waxmann.

Rainer KAENDERS, Bonn

Flächenbestimmung mit Ähnlichkeit als Alternative zur so genannten 'h-Methode'

„Es irrt der Mensch, solange er strebt.“ (Johann Wolfgang Goethe). Zahlen allerdings können – anders als Menschen – weder *gegen etwas laufen*, sich *annähern* noch *streben*. Eigenschaften von Zahlen, unter anderem ihr Wert, ändern sich, wenn man eine Zahl durch eine andere ersetzt.

Eine begrifflich tragfähige Entwicklung der Infinitesimalrechnung in der Schule ist durch den Wegfall jeglicher Definition eines Grenzwertes zu einer Herausforderung geworden. In Schulbüchern wird Sprache eingeführt, wie: „x+0,5 → 0,5+0,5 = 1 für x → 0,5; gelesen: x+0,5 *strebt* gegen 1 für x gegen 0,5.“ Doch Zahlen streben nicht und konzeptionelle Herangehensweisen fehlen. Bei der so genannten 'h-Methode' werden diese begrifflichen Defizite offenbar. Wir schlagen einen Einstieg in die Infinitesimalrechnung vor, der über Ähnlichkeits- und Symmetriebetrachtungen von Flächen zu den wichtigsten Funktionen der Schulmathematik führt.

Christoph Kirfel (2014) hat einen vergleichbaren Zugang zur Integralrechnung mit der Idee des flämischen Jesuiten Gregorius van St.-Vincent zum Logarithmus gefunden. Er studiert das Transformationsverhalten von Rechtecken in Ober- und Untersummen bei speziellen Funktionen. Unser Ansatz dagegen benötigt keinen technischen Integralbegriff, sondern nutzt lediglich die Ähnlichkeiten und Symmetrien der gesamten Graphen dieser Funktionen, um die Flächen unter den Graphen direkt zu bestimmen.

1. Die so genannte h-Methode

Bei dieser ‚Methode‘ wird ein algebraischer Ausdruck eines Differenzenquotienten $(f(x+h)-f(h))/h$ so umgeformt, dass $h=0$ eingesetzt werden kann. Da $h=0$ allerdings zunächst explizit ausgeschlossen war, wird dieser Verstoß gegen die Logik mit einer eigenen Formulierung versehen: „h *strebt* gegen Null“. Zugleich werden in Beispielen und mittels mathematischer Software verschiedene kleine Zahlen für h eingesetzt. Doch die h-Methode wird dem infinitesimalen Charakter des Grenzübergangs genauso wenig gerecht, wie es etwa der Unendlichkeit der Primzahlen gerecht wird, wenn man mit einem Rechner immer wieder neue große Primzahlen entdeckt.

In der Regel wird die h-Methode bei $f(x)=x^n$ praktiziert. Hier wird häufig auch noch der ungeschickte Zugang über den binomischen Lehrsatz gewählt. Dabei erlaubt die geometrische Reihe einen einfachen direkten

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zugang. Mit $x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \cdots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$werden der Differenzenquotienten und auch die Monotonie der Funktion gut verstehbar.

Wie gehen wir mit dem Wegfall des Grenzwertbegriffs um? Die Definition des modernen Grenzwertbegriffs mit drei Quantoren ist schwer. Doch gibt es einfachere infinitesimale Betrachtungen. Beispielsweise können wir leicht für eine Zahl C folgern: [$\forall\, \kappa > 1$: $\frac{1}{\kappa} \cdot 4711 \leq C \leq \kappa \cdot 4711$] $\Rightarrow C = 4711$.

Können wir den Grenzübergang bei der Differentiation in speziellen Fällen durch Betrachtungen mit einem Quantor ersetzen? Eine derartige Argumentation kennen wir auch von der Ableitung des Sinus. Ein einfacher Vergleich von Flächeninhalten (vgl. Priestley, 1979) liefert:

$\forall\, h > 0$: $\frac{1}{\cos(h)} \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \cos(h)$, woraus wir folgern $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 0$.

2. Flächenberechnung bei Potenzfunktionen durch Ähnlichkeit

In (Kaenders, 2014) haben wir eine Herangehensweise an die Quadratur der Parabel vorgestellt, wie sie unseres Wissens in der Literatur nicht zu finden ist und die auf der Feststellung (kognitiver Konflikt) beruht, dass je zwei Parabeln zueinander ähnlich sind. Auch die Graphen zweier Funktionen aus der Familie von Funktionen $f(x) = ax^n$ für $a > 0$ sind einander ähnlich.

Für festes x werden wir die Fläche $A(x) = A$ zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x) = ax^n$ und der x-Achse von 0 bis x quadrieren.

Dazu betrachten wir eine zentrische Streckung mit Faktor $\lambda > 1$ vom Ursprung des Koordinatensystems O aus und wählen eine Parallelstreckung parallel zur y-Achse von der x-Achse aus mit Faktor $\mu > 0$ dergestalt, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = ax^n$ unter beiden Abbildungen übereinstimmen. Zentrische und parallele Streckung bilden wie folgt ab:

$$\big((x, f(x)\big) \mapsto (\lambda x, \lambda\, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$

Bei beiden hat der Graph von $f(x) = ax^n$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = \lambda x$ und $\lambda f(x) = \mu f(x')$. Zusammengefasst erhalten wir die Bedingung: $\lambda f(x) = \mu f(\lambda x)$ oder kurz $\mu\lambda^{n-1} = 1$.

Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen nicht genau überein, auch wenn sie beide vom Graphen von μfnach oben begrenzt werden. Ihre Flächenmaße $\lambda^2 A$ und μA unterscheiden sich durch einen schmalen Streifen der Breite $\lambda x - x$. Also, mit der Monotonie:

$$\mu f(x)\,(\lambda x - x) \le \lambda^2 A - \mu A \le \mu f(\lambda x)\,(\lambda x - x).$$

Ausklammern von x und Division durch $(\lambda - 1)$ ergibt:

$$f(x)\,x \le \frac{\lambda^2 - \mu}{\mu(\lambda - 1)} A \le f(\lambda x)\,x.$$

Doch mit $\mu\lambda^{n-1} = 1$ gilt: $\frac{\lambda^2-\mu}{\mu(\lambda-1)} = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$. Also

$$\forall \lambda > 1: \qquad \frac{a\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \le A \le \frac{a\,\lambda^n\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \quad ,$$

was sich mit $\kappa = \lambda^n$ abschätzen lässt zu:

$$\forall \kappa > 1: \qquad \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right) \le A \le \kappa \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right),$$

Hieraus schließen wir, ähnlich wie in der Einleitung, dass $A = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$.

Mutatis mutandis funktioniert diese Methode für jeden reellen Exponenten $w \neq -1$ in $f(x) = ax^w$. Im Fall $w = -1$ ist $\lambda^2 = \mu$ und folglich können wir hier nicht durch den Faktor vor A dividieren.

Wollen wir umgekehrt eine Funktion der Form $F(x) = bx^{n+1}$ ableiten, so erkennen wir hierin zunächst eine Flächenfunktion unter dem Graphen von $f(x) = ax^n$ mit $a = (n+1)b$. Dann ist $F(x+h) - F(x)$ der Flächeninhalt eines Streifens der Breite h, dessen Höhe sich zwischen $f(x)$ und $f(x+h)$ bewegt. Das heißt: $f(x) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(x+h)$ bzw. $F' = f$.

3. Quadratur der Hyperbel

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ bezeichne $L(a,b)$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Aus obigen Betrachtungen folgt, dass $\mu L(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 L(a,b)$ ist. Mit $\mu = \lambda^2$ gilt: $L(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 L(a,b)$. Zusammen mit der Additivität der Flächeninhalte ergibt sich auch auf unsere Weise die wichtigste Eigenschaft des Logarithmus:

$$L(1,x) + L(1,y) = L(1,x) + L(x,xy) = L(1,xy).$$

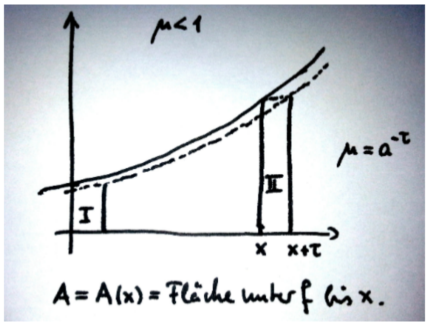
Der flämische Jesuit Gregorius van St-Vincent (1584-1667) hatte dieses Gesetz über die Exhaustion mit Rechtecken erkannt (vgl. Edwards, 1979).

4. Quadratur der Exponentialfunktion

Der Graph der Exponentialfunktion besitzt eine andere Symmetrie. Betrachte eine Translation in x-Richtung um $\tau > 0$ und wähle eine Parallelstreckung mit Faktor $\mu > 0$ von der x-Achse aus so, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = a^x$ übereinstimmen.

$$\big(x, f(x)\big) \mapsto (x + \tau, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$

Bei beiden hat der Graph von $f(x) = a^x$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = x + \tau$ und $f(x) = \mu f(x')$, d.h. $\mu = a^{-\tau}$. Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen allerdings nicht überein; beide werden von dem Bild des Graphen von f nach oben begrenzt werden.



Die Flächen stimmen auf zwei Streifen (linker Streifen I, rechter Streifen II) Die Differenz der beiden Streifen ist $A - \mu A$. Dies schätzen wir ab:

$$(\mu a^x - \mu a^\tau)\tau \leq A - \mu A \leq (\mu a^{x+\tau} - \mu a^0)\tau$$

Division durch $\mu\tau$ ergibt: $a^x - a^\tau \leq \frac{a^\tau - 1}{\tau} A \leq a^{x+\tau} - a^0$, womit wir die Konvergenz des schwierig zu behandelnden Grenzwertes $\lim_{\tau \to 0} \frac{a^\tau - 1}{\tau}$ erhalten, den wir $\ln(a)$ nennen. Die gesuchte Fläche ist dann $A(x) = \frac{1}{\ln(a)}(a^x - 1)$.

5. Resumé

Die Existenz und einfache Eigenschaften der Flächenmaße, die sich beim Riemann-Integral direkt aus der Konstruktion ergeben, setzen wir voraus. Der Fundamentalsatz kommt auf natürliche Weise ins Spiel und alle Standardfunktionen der Schule sind so behandelbar. Die zu Unrecht aus dem Schulstoff verdrängten Ungleichungen werden rehabilitiert.

Literatur

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Springer Heidelberg.

Kaenders, R.H. (2014): *Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel.* Beiträge zum Mathematikunterricht.

Kirfel, Ch. (2014): *Integration by geometrical means – a unified approach.* Mathematics Teaching 239.

Priestley, W.M. (1979): *Calculus, a historical approach.* Springer-Verlag New York.

Michael KALLWEIT, Birgit GRIESE, Bochum

Positionierung und Planung im ersten Semester – Weichenstellung durch individuelles Feedback

Rückmeldungen zum eigenen Lernverhalten werden im Semesterverlauf in der Regel nur indirekt durch die wöchentlich korrigierten Übungsaufgaben gegeben. Beim Projekt MathePlus (www.rub.de/matheplus) an der Ruhr-Universität Bochum erhalten die Studierenden in verschiedenen Maßnahmen ein individuelles Feedback, u.a. mit elektronischen Hilfsmitteln und in persönlichen Gesprächen. Gemeinsam werden Strategien zur eigenen weiteren Lernorganisation verabredet. Die so gewonnenen Erkenntnisse fließen zudem in die Ausgestaltung der weiteren Betreuung ein.

Das Projekt Mathe/Plus

Die Ruhr-Universität Bochum verfolgt mit dem Projekt Mathe/Plus (das aus MP²-Mathe/Plus/Praxis hervorgegangen ist) das ehrgeizige Ziel, eine Verringerung der Abbruchquote in der Studieneingangsphase zu erreichen, indem speziell für das Fach Mathematik Hilfestellung in Bezug auf die Organisation des eigenen Lernens, aber auch inhaltlicher Art geboten wird. Es wurden verschiedene Maßnahmen konzipiert, erprobt und weiterentwickelt, deren Erfolge für sich sprechen, siehe Griese, Roesken-Winter, Kallweit und Glasmachers (2013). MathePlus richtet sich explizit an Studierende des ersten Semesters, sowohl in verschiedenen ingenieurswissenschaftlichen Studienfächern als auch in den Mathematik-Studiengängen *Bachelor of Arts* und *Bachelor of Science*. Die Zielgruppe des Projektes umfasst daher, je nach Teilprojekt, 250 bis 1000 Studierende im ersten Semester, die typische Veranstaltungen (Vorlesungen mit wöchentlichen Hausaufgaben) besuchen. Nach erfolgreicher Bewerbung für das Projekt werden den TeilnehmerInnen an konkreten Beispielen aus ihren Mathematikveranstaltungen allgemeine Lernmethoden und Arbeitstechniken vermittelt. So werden Grundlagen für einen erfolgreichen weiteren Studienverlauf geschaffen, die auch auf andere Fächer wirken.

Feedback zur Lernleistung

Üblicherweise besuchen Anfängerstudierende Vorlesungen, in denen der Stoff frontal und gemäß dem axiomatischen Aufbau der Mathematik präsentiert wird. Mit Hilfe eines (inzwischen oftmals digital zur Verfügung stehenden) Skripts sowie selbstständig heranzuziehenden Zusatzmaterials muss dieser dann so nachgearbeitet werden, dass die wöchentlichen Übungsaufgaben gelöst werden können. Diese erfordert ein hohes Maß an Selbstorganisationsfähigkeit, über das viele Studierende nicht verfügen. Dies wurde in der Konzeption von Ma-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

thePlus als einer der Schlüsselfaktoren identifiziert, siehe Dehling, Glasmachers, Härterich, Hellermann (2010).

Die traditionelle Reihenfolge, dass ein Thema zuerst in der Vorlesung auftaucht, dann Aufgaben dazu gelöst werden müssen, die nach wenig individueller Massenkorrektur in Übungsgruppen besprochen werden, bietet erst nach eventuellen Misserfolgserlebnissen Hilfen an, die zudem etwa vier Wochen nach Erstbegegnung mit dem Thema greifen. Des Weiteren überlagern sich durch diese Zeitverzögerung mehrere nicht aufgearbeitete Themen, so dass bei den Studierenden rasch der Eindruck einer nicht zu bewältigenden Stofffülle entsteht. Idealerweise würden Studierende mit fachlichen, motivationalen oder lernorganisatorischen Problemen schon früher aufgefangen.

Selbsteinschätzung der Studierenden

Eine Kurzabfrage (siehe Abbildung 1) in der ersten Miniklausur nach dem ersten Drittel des ersten Semesters zeichnet ein Bild, wie wenig passgenau Studierende ihre eigene Vorbereitung und Leistung beurteilen, und welche Konsequenzen sie für sich planen (Abbildung 2). Die Fragen wurden anonym von allen TeilnehmerInnen der Miniklausur (n=212) ausgefüllt; es wurde nicht nach Projektteilnahme unterschieden.

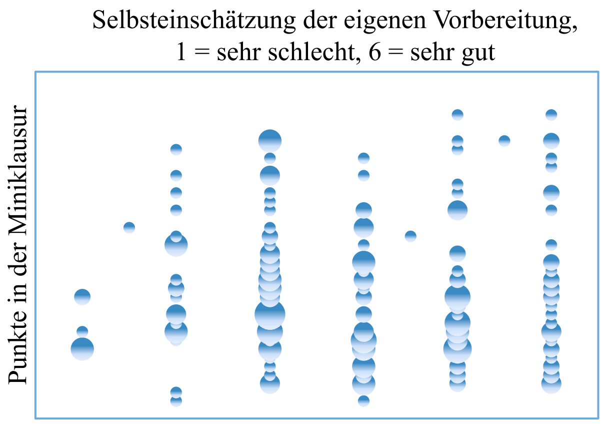


Abbildung 1: Selbsteinschätzung in Relation zur Prüfungs-

Abbildung 2: Lernplanung nach der Miniklausur

Die Daten zeigen, dass Studierende ihre Leistungen durchaus realistisch einschätzen können (r=0.59, p=0.000), diese jedoch nicht mit ihrem Vorbereitungsaufwand wächst: Im Gegenteil zeigt sich der Dunning-Kruger Effekt (Dunning, Heath, & Suls, 2004): Studierende, die schlechtere Leistungen zeigen, schätzen ihre Vorbereitung höher ein. Insgesamt wird deutlich, dass eine relevante Gruppe der Studierenden von individuellem Feedback profitieren würde.

Weichenstellung zu sensiblen Zeitpunkten

Das konzeptionelle Ziel von Mathe/Plus ist dabei, Studierende mittelfristig zu befähigen, ihr Lernen selbstorganisiert zu gestalten. Dafür greifen die Projektmaßnahmen auf methodischer, fachlicher und persönlicher Ebene bewusst an Schlüsselstellen des ersten Semesters ein, zum Beispiel nach der ersten Miniklausur, in der die Studierenden erstmals individuelle und offizielle Rückmeldung über ihren Lernstand erhalten. Hier setzen die Bewerbungen für Mathe/Plus an, die auf eigene Initiative über ein eigens erstelltes online-Portal erfolgen. BewerberInnen müssen ihre Motivation für die Teilnahme am Projekt kurz schildern und nach erfolgter Aufnahme eine Betreuungsvereinbarung unterschreiben. Ein weiterer Zeitpunkt, zu dem Studierende häufig den Entschluss fassen, ihr gewähltes Studienziel nicht weiter zu verfolgen, sind die Weihnachtsferien. Daher werden in den Gruppensitzungen von Mathe/Plus vor Weihnachten Einzelgespräche mit allen TeilnehmerInnen geführt, in denen ihre individuelle Situation, eventuelle Probleme und die nächsten konkreten Schritte besprochen und festgehalten werden. Flankierende Maßnahmen zur Stärkung des Gruppenzusammenhalts wirken außerdem mit Perspektive über die Projektdauer hinaus. Damit es gelingt, die Studierenden auch über das Ende ihres ersten Semesters hinaus zu stärken, verfolgt Mathe/Plus einen strategischen Rückzug in drei Phasen (bis Weihnachten, bis Vorlesungsende, bis zur Klausur), in denen die Unterstützung durch die ProjektmentorInnen zunehmend zur Aufforderung zur Eigeninitiative verschoben wird. Nichtsdestotrotz erhalten die ProjektteilnehmerInnen auch nach der Klausur (und vor einer Wiederholung derselben) Gesprächsangebote, um ihre individuellen Studienperspektiven auszuleuchten.

Methodische und fachliche Unterstützung in persönlicher Betreuung

Die langjährig erprobte und bewährte methodische Unterstützung im Rahmen des Projektes MathePlus besteht primär aus verschiedenen Lern- und Motivationstechniken, die am Beispiel aktueller Vorlesungsinhalte in den wöchentlichen Gruppensitzungen erprobt werden. Dies wird durch digitales Material unterstützt, unter anderem auch durch den *MathePlus Companion*, einem interaktiven und individualiserbaren Tool zur Selbstorganisation und dynamischen Lernstrukturierung, siehe Kiss und Kallweit (2015).

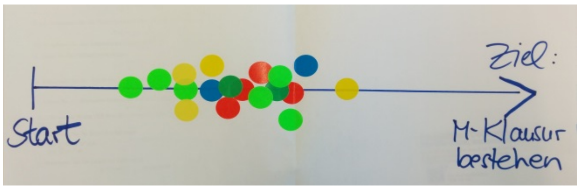


Abbildung 3: Individuelle Positionierung

Auch die fachlichen Hilfen im Projekt sind individuell gestaltet. In einem Helpdesk, das den Projektteilnehmern 12 Stunden pro Woche zur Verfügung steht, können individuelle inhaltliche

Fragen zum Vorlesungsinhalt und zu den Übungsaufgaben im Gespräch mit ausgewählten Studentischen Hilfskräften rechtzeitig geklärt werden. Zudem wird so die mehrwöchige Frist, die sonst bis zur Rückmeldung über eigene Lösungen verstreicht, deutlich verkürzt. Gemäß der Projektkonzeption stehen dabei in zunehmendem Maße die Hilfe zur Selbsthilfe und die Unterstützung durch Kommilitonen im Fokus. Des Weiteren ermöglicht das elektronische Assessment-Tool STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) die Integration von offenen Aufgabenformaten in die Lernplattform Moodle, vgl. Sangwin (2013). Mithilfe von Feedback-Graphen kann hier gezielt auf individuelle Fehler und Verständnisprobleme Rücksicht genommen werden. In der persönlichen Betreuung in der Lerngruppe mit nicht mehr als 25 Studierenden, die zueinander und zu ihrem Gruppentutor ein Vertrauensverhältnis aufbauen, können individuelle Probleme verschiedener Art angesprochen werden. Durch Einzel- und Gruppengespräche reflektieren die Teilnehmer beispielsweise ihre Position individuell, aber auch in Beziehung zur Gruppe, siehe Abbildung 3.

Blick nach vorn

Die Weiterentwicklung der Maßnahmen von MathePlus soll verstärkt die bisher ungelösten Probleme in Angriff nehmen. So nehmen trotz intensiver und individueller Betreuung immer noch nicht alle ProjektteilnehmerInnen auch an der Mathematikklausur teil. Auch kann die Verankerung der vorgestellten Lernmethoden im Alltag der Studierenden noch gesteigert werden. Über die digitalen Angebote hoffen wir zudem, Angebote wie den *MathePlus Companion* oder STACK für *alle* Hörer der Veranstaltungen anbieten zu können, die trotz der dann zu erwartenden Userzahlen im vierstelligen Bereich dem Anspruch an Individualisierung genügen.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., Härterich, J., & Hellermann, K. (2010). MP² - Mathe/Plus/Praxis: Neue Ideen für die Servicelehre. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 18, 252.*

Dunning, D., Heath, C., & Suls, J. M. (2004). Flawed self-assessment: Implications for health, education, and the workplace. *Psychological Science in the Public Interest*, (5), 69–106.

Griese, B., Roesken-Winter, B., Kallweit, M., & Glasmachers, E. (2013). Redesigning interventions for engineering students: Learning from practice. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 5, S. 65). Kiel: PME.

Kiss, T. & Kallweit, M. (2015). Der MathePlus Companion - digitale Unterstützung zur Lernstrukturierung. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM.

Sangwin, C. J. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford: OUP.

Michael KALLWEIT, Thorsten KISS, Bochum

Der MathePlus Companion - digitale Unterstützung zur Lernstrukturierung

Im Projekt MathePlus an der Ruhr-Universität Bochum werden Unterstützungsmaßnahmen zu Mathematik-Veranstaltungen erprobt. Um den mobilen Lernsituationen gerecht zu werden, wurde eine moderne Webapp, der MathePlus Companion, entwickelt. Mit fortschrittlichen Techniken der Prozesssteuerung wird den Studierenden ein interaktives Werkzeug zur Selbstorganisation und dynamischen Lernstrukturierung an die Hand gegeben. Dabei nimmt es die Doppelfunktion eines Interventions- und Messinstruments ein.

Das MathePlus Projekt

Das Projekt MathePlus (vgl. Dehling, Glasmachers & Härterich, 2012) ist ein seit 2010 etabliertes Unterstützungsangebot an der mathematischen Fakultät der Ruhr-Universität Bochum für die Studierenden im ersten Semester der Studiengänge „Maschinenbau", „Bauingenieurwesen", „Umwelttechnik und Resourcenmanagment" (alle seit 2010), „Mathematik" (seit 2011) „Elektrotechnik und Informationstechnik" und „IT-Sicherheit" (beide seit 2013 mit der Unterstützung der Reinhard Frank-Stiftung). Gerade in der Servicelehre bildet die Mathematik häufig die größte Einstiegshürde in das Studium (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2012), obwohl die bekannten Inhalte aus der Schule im ersten Semester nur geringfügig erweitert werden. Im Projekt MathePlus soll durch verschiedene Maßnahmen unnötigem Studienabbruch entgegengewirkt und langfristig der Studienerfolg begünstig werden. Primär stützen sich die Maßnahmen auf die Vermittlung von Lernstrategien und Selbstorganisationstechniken. Diese werden einer ausgewählten Gruppe von Studierenden wöchentlich in einer betreuten Lerngruppe präsentiert und unter Anleitung eingeübt. Zudem wurde die Förderung von Selbstregulation über die Jahre hinweg mit verschiedenen Formen von Werkzeugen beleuchtet, angefangen mit Lerntagebüchern auf der Grundlage von Landmann und Schmitz (2007) über das Projekt *MatheMücke* aus dem Bereich Serious Gaming (vgl. Kallweit & Griese, 2014) bis hin zur aktuellen Inkarnation als *MathePlus Companion*.

Die Entwicklung eines digitalen Helferleins

Der *MathePlus Companion* ist eine auf den neusten Techniken basierende mobile Webapplikation und läuft betriebssystem-unabhängig auf allen Endgeräten mit Webbrowser.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

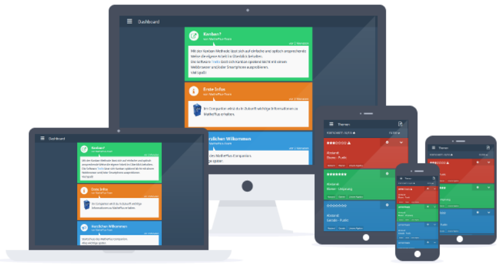


Abbildung 1: Der Companion auf verschiedenen Endgeräten

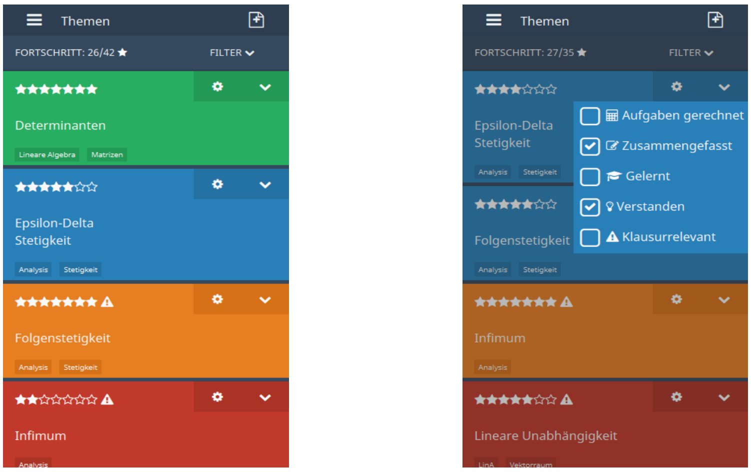


Abbildung 2: Selbstreflexion über Lernstandserhebung im MathePlus Companion

Studierende erhalten nach einer Registrierung Zugriff auf verschiedene Bereiche mit unterschiedlichen Funktionen zur Unterstützung der Selbstorganisation, -regulation und -reflexion. Diverse Module können von den Studierenden mit individuellen Inhalten gefüllt und vom Lehrenden mit allgemeinzugänglichen Information ergänzt werden.

Im Laufe der Jahre kristallisierten sich männliche Studierende innerhalb der Zielgruppe als besonders schwer zu erreichen heraus, da diese oftmals die verschiedenen Lernstrategien zwar innerhalb der Gruppensitzung ausprobierten aber selten im eigenen Alltagsrahmen fortführten. Daher richtet sich der *MathePlus Companion* in erster Linie an die Studierenden im ersten Semester der Studiengänge „Elektrotechnik und Informationstechnik“ (ET/IT) und „IT-Sicherheit“ (ITS). Hier ist durch den überdurchschnittlich hohen Anteil an männlichen Studierenden der Bedarf an Intervention am größten.

Erste Module

Unsere ersten Erprobungen der Digitalisierung der Lerntechniken und Motivationshilfen fielen technisch einfach aus und stellten eine direkte Umsetzung der analogen Lerntagebücher dar, die, nicht zuletzt aufgrund ihres Umfangs, nur geringe Akzeptanz fanden. Daher konzentriert sich der *MathePlus Companion* auf die Implementierung derjenigen Werkzeuge, die auch einen fachmathematischen Bezug haben. Gleichzeitig wird, durch die interne Analyse und Bewertung des Lernstandes und Aktivitätslevels der Studierenden, umfangreiches Feedback an die Lehrenden möglich. So kann in den Gruppensitzungen noch gezielter auf aktuelle Probleme der Studierenden Rücksicht genommen; die jeweiligen Inhalte können angepasst werden. Eines der ersten Module ist in Abbildung 2 zu sehen. Mit dem Themenmodul wird versucht, im *MathePlus Companion* die Selbstregulationsprozesse dahingehend positiv zu beeinflussen, dass die Studierenden einen Überblick über ihre derzeitige Lernsituation erhalten. Eine Skala mit sieben Punkten und eine entsprechende Signalfarbe geben ein deutliches individuelles Feedback zu einzelnen Themenbereichen der Vorlesung, die entweder durch die Studierenden selbst oder durch eine Lehrkraft erstellt worden sind. Jeder Themeneintrag soll dabei eine kleine Informationseinheit wie beispielsweise „Lineare (Un-)Abhängigkeit“ abdecken. Der individuelle Lernfortschritt kann von den Studierenden dabei über eine einfache Checkliste („Aufgaben gerechnet“, „Zusammengefasst“, „Gelernt“, „Verstanden“) festgehalten werden. Außerdem dient ein binärer Indikator zur Sondierung klausurrelevanter Themen. Der Gesamtfortschritt (die Summe aller Sterne in Relation zur maximalen Punktzahl) liefert den Studenten ein deutliches Indiz über ihren Wissensstand im laufenden Semester und regt somit zur Selbstreflexion an.

Geplante Module

Um die Studierenden in ihrer Selbstorganisation und Strukturierung der Lernprozesse zu unterstützen, sind Monats- und Wochenplaner und ToDo- bzw. Toplisten geplant. Um die Attraktivität des Companions zu steigern ist ferner ein Karteikartenmodul geplant, das den Studierenden ermöglichen soll, sowohl unterwegs als auch in ihrer gewohnten Lernumgebung Faktenwissen einzuüben, wobei der Lernprozess intern nach dem System von Leitner (2011) gesteuert wird. Sowohl die Studierenden als auch die Lehrenden können hierbei Stapel von Karteikarten mit LaTeX-Unterstützung erstellen. Längerfristig soll der *MathePlus Companion* durch das Computeralgebrasystem *Sage* erweitert werden, um unter anderem einen automatisch generierten Aufgabenpool mit Freitextantworten und Auswertung auf algebraischer Ebene zu schaffen (vgl. Sangwin, 2013). Antworten der Studierenden können dann, anders als bei Multiple-Choice-Aufgaben, auf ihre mathematischen Eigenschaften hin überprüft werden. So kann sogar auf eventuelle systematische Fehler interaktiv eingegangen werden, indem der

Studierende nach einer falschen Antwort entsprechende Feedbackschleifen mit individuell an den Fehler angepassten Folgefragen durchläuft. Erwartet wird nicht nur eine Steigerung des Lernerfolgs, sondern auch eine bessere Planung von Gruppensitzungen durch Analyse der so gewonnenen Daten. So entsteht durch die vielfältigen Optionen und Module ein scharfes Profil des Lernverhaltens für jeden Studierenden, welches durch weitere Funktionalität wie Push-Notifications und Anbindungen an bestehende soziale Netzwerk sowohl passgenau unterstützt als auch beforscht werden kann.

Forschungsausblick

Die Studierenden können sich im Projekt MathePlus für zwei unterschiedliche Formate der Betreuung bewerben: als Mitglied in der SLG (Supported Learning Group), einer eng betreuten Gruppe mit wöchentlicher Sitzung, oder als Teilnehmer in der SDG (Self-directed Group), ein Gruppe ohne entsprechende Sitzung, aber mit Zugriff auf alle digitalen Inhalte. In den letzten Jahren war das Interesse an der SDG stets gering. Angebote wie der *MathePlus Companion* könnten die Teilnehmerzahl in der SDG erhöhen und die Gruppengröße so in statistisch nutzbare Größenordnung heben. Durch den Vergleich von SDG und SLG lassen sich so, unabhängig von den präsentierten Inhalten, Rückschlüsse auf die Wirksamkeit enger persönlicher Betreuung durch wissenschaftliches Personal ziehen. Da den Studierenden der Zugang zum *MathePlus Companion* auch nach dem ersten Semester gewährt wird, erhalten wir außerdem einen großen Datenpool zur Langzeitentwicklung des Lernverhaltens der Studierenden und können so die nachhaltige Wirksamkeit unseres Projektes im weiteren Studienverlauf weiter evaluieren.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., & Härterich, J. (2012), **Mathematik im Doppelpack.** *duz-Akademie, 4, 5.*

Kallweit, M., & Griese, B. (2014). Serious Gaming in der Studieneingangsphase – Mit Avataren zum Studienerfolg? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 591-594). Münster: WTM.

Landmann, M., & Schmitz, B. (2007). Die Kombination von Trainings mit standardisierten Tagebüchern: Angeleitete Selbstbeobachtung als Möglichkeit der Unterstützung von Trainingsmaßnahmen. In M. Landmann & B. Schmitz (Hrsg.), *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen* (S.151-163). Stuttgart: Kohlhammer.

Leitner, S. (2011). *So lernt man lernen: Der Weg zum Erfolg* (18. Auflage). Freiburg im Breisgau [u.a.]: Herder.

Sangwin, C. J. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Nadja KARPINSKI-SIEBOLD, Halle (Saale)

Algebraisches Denken von Grundschulkindern – Ergebnisse einer Interviewstudie

Mit diesem Beitrag sollen einige Ergebnisse einer Interviewstudie präsentiert werden. Ausgehend von den international vielfach diskutierten Early-Algebra-Ansätzen, die eine Verbindung und gegenseitige Stützung arithmetischer und algebraischer Inhalte im Mathematikunterricht anstreben, geht es um die Erkundung algebraischer Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter (Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2012).

Konkret sollten folgende zwei *Forschungsfragen* Beantwortung finden:

- *Wie kann algebraisches Denken im Grundschulalter beschrieben werden?*
- *Welche entsprechenden Fähigkeiten bezüglich des algebraischen Denkens sind im 4. Schuljahr ohne vorherige spezifische Programme zu erfassen?*

Zum algebraischen Denken

Ausgehend von der weltweit geführten Diskussion zum algebraischen Denken und bezugnehmend zur o. g. ersten Frage wird das Konstrukt algebraisches Denken von mir mit folgenden sechs Komponenten umrissen:

Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen; Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen

Diese Komponenten sind nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischer Konstellation allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges spezifisches Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten trennscharf voneinander sind (ausführlich dazu Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2011).

Die empirische Hauptstudie

Nach einer im Frühjahr 2011 durchgeführten Vorstudie mit 44 Schülerinnen und Schülern im Raum Halle (Saale) und Umgebung, schloss sich im Mai bis Juli 2013 die Hauptstudie zu diesem Promotionsprojekt ebenfalls in Halle (Saale) und Umgebung und in Magdeburg und Umgebung mit insgesamt 74 jeweils ca. 45-minütigen diagnostischen Einzelinterviews an. An dieser Studie nahmen zum einen 20 mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, jeweils 10 aus den o.g. Regionen teil (Schülergruppe A), die aus den 25 Besten des Aufnahmetests zweier in Sachsen-Anhalt befindli-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

cher Spezialgymnasien ausgewählt wurden. Zum anderen wurden aus den Schulklassen dieser Teilnehmer jeweils drei weitere Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einbezogen, die sehr gute bis gute, durchschnittliche und unterdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik erreicht haben und damit das Leistungsspektrum repräsentieren sollten (Schülergruppen B, C, D). Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler nahm die Mathematiklehrerin nach von mir ausgearbeiteten konkreten Vorgaben vor. Man kann davon ausgehen, dass durch diese Konstruktion der Untersuchungsgruppe ein Ausblick auf einen evtl. Zusammenhang zwischen den Konstrukten „mathematische Begabung“ und „algebraisches Denken“ möglich ist. Die Untersuchungsgruppe löste neun Aufgaben passend zu den Komponenten algebraischen Denkens.

Ausgewählte Aufgaben am Beispiel der Komponente „Umgehen mit Operationen (als Objekte) und ihren Umkehrungen

Zu dieser Komponente gab es zwei Aufgaben, von denen eine im Folgenden vorgestellt werden soll.

> Tim fährt mit seinen Eltern zum Sommerurlaub in die Türkei. Dort muss die Familie Geld umtauschen: Für 1 Euro bekommt man 2 Lira, für jeden Umtausch müssen allerdings 10 Lira Gebühren bezahlt werden.
>
> a) Die Mutter tauscht am ersten Urlaubstag 500 Euro um.
> Wie viel Lira bekommt sie dafür?
>
> b) Einige Tage später holt der Vater 690 Lira von der Bank.
> Wie viel Euro hat er dafür gegeben?

Abb. 1: Aufgabe „Umtausch Teilaufgabe b)“

Die Teilaufgabe a) diente hier als Einstieg, um den Sachverhalt verständlich zu machen. In der Teilaufgabe b) ist den Schülerinnen und Schülern der Zielzustand der Sachsituation gegeben. Das Lösen ist durch das **Umkehren von Gedankengängen** in der entsprechenden Sachsituation möglich. Hierbei müssen ein Wechsel der Bearbeitungsrichtung und ein Umkehren der Operationen erfolgen. Das Bearbeiten der Aufgabe wäre auch durch systematisches Probieren möglich. Dies wurde in der vorliegenden Untersuchung nicht beobachtet.

Auswertung der Ergebnisse

Die Auswertung der Interviews und der Arbeitsblätter erfolgte aufgabenspezifisch. Dabei wurde aus den beobachtbaren Lösungsstrategien der Vorstudie von mir für jede Aufgabe ein Kategoriensystem entwickelt, welches in der Auswertung der Daten der Hauptstudie evaluiert wurde. Es erfolgte eine Stufung der Kategorien in „algebraisches Vorgehen“ (grüne Färbung),

„teilweises algebraisches Vorgehen“ (gelbe Färbung), „nicht algebraisches Vorgehen“ (rote Färbung).

Aus den beobachtbaren Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler der Aufgabe „Umtausch Teilaufgabe b)“ wurde von mir folgendes Kategoriensystem entwickelt (Tabelle 1).

Ziffer der Kategorie	Erläuterung	Farbe im Diagramm
1	Die Aufgabe wird trotz Hinweis nicht verstanden. Es ist nicht zu erkennen, dass die Schülerin bzw. der Schüler Gedankengänge umkehrt.	rot
2	Teilweise Umkehrung	gelb
3	Korrekte Lösung nach Hinweis (siehe Interviewleitfaden)	gelb
4	Die Rechenoperationen und Reihenfolge werden korrekt umgekehrt.	grün

Tabelle 1: Kategoriensystem „Umtausch Teilaufgabe b)“

Aus dem Diagramm 1 geht hervor, dass 28 von 74 Schülerinnen und Schülern in der Lage waren, Gedankengänge umzukehren. Diese Denk- und Handlungsweise könnte als algebraisch interpretiert werden (im Diagramm grün gekennzeichnet). Fünf Schülerinnen und Schüler konnten nach dem Hinweis der Interviewerin *„Hast du auch an die Gebühren gedacht?“* die Aufgabe lösen (im Diagramm gelb gekennzeichnet). 20 Schülerinnen und Schüler konnten die Gedankengänge nur teilweise umkehren, das heißt, dass nicht alle Rechenoperationen und die Reihenfolge nicht umkehrt wurden oder nicht alle Rechenoperationen aber die Reihenfolge umgekehrt wurden. Hier sind ansatzweise algebraische Handlungen zu beobachten, jedoch ist ein vollständiger Wechsel der Bearbeitungsrichtung bzw. das vollständige Umkehren der Operationen nicht zu erkennen (im Diagramm gelb gekennzeichnet). 20 Schülerinnen und Schüler, deren Vorgehen in 1 kategorisiert wurde, kehrten die Gedankengänge nicht um oder fanden keinen Zugang zur Aufgabe (im Diagramm rot gekennzeichnet).

Das Diagramm 2 zeigt, dass es einen großen Unterschied zwischen den Schülergruppen A und B gibt. Fähigkeiten bezüglich der Komponente sind in fast allen Schülergruppen zu verzeichnen. Ein vollständiges Umkehren konnte bei keinem Kind aus der Schülergruppe D beobachtete werden.

Für die weitere Auswertung der Hauptstudie war es interessant auch der Frage nachzugehen, ob *typische Schülerprofile über die verschiedenen Komponenten algebraischen Denkens* zu finden sind. Hierzu wurden von mir für alle 74 Probandinnen und Probanden Profile ihrer Vorgehensweisen

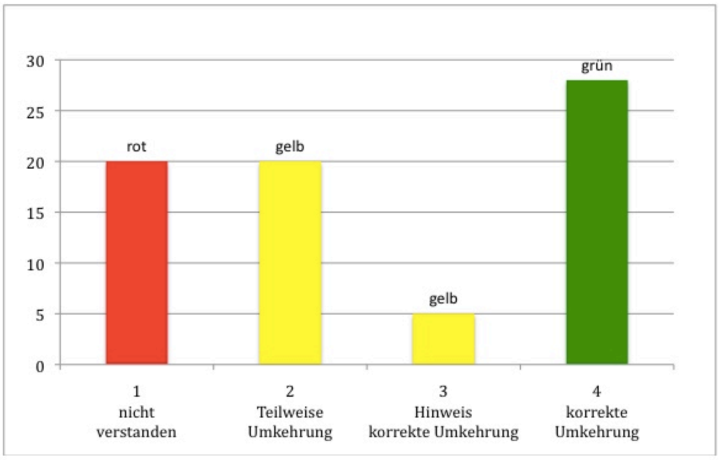


Diagramm 1: Auswertung der Vorgehensweisen aller SuS

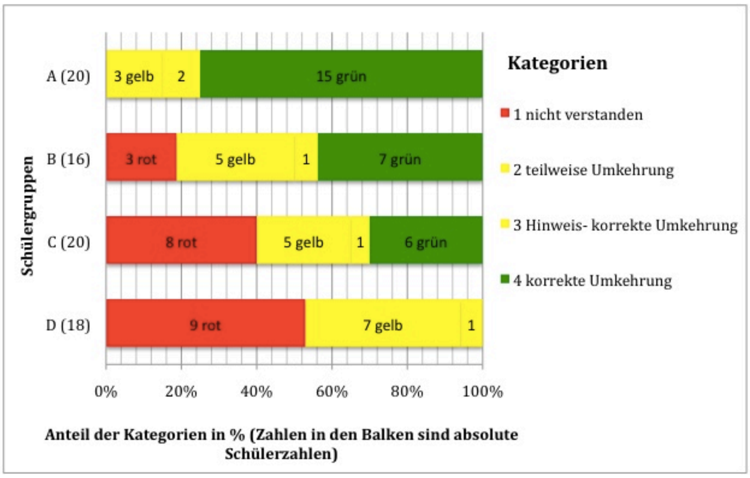


Diagramm 2: Auswertung der Vorgehensweisen der SuS nach Leistungsspektrum

angefertigt. In der Auswertung wurde festgestellt, dass es **keine** typischen Schülerprofile für diese Untersuchung gibt. Folgende Ursachen sind denkbar: Die konstruierten Aufgaben sind komplex und lassen verschiedene Lösungswege zu, die unterschiedlich erfolgreich sein können. Die Schülerinnen und Schüler agieren situationsabhängig. Die einzelnen Komponenten algebraischen Denkens berücksichtigen verschiedene Eigenschaften zum algebraischen Denken, die zum Teil bei Schülerinnen und Schülern am Ende der Grundschulzeit unterschiedlich ausgebildet sind.

Literatur

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), Proceedings oft he 35th Conference oft he International Group fort he Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 345-352). Ankara: PME.

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2012). Algebraisches Denken und mathematische Begabung im Grundschulalter. In Ludwig, M. & Kleine, M. (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 261-264). Münster: WTM-Verlag.

Christoph KIRFEL, Bergen, Hans-Stefan SILLER, Koblenz

Graphikwerkzeuge als Modellierungsanlass

Die Entdeckung von Mathematik, die sich hinter bekannten (Computer-) Programmen, wie Zeichenprogrammen, verbirgt, nutzen wir hier zum Anlass, eben diese Mathematik, mit Hilfe eines mathematischen Modellierungsprojekts, „freizulegen“.

Einstieg

Die Figur auf dem Bild ist mit der Freeware SumoPaint (www.sumopaint.com) erstellt. In SumoPaint gibt es wie in fast jedem Programm die Option eine gezeichnete Strecke „zu krümmen“. Auf diese Weise lassen sich beliebige Kurven erstellen.

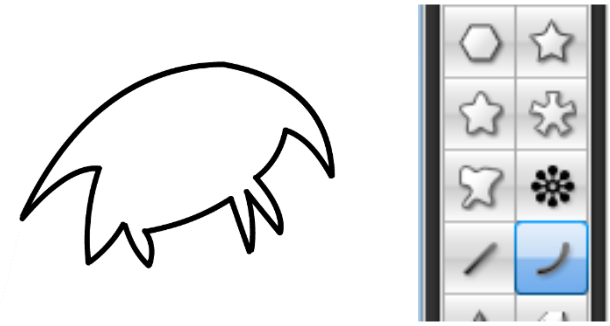


Abbildung 1: Darstellung eines bel. Objekts in SumoPaint

Wie ein Computer diese Kurven generiert, darüber lässt sich in SumoPaint nichts erfahren. Diesen Umstand machen wir uns zu Nutze: Schülerinnen und Schüler betätigen sich im Rahmen einer Unterrichtseinheit als Designer und entdecken gemeinsam die zugrundeliegenden mathematischen Hintergründe.

Als Ausgangspunkt dienten Kurven, die an Parabeln erinnerten. Es wurden anfänglich mehrere aneinander gekoppelte Parabelstücke durch vom Benutzer vorgegebene Punkte gelegt. Durch je zwei aufeinanderfolgende Punkte wurden Parabeln ($y = ax^2 + bx + c$) erstellt, zusätzlich sollte die Tangentensteigung im Startpunkt vorgegeben werden. Die Beschreibung der genauen (unterrichtlichen) Umsetzung kann in Kirfel (2015) nachgelesen werden.

Zu jedem neuen Punkt, der in der Zeichnung berücksichtigt wird, bekommen wir in neues Parabelstück. Die Schülerinnen und Schüler bauten nach einer Weile selbst ihr Kurvenzeichenwerkzeug in GeoGebra nach, indem sie zwei Parabelstücke erstellten und damit experimentierten. Nach und nach entstand der Wunsch, dass die Parabelstücke glatt ineinander übergehen sollten. Aus einer intrinsischen Motivation seitens der Schülerinnen und Schüler entstand also der Wunsch nach einem Modell ohne Knicke in der Kurve.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Durch Erweiterung auf weitere vorhandene Ankerpunkte konnten auch dort solche glatten Übergänge erreicht werden. Es ist dann nur noch die Steigungszahl der allerersten Starttangente frei wählbar.

Schwächen des gewählten Modells

Nachdem mit Hilfe des ersten Modells umfassend experimentiert wurde, wurden auch die vorliegenden Mängel (des Modells) sichtbar. Zum einen wurden die Zeichnungen sehr bizarr, wenn zwei Punkte sehr nahe beieinander lagen, also annähernd dieselbe x-Koordinate hatten. Dieses Phänomen war für die Schülerinnen und Schüler aber vergleichsweise leicht zu erklären. Liegen die Punkte gerade übereinander, bricht die Berechnung ab, da der Nenner in der Formel, welche von den Schülerinnen und Schülern zur Auffindung der Parabelparameter (a,b,c) entwickelt wurden, zu Null wird. Die Kurven werden so zu senkrechten Linien und dieser Effekt pflanzt sich auf die anderen Ankerpunkte fort.

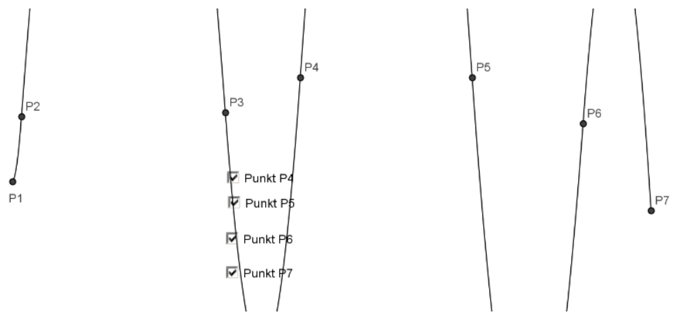


Abbildung 2

Dies gilt hauptsächlich für das glatte Modell. Das ist natürlich ein ernsthafter Mangel, der in einem professionellen Zeichenprodukt nicht auftreten darf.

Ein anderer Nachteil unseres Modells ist, dass die Kurven keine senkrechte Tangente haben können. In einer Zeichnung kann gerade dies gewünscht sein. Wir erzeugen zudem keine geschlossene Kurve, die einen oberen und einen unteren Ast hat, was ja in einer Zeichnung durchaus wünschenswert wäre. Unser Modell eignet sich im Grunde nur für eine Reihe von Punkten mit steigenden Abszissen-Werten (Gebirgslandschaft).

Die Schülerinnen und Schüler waren mit ihren eigenen gezeichneten Kurven zufrieden, gleichzeitig aber auch ein bisschen enttäuscht, dass sie nicht die Funktionalität eines professionellen Programms darstellen konnten. Dies ist der Ausganspunkt für eine weitere neue Idee – die Verwendung von Vektorfunktionen.

Als Startpunkt wurde eine Vektorfunktion $P(t) = P_1 t$ gewählt, also bloß einen Vektor P_1 der mit Hilfe einer Variabel t verkürzt oder verlängert wird. Die Resultatvektoren liegen auf einer Geraden. Des weiteren betrachteten die Schülerinnen und Schüler eine andere Vektorfunktion $P(t) = P_1 t + P_2$. Durch eine Erweiterung der Vektorfunktion zu $P(t) = P_1 t^2 +$

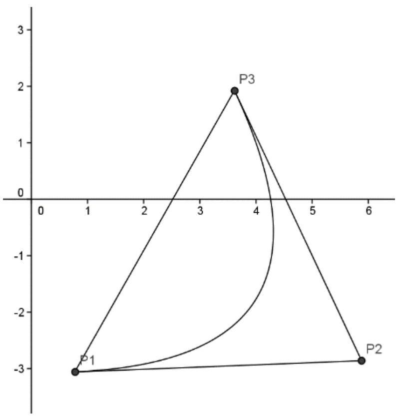


Abbildung 3

$P_2 t + P_3$ gelangten die Schülerinnen und Schüler zu einer neuen Erkenntnis. Sie konnten beobachten, dass die Kurven jetzt viel mehr den Kurven aus SumoPaint glichen. Zwar ähnelte auch hier alles Parabeln, aber diese konnten jetzt auch gedreht im Koordinatensystem auffindbar sein (vgl. Abb. 3). Damit erhöhte sich auch die Motivation der Schülerinnen und Schüler. Dies führte dazu, dass sie mehr über den Zugang mit Hilfe von Vektorfunktionen wissen wollten.

Die Verwendung von Bézierkurven als einer speziellen Form quadratischer Vektorfunktionen, $P(t) = P_1\,(1-t)^2 + 2\,P_2\,(1-t)\cdot t + P_3 t^2 = \binom{u_1}{v_1}(1-t)^2 + 2\binom{u_2}{v_2}\,(1-t)\cdot t + \binom{u_3}{v_3}\cdot t^2$ hatte klare Vorteile, die auch bald von den Schülerinnen und Schülern erkannt wurden. Sie erkannten bald, dass sich das Intervall [0, 1] als Definitionsbereich für die Variable t eignet, weil dann nämlich $P(0) = P_1(1-0)^2 + 2P_2(1-0)\cdot 0 + P_3 \cdot 0^2 = P_1$ und $P(1) = P_1(1-1)^2 + 2P_2(1-1)\cdot 1 + P_3 \cdot 1^2 = P_3$ gilt. Damit war auch die Bedeutung der Punkte P_1 und P_3 in der Formel geklärt. Nur der Punkt P_2 war noch ungeklärt. Wird mit der zugehörigen Vektorfunktion experimentiert, erkennt man dass der Punkt P_2 für die Tangenten im Start- und Endpunkt des Intervalls verantwortlich ist. Daraufhin entstand die Idee, die Ableitung der Vektorfunktion $P'(t) = -2\,P_1\,(1-t) + 2\,P_2\,(1-2t) + 2\,P_3 t$ zu untersuchen.

Die Schülerinnen und Schüler waren bereits mit dem Begriff der Ableitung einer Vektorfunktion vertraut und wussten, dass die Ableitung die „Geschwindigkeit" eines Punktes, der sich entlang der Kurve bewegt, beschreibt. So konnte dann die Start- und Endgeschwindigkeit ermittelt und eine korrekte Interpretation des Vorgangs, im Zuge der Validierung, durchgeführt werden: die Tangente der Kurve ist im Startpunkt ein Vektor, der von P_1 nach P_2 zeigt und der entsprechende Tangentenvektor zeigt für die Endtangente von P_2 nach P_3. Damit wird also P_2 zum Steuerpunkt für die Tangenten in den Endpunkten und die Schülerinnen und Schüler können die Kurve nun „kontrollieren".

Die Funktionalität eines professionellen Zeichenprogramms wie z. B. SumoPaint wurde entdeckt, gleichzeitig die Mängel des ursprünglichen, selbst erstellten Zeichenwerkzeugs (Division durch Null, senkrechte Tangenten, doppelte Äste) behoben. Es wäre spannend gewesen, hier noch weiter zu gehen und mehrere Bézierkurvenstücke hintereinander zu setzen oder zu beschreiben, wie man glatte Übergänge zwischen solchen Kurvenstücken hinbekommt. Auch hätte es sich gelohnt, Bézierkurven dritten Grades zu studieren, wie man sie im Zeichenprogramm *Paint* findet. Dies sind Ideen für zukünftige Projekte.

Fazit

Der Modellierungsprozess wird als Kreislauf mit mehreren Phasen beschrieben, die ggf. auch mehrmals durchlaufen werden müssen (vgl. Blum & Leiß, 2005, Fischer & Malle, 1985), insbesondere dann, wenn das konstruierte Modell nicht den gestellten Anforderungen entspricht. Selten werden in exemplarischen Umsetzungen diese Mehrfachdurchläufe des Prozesses dokumentiert. Im vorliegenden Fall sieht man allerdings deutlich, wie ein anfängliches Modell eben nur teilweise die gestellten Anforderungen erfüllt, und in der „nächsten Runde" durch Berücksichtigung weiterer Parameter man das Modell weiterentwickeln kann. Die Unzufriedenheit der Schülerinnen und Schüler mit ihrem eigenen Modell konnte nämlich als Motivationsfaktor genutzt werden, um sich neuen Stoff anzueignen.

Es wird aber auch deutlich, dass man nicht mit dem endgültigen Modellvorschlag hätte beginnen können, weil dazu der Zugang gefehlt hätte. Der Durchlauf mit dem ersten „fehlerhaften", d.h. nicht passendem, Modell war notwendig, um das neue Modell zu akzeptieren. So wird sichtbar, wie curriculare Inhalte und der Wissenstand von Schülerinnen und Schülern abgeglichen werden muss, um einerseits die Motivation zu erhalten und andererseits aber auch Fortschritte im fachlichen (Er-)Lernen zu ermöglichen.

Literatur

Blum, W.; Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. In *mathematik lehren*. Heft 128, S. 18–21.

Fischer, R.; Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Kirfel, Ch. (2015). Mathematik als Design-Werkzeug – Wie macht man schöne Kurven. In Siller, H.-St. (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht*, 5/2015, S. 50–57.

Marcel KLINGER, Essen, Daniel THURM, Essen, Bärbel BARZEL, Essen

Evaluation der Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Schülerebene

Seit Beginn des Schuljahres 2014/15 ist der Gebrauch des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) im Mathematikunterricht der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen verbindlich. In diesem Kontext bietet das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) in Zusammenarbeit mit dem Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW die Fortbildungsreihe „GTR kompakt“ an, welche Lehrerinnen und Lehrer darin unterstützen soll, den GTR didaktisch-reichhaltig in den eigenen Unterricht zu integrieren. Verschränkt mit der Fortbildung möchte das Forschungsprojekt „GTR NRW“ einerseits die Frage beantworten, welche *Rahmenbedingungen* bei der Konzeption und Durchführung einer solchen Fortbildungsveranstaltung zu berücksichtigen sind. Andererseits steht die Frage nach der *Wirksamkeit* der Lehrerfortbildung im Mittelpunkt. Hierbei handelt es sich um die leitenden Forschungsfragen des Projektes. Beide Fragen erstrecken sich auf die Einstellungen von Lehrerinnen und Lehrern u.a. zum graphikfähigen Taschenrechner, die tatsächliche Integration von technologischen Werkzeugen in den Unterricht sowie auf den Kompetenzstand von Schülerinnen und Schülern.

Für eine genaue Beschreibung der untersuchten Lehrerfortbildung sowie erste Ergebnisse auf Ebene der Lehrerinnen und Lehrer sowie deren Unterricht sei auf Thurm et al. (2015) in diesem Tagungsband verwiesen. Im Mittelpunkt dieses Berichtes steht die Beschreibung des Teilforschungsprojektes zur Untersuchung der Rahmenbedingungen sowie der Wirksamkeit auf Schülerebene.

Im Detail geben wir zunächst einige Ergebnisse vorangegangener Studien an, um Vorteile des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht aufzuzeigen. Wir geben sodann eine Übersicht über die von uns eingesetzten Erhebungswerkzeuge und fahren anschließend mit ersten Einblicken in frühe Ergebnisse unserer Forschung fort. Da es sich um ein laufendes Projekt handelt, sei betont, dass sich unsere Forschungsfragen derzeit noch nicht vollständig beantworten lassen. Wir beschränken uns daher auf die Quantifizierung häufiger Schülerfehler im Bereich funktionaler Zusammenhänge und schließen entsprechend mit einem Ausblick auf den weiteren geplanten Verlauf des Projektes.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

1. Vorteile des Technologieeinsatzes im frühen Analysisunterricht

Die Bedeutung des Darstellungswechsels zwischen unterschiedlichen Repräsentationen desselben mathematischen Objektes oder Zusammenhangs ist für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen bekannt (Duval 2006; u.a.). Insbesondere im frühen Analysisunterricht, welcher große Teile des mathematischen Lerninhalts der Einführungsphase ausmacht, wirken vielfache Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge (symbolisch, graphisch, etc.) vernetzend auf das konzeptuelle Verständnis der Schülerinnen und Schüler (Hollar & Norwood 1999; Laakmann 2013; Penglase & Arnold 1996; u.a.).

Zur praktischen Ausnutzung dieses Zusammenhangs können insbesondere technologische Hilfsmittel, die einen schnellen und unaufwändigen Repräsentationswechsel erlauben, herangezogen werden (ebd.). Beispielhaft sei an dieser Stelle auf den GTR verwiesen.

Weiterhin stellen ebensolche Technologien ein nützliches Hilfsmittel im Entdeckenden Lernen dar. Wie dies im Kontext der Funktionenlehre praktisch realisiert werden kann, zeigen Barzel & Möller (2001).

Im Rahmen dieses Artikels können wir nur auf einen Teil des aktuellen Forschungsstandes eingehen. Die genannten und weitere Erkenntnisse wurden jedoch bei der Konzeption und Umsetzung der von uns untersuchten Fortbildungsreihe berücksichtigt. Es wurde insbesondere versucht, den aktuellen Forschungsstand und entsprechende praktische Konsequenzen an die teilnehmenden Lehrkräfte zu vermitteln.

2. Stichprobe und Untersuchungsdesign

Zur Klärung der eingangs geschilderten Forschungsfragen wurde ein Pre-Posttest-Design mit nicht-äquivalenter Experimental- (554 Schülerinnen und Schüler) und Kontrollgruppe (2585 Schülerinnen und Schüler) gewählt. Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe werden von Fortbildungsteilnehmenden der beforschten Lehrerfortbildung unterrichtet. Die Kontrollgruppe hingegen wird von Lehrerinnen und Lehrern unterrichtet, die an keiner Fortbildung zum GTR teilnehmen. Der aus 14 Items bestehende Pretest wurde bereits im November 2014 durchgeführt. Bei den Items handelt es sich um Adaptionen bestehender Tests (etwa OECD 2002; Nitsch 2014) sowie eigens entwickelten und zuvor pilotierten Items, welche überwiegend den Darstellungswechsel verschiedener Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge erfordern. Es wurde außerdem darauf geachtet, dass das Itemset die drei Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge (z.B. Büchter 2008) gleichermaßen beansprucht und erfordert. Der Test umfasste eine Nettolaufzweit von 45 Minuten und wurde – um Korrelationen durch unterschiedliche Fortschritte in der Bedienkompetenz auszuschließen – ohne Verwendung technologiebasierter Hilfsmittel geschrieben. Der Posttest hingegen steht noch aus und ist für April 2015 terminiert.

3. Erste Ergebnisse

Nach Abschluss des ersten Leistungstests ließen sich bereits einige Schülerfehler beim Umgang mit Funktionen und funktionalen Zusammenhängen quantifizieren. So haben bei einem von Nitsch (2014, S. 10) entwickelten Item unabhängig von der untersuchten Stichprobengruppe 17,7 Prozent der Schülerinnen und Schüler für jene Antwortmöglichkeit entschieden, welche den Graph-als-Bild-Fehler repräsentiert (ebd.). Noch höhere Werte ergaben sich bei Items, bei welchen fälschlicherweise ein linearer Zusammenhang statt eines nicht-proportionalen angenommen werden konnte, also die Möglichkeit, sich der sog. „illusion of linearity" hinzugeben (De Bock et al. 2007). Hier ergaben sich (in Abhängigkeit vom betrachteten Item) Anteile von 9,5 über 25,8 bis hin zu 75,2 Prozent. Die Varianz dieser Werte zeigt bereits, dass die Wahrscheinlichkeit einen derartigen Fehler zu begehen, in hohem Maße vom entsprechenden Aufgabenkontext abhängt.

Ein allgemeinerer Blick auf die Daten des Pretests zeigte eine leichte aber signifikante ($p < 0{,}01$) Dominanz der Kontrollgruppe über die Experimentalgruppe. Für einen ersten Vergleich beider Gruppen wurde der Mittelwert des erreichten Scores (d.h. die Anzahl der korrekt bearbeiteten Items) herangezogen. Die Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe lösten im Mittel 4,87 Items, während die Experimentalgruppe 4,57 korrekt bearbeitete. Ferner zeigten sich geschlechtsspezifische Abweichungen in den Leistungsdaten zu Gunsten der Jungen (vgl. Abb. 1). Während diese durchschnittlich 5,31 Items lösten, ergab sich bei den Mädchen ein signifikant abweichender Mittelwert von 4,35 ($p < 0{,}001$). Die Effektstärke betrug $d = 0{,}39$ nach Cohen (1992). Dass mathematische Leistungstests häufig leichte Verzerrungen zu Gunsten der Jungen zeigen, ist in der Literatur bereits gut dokumentiert (vgl. etwa Brunner et al. 2011).

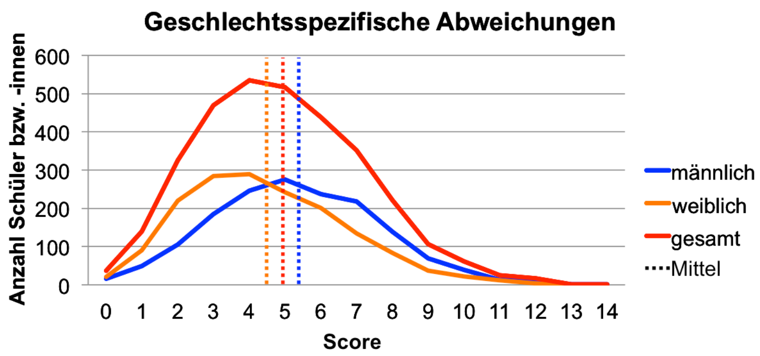


Abb. 1: Erreichter Testscore nach Geschlecht (1605 Jungen, 1639 Mädchen)

4. Ausblick

Zu erhoffen ist, dass die Auswertung des Posttests Einblicke in die Wirksamkeit der untersuchten Lehrerfortbildung in Form von Abweichungen zwischen den untersuchten Gruppen gewährt. Dabei sind die geschilderte Dominanz der Kontroll- über die Experimentalgruppe zu Beginn der Studie wie auch die beobachteten geschlechtsspezifischen Differenzen freilich weiteren Analysen zu unterziehen und entsprechend zu berücksichtigen. Weiterhin ist geplant, durch Anwendung des Rasch-Modells einen tieferen statistischen Dateneinblick sowie eine Verbindung beider Tests zu gewähren. Gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich der Rahmenbedingungen sowie der Wirksamkeit sollen bei einer erneuten Auflage der Lehrerfortbildung Berücksichtigung finden.

Literatur

Barzel, B. & Möller, R. (2001). About the Use of the TI-92 for an Open Learning Approach to Power Functions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(1), 1–5.

Brunner, M., Krauss, S. & Martignon, L. (2011). Eine alternative Modellierung von Geschlechtsunterschieden in Mathematik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(2), 179–204.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *Mathematik lehren*, *148*, 4–10.

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin*, *112*(1), 155–159.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity: From Analysis to Improvement*. New York: Springer.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Hollar, J. C. & Norwood, K. (1999). The Effects of a Graphing-Approach Intermediate Algebra Curriculum on Students' Understanding of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 220–226.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Nitsch, R. (2014). Schülerfehler verstehen: Typische Fehlermuster im funktionalen Denken. *Mathematik lehren*, *184*, 8–11.

OECD (2002). *Beispielaufgaben aus der PISA 2000-Erhebung: Lesekompetenz, mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung*. Paris: OECD.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. *Mathematics Education Research Journal*, *8*(1), 58–90.

Thurm, D., Klinger, M. & Barzel, B. (2015). Evaluation der Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Lehrer- und Unterrichtsebene. In diesem Band.

Christian KLOSTERMANN, Oldenburg

Antizipationsfähigkeiten angehender Lehrkräfte bezüglich möglicher Schülerargumentationen bei Begründungsaufgaben – ein Fallbeispiel

1. Forschungsinteresse

Bei der Betrachtung des Fachwissens von Mathematiklehrkräften – insbesondere von angehenden - zum Thema Beweisen und Argumentieren liegen kaum empirische Befunde vor (Brunner 2013). Unstrittig in den allgemeinen Bildungswissenschaften und in der Fachdidaktik ist jedoch, dass bei Unterrichtsplanungen Schülerperspektiven berücksichtigt und multiple Lösungswege ermöglicht werden müssen (Neubrand 2006). Dabei liegt die Vermutung nahe, dass im Themenfeld Beweisen und Argumentieren diesem Prozess eine besonders große Rolle zugeschrieben werden muss. Hier gilt es für die Lehrkraft neben der Schaffung eines diskursiven Klimas, Schülerargumente zu ordnen, bezüglich ihres Gehalts für die weitere Bearbeitung abzuwägen und später in einen Gesamtkontext zu stellen, um so das Erzeugen einer schlüssigen Argumentationskette durch die Lernenden zu unterstützen (Brunner 2014).

Praxisphasen in der universitären Ausbildung bieten dabei die erste Gelegenheit die Gestaltung und Durchführung von Mathematikunterricht angehender Lehrkräfte zu beobachten. Vor dem Hintergrund, dass die empirische Befundlage zu Praxisphasen und deren Wirkung immer noch mangelhaft ist und ein Großteil der vorliegenden Befunde auf Selbstauskünften basieren (Walke & Offenberg, 2013), erhält die Beforschung von Unterricht angehender Lehrkräfte auch aus fächerübergreifender Perspektive Bedeutung, welche noch zusätzlich dadurch gestärkt wird, dass zahlreiche hochschulpolitische Entscheidungen für mehr Praxisphasen in jüngster Vergangenheit getroffen wurden (Weyland 2011).

Aus diesen Desideraten ergeben sich für das hier vorgestellte Promotionsprojekt folgende Forschungsfragen:

- Wie gestalten angehende Mathematiklehrkräfte eigenverantwortlichen Unterricht im Praktikum, in dem mathematische Begründungsaufgaben thematisiert werden sollen?
- Wie ist es um die Fähigkeit von angehenden Lehrkräften bestellt, mögliche Schülerargumentation bei einer mathematischen Begründungsaufgabe zu antizipieren?

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Wie gehen angehende Lehrkräfte mit Schülerargumentationen im Unterrichtsgeschehen um?
- Inwiefern gelingt es angehenden Lehrkräften die im Praktikum erlebte Situationen und ihr eigenes Handeln zu reflektieren?

2. Design der (Teil-)Studie

Elf Studierende nehmen im Rahmen des zweiwöchigen Forschungs- und Entwicklungspraktikums der Universität Oldenburg an einem ersten Erhebungsdurchlauf teil. Ihnen ist zuvor in einem zweistündigen Seminar der Arbeitsauftrag für die Praxisphase vermittelt worden. Dieser setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen:

- Konzeption einer mathematischen Lernsequenz im Rahmen einer Doppelstunde, die ihren thematischen Schwerpunkt auf Beweis- und Argumentationsprozesse legt; diese Doppelstunde soll in den gewöhnlichen Mathematikunterricht einer Klasse eingebunden werden.
- Erstellung eines Kurzrasters der Stunde, einer Sachanalyse der zentralen Aufgabe und eines Schemas, in dem der Argumentationsprozess hinsichtlich möglicher Schülerantworten elaboriert durchdacht wird
- Durchführung der Unterrichtstunde
- Nachbesprechung der Stunde in einem leitfadengestützten Interview
- Anfertigung eines Reflexionsberichtes
- Kolloquium mit Präsentation der Unterrichtsstunde sowie der eigenen Erfahrungen

Intention des Designs ist es somit, den Probanden Lern- und Verstehensprozesse von Schülern beim mathematischen Argumentieren bewusster zu machen. Die Einbettung des Settings in Praxisphasen knüpft dabei an die Theorie des situierten Lernens an, für das in der Lehrerbildung positive Befunde vorliegen (vgl. Hascher 2011).

Ein Input der fachliche oder fachdidaktische Inhalte in Bezug auf Begründungsaufgaben thematisiert, hat nicht stattgefunden. Dies ist damit zu begründen, dass in dieser Teilstudie zunächst eine Deskription der Handlungsmuster der Studierenden ohne Intervention erfolgen soll.

Im Folgenden wird ein Fallbeispiel der Teilstudie dargestellt. Im Kontext der moderierten Sektion wird dabei im besonderen Maße auf die Reflexion der Unterrichtsituationen durch den Probanden eingegangen, um der Frage nach dem Grad der Professionalisierung durch die Praxisphase gerecht zu werden.

3. Darstellung eines Fallbeispiels

Der Proband im hier vorgestellten Fall wählt im Kontext der Einführung der irrationalen Zahlen die Aufgabe zur Bestimmung der Länge der Diagonale eines Einheitsquadrats. Ob in Anbetracht der Offenheit des Ziels der Aufgabe weniger von einer Begründungs- als von einer Problemlöseaufgabe gesprochen werden muss, soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden. Begründungen und Argumentationen seitens der Lernenden sind bei der Bearbeitung der Aufgabe unabhängig davon notwendig.

In der Planung wird von dem Probanden ein einziger vollständiger Lösungsweg angegeben, der auf der Erweiterung der Figur beruht. Ein solcher Ansatz ist für ungeübte Problemlöser schwer selbst zu entwickeln. Als weitere Schülerideen werden Ermittlungen von Messwerten sowie weitere nicht zielführende Lösungsansätze benannt.

Im Unterrichtsgeschehen wird dem Studierenden im Rahmen der Bearbeitung von einer Schülergruppe ein tragfähiger, in der Planung nicht erwähnter Ansatz zur Berechnung der Diagonalen über die Betrachtung des Flächeninhalts eines Teildreiecks vorgelegt. Dem Probanden gelingt es im Gespräch mit der Schülergruppe nicht, die Tragfähigkeit des Ansatzes zu erkennen und verweist die Gruppe daraufhin mittels einer vorgefertigten Hilfekarte auf die Idee der Erweiterung der Figur. Diese wird von der Gruppe aufgegriffen, während der ursprüngliche Ansatz als zielführende Alternative im Unterricht nicht mehr thematisiert wurde.

Unmittelbar nach dem Unterricht erkennt der Proband, dass hier ein von ihm nicht antizipierter Lösungsansatz von den Schülern kreiert worden ist. Da er diesen aber nicht als zielführend identifiziert, schätzt der Proband sein Verhalten gegenüber der Lerngruppe als passend ein. Dies erscheint vor dem Hintergrund, dass zu diesem Zeitpunkt noch keine Gelegenheit zum ausgiebigen Nachdenken über diesen Schüleransatz gegeben worden ist, wenig überraschend.

Bei der Anfertigung des Reflexionsberichtes liegt die Erkenntnis, dass der Schülerlösungsweg zur Problemlösung geführt hätte, jedoch immer noch nicht vor. Es ist also davon auszugehen, dass die Reflexionszeit von einer Woche nach der Durchführung der Stunde nicht dazu genutzt wird, den Ansatz der Schüler noch einmal auf fachlicher Ebene zu durchdenken und zu entsprechenden Erkenntnissen hinsichtlich der Tragfähigkeit zu gelangen. Dementsprechend bleibt zu diesem Zeitpunkt die Einschätzung bezüglich des eigenen Handelns im Unterricht auch explizit auf die oben geschilderte Situation bezogen positiv.

Daraufhin erfolgt die Rückmeldung zur Stunde, in der der Proband darauf hingewiesen wird, in der dargestellten Situation eine Gelegenheit verpasst zu haben, an Schülerideen zur Lösung der Aufgabe anzuknüpfen. Nach dieser Rückmeldung gelingt es dem Probanden sein eigenes Verhalten in der Stunde kritischer zu beurteilen. Trotzdem erfolgt keine Erwägung von alternativen Handlungsmustern.

4. Fazit und Ausblick

Das hier dargestellte Fallbeispiel zeigt, dass eine Professionalisierung durch die Reflexion der in der Praxisphasen erlebten Situationen ohne Betreuung nicht zwangsweise effektiv sein kann. Im Falle von Selbstüberschätzungen, die bei Lehrernovizen nicht unüblich sind (vgl. Hascher 2011), kann es sogar kontraproduktiv sein.

Ein weiterer Erhebungsdurchlauf findet im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungspraktikums 2015 mit 25 Studierenden statt. Videographien des Unterrichts werden dabei in geringerer Fallzahl durchgeführt. Jedoch werden durch den Einsatz einer Brillenkamera die Interaktionen zwischen Lehrern und Schülern auch in (Gruppen-)Arbeitsphasen protokolliert. Vignetten aus dem Unterricht sollen den jeweiligen Probanden in stimulated-recall Interviews vorgelegt werden, um eine genauere Reflexion der eigenen Handlungen möglich zu machen.

Literatur

Brunner, Esther (2013): *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I.* Münster: Waxmann.

Brunner, Esther (2014): *Mathematischen Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Grundlagen, Befunde und Konzepte. Heidelberg: Springer.

Hascher, Tina (2011): Forschung zur Wirksamkeit der Lehrerbildung. In: E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.): *Handbuch der Forschung zum Lehrberuf.* (S. 418-440). Münster: Waxmann.

Neubrand, Michael (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.): *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 162-177). Berlin: Cornelsen.

Walke, Jutta und Offenberg, Esther (2013): *Die Reform der Praxisphasen in der Ersten Phase der Lehrerbildung. Eine qualitative Dokumentenanalyse. Positionen.* Essen: Deutscher Stifterverband.

Weyland, Ulrike (2011): *Expertise zu den Praxisphasen in der Lehrerbildung in den Bundesländern.* Hamburg: Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung

Henning KÖRNER, Oldenburg

Vom Bestand zur Änderung und zurück – Ein Konzept für die Analysis

In Anlehnung an die historische Entwicklung sind im Standardunterricht die geometrischen Aspekte von Differential- und Integralrechnung, also Steigung und Flächeninhalte, Ausgangspunkt und zentraler Leitfaden. In den meisten aktuellen Kerncurricula und auch bei den Bildungsstandards hat es in den letzten Jahren eine Umorientierung gegeben. Im Erstzugriff werden Änderungsrate („vom Bestand zur Änderung") und „Rekonstruktion von Bestand" („von der Änderung zum Bestand") gesetzt.

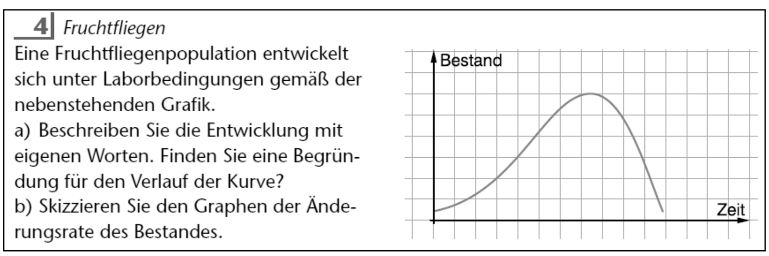
Es wird hier ein Konzept für den Analysisunterricht vorgestellt, dass diese neue Ausrichtung konsequent umsetzt und gleichzeitig das grundlegende Problem des Infinitesimalen nicht unter den Tisch kehrt und in intellektuell redlicher Weise thematisiert. Leitfaden ist eine Verstehensorientierung jenseits der Kalküle und eine adäquate Ausbildung sachgerechter Grundvorstellungen.

• Papa: *Wie hat es dir auf dem Kramermarkt gefallen? Mona: Naja, besser als letztes Jahr.*

• Gäbe es ein Bevölkerungsproblem, wenn es seit Christi Geburt etwa 7 Milliarden Menschen gäbe?

Solche Aussagen und Argumentationsfiguren zu Änderungen prägen häufig Alltagsdenken und –handeln. Sie zum Ausgangspunkt von Mathematisierungsprozessen hin zur Differential- und Integralrechnung zu machen, schafft unmittelbar einsichtige Sinnzusammenhänge.

Beim Einstieg in die Differentialrechnung sollte man zunächst die Frage nach dem Änderungsverhalten qualitativ explorieren, um adäquate Grundvorstellungen aufzubauen, zu festigen und eine verständnisorientierte Begriffsbildung vorzubereiten. Der Erstzugang gilt dabei dem globalen Verhalten.


4 Fruchtfliegen
Eine Fruchtfliegenpopulation entwickelt sich unter Laborbedingungen gemäß der nebenstehenden Grafik.
a) Beschreiben Sie die Entwicklung mit eigenen Worten. Finden Sie eine Begründung für den Verlauf der Kurve?
b) Skizzieren Sie den Graphen der Änderungsrate des Bestandes.

Schmidt u.a. 2010, S.13]   nach einer Schülerskizze

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

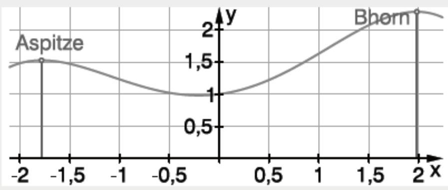
Eine passende Skizze des Änderungsgraphen gelingt durchweg, ebenso wie die Zuordnung markanter Stellen („*Beim Hochpunkt schneidet Änderung die x-Achse*.“ „*Es gibt stärkstes Wachstum, dort größter Änderungswert*.“). Eine solcher Zugang schafft damit sowohl Anknüpfungspunkte an alltägliche Sprech- und Handlungsweisen, als auch einen Ausgangspunkt für die folgende quantifizierende Erfassung von Änderungen über Differenzenquotienten und Sekantensteigungen. Hier stehen dann mittlere Änderungsraten im Mittelpunkt, die ein eigenständiger Gegenstand zur Untersuchung von Änderungen in verschiedenen Sachsituationen sind und damit nicht eine nur schnell zu durchlaufende Zwischenstation auf dem Weg zur Ableitung.

Beim Erforschen der grundlegenden Problematik der lokalen Änderung wird der Differenzenquotient in Kopplung mit numerisch-grafischen Auswertungen mithilfe des GTR oder eines Funktionenplotters zum zentralen, durchgehend verwendeten Werkzeug beim Gewinnen von Vermutungen und numerischen Ergebnissen. Im Zentrum bleibt der verständige Umgang mit Differenzenquotienten und nicht ein vorschnelles algebraisches Kalkül. Im Differenzenquotienten sind die Grundvorstellungen zu Änderungsraten erfasst („Differenzen pro Zeitintervall“), nicht in $n \cdot x^{n-1}$.

Die Änderungsraten hängen von der Stelle a und von der Breite des Intervalls h ab („Ab welchem Zeitpunkt und für wie lange soll die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt werden?“) Naheliegend ist damit die Definition des Quotienten als zweistellige Funktion $msek(a,h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Hält man a fest und variiert h, untersucht man den lokalen Aspekt, hält man h fest (sehr klein), dann untersucht man den globalen Aspekt. An folgendem Beispiel werden beide Untersuchungen mit dem GTR dargestellt (vgl. Schmidt u.a. 2010, S.31)

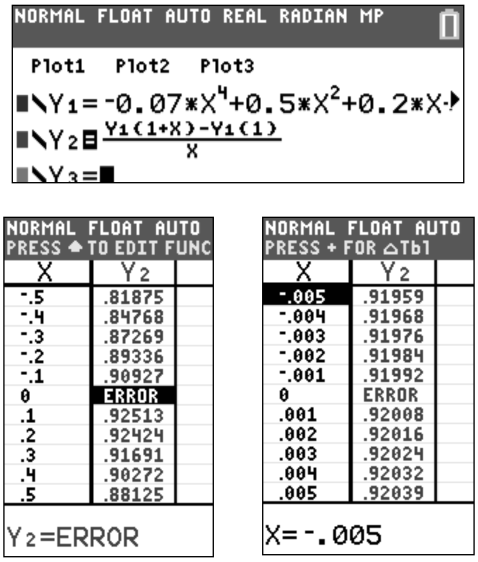
1 *Pistenraupen*

In einem Skigebiet stehen Pistenraupen mit unterschiedlichen Steigfähigkeiten zur Verfügung: Pistenraupe A bewältigt Steigungen bis zu 95 %, Pistenraupe B bis zu 70 % und Pistenraupe C bis zu 50 %.
Das Bergprofil zwischen der Aspitze und dem Bhorn kann mit der Funktion
$f(x) = -0{,}07x^4 + 0{,}5x^2 + 0{,}2x + 1$
(x und y jeweils in 500 m) modelliert werden.

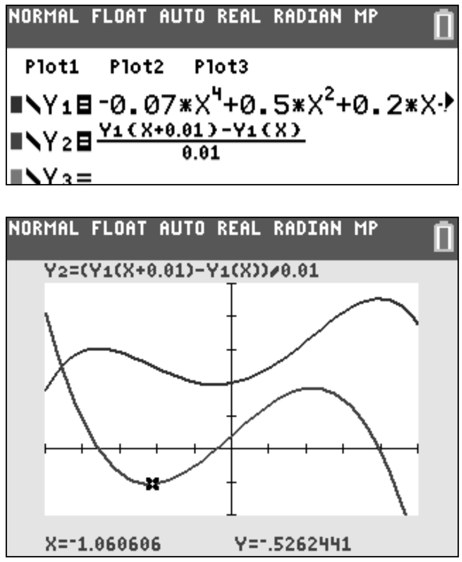


a) Schaffen alle Pistenraupen die Auffahrt zur Aspitze bzw. zum Bhorn?
Wenn nicht, wie weit können sie jeweils hinauffahren?
b) An welchen Stellen vermuten Sie die größten Steigungen in beiden Richtungen?

Lokal



global



Bei der lokalen Untersuchung wird nun mithilfe der Tabellen eine Propädeutik des Grenzwertbegriffs betrieben: Warum steht da immer „ERROR"? Welcher Wert ist der „gotische Schlussstein" und passt (allein?) in die Lücke (im Beispiel: 0,92?)? Gibt es da nur einen Wert? Immer einen? Wenn wir die Tabelle verfeinern, erreichen wir den Wert irgendwann einmal? Faktisch wird der GTR (als endliche Maschine) irgendwann einmal runden, was dann? Wenn wir den Wert nicht finden, gibt es ihn dann überhaupt? Letztendlich müssen wir festhalten: Das, was wir eigentlich wollen, geht nicht (wegen der Division durch 0), das, was wir können (mittlere Änderungen), wollen wir eigentlich nicht. Innermathematische Reflexion führt dann zur Einführung des Begriffs „Ableitung" und der Ableitungsfunktion als Grenzlage der Sekantensteigungsfunktionen. Es bleibt festzuhalten: Was zunächst mithilfe adäquater Grundvorstellungen qualitativ erfasst wird, kann nun durch die Mathematisierung mit dem Differenzenquotient und Auswertung mit einem digitalen Werkzeug quantitativ bearbeitet werden, ohne faktischen Grenzübergang.

Ein Bus fährt los. An der ersten Station steigen fünf Menschen ein, an der nächsten drei ein und einer aus. Beim nächsten Halt steigen zwei Personen aus ehe an der nächsten Haltestelle vier einsteigen und drei aussteigen. Wie viele Personen sitzen nun in dem Bus?

Um diese Frage zu beantworten, muss man von den Ein- und Ausstiegen (Änderungen) auf die Anzahl der Passagiere (Bestand) schließen. Es gehört zum Alltagswissen, dass man dazu die Änderungen summieren muss, aber die Gesamtzahl nur dann eindeutig angeben kann, wenn man weiß, wie viele Personen zu Beginn (oder irgendwann einmal) im Bus sitzen. Der Schluss von den Änderungen auf mögliche Bestände, prägt häufig Alltagshandeln. Wenn Schülerinnen und Schüler innerhalb der Differentialrechnung die Frage nach der Änderung bei gegebenen Beständen als Leitfaden erlebt haben und sie nun mit dem umgekehrten Problem, der Erschließung von Beständen aus gegebenen Änderungen konfrontiert werden (z.B. in den „Badewannenaufgaben“), lösen sie es fast intuitiv durch das „Umgekehrte des Ableitens“. Damit entdecken Schülerinnen und Schüler selbsttätig den Inhalt des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in der Einführungsphase zur Integralrechnung! Zentral ist daneben die Erkenntnis, dass diese Rekonstruktion des Bestandes geometrisch auf die Bestimmung von Flächeninhalten unter dem Änderungsgraphen führt, Bestände also als „Summation unendlich vieler momentaner Änderungen“ aufgefasst werden können. Charakteristisch für dieses Konzept ist damit die fast parallele Einführung der beiden Grundkonzepte zur Integralrechnung: Flächenbestimmung (Gesamtbilanz) und Rekonstruktion. Dies erfolgt auch analog zur Einführung der Differenzialrechnung. Es steht damit zunächst wieder der Aufbau adäquater Grundvorstellungen im Mittelpunkt, ehe Kalküle entwickelt werden. Der Verzicht auf die frühzeitige Einführung komplexerer Theorieelemente und Begriffsfestlegungen ermöglicht es, dass von Beginn an in qualitativer Weise substanzreiche Probleme behandelt werden können. Der Integralbegriff wird also nicht nach einer vorgängigen Durststrecke über Unter- und Obersummen eingeführt, ehe er in Anwendungen kalkülorientiert genutzt wird („F(b)-F(a)-Algebra“), sondern es wird ein qualitativer Weg zum Hauptsatz mit dessen frühzeitiger, auf Einsicht fußender Einführung gegangen, der es ermöglicht, alle klassischen Anwendungen zu behandeln. Das auch in den Bildungsstandards festgeschriebene Konzept „ Rekonstruktion aus Änderung “ begünstigt das frühe Erfassen der Kernaussage des Hauptsatzes. Beunruhigend oder faszinierend, je nach Standpunkt, ist daran nur, dass ein spezifischer Zugriff auf die Sache aus einem tiefen Satz der Analysis für Schüler eine Entdeckung en passant macht.

Eine ausführliche Darstellung des Konzepts findet man in Heintz u.a. (2015), in Schmidt u.a (2010) ist das Konzept in einem Schulbuch umgesetzt.

Literatur

Schmidt, G., Körner, H., Lergenmüller, A., (2010): Neue Wege – Analysis, Braunschweig 2010.

Heintz, G., Pinkernell, G., Schacht, F. (Hrsg.) : Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht, Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2015.

David KOLLOSCHE, Potsdam

Emanzipation durch mathematische Bildung - eine Illusion?[1]

Diskurse zum Sinn und Zweck des Mathematikunterrichts beziehen sich in der Mathematikdidaktik in der Regel auf den Bildungsbegriff der Aufklärung (vgl. Winter 1995; Heymann 1996). Mathematikunterricht wird dort legitimiert als Beitrag zur Emanzipation des Einzelnen mit dem Ziel einer eigenverantwortlichen und rational begründeten Lebensführung. Mathematik bietet sich dafür an als praktische Fähigkeit, aber auch als „Orientierung" in der Welt, als „Verstärker des Alltagsdenkens" und als kulturelles Bindemittel (Heymann 1996). Inwieweit solche normativen Konzeptionen mathematischer Bildung beschreiben können, was tatsächlich im Unterricht geschieht, ist jedoch fraglich, hat die pädagogische Idealisierung mathematischer Bildung die gängige Praxis doch gerade nicht im Blick – oder wenn, dann nur als mangelhafter Zwischenhalt zum Bildungsideal. Einen kritischeren und näher an der gegenwärtigen Praxis orientierten Blick auf mathematische Bildung wagen sozialkritische Beiträge, die oft soziologisch inspiriert sind. Im Folgenden soll die Bedeutung solcher Beiträge für das Ideal einer Emanzipation durch mathematische Bildung diskutiert werden.

1. Bildung in der Kritik

Als vornehmlich auf das Wohl des Einzelnen abzielendes Unternehmen ist Bildung ein Mythos. Bildung und Schule waren seit ihrer gesellschaftsweiten Manifestierung explizit ausgerichtet auf die Beschäftigung, Disziplinierung und Ideologisierung der Heranwachsenden, während inhaltliche Bildung erst *peu à peu* an Bedeutung gewann (Tenorth 1988, S. 78ff.). Vor dem Hintergrund bisher nie dagewesener gesellschaftlicher Herausforderung wie dem Auseinanderbrechen traditioneller Gemeinschaften, der Ballung von Menschen in Städten, Fabriken und Kasernen und der Auflösung überlieferter Werte war die Öffentlichkeit zur Zeit der Industrialisierung davon überzeugt, dass die „Konstruktion von Mentalitäten, Wertvorstellungen und Lebensperspektiven" durch schulische Bildung zur Bewältigung der Krise geeignet seien (S. 85). Wie eine schwedische Studie zeigt, wurden die obigen Ziele auch mathematischer Bildung zugeschrieben (Lundin 2008). In der BRD zählen die KMK-Standards von 1958 letztmalig entsprechende Ziele der Charakterbildung auf, nämlich dass Mathematikunterricht „zu folgerichtigem Denken, zu Selbstzucht und Konzentration" sowie zu „Ordnung, Sorgfalt und Genauigkeit" erziehen solle (S. 3).Die beschrie-

[1] Dieser Beitrag ist eine gekürzte Fassung des Aufsatzes „Mathematik und Bildung aus kritischer Sicht", der im Laufe des Jahres 2015 bei *mathematica didactica* erscheint.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

benen Funktionen schulischer Bildung verschwinden im Laufe der Jahrzehnte jedoch aus dem bildungstheoretischen Diskurs und weichen einer Legitimation schulischer Bildung unter dem aufklärerischen Vorwand einer Emanzipation des Einzelnen (Rutschky 1997). So sind auch bei Heymanns (1996) Versuch einer Legitimation mathematischer Bildung die Beschäftigung, Disziplinierung und Ideologisierung der Schüler aus dem Blick geraten. Erklären ließe sich diese Verschiebung im Diskurs durch den Wunsch, pädagogisches Handeln vor den liberalen Wertvorstellungen der westlichen Welt zu legitimieren. Da durch eine Verschiebung des öffentlichen Diskurses jedoch keineswegs gesagt ist, dass schulische Bildung in der Praxis plötzlich auch andere gesellschaftliche Funktionen erfüllt, lässt sich unter ihr zuallererst eine Mythologisierung pädagogischer Arbeit ausmachen, welche die lehrenden Pädagogen im Spannungsfeld zwischen aufklärerischem Bildungsideal und gelebter Praxis zurücklässt (Bernfeld 1979). Eine sozialkritische Aufarbeitung gesellschaftlicher Funktion des zeitgenössischen Mathematikunterrichts ist dann nicht nur ein Beitrag zum Verständnis von Spannungsfeldern in der Praxis, sondern wirft die generelle Frage auf, inwieweit mathematikdidaktische Forschung schulischen Realitäten Rechnung trägt oder sich in eine idealisierte Scheinwelt zurückzieht.

2. Schule und Mathematikunterricht aus sozialkritischer Sicht

Seit den 50er Jahren wird die Selbstdarstellung der Pädagogik in soziologischen Beiträgen hinterfragt, wodurch sich neue Perspektiven auf schulische Bildung etablieren. So legt Helmut Fend (1974) ein Modell zur Beschreibung gesellschaftlicher Funktionen von Schule vor. Neben der Qualifikation der Heranwachsenden ziele Schule ab auf deren Selektion und Zuweisung sowie auf die Einbettung der Heranwachsenden in zu legitimierende Herrschaftsstrukturen der bestehenden Gesellschaft. Bemerkenswert ist nun, dass sich mathematikdidaktische Forschung vornehmlich der Funktion der Qualifikation zuwendet, wobei gerade dieser Beitrag mathematischer Bildung kritisch zu sehen ist: So wurde gezeigt, dass die Unterrichtsinhalte schnell vergessen sind (Maaß & Schlöglmann 2000) und außerschulisch relevante mathematische Qualifikationen eher implizit in der jeweiligen Situation erlernt werden (Lave 1988). Sozialkritische Beiträge zur Mathematikdidaktik zeigen jedoch auf, dass Mathematikunterricht in starkem Maße selektiv und legitimatorisch wirksam ist, wie durch eine enge Auswahl entsprechender Beiträge deutlich werden soll: John Volmink (1994) argumentiert, dass die Mathematik seit der Antike als Maß für intellektuelle Fähigkeiten gesehen wird und auch heute weitgehend unreflektiert als ‚Torwächter‘ für den Zugang zu prestigeträchtigen Bildungs- und Berufschancen genutzt wird. Ole Skovsmose (2005) versteht Mathematikunterricht als Institution, in der über die Eignung für technokratische Funktionen innerhalb unserer Gesellschaft entschieden wird (S. 11f.). Beiträge aus soziolinguistischer Sicht zeigen auf, dass diese Eignungsfeststellung Heranwachsende mit bürgerlichem Bildungshintergrund stark bevorteilt und anderen Schülern Zugänge versperrt (Straehler-Pohl & Gellert 2015). Ähnliche Schlüsse lässt eine Analyse der politischen Dimension der Schulmathematik selbst zu (Kollosche 2014b). Mathematikunterricht vermittelt zudem keine kritische Haltung gegenüber Mathematik, sondern prägt ungeachtet der Lehren aus der Grundlagenkrise der Mathematik den Mythos einer unfehlbaren, objektiven und überall anwendbaren Disziplin (Ullmann 2008). Entsprechende Wirkungsmechanismen des Mathematikunterricht lassen sich soziologisch aufzeigen, wodurch deutlich wird, wie der Mathematikunterricht dazu beiträgt, mathematische Techniken zur Organisation unserer Gesellschaft vor Heranwachsenden zu legitimieren und diese zu willfährigen Komplizen oder stillen Duldern dieser Techniken zu erziehen (Kollosche 2014a; Fischer 1984).

3. Diskussion und Ausblick

Versteht man Mathematikunterricht lediglich als Beitrag zur Emanzipation des Einzelnen, so können jahrzehntelange Bemühungen um eine entsprechende Gestaltung des Mathematikunterrichts als gescheitert gelten. Das Schaffen von blindem Vertrauen oder ängstlicher Ohnmacht gegenüber der Mathematik sowie die Zuweisung von Lebenschancen nach intransparenten Kriterien und klarer Bevorteilung trägt gerade nicht zur rational begründeten und selbständigen Lebensführung der Heranwachsenden bei. Dieser Befund der Praxis wird auch nicht dadurch entschärft, dass sich zahlreiche Mathematikdidaktiker um eine punktuelle Änderung dieser Praxis bemühen. Der Wissenschaftssoziologe Sverker Lundin (2008) begreift die Mathematikdidaktik stattdessen gerade als ideologisches Schmiermittel, welches fortwährend die Praxis des Mathematiksunterrichts vor dem Hintergrund unerreichter Bildungsideale als defizitär zurückweist, um so ein Scheitern eingestehen zu können, ohne die Legitimation des Mathematikunterricht gefährden zu müssen. Letztlich kann man ein aufklärerisches Bildungsideal zwar anstreben, der zeitgenössischen Praxis des Mathematikunterricht wird es jedoch nicht gerecht, sondern blendet entscheidende gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts aus. Dies führt nicht nur dazu, dass eine idealisierende Mathematikdidaktik praktizierende Lehrer im Spannungsfeld zwischen pädagogischen Idealen und gesellschaftlichen Forderungen alleinlässt, sondern auch dazu, dass sich von der Forschung unbeachtete gesellschaftliche Funktionen von Mathematikunterricht zu weitgehend unsichtbaren Hindernissen gegen eine didaktische

Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts aufbauen können. Solche Verwerfungen werden sich erst dann ausschließen lassen, wenn die Mathematikdidaktik ihre ideologische Voreingenommenheit abwirft und sich der unterrichtlichen Realität nicht nur durch die aufklärerische Brille nähert, sondern sie in ihrer ethisch zuweilen widersprüchlichen Komplexität annimmt. Die Bildungstheorie des Mathematikunterrichts muss damit gleichsam über sich hinauswachsen, indem sie über den emanzipativen Bildungsbegriff hinaus verdrängte Funktionen von Schule und Unterricht wieder in den Blick nimmt und dazu pädagogisch begründet Stellung bezieht. Denn erst, wenn wir ein differenziertes und erklärungsstarkes Bild der scheinbaren Widersprüche des Mathematikunterrichts unserer Zeit gewonnen haben, können Träumereien über Sinn und Zweck von Mathematikunterricht auf eine praktische Realisierung hoffen.

Literatur

Bernfeld, Siegfried (1979) *Sisyphos oder die Grenzen der Erziehung*. Suhrkamp: Frankfurt am Main. Erstveröffentlichung von 1925.

Fend, Helmut (1974) *Gesellschaftliche Bedingungen schulischer Sozialisation*. Beltz: Weinheim.

Fischer, Roland (1984) „Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand: Visionen eines neuen Mathematikunterrichts" in *Journal für Mathematik-Didaktik* 5, S. 51–85.

Heymann, Hans W. (1996) *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz: Weinheim.

KMK (1958) *Beschluß der Kultusminister-Konferenz vom 25. März 1958 über Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht*.

Kollosche, David (2014a) *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziol. Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Springer: Berlin.

Kollosche, David (2014b) „Mathematics and Power: An Alliance in the Foundations of Mathem. and Its Teaching" in *ZDM Mathematics Education* 46 (7), S. 1061–1072.

Lave, Jean (1988) *Cognition in Practice*. Cambridge University Press: Cambridge.

Lundin, Sverker (2008) *Skolans matematik: En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*. Uppsala.

Maaß, Jürgen & Wolfgang Schlöglmann (2000) „Erwachsene und Mathematik" in *mathematica didactica* 23 (2), S. 95–106.

Rutschky, Katharina (Hg.) (1997) *Schwarze Pädagogik*. Ullstein: Berlin.

Skovsmose, Ole (2005) *Travelling Through Education*. Sense: Rotterdam.

Straehler-Pohl, Hauke & Uwe Gellert (2015) *Pathologie oder Struktur? Selektive Einsichten zur Theorie und Empirie des Mathematikunterrichts*. Springer: Wiesbaden.

Tenorth, Heinz-Elmar (2000) *Geschichte der Erziehung* Juventa: Weinheim.

Ullmann, Philipp (2008) *Mathematik, Moderne, Ideologie*. UVK: Konstanz.

Volmink, John (1994) „Mathematics by All" in Stephen Lerman (Hg.): *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Kluwer: Dordrecht, S. 51–67.

Winter, Heinrich (1995) „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung" in *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (61), S. 37–46.

David KOLLOSCHE, Potsdam

Schülervorstellungen von Mathematik

1. Theoretischer Hintergrund

Im Mathematikunterricht bilden Schüler nicht nur mathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten aus, sie bauen auch ein Bild von und ein Verhältnis zu Mathematik auf. Maßgebliche Beiträge zur Erforschung der Schülervorstellungen von Mathematik bauen auf den psychologischen Konzepten der *beliefs* und *attitudes* auf (Leder & al. 2002; Maaß & Schlöglmann 2009). Zu den Grundannahmen dieser Forschung zählt, dass die gesellschaftliche Funktion von Mathematikunterricht vor allem im Aufbau von mathematischem Wissen und Können liegt, dass *beliefs* und *attitudes* ein solches ‚Lernen' unterstützen oder behindern, mithin entscheidenden Einfluss auf das Lernverhalten und den Lernerfolg von Schülern haben, und dass es legitim ist, auf die *beliefs* und *attitudes* der Schüler zum Zweck eines effektiveren Mathematiklernens einzuwirken. Andere Perspektiven teilen diese Grundannahmen nicht und forcieren einen anderen Blick auf Schülervorstellungen von Mathematik. Läge die gesellschaftliche Funktion von Mathematikunterricht vor allem im Aufbau von mathematischem Wissen und Können, so wäre Mathematikunterricht in erschreckendem Maße ineffektiv, denn Erwachsene können in der Regel kaum Wissen und Können des Sekundarstufenunterrichts abrufen (Maaß & Schlöglmann 2000) und außerschulische Anwendungen von Mathematik werden oft in der Praxis und gerade nicht im Mathematikunterricht erlernt (Lave 1988). Naheliegender ist daher die Vermutung von Lundin (2008), dass die gesellschaftliche Funktion des Mathematikunterrichts vielmehr in der Herausbildung eines gesellschaftlich funktionalen Verhältnisses zur Mathematik zu sehen ist (S. 380). Wann ein solches Verhältnis für die mathematische Organisation unserer Gesellschaft funktional ist, ob durch die Akzeptanz mathematischer Bildung als Selektionsinstrument (Stinson 2004), durch eine Selbstdarstellung als unfehlbare, objektive sowie universell anwendbare und bedeutsame Disziplin (Ullmann 2008) oder durch das Herausbilden von unkritischem Vertrauen und verängstigter Abwendung (Fischer 1984), ist Gegenstand aktueller Forschung (bspw. Kollosche 2014). Im Rahmen dieser Forschung besteht ein großes Interesse daran, theoretische und strukturelle Befunde zur Sozialisierung des Schülers im Mathematikunterricht mit empirischen Befunden zu Schülervorstellungen von Mathematik abzugleichen. Einen solchen Abgleich können die Studien zu *beliefs* und *attitudes* nicht leisten, da ihnen andere Annahmen zugrundeliegen und da sie durch ihre psychologische Ausrichtung für soziologische Interpretationen nicht problemlos anschlussfähig sind.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die hier vorgestellte Untersuchung stellt den Versuch dar, einen kritisch-soziologischen Zugriff auf Schülervorstellungen von Mathematik zu gewinnen, um beurteilen zu können, welches Verhältnis Schüler zu Mathematik ausbilden und inwiefern ein solches Verhältnis gesellschaftlich funktional ist.

2. Methodologie

Im Rahmen eines Forschungsseminars an der Universität Potsdam wurden 216 Neuntklässler unterschiedlicher Schultypen aus Berlin, Brandenburg, Sachsen-Anhalt und Sachsen mit einem offenen Fragebogen befragt.

1.	Welches ist dein Lieblingsfach und welches Fach magst du am wenigsten? Wie würdest du die Mathematik dort einordnen?
2.	Finde drei Wörter, die deine Stimmung und Einstellung zu Mathematik beschreiben!
3.	Welches Tier fällt dir zu Mathematik ein? Warum passt es gut?
4.	Was unterscheidet Mathematik von anderen Fächern?
7.	Manche finden Mathe logisch, andere unverständlich. Wie siehst du das?
9.	Wo hilft Mathematik im Alltag?
11.	Was schätzt du an Mathematik und was stößt dich ab?

Tabelle 1. Ausgewählte Fragen aus dem verwendeten Fragebogen

Bisher wurden 199 Fragebögen mit Hilfe einer thematic analysis (Braun & Clarke 2006) analysiert. Dabei werden bei wenigstens jedem zehnten Schüler wiederkehrende Äußerungen zu Motiven gruppiert, wobei die Zuordnung von Äußerungen zu Motiven durch den Forscher erfolgt, durch eine Dokumentation mit beispielhaften Äußerungen jedoch transparent gestaltet werden soll. Die Motive können anschließend quantitativ und qualitativ untersucht werden, bevor sie vor dem Hintergrund der kritisch-soziologischen Hintergrundtheorie interpretiert wurden. Vor allem an Hand der ersten Frage wurde eine zusätzliche Einteilung der Schüler nach der individuell geäußerten Zuneigung zu Mathematik vorgenommen, um einen differenzierten Blick auf die Ausprägungen der Motive zu erlauben.

Motive / allgemein geäußerte Zuneigung zu Mathematik	+	±	–	Σ
Psychosomatisches Wohlsein	33%	6%	0%	12%
Psychosomatisches Unwohlsein	4%	29%	61%	33%
Einfaches Verständnis	37%	7%	0%	13%
Schweres Verständnis	2%	31%	61%	33%
Starkes Interesse	42%	22%	0%	20%
Schwaches Interesse	4%	35%	74%	40%
Hohe Nützlichkeit	39%	32%	24%	31%
Niedrige Nützlichkeit	7%	18%	21%	16%
Herausfordernde Anstrengungen	33%	28%	23%	28%
Logische Dimension	47%	24%	20%	29%
Bewertung	7%	11%	20%	13%

Tabelle 2. Häufigkeiten der Motive differenziert nach allgemeiner Zuneigung

3. Ausgewählte Befunde und erste Interpretationsversuche

Häufig wiederkehrende Motive waren das Wohlsein im Umgang mit, das Verständnis von und das Interesse an Mathematik. Jedes dieser drei Motivpaare wurde von etwa jedem zweiten Schüler angesprochen. Dabei zeigt sich eine deutliche Polarisierung der Wahrnehmung von Mathematik, wobei das empfundene Wohlsein, Verständnis und Interesse mit der allgemeinen Zuneigung zu Mathematik in einem engen Zusammenhang steht. Alarmierend sind die Häufigkeiten der Nennung negativer Wahrnehmungen: Mehr als jeder dritte Schüler spricht von sich aus Unwohlsein, Verständnisschwierigkeiten und schwaches Interesse an. So sei Mathematik „langweilig“, „kompliziert“ und führe zu „Verzweiflung“, „Angst“ und „Kopfschmerzen“. Aus soziologischer Sicht ist also festzuhalten, dass zeitgenössischer Mathematikunterricht so gestaltet ist, dass er zwar unter vielen Schülern ein positives Verhältnis zur Mathematik erlaubt, jedoch eine wohlbegründete Abwendung eines erheblichen Anteils von Schülern von der Mathematik hervorruft. Eine Funktion dieses Phänomens könnte die Einteilung der Heranwachsenden in unkritische Anwender und verängstigte Meider der Mathematik sein, welche eine konfliktfreie Organisation der Gesellschaft durch Mathematik begünstigt.

Bemerkenswert ist die hohe Nützlichkeit, die Schüler der Mathematik zuschreiben. Mathematik sei „überall“, ein „Werkzeug in jeder Lebenslage“, man könne sie „überall verwenden“ und man wisse, dass das Fach „später mal wichtig wird und wir es brauchen werden“. Entsprechende Zuschreibungen treffen auch viele Schüler mit einer allgemeinen Abneigung gegen Mathematik. Auffällig ist an diesen Aussagen jedoch ihr dogmatischer Charakter. Kein einziger Schüler benennt konkrete Situationen, in denen Mathematik in ihrem heutigen oder späteren Leben oder im Leben ihrer Bezugspersonen wichtig ist oder werden könnte. Stattdessen lesen sich diese Bezeugungen über die Nützlichkeit der Mathematik als übernommene Glaubensbekenntnisse über die universelle Anwendbarkeit der Mathematik – eine Vorstellung, die ungeachtet ihrer Fragwürdigkeit zur Legitimation einer mathematischen Organisation der Gesellschaft beiträgt. Hervorgehoben sei schließlich, dass selbst Schüler mit Abneigung gegen Mathematik diese als Herausforderung und als logische Disziplin als Denken eigener Art wahrnehmen. Gerade im Vergleich zu anderen Fächern müsse man im Mathematikunterricht „sehr viel nachdenken“ und können nicht einfach „auswendig lernen“. Geschätzt werden unter anderem die Eindeutigkeit und die Nachvollziehbarkeit mathematischer Aussagen. Aus soziologischer Sicht sind diese Äußerungen interessant, da sie bezeugen, dass im Mathematikunterricht ein Diskurs gepflegt wird, der sich durchaus von anderen

Diskursen unterscheidet und in seiner Eigenartigkeit bedeutsam erscheint. Aus pädagogischer Sicht mag man hier sogar Potential sehen, um einen größeren Anteil von Schülern für Mathematik zu begeistern.

4. Rückblick und Ausblick

Die vorgestellte Studie war erkenntnisbringend, da sie zum einen viele Erwartungen aus sozialkritischen Beiträgen zum Mathematikunterricht an Hand von Schüleräußerungen bestätigen konnte, aber auch, da sie weiterführende theoretische und methodologische Fragen aufwirft. So lässt sich diese Studie als explorativer Schritt verstehen, der auch zahlreiche Probleme des gewählten Vorgehens offenlegt: Zunächst lassen sich soziologische Theorien prinzipiell nicht am befragen Individuum validieren, so dass fraglich ist, in welchem Sinne empirische Studien zur sozialkritischen Theoriebildung beitragen können. Dadurch ist dann unklar, auf welchem Wege aus erhobenen Daten soziologische Befunde gewonnen werden können. Schließlich erwies sich die Erhebung durch Fragebögen als zu unflexibel, da Bedeutungen oft vage blieben und nicht weiter – wie etwa in einem Interview – erschlossen werden konnten. Durch diese Probleme sind zugleich Herausforderungen zukünftiger Untersuchungen abgesteckt.

Literatur

Braun, Virginia & Victoria Clarke (2006) „Using Thematic Analysis in Psychology“ in *Qualitative Research in Psychology* 3 (2), S. 77–101.

Fischer, Roland (1984) „Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand: Visionen eines neuen Mathematikunterrichts“ in *Journal für Mathematik-Didaktik* 5, S. 51–85.

Kollosche, David (2014) *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziol. Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Springer: Berlin.

Lave, Jean (1988) *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge University Press: Cambridge.

Leder, Gilah C.; Erkki Pehkonen; Günter Törner (Hg.) (2002) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Kluwer: Dordrecht.

Lundin, Sverker (2008) *Skolans matematik: En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*. Uppsala.

Maaß, Jürgen & Wolfgang Schlöglmann (2000) „Erwachsene und Mathematik“ in *mathematica didactica* 23 (2), S. 95–106.

Maaß, Jürgen; Wolfgang Schlöglmann (Hg.) (2009) *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results*. Sense: Rotterdam.

Stinson, David W. (2004) “Mathematics as ‘Gate-Keeper’” in *The Mathematics Educator* 14 (1), S. 8–18.

Ullmann, Philipp (2008) *Mathematik, Moderne, Ideologie: Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik*. UVK: Konstanz.

Nicole KOPPITZ, Gießen

Mit Sicherheit Mathematik im Grundschullehramt – Ein Projekt zur Unterstützung der Studierenden

Ausgangslage

In Hessen sind im Lehramt an Grundschulen (Klasse 1-6) die Fächer Deutsch und Mathematik neben einem selbstgewählten Drittfach verpflichtend zu studieren. Es ist also Voraussetzung für den Zugang zum Lehrberuf in der Grundschule, das Studium aller drei Fächer erfolgreich zu absolvieren. Folglich sind die Studierendengruppen in der Lernausgangslage und der Motivation in Bezug auf das Mathematikstudium heterogen. Neben Studierenden, die ohne Probleme das Studium absolvieren, besuchen auch solche die Veranstaltungen, denen Mathematik nicht leicht fällt und die sich nur schwer auf die Lerninhalte einlassen können. Für diese Gruppe der Studierenden stellt dieser Teil des Studiums eine Hürde dar.

Projektidee

Wegen der oben beschriebenen Problematik wird am Institut für Didaktik der Mathematik der Justus-Liebig-Universität Gießen seit dem Wintersemester 2013/14 ein zweijähriges Projekt im fachmathematischen Modul durchgeführt (Koppitz, 2014). Hierbei sollen alle Studierenden, aber besonders die mit schwachen fachlichen und motivationalen Voraussetzungen, in die Lage versetzt werden, das Studium erfolgreich zu absolvieren. Die Idee ist, durch eigene Reflexion der Studierenden, Beratung und zusätzliche Lernangebote eine positive Einstellung zur Mathematik zu entwickeln und so die Lernschwierigkeiten zu überwinden.

Datenerhebung und Projektaufbau

Um die Studierenden gezielt zu unterstützen, wurde die Problemlage in eigenen Datenerhebungen untersucht. Es wurden jeweils die Studierenden im ersten Fachsemester der Wintersemester 2013/14 und 2014/15 befragt. Der Inhalt der Fragebögen umfasst zum einen Aufgaben zum mathematischen Grundwissen und zum anderen Fragen zur Einstellung, Motivation und Selbstkonzept bezüglich der Mathematik und dem bevorstehenden Mathematikstudium. Mit der Auswertung der Fragebögen wurde die Vermutung bestätigt, dass die Entwicklung unterschiedlicher Fördermaßnahmen notwendig ist (Koppitz und Schreiber, im Druck).

In der Abbildung 1 ist der Projektaufbau mit den Unterstützungsmaßnahmen dargestellt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

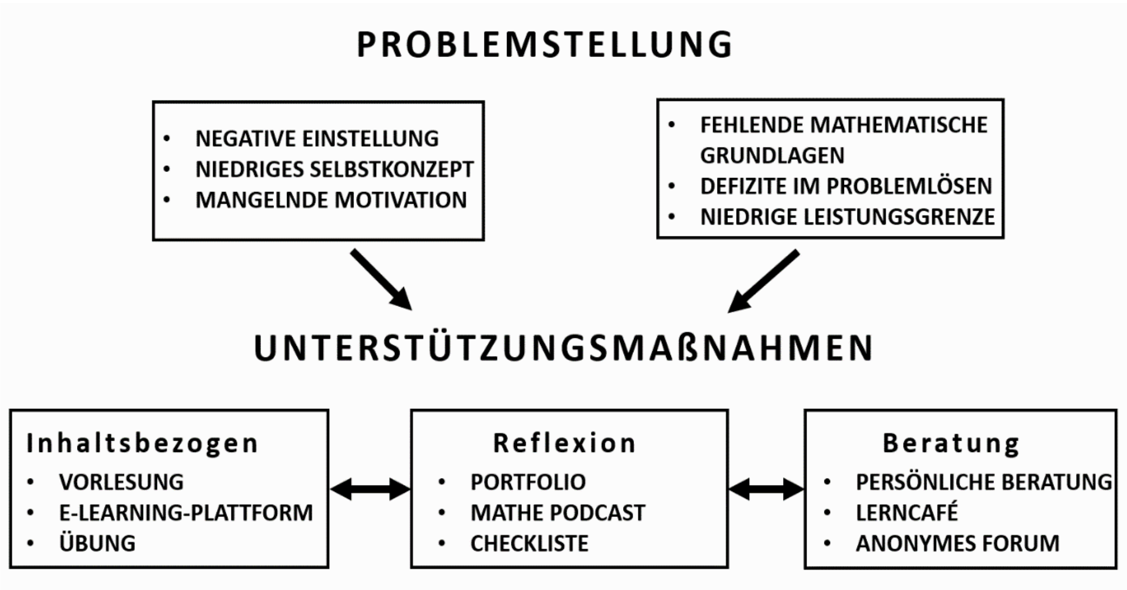


Abb. 1 Projektaufbau

Im oberen Teil der Abbildung wird die bereits beschriebene Problemstellung zusammengefasst. Diese treffen in unterschiedlichen Punkten auf die einzelnen Studierenden zu. Um den Problemen entgegenzuwirken wurden unterschiedliche Unterstützungsmaßnahmen entwickelt. Diese können in drei Bereiche untergliedert werden, die in gegenseitiger Wechselwirkung stehen. Die drei unterschiedlichen Bereiche der Unterstützung greifen den Inhalt, die Reflexion und die Beratung auf.

- Bei der Unterstützung im Inhalt geht es vor allem darum, fehlende mathematische Kompetenzen und Faktenwissen aufzuarbeiten und Problemen beim Erlernen der veranstaltungsrelevanten Mathematik entgegen zu wirken. Dies umfasst die Gestaltung der Übungsaufgaben und der Möglichkeit auf einer Veranstaltungsbasierenden E-Learning-Plattform weitere Aufgaben zu lösen.
- Im Bereich der Reflexion geht es darum, dass die Studierenden lernen ihr eigenes Lernen zu reflektieren und in die Lage versetzt werden, ihre eigenen Fähigkeiten aber auch Defizite zu erkennen, um gezielt diesen entgegenzuwirken. Hierzu werden Portfolios zum eigenen Lernen geschrieben, Audiopodcast (nach Klose, Tebaartz, Schreiber und Lengnink 2014) erstellt und den Studierenden eine ausführliche Übersicht der erwartenden Kompetenzen zum Abhaken zur Verfügung gestellt.
- Im Teil der Beratung soll den Studierenden gezielt eine Rückmeldung gegeben werden. Dieses kann punktuell sein, indem die Studierenden mit gezielten Fragen im Forum, per Mail oder bei Besuch im Lerncafé sich an die Dozenten wenden. Des Weiteren kann eine ausgiebige Bera-

tung in Anspruch genommen werden, die für den persönlichen Lernerfolg des ratsuchenden Studierenden ausgelegt ist.

Im Folgenden wird das Übungskonzept aus dem Bereich Inhalt als eine Unterstützungsmaßnahme ausführlich beschrieben. Weitere Maßnahmen können bei Koppitz und Schreiber (im Druck) nachgelesen werden.

Übungen

Im Zuge des Projektes wurde der Aufbau der Übungsblätter umstrukturiert und im Sinne des produktiven Übens gestaltet (Leuders, 2014). Dabei soll ein rein automatisiertes Rechnen verhindert werden und stattdessen erreicht werden, dass neues Wissen durch die Übungen flexibel und nachhaltig verfügbar bleibt. Dennoch muss ein sicheres Umgehen mit den Rechenverfahren erreicht werden, welches mit einem vertiefenden Verständnis verbunden werden sollte. Hierzu soll bei jeder Übungsserie die Kompetenzfacetten 'Sichern von Faktenwissen', 'Automatisieren von Fertigkeiten', 'Aufbau und Vertiefen von Vorstellungen', 'Reflexion von Konzepten und deren Anwendung', 'Anwendung im Rahmen des Problemlösens' sowie 'Aufbau eines angemessen Mathematikbildes' zugleich angesprochen werden (Leuders 2014, S. 253). Daher werden die Übungsserien in drei Teile gegliedert:

Im ersten Teil der Übungen bekommen die Studierenden Aufgaben, welche die Rechenverfahren eher auf einer syntaktischen Ebene einüben sollen. Diese werden in Struktur- und Problemlöseaufgaben eingebunden, die bewirken, dass entweder eine Struktur untersucht und so das Anwenden geübt wird oder Aufgaben gewählt werden, die in einer einfachen Form Aufgaben des Problemlösens darstellen. Hierbei werden durch eigenes Annähern an das Aufgabenformat die Rechenregeln angewendet, jedoch müssen die Studierenden eine eigene Lösungsheuristik herausarbeiten. Die Aufgaben sollen so leicht bleiben, dass die Studierenden selbstständig überprüfen können, ob sie die Rechenverfahren und -regeln verstanden haben. Hierzu bekommen die Studierenden zwei Tage vor den Tutorien einen Lösungsvorschlag zur Verfügung gestellt. Wenn Lösungen unklar sind, sollen die Studierenden die Fragen im Online-Forum klären oder mit ins Tutorium bringen, um diese dort kurz zu besprechen. Eine tiefgründige Besprechung ist nicht vorgesehen.

Diese Aufgaben sollen das in der Veranstaltung erwartete Leistungsniveau wiederspiegeln. Die Studierenden sollen die Aufgaben innerhalb einer Woche zu Hause lösen. Es werden Aufgaben gestellt, die das Begründen, das Nachvollziehen von Herleitungen, Modellieren und Problemlösen in einer besonderen Weise schulen. Die Aufgaben sollen mit den zur Verfügung gestellten Vorlesungsfolien lösbar sein. Nach der Bearbeitungszeit von einer

Woche findet ein Tutorium statt, in dem die Aufgaben ausführlich besprochen werden. Dabei sind die Studierenden angehalten über ihre Lösungen zu diskutieren und sich aktiv in das Tutorium mit einzubringen.

Der dritte Teil der Übung findet in den Tutorien in Form von Präsenzaufgaben statt. Die Aufgaben in diesem Teil können unterschiedliche Kompetenzfacetten aufgreifen. Durch das weite Themenspektrum der Vorlesung können diese vielfältig gestaltet werden. Es können zum einen Experimente in der Stochastik und Geometrie durchgeführt werden, die Formeln in der Arithmetik in einer besonderen Form nachvollziehbar gemacht werden oder die Statistik in kleinen Erhebungen innerhalb der Übungsgruppe praktisch umgesetzt werden. Zudem können mathematische Themen ergründet werden, indem Sie durch Materialien der Lernwerkstatt ein praktisches Nachvollziehen ermöglichen. Der Präsenzteil birgt den Vorteil, dass in den Übungsgruppen weitere Lehrmethoden angewendet werden können, die in der Einzelbearbeitung der Übungsaufgaben nicht realisierbar sind.

Literatur

Hanke, U., Macke, G., & Viehmann, P. (2012). Hochschuldidaktik: lehren, vortragen, prüfen, beraten ; mit Methodensammlung “Besser lehren”, (2., erw. Aufl.). Beltz Verlag: Weinheim, Basel.

Klose, R., Tebaartz, P., Schreiber C. & Lengnink K. (2014). Audio-Podcasts zu fachmathematischen Inhalten - Lehrer-Online. http://www.lehrer-online.de/podcast-fachmathematik.php Stand vom 09.02.2015.

Koppitz N. (2014). Mit Sicherheit Mathematik im Grundschullehramt – Ein Projekt zur Unterstützung der Studierenden. In: Roth, J. & Amnes J. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 1355-1356. Münster: WTM.

Koppitz N., Schreiber C. (im Druck). Advice and guidance for Students enrolled in Teaching mathematics at Primary Level, Cerme 9, Prag. Verfügbar: http://www.cerme9.org/products/wg18/

Leuders, T. (2014). Entdeckendes Lernen – Produktives Üben. In Helmut Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht, 236–263. Seelze: Kallmeyer.

Ulrich KORTENKAMP, Potsdam

C-Books: Creative Mathematical Thinking und Social Creativity[1]

1. Vorbetrachtung

Durch die rasante Verbreitung von kleinen flachen elektronischen Displays mit Touch-Bedienung in den letzten Jahren ist ein frischer Blick auf die Verwendung von sogenannten e-Books in der Mathematiklehre nötig geworden. Wie ändert sich die Tätigkeit des *Lesens* durch diese Technologie? Und wie geht man mit den neuen *interaktiven* Möglichkeiten der Geräte um? Was heißt überhaupt interaktiv? Ist das Abspielen von Videos in einem Buch schon interaktiv? Das Ausfüllen von Lückentexten? Oder ist es die – evtl. automatische – Auswahl des nächsten Kapitels, wie es sie schon in den Materialien des programmierten Lernens gab? Geht da mehr – oder muss nicht sogar mehr gehen? Wie verändert sich die Rolle der Leserin und des Lesers dadurch? Vgl. dazu auch die Arbeiten im Umfeld von Victor (2013).

Doch nicht nur das Lesen an sich ist im Umbruch. Wenn nicht mehr klar ist, wie sich die Leserinnen und Leser durch das Buch bewegen, dann verändert sich auch die Rolle der Autorinnen und Autoren. Statt zu erzählen und zu strukturieren, müssen diese nun diesen veränderten Leseprozess gestalten. Eine große Herausforderung, die durch gemeinsames Schreiben und Gestalten und durch unterstützende Technologie gemeistert werden könnte. Am Ende bleibt die Frage: Was ist überhaupt ein Buch?

2. Mathematical Creativity Squared

Ich möchte an dieser Stelle über ein laufendes Projekt im 7. Rahmenprogramm der EU berichten, welches sich sowohl mit den theoretischen Konstrukten zur Kreativitität, die im Rahmen der Entwicklung von elektronischen Büchern zum Lehren und Lernen von Mathematik auftreten, als auch mit der technischen Umsetzung einer diesen kreativen Schaffensprozess unterstützenden Umgebung befasst. Das Projekt Mathematical Creativity Squared – kurz: M C Squared, lang: „*A Computational Environment to Stimulate and Enhance Creative Designs for Mathematical Creativity*" – wird im Programm ICT-2013.8.1 *„Technologies and scientific foundations*

[1] Die Arbeit, die zu dieser Publikation führte, wurde durch die Europäische Union im 7. Rahmenprogramm (FP7/2007-2013) mit der Vereinbarung Nr. 610467 – Projekt „M C Squared" gefördert. Diese Publikation spiegelt nur die Meinung des Autors wider und die Union ist nicht verantwortlich für jegliche Nutzung der darin enthaltenen Informationen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

in the field of creativity" gefördert. Die Ausrichtung der Ausschreibung ist nicht mathematik-spezifisch, sondern zielt auf die „kreative Industrie", also auf denjenigen Wirtschaftszweig, der kreative Schaffensprozesse für die Herstellung von Produkten nutzt. Neben sechs akademischen Partnern (CTI Athen, Universität Utrecht, London Knowledge Lab/Institute of Education, Universität Barcelona, Universität Claude Bernard Lyon 1, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg/Universität Potsdam) sind daher auch drei Unternehmen beteiligt: (a) Aristod, eine kleine französische Softwarefirma, die auf die Herstellung und den Vertrieb von Mathematik-Lernsoftware (*Epsilonwriter*, *Aplusix*) spezialisiert ist, (b) Talent, eine griechische Softwarefirma, die insbesondere im Bereich von Geoinformationssystemen tätig ist, aber auch Lernsoftware für Mathematik und Informatik herstellt (insbesondere die Microworld-Umgebung *e-Slate*) und (c) die italienische Firma Testaluna, die neben reinen Spielen auch *serious games* und Lernsoftware für mobile Geräte herstellt.

Das Ziel des Projektes, welches von Oktober 2014 bis September 2016 gefördert wird, ist die „theoriegeleitete Entwicklung von Technologie für die gemeinschaftliche Entwicklung von kreativem und kreativitätsfördernden Material für Bildungszwecke." Diese Technologie wird – sobald verfügbar – von 4 Gruppen (Communities of Interest) eingesetzt und der gemeinschaftliche Schaffensprozess wird beforscht. Die dafür notwendigen Instrumente zur Datensammlung und Analyse werden ebenfalls im Rahmen des Projekts erstellt. Neben diesen Hauptzielen existieren aber viele weitere implizite Forschungs- und Entwicklungsziele der Projektpartner. Insbesondere sollen bestehende Umgebungen und Komponenten weiterentwickelt und für größere Nutzergruppen erschlossen werden.

3. Kreativität zum Quadrat

Die Quadrierung der Kreativität im Projektnamen ist im Grundgedanken des Projekts verankert, dass es nicht nur darum geht, dass die Autorinnen und Autoren kreativ tätig sind, sondern dass die von ihnen verfassten Inhalte die Kreativität der Leserinnen und Leser – meist Schülerinnen und Schüler – herausfordern und fördern sollen.

Mit Blick auf die Autorinnen und Autoren können wir zunächst *Communities of Practice* (LAVE & WENGER 1991, WENGER 1998) identifizieren. Hierbei handelt es sich um Gruppen von Fachkräften, die gemeinsam in einem bestimmten Bereich arbeiten und dabei ähnliche Arbeiten verrichten. Typische Communities of Practice (CoP) im Projektumfeld sind (jeweils) Mathematikdidaktiker und Mathematikdidaktikerinnen, Lehrerinnen und Lehrer, Grafikerinnen und Grafiker, Redakteure und Redakteurinnen, Schülerinnen und Schüler. Eine solche CoP blickt meist auf eine gemeinsame Geschichte des Lernens, wodurch Grenzen (*boundaries,* WENGER 1998) entstehen, die entscheiden, wer in dieser CoP ist und wer nicht. Eine solche CoP ist meist effizient in ihrem eigenen Gebiet, doch wir benötigen (z.B. für die Herstellung von Lernmaterialien) Expertise aus mehreren CoPs. Eine *Community of Interest* kann als Gruppe von CoPs (oder Individuen aus CoPs) verstanden werden. Diese CoI bringt (meist temporär) *„Stakeholder"* zusammen, die ein gemeinsames Problem lösen möchten. *Social Creativity* (FISCHER 2001, 2011) wird durch die gemeinsame Arbeit solcher CoIs an einem Design-Problem in einer sozio-technischen Umgebung hervorgerufen. Die „*symmetry of ignorance*" (RITTEL 1984) beschreibt die Verteilung von Wissen unter den verschiedenen S*takeholdern* in einer CoI – diese kann in einer geeigneten Umgebung als Quelle von kollektiver Kreativität genutzt werden.

Die Zusammenarbeit von CoPs in CoIs kann sich an sogenannten *Boundary Objects* (STAR 1989, STAR & GRIESEMER 1989) entfalten. *Boundary Objects* sind abstrakte oder konkrete Objekte, die von verschiedenen CoPs unterschiedlich interpretiert werden können, aber ihnen dennoch eine gemeinsame Basis geben, auf der sie zusammen arbeiten können. Laut STAR ist die Herstellung und Verwaltung von Boundary Objects der Schlüssel zur Herstellung von Kohärenz zwischen verschiedenen sozialen Umfeldern.

4. C-Books

Unter anderem durch NOSS & HOYLES (1996) und KYNIGOS (2007) wurden digitale Artefakte als geeignete Boundary Objects identifiziert, die in soziotechnischen Umgebungen gemeinsam von verschiedenen CoPs innerhalb einer CoI bearbeitet werden. Diese Artefakte sind im Projekt die sogenannten *C-Books,* „kreative elektronische Bücher".

Als sozio-technische Umgebung dient im Projekt M C Squared eine Weiterentwicklung der DME/DMO (Digital Math Environment/Digitale Wiskunde Omgeving) des Freudenthal Instituts. DME ist ein integrierte Umgebung zur Gestaltung von elektronischen Lehr-/Lernwerken speziell im Bereich Mathematik. Neben der textlichen und grafischen Gestaltung von einzelnen Seiten und Sequenzen werden insbesondere sogenannte *widgets* zur Verfügung gestellt. Hierbei handelt es sich um interaktive Objekte, die insbesondere für das konstruktivistische Lernen von Mathematik geeignet sind. Diese basieren zum Teil auf selbst entwickelten Java-Applets, zum Teil nutzen sie andere Mathematiksoftware wie GeoGebra oder Cinderella oder e-Slate. Beispiele für Widgets sind unter http://mc2-project.eu/index.php/technology-and-production/widgets verfügbar.

Die DME-Autorenumgebung wurde durch die Komponente CoICode erweitert, mit der es möglich ist, über den Schaffensprozess von Lehr-/Lerneinheiten zu diskutieren und ihn so zu dokumentieren und im Nachhinein zu analysieren. Gemeinsam mit CoICode liegt somit ein Autorenwerkzeug vor, welches im Projekt „CBA“ heißt – *C-Book Author*.

Die DME wurde bisher auch genutzt, um die erstellten Inhalte Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Dazu existiert schon seit längerer Zeit ein integriertes Learning-Management-System, welches es ermöglicht, dass der Bearbeitungsstand für jedes Kind einzeln gespeichert wird. Für Lehrpersonen gibt es Übersichtsfunktionen, die auf den individuellen Fortschritt und auf den aktuellen Lernstand der Klasse schließen lassen (Bokhove et. al 2007). Aktuell wird diese Funktionalität in eine sogenannten *C-Book Viewer* ausgelagert. Dieser C-Book-Viewer ermöglicht es auch, existierende C-Books auf Tablets zu verwenden, da die bisher Java-basierte Autorenumgebung und die *widgets* dann in die Tablet-kompatiblen JavaScript/HTML5-Technologie übersetzt werden.

Literatur

Bokhove, Chr., Koolstra, G., Boon, P. and Heck, A. (2007) Towards an integrated learning environment for mathematics. In, *8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Hradec Králové, CZ, 01 - 04 Jul 2007.* 5pp.

Victor, B. (2013). Media for Thinking the Unthinkable. Presentation at the MIT Media Lab. Online at http://worrydream.com/MediaForThinkingTheUnthinkable/

Lave, J. & Wenger, E. (1991) *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation,* Cambridge University Press, New York.

Wenger, E. (1998) *Communities of Practice — Learning, Meaning, and Identity,* Cambridge University Press, Cambridge, England.

Fischer, G. (2001). Communities of interest: Learning through the interaction of multiple knowledge systems. In *Proceedings of the 24th IRIS Conference* (Vol. 2001). Department of Information Science, Bergen.

Rittel, H. (1984) "Second-Generation Design Methods." In N. Cross (Ed.) *Developments in Design Methodology,* John Wiley & Sons, New York, pp. 317-327.

Star, S. L. (1989) "The Structure of Ill-Structured Solutions: Boundary Objects and Heterogeneous Distributed Problem Solving." In L. Gasser & M. N. Huhns (Eds.), *Distributed Artificial Intelligence, Volume II,* Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Mateo, CA, pp. 37-54.

Star, S. L. & Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, ‘translations’ and boundary objects: amateurs and professionals in Berkeley’s Museum of Vertebrate Zoology, 1907-1939. *Social Studies of Science*, *19*, 387-420.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996b). Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kynigos, C. (2007). Half–Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design. *Informatics in Education, 6* (2), 335–359.

Christina M. KRAUSE, Essen

Hände hoch! – Ergebnisse einer empirischen Studie zur Rolle von Gesten in sozialen mathematischen Erkenntnisprozessen

Prozesse der Konstruktion mathematischen Wissens in sozialer Interaktion lassen sich nach Bikner-Ahsbahs durch die drei kollektiven epistemischen Handlungen des *Sammelns* mathematischer Einheiten, des *Verknüpfens* dieser Einheiten, und des *Sehens* mathematischer *Strukturen* beschreiben (*SVSt-Modell*, Bikner-Ahsbahs, 2005). Bisher wurden solche epistemischen Prozesse vor allem auf Basis sprachlicher Äußerungen untersucht. Soziale Interaktionen bestehen jedoch aus weitaus mehr als nur aus Sprache allein. Eine Berücksichtigung der nicht-sprachlichen Mittel kann somit zu einem besseren Verständnis sozialer Lernprozesse führen. Gesten scheinen eine besondere Rolle spielen, wenn mathematisches Wissen noch nicht explizit zugänglich ist (siehe z.B. Arzarello & Edwards, 2005). Diesem Ansatz folgend beschäftigte sich das hier vorgestellte Promotionsprojekte (gefördert von der Zentralen Forschungsförderung der Universität Bremen) mit der Frage, wie Gesten zu Prozessen mathematischer Wissenskonstruktion in sozialer Interaktion beitragen können, um Bikner-Ahsbah‘ bestehende Theorie epistemischer Prozesse um eine semiotische Perspektive zu erweitern. Dieser Beitrag stellt einige Ergebnisse des Projektes zusammengefasst dar. Es wurden folgende Teilfragen gestellt:

- Wie tragen Gesten in sozialen Prozessen mathematischer Wissenskonstruktion dazu bei mathematische Objekte darzustellen? Wie spielen sie hierbei mit Sprache und Inskriptionen zusammen?
- Wie tragen Gesten dazu bei epistemisch zu handeln? Welche förderlichen Arten des Gestengebrauchs lassen sich feststellen?

1. Gesten und ihre Verortung im multimodalen Rahmen

Als Gesten verstehe ich „spontane, redebegleitende Bewegungen der Hände und Arme” (McNeill, 1992, S. 37), die “eher dem Zwecke des Ausdrucks als einem praktischen Ziel dienen” (Kendon, 2004, S. 15). Die Betrachtung der Gesten im Semiotischen Bündel (Arzarello, 2006) bettet den Gestengebrauch in einen multimodalen Rahmen, in dem sowohl synchrone, als auch diachrone Beziehungen des Zusammenspiels und der Entwicklung semiotischer Ressourcen unterschiedlicher Art berücksichtig werden. Hierdurch kann die mathematische Bedeutung der Gesten im Kontext erschlossen werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Methoden der Studie

Der Studie liegen Daten aus dem Projekt „Effective knowledge construction in interest-dense situations“ (gefördert von der German-Israeli-Foundation) zugrunde. Drei leistungsstarke SchülerInnenpaare lösten jeweils drei Aufgaben, die sich sowohl in der mathematischen Thematik, wie auch in der Vielfalt der vorgegebenen Repräsentationen unterscheiden: Eine geometrisch-algebraische Aufgabe beschäftigt sich mit der Parabel als geometrischem Ort. Neben einer nach Anweisung zu erstellenden Faltrepräsentation wird hierfür eine variierbare GeoGebra-Umgebung gegeben, sowie ein Ausdruck einer möglichen, fixierten Situation aus dieser GeoGebra-Umgebung (siehe (Krause & Bikner-Ahsbahs, 2012) für eine genaue Beschreibung der Aufgabe). In einer arithmetisch-algebraischen Aufgabe soll der Grenzwert für eine durch einen Kettenbruch definierten Folge gefunden werden (siehe Behrens, Krause & Bikner-Ahsbahs, 2014). In einer weiteren Aufgabe wird nach einer Entscheidungsstrategie gefragt, die induktiv aus einer verbal beschriebenen Situation gefolgert wird.

Alle Bearbeitungen wurden aus drei Perspektiven videographiert. Hierdurch wurden sowohl der Gebrauch von Inskriptionen und der GeoGebra-Umgebung, wie auch der Gestengebrauch der Schüler festgehalten. Auf Basis dieser Videodaten wurden Transkripte erstellt, die verbale Äußerungen wie non-verbale Handlungen enthalten.

Aus den neun Datensätzen wurden fünf Datensätze ausgewählt: Aufgrund der stark graphisch geprägten Lernumgebung wurde bei der Parabel-Aufgabe ein Umgang mit Gesten erwartet. Um individuelle Unterschiede im Gestengebrauch einzubeziehen, wurden die Bearbeitungen dieser Aufgabe aller drei Schülerpaare untersucht. Um aufgabenübergreifende Besonderheiten des Gestengebrauchs zu erkunden, wurde ein Schülerpaar ausgewählt. Dieses Schülerpaar löste die Aufgaben trotz längerer Sprechpausen schneller als die anderen. Außerdem fiel es dadurch auf, dass eine Schülerin viele und ‚große‘, die andere wenige, jedoch effektive Gesten machte.

Die Analyse der Daten erfolgte interpretativ in mehreren Schritten: Auf Basis einer sprachbasierten Rekonstruktion der epistemischen Prozesse nach dem SVSt-Modell wurden Episoden bestimmt, in denen der Gesprächsverlauf *um Situationen des Struktursehens abgeschlossen* ist (epistemisch-dichte Episoden). Die in diesen Episoden auftretenden Gesten wurden nach synchronen und diachronen Aspekten im Semiotischen Bündel analysiert. Hieran anschließend erfolgte die Rekonstruktion und Kodierung von Funktionen von Gesten zur Beantwortung der Forschungsfragen und eine erneute Rekonstruktion der epistemischen Prozesse innerhalb der epistemisch-dichten Situationen unter Einbezug der Gesten als Teil multimodaler Äußerungen. Abschließend wurden Theorie-erweiternde Hypothesen durch Vergleiche der Ergebnisse gebildet, einerseits zu den Bearbeitungen *einer* Aufgabe durch *verschiedene* Schülerpaare, andererseits zu den Bearbeitungen *verschiedener* Aufgaben durch *ein* Schülerpaar.

3. Ergebnisse, Fazit und Ausblick

Die Ergebnisse zeigen, wie vielfältig Gesten zu epistemischen Prozessen in sozialer Interaktion beitragen können:

In der sozialen Interaktion wird das mathematische Objekt durch den Gebrauch von Gesten geformt, indem diese gewisse ***Binnenfunktionen*** erfüllen. So können Gesten die sprachliche Äußerung hinsichtlich der Aspekte des ‚*Wo*', des ‚*Was*' und/oder des ‚*Wie*' *spezifizieren* und *Relationen* visualisieren und konkretisieren. Dies geschieht auf drei räumlich unterscheidbaren Referenzebenen, auf denen die Geste unterschiedlich stark mit einer Inskription zusammenspielt. Auf der *ersten Ebene* bezieht sich die indexikalische Referenz der Geste durch Zeigen auf eine konkrete Inskription. Auf *Ebene 2* werden Gesten flüchtig in eine bestehende Inskription integriert und zeigen hierdurch Mögliches auf. Losgelöst von einem fixierten Interpretationsrahmen können Gesten auf *Ebene 3* frei auf mathematische Ideen verweisen. Hierzu werden die Gesten im Gestenraum, dem ‚Raum in der Luft zwischen Schultern und Hüfte' (McNeill, 1992, S. 86) ausgeführt.

Gesten erfüllen eine ***epistemische Funktion****,* wenn sie die Ausführung einer epistemischen Handlung direkt beeinflussen. Hierbei wurden zwei Arten epistemischer Funktionen herausgearbeitet: (i) *Ausformende* Funktionen beziehen sich auf die Darstellung des mathematischen Objektes, das in eine epistemische Handlung eingebunden ist: Durch *Auslagern, Pikturisieren, Extrahieren* und *Illustrieren eines allgemeinen Aspekts* können visuelle Zugänge zu diesem Objekt geschaffen, und hierdurch epistemische Handlungen gefördert werden. (ii) *Ausführende* Funktionen beziehen sich auf die Ausführung einer epistemischen Handlung: *Fokussieren, Exemplifizieren, Präzisieren, Kontrastieren, Verkleben* und *Strukturieren des sprachlichen Diskurses.* Die Auswirkung des visuellen Zugangs, der durch die Geste geschaffen wird, ist hier gerichtet auf eine Erkenntnishandlung.

Gesten beeinflussen den epistemischen Prozess in größerem Ausmaß als bisher angenommen: Sie können epistemische Handlungen nicht nur vorbereiten und unterstützen; sie realisieren sie sogar. Dies kann als Erklärung dienen, wenn Struktursehen spontan aufzutreten scheint, und gibt Aufschluss über den nicht-sprachlichen Beitrag zu epistemischen Handlungen.

Insgesamt erscheint der Gestengebrauch – und auch der hiermit einhergehende Effekt auf den epistemischen Prozess – eher von der Aufgabe geprägt zu sein als von den Individuen. Sowohl die Art und das Ausmaß der gestisch beigetragenen Information und der in Geste realisierten epistemischen Handlungen, wie auch die im Prozess zu ‚non-verbalen Begriffen' *sozial konventionalisierten* Gesten unterscheiden sich merklich stärker zwischen den Aufgaben als zwischen den Schülerpaaren. Alle drei Aspekte scheinen zu einem gewissen Maße in der Aufgabe angelegt zu sein.

Die Studie hat gezeigt, dass der Einsatz von Gesten einen nicht zu vernachlässigenden Teil sozialer epistemischer Prozesse ausmacht. Sie gibt außerdem Hinweise darauf, dass Gesten auch im Klassenraum als didaktisches Mittel genutzt werden können: Sie können beispielsweise ein Potential für Struktursehen offenbaren, auf das der Lehrer eingehen kann. So können epistemische Funktionen von Gesten auch gezielt eingesetzt werden um kollektive Erkenntnisprozesse zu katalysieren. Außerdem können Gesten als Teil einer ‚Sprache des Verstehens' angesehen werden, die eine Ausdrucksmöglichkeit bietet, bevor Wissen konkret fassbar ist. So wird eine Sensibilisierung für den Gebrauch und die Beachtung von Gesten im Klassenraum vor allem im Kontext inklusiven Unterrichts vorgeschlagen, wie auch im Hinblick auf Mehrsprachigkeit im Mathematikunterricht.

Literatur

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, Numero Especial, 267-299.

Arzarello, F., & Edwards, L. (2005). Gesture and the Construction of mathematical meaning (RF 2). In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the PME, 1*, (S. 122-145). Seoul, Korea: The Korea Society of ESM.

Behrens, D., Krause, C. M., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). "Ich zeig' uns was, was du nicht siehst" - Zur epistemischen Rolle von Gesten. In J. Roth, & J. Ames (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 48. Jahrestagung der GDM 2014 in Münster* (S. 149-152). Münster: WTM Verlag.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kendon, A. (2004). *Gesture: Visible action as utterance.* Cambridge: Cambridge University Press.

Krause, C. M. & Bikner-Ahsbahs, A. (2012). Modes of sign use in epistemic processes. In: Tso, T.Y. (Hrsg.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education*, *3* (S. 19 – 26), Taipei, Taiwan: PME.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: University of Chicago Press.

Eduard KRAUSE, Siegen

Fächerverbindende Didaktik am Beispiel von subjektiven Lernvoraussetzungen im Mathematik- und Physikunterricht

In diesem Beitrag wird anhand eines gemeinsamen Projekts der Mathematik- und Physikdidaktik der Universität Siegen die Idee fächerverbindender Didaktik diskutiert. Fächerverbindendes Lehren und Lernen bedeutet dabei die Bearbeitung eines Inhalts aus der Sicht unterschiedlicher Fächer (Peterßen, 2000). Für die Schule ist fächerverbindender Unterricht schon länger gefordert, doch an der Hochschule wird ein solches Unterfangen eher selten angebahnt. Das Projekt FäMaPdi (**Fä**cherverbindendes Seminar zur **Ma**thematik- und **P**hysik**di**daktik) stellt sich der Aufgabe, das Vorbereitungsseminar zur Praxisphase für Lehramtsstudenten der Fächer Mathematik und Physik im Masterstudium fächerverbindend zu gestalten. Da dieses Seminar auf das Unterrichten vorbereiten soll, erarbeiten die Studierenden unter Begleitung von Lehrkräften fächerverbindende Unterrichtsentwürfe, die dann in Zusammenarbeit mit einer Schule aus der Region erprobt werden. Diese unterrichtspraktischen Aspekte des Seminars werden mit didaktischer Theorie verzahnt. Ziel der Seminarsitzungen zur Theorie ist es, Beobachtungsfragen zu entwickeln, die die Grundlage des forschenden Lernens darstellen, das im Praxissemester gefordert ist (vgl. Witzke, 2015). Inhalte dieser Sitzungen sind allgemeine didaktische Themen wie Problemlösen, Interaktionstheorien, subjektive Lernvoraussetzungen und Modellieren. Diese Themen werden fächerverbindend aus der Sicht der Mathematik- und Physikdidaktik besprochen und dann verglichen. Das Seminar wurde erstmalig im WS 14/15 durchgeführt. Im Folgenden soll exemplarisch am Beispiel der subjektiven Lernvoraussetzungen gezeigt werden, welcher Gewinn aus einem Seminar dieses Formats gezogen werden kann.

Allgemeines zu subjektiven Lernvoraussetzungen

Die konstruktivistische Auffassung von Lernen geht davon aus, dass die vom Lernenden wahrgenommenen Informationen erst durch eigentätige Eingliederung in bereits vorhandene Denkstrukturen ihren Sinn erhalten. Die Fragen wie die Worte des Lehrers gedeutet werden und welche Assoziationen dadurch geweckt werden, sind nur individuell zu beantworten. Jeder Lerner verfügt über unterschiedliche Voraussetzungen. Dieser Umstand macht sich vor allem in der Kommunikation zwischen Lehrer und Lerner bemerkbar und muss vor eine gründliche didaktische Analyse gestellt werden. In der Physikdidaktik findet dies seinen Niederschlag in den sogenannten „Präkonzepten“. Auf der Seite der Mathematikdidaktik soll hier

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

auf die Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld eingegangen werden.

Präkonzepte in der Physikdidaktik

Unter Präkonzepten versteht man in der Physikdidaktik vorunterrichtliche Vorstellungen und Meinungen, die auf Intuition und Alltagserfahrung beruhen. Diese decken sich in vielen Fällen nicht mit der „etablierten" Physik. In diesem Fall spricht man von Fehlvorstellungen. Ein Beispiel dafür ist die intuitive Vorstellung, dass jede Bewegung einen Beweger braucht. Wo kein Beweger ist, kommt jede Bewegung zum Erliegen. Diese Vorstellung scheint aufgrund der Reibung plausibel und war Jahrhunderte lang Lehrsatz in der aristotelischen Naturlehre. Das Trägheitsprinzip besagt, dass sich alle bewegten Körper sofern geradlinig gleichförmig bewegen, solange keine äußeren Kräfte wirken, erscheint äußerst contra-intuitiv. Die physikdidaktische Forschung hat schon zu nahezu allen schulrelevanten Themen solche Präkonzepte diskutiert (vgl. Müller et al., 2007; Duit, 2009). Dabei wird auch betont, wie solchen Präkonzepten begegnet werden soll. Konkrete Möglichkeiten zum Konzeptwechsel sind Anknüpfen, Umdeuten, Konfrontieren (Kircher et al., 2009). Dabei ist aber zu beachten, dass vorhandene Konzepte nie vollständig ausgelöscht werden können. Durch den Lernprozess werden neue Konzepte generiert, die dann aber mit bereits vorhandenen (teilweise sogar widersprechenden) um Aktivierung konkurrieren. Diese Aktivierung ist kontextabhängig. In einer Physikprüfung wird das neu gelernte Konzept aktiviert, am selben Nachmittag kann aber auf dem Fußballplatz bei gleicher Fragestellung das urige Präkonzept das Verhalten steuern.

Subjektive Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld

Im fächerverbindenden Seminar wurde diskutiert, was ein mathematikdidaktisches Pendant zu den Präkonzepten aus der Physik sein könnte. Der Begriff des Präkonzepts ist auch in der mathematikdidaktischen Literatur zu finden, wie z.B. in (Prediger & Wittmann, 2009): „Als Präkonzepte der Lernenden werden die vorunterrichtlichen Erfahrungen und Vorstellungen bezeichnet. Sie werden im Unterricht gezielt zur Sprache gebracht, entweder um daran anknüpfen zu können, wenn sie tragfähig sind, oder um eine Weiterentwicklung bzw. Überwindung hin zu fachlich korrekten Konzepten zu ermöglichen." An diesem Zitat wird deutlich, dass sich das Verständnis von Präkonzepten in der Mathematik nur bedingt mit dem aus der Physikdidaktik deckt. In der Physik findet der negative Aspekt der Fehlvorstellung einen wesentlich größeren Niederschlag als in der Mathematik, wo das Verständnis von Präkonzepten mit dem mathematikdidaktischen Konzept der Grundvorstellungen im Sinne vom Hofes verbunden ist. Eine interessante Theorie in diesem komparativen Setting stellt die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld dar (Bauersfeld, 1983). Diese beschreibt Bauersfeld prägnant in vier Thesen. Die ersten beiden seien hier zitiert, um diese Theorie grob zu umreißen:

These 1: Jede subjektive Erfahrung ist bereichsspezifisch, d.h. die Erfahrungen eines Subjektes gliedern sich in subjektive Erfahrungsbereiche (SEB).

These 2: Die Gesamtheit der subjektiven Erfahrung präsentiert sich in einer Anhäufung von nichthierarchisch geordneten SEB, die um eine Aktivierung konkurrieren.

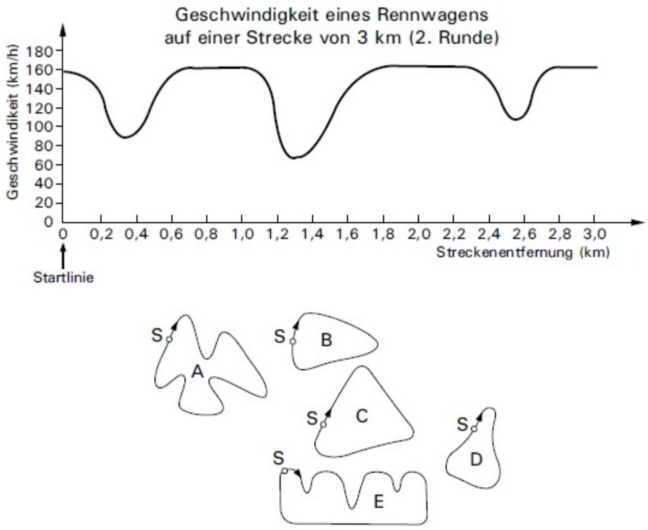


Abb. 1: Beispielaufgabe zur Erklärung von Schülerfehlern mit den SEB nach Bauersfeld.

Dieser Ansatz mit Wurzel in der Lernpsychologie liefert eine differenzierte Erklärungsgrundlage für „Fehlverhalten“ von Lernenden. Als Beispiel sei eine Aufgabe aus der PISA-Studie angeführt (Abb. 1) (vgl. Leuders, 2005) Bei dieser Aufgabe sollten Schülerinnen und Schüler (SuS) dem v-t-Diagramm eines Rennwagens in der zweiten Runde die passende Rennstrecke zuordnen. In Deutschland haben nur 29,8% der SuS die richtige Antwort B gewählt. Die meisten wählten Antwort E. Die Ursache liegt sicherlich in der augenscheinlichen Ähnlichkeit des Verlaufes des Graphen und der Rennstrecke. Mit Bauersfeld lassen sich Erklärungsansätze darüber entwickeln, warum die SuS in der ausgehenden Mittelstufe noch in Subjektiven Erfahrungsbereichen des Nachzeichnens von Kurvenverläufen denken, die aus der Geometrie geprägt sind.

Vergleich der beiden Theorien und Zusammenfassung

In dem Seminar wurde nach der Darstellung der didaktischen Theorien beider Fachdidaktiken eine vergleichende Diskussion geführt. Per Definition haben beide Theorien gemeinsam, dass es um Lernvoraussetzungen geht. Bei genauerer Betrachtung fallen weitere Ähnlichkeiten auf. So weisen zum einen beide Theorien auf die nichthierarchische Anordnung kognitiver Strukturen hin und zum anderen auch auf die Unauslöschbarkeit bereits vorhandener Konzepte. In der Mathematikdidaktik scheint der letztgenannte Aspekt durch die Arbeiten Bauersfelds fundierter thematisiert worden zu sein, als in der Physikdidaktik. Eine Ursache liegt darin, dass die Erforschung von Präkonzepten in der Physikdidaktik eher deskriptiv erfolgt. Als weiterer Unterschied lässt sich die unterschiedliche Verbindung von subjektiven Lernvoraussetzungen und der Diskrepanz zwischen Alltagssprache und Fachsprache nennen. In der Physik sind Präkonzepte häufig sehr eng mit solchen begrifflichen Unstimmigkeiten verbunden. Ein Beispiel dazu ist der Begriff der Wärme, der nicht nur in der Umgangssprache etwas anderes bezeichnet als in der Fachsprache, sondern auch mit einem anderen Verständniskonzept verbunden ist, als in der Physik. In der Mathematik gibt es auch Unterschiede in Worten der Alltagssprache und den Fachtermini (Kegel, komplex,…), doch sind diese in der Regel so verschieden, dass sie nicht mit unterschiedlichen Verständniskonzepten einhergehen, die sich auf ein und dieselben Sache beziehen.

Die Diskussion der Unterschiede und Gemeinsamkeiten wurde von den Seminarteilnehmern in offenen Fragebögen, die gegenwärtig noch in der Auswertung sind, als sehr gewinnbringend beurteilt, da die Vermittlung der Inhalte des eigenen Faches an Interessenten aus benachbarten Fächern ein fundiertes Verständnis erfordert („Learning by teaching“). Zudem führt die komparative Analyse fachdidaktischer Ansätze aus benachbarten Fächern nach Einschätzung der Teilnehmer und Veranstalter zu einem tieferen Verständnis der jeweiligen Lernprozesse.

Literatur

Bauersfeld, H., Bussmann, H., Krummheuer, G., Lorenz, J. H.& Voigt, J. (1983): Lernen und Lehren von Mathematik. Köln: Aulis Verlag. Band 6, S.1-57

Duit, R. (2009). *Students' and teachers' conceptions and science education*. Bibliography-STCSE. http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html.

Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Funktioniert's? – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*. Heft 2

Kircher, E., Girwidz, R, Häußler, P. (Hrsg.) (2009): *Physikdidaktik – Theorie und Praxis*. Heidelberg: Springer Verlag. 2. Auflage, S. 615 ff

Müller, R., Wodziniski R. & Hopf, M. (Hrsg.) (2007). *Schülervorstellungen in der Physik*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Peterßen, W. H. (2000). *Fächerverbindender Unterricht*. München: Oldenbourg.

Prediger, S.& Wittmann, G. (2009): Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich*? Praxis der Mathematik in der Schule*. Heft 27

Witzke, I. (2015). *Fachdidaktischverbindendes Lehren und Lernen im MINT-Bereich*. Tagungsband der 49. Jahrestagung der GDM

Nils Manuel KRAUSE, Halle (Saale)

Thesen und Ansätze zu mathematischen Facharbeiten

1. Mathematikfacharbeiten

In Deutschland und anderen europäischen Ländern wurde eingeführt, dass Schülerinnen und Schüler vor Erreichen der Hochschulreife eine längere, eigenständig verfasste wissenschaftspropädeutische Arbeit schreiben. Meist sind solche Arbeiten etwa 10-15 Seiten lang und enthalten zum Beispiel Fußnoten und Literaturverzeichnis. Somit ähneln sie den Hausarbeiten in vielen Studiengängen. Für diese wissenschaftspropädeutischen Arbeiten gibt es ganz unterschiedliche Formate und Begriffe, wie *Profilarbeit* in den Niederlanden (niederländisch: *profielwerkstuk)* oder *Maturaarbeit* in der Schweiz. In Deutschland schreiben die Abiturientinnen und Abiturienten mancherorts eine *Facharbeit* und erhalten parallel zum Fachunterricht Hilfestellungen durch einen zugeordneten Betreuer (zum Beispiel in Nordrhein-Westfalen oder Sachsen-Anhalt). In anderen Ländern (wie Niedersachsen und Thüringen) werden sogenannte *Seminarfacharbeiten* im Rahmen eines eigenständigen Seminarfachs erstellt und betreut. „*Facharbeit*" ist im Folgenden als Oberbegriff für die unterschiedlichen Bezeichnungen der wissenschaftspropädeutischen Arbeiten zu verstehen.

In der mathematikdidaktischen Forschung wird das Schreiben von Facharbeiten zu mathematischen Themen an verschiedenen Stellen gefordert (Reichel 1991, S. 66f.; Knechtel 2001, S. 67ff.; Meiringer 2010, S. 353). Empirische Forschungen zu dieser Thematik sind jedoch die Ausnahme. So gibt es lediglich partielle Informationen zum Anteil mathematischer Facharbeiten (Dettmers u.a. 2012, S. 257; Klembalski 2008, S. 522). Die Forderung nach mathematischen Facharbeiten wird meist nur mit den vermuteten positiven Effekten begründet. Eine Ausnahme stellt hier Meiringers Evaluationsstudie zur wissenschaftspropädeutischen Funktion von mathematischen Facharbeiten dar. Bezüglich der Wirkung von Facharbeiten auf das Mathematikbild gibt es bis jetzt keine Studien.

Im Rahmen der Forschungen zur Dissertation „Wissenschaftspropädeutik im Kontext vom Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe" (Krause 2014) wurde sich dieses Desiderats angenommen. Im vorliegenden Artikel werden – nach kurzer Skizze des methodischen Designs – die zentralen Schlussfolgerungen zum Umgang mit mathematischen Facharbeiten, die aus diesem Dissertationsprojekt hervorgegangen sind, vorgestellt und auf neuartige Weise pointiert begründet.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Untersuchungsdesign

Vor dem Hintergrund des beschriebenen Forschungsstands wurde sich für einen deskriptiv-explorativen Studienzuschnitt entschieden. Es wurde eine aus zwei Teilen bestehende Untersuchung in vier Bundesländern mit sich stark unterscheidenden kultusministeriellen Vorgaben bezüglich wissenschaftspropädeutischer Arbeiten (Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Sachsen-Anhalt und Thüringen) durchgeführt. Der erste Studienteil ist eine Fragebogenerhebung mit knapp 1000 Schülerinnen und Schülern. Hierbei ging es unter anderem darum, Aussagen über den Anteil mathematischer Facharbeiten treffen zu können. Der zweite Forschungsabschnitt – eine Fallstudie mit 17 Schülerinnen und Schülern, die eine mathematische Facharbeit schrieben – zielte darauf ab, den Prozess des Entstehens der wissenschaftspropädeutischen Arbeiten und deren Wirkungen nachvollziehen zu können. Bei dieser Fallstudie wurde eine Methodentriangulation (Fragebögen, Interviews, Inhaltsanalyse der Facharbeiten) durchgeführt.

Für beide Studienteile ist aufgrund des methodischen Designs ein Schluss auf die Grundgesamtheit nur bedingt möglich. In den Erhebungen zeigten sich jedoch deutliche Tendenzen. Insofern sind die Forschungsergebnisse als begründete Vermutungen zu verstehen, aus denen sich Thesen und Ansätze für den Umgang mit Mathematikfacharbeiten ableiten lassen.

3. Thesen

These 1: „Mathematikfacharbeiten sollten häufiger geschrieben werden“ (Krause 2014, S. 148)

Die Fragebogenerhebung ergab, dass unter den Befragten nur eine kleine Minderheit die Facharbeit zu einem mathematischen Thema geschrieben hat: Der Anteil mathematischer Arbeiten lag bei 25 von knapp 1100 (Mehrfachnennungen waren hier möglich). Thematische Zugänge aus anderen Schulfächern wie Biologie (181 Nennungen), Geschichte (160 Nennungen) und Sozialkunde/Politik (157 Nennungen) wurden viel häufiger gewählt. Dieses Ergebnis deckt sich mit den wenigen Forschungsresultaten, die es hierzu bereits gibt (Dettmers u.a. 2012, S. 257; Klembalski 2008, S. 522).

Gleichzeitig zeigte die Fallstudie positive Wirkungen der Facharbeiten zum Beispiel im Kontext der wissenschaftspropädeutischen Bildung und des Mathematikbild (hierfür wurde die Kategorisierung und Operationalisierung nach Grigutsch 1996 verwendet) auf. So ergab die Studie etwa, dass die Probanden schon zu Beginn ihrer Beschäftigung mit den Facharbeiten ein wünschenswerteres Mathematikbild haben als die Probanden der Vergleichsgruppe (Fragebogenbefragung mit knapp 1000 Gymnasiastinnen und Gymnasiasten). Nach Abgabe der Facharbeiten wird dieses Bild von Mathematik bestätigt und ausgebaut: Die Probanden haben zum Ende der Studie hohe Werte beim Anwendungs-, Prozess- und Formalismusaspekt und stimmen Items zum (rigiden) Schemaaspekt verhältnismäßig wenig zu. Auch in den Schülerzitaten aus den Interviews zeigten sich die positiven Effekte der Facharbeiten, wie im folgenden Ausschnitt deutlich wird: „Was ich durch die Facharbeit gemerkt habe ist, dass die praktische Anwendbarkeit [der Mathematik] auf jeden Fall gegeben ist".

Ferner zeigte sich, dass Mathematikfacharbeiten für ganz unterschiedliche Schülerinnen und Schüler (zum Beispiel im Hinblick auf die Schulnoten) leistbar sind. Alle Probanden gaben eine Facharbeit ab, die im Wesentlichen den Ansprüchen an solch ein Werk genügte. Kaum ein Fallstudienteilnehmer bereute, eine mathematische Facharbeit gewählt zu haben.

An die Forderung, dass mehr mathematische Facharbeiten in den Gymnasien geschrieben werden sollten, schließt sich These 2 unmittelbar an: „Es gibt Ansätze, die zur Erhöhung der Bedeutung von Mathematikfacharbeiten führen." (Krause 2014, S. 152)

Ein denkbarer Ansatz hierfür ist, verstärkt darauf zu achten, auch Schülerinnen für solche wissenschaftspropädeutischen Arbeiten zu motivieren. Sowohl im Rahmen der Fragebogenerhebung als auch in der Fallstudie schrieben deutlich mehr Jungen als Mädchen eine mathematische Facharbeit. Insofern liegt beim weiblichen Geschlecht in diesem Kontext das größte Entwicklungspotenzial vor.

Ganz andere Möglichkeiten, mehr Schülerinnen und Schüler für die Wahl einer Facharbeit zu einem mathematischen Thema zu motivieren, liegen in der Schaffung bestimmter Rahmenbedingungen. Fragebogenerhebung und Fallstudie legen den Schluss nahe, dass die jeweiligen Vorgaben auf kultusministerieller und einzelschulischer Ebene die Anzahl von Mathematikfacharbeiten beeinflussen. Die Studienresultate deuten darauf hin, dass das Angebot, mathematische Rahmenthemen für das Seminarfach (wie an einigen niedersächsischen Schulen) wählen zu können, den Anteil von Mathematikarbeiten genauso erhöht wie die Möglichkeit, die Facharbeitsnote im jeweiligen Schulfach einzubringen. Im Gegensatz dazu scheint die Thüringer Vorgabe, die Facharbeiten in Gruppen zu schreiben, eine besonders niedrigen Anteil mathematikbezogener Arbeiten nach sich zu ziehen.

Ein dritter Ansatz ist, den Schülerinnen und Schülern stärker die große Bandbreite von Themen und Zugängen für mathematische Facharbeiten zu verdeutlichen. Bei der Fragebogenerhebung zeigte sich, dass viele Gymnasiastinnen und Gymnasiasten mathematischen Facharbeiten vergleichsweise ablehnend gegenüber stehen. Sehr oft begründeten sie dies damit, dass sie sich die Herangehensweise an Themen und Ansätze für Mathematikfacharbeiten nicht vorstellen können. Diese Schülermeinung steht in deutlichen Widerspruch zu den Resultaten der Fallstudie, die aufzeigte, dass mathematische Zugangsweise und Themenwahl sehr variabel sind. Während sich manche Probanden mit mathematikdidaktischen Untersuchungen auseinandersetzten, schrieben andere ihre Arbeiten zur Darstellung mathematischer Inhalte, zum Problemlösen oder nutzten Mathematik als zentrales Handwerkszeug, um Erkenntnisse in anderen Feldern zu erzielen.

Weitere in der Dissertation „Wissenschaftspropädeutik im Kontext vom Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe" generierte Thesen lauten: „Eine individuelle Unterstützung der Schülerinnen und Schüler ist insbesondere beim Schreiben mathematischer Facharbeiten wichtig." „Die Zusammenarbeit von Schulen und Universitäten im Rahmen der Betreuung von Mathematikfacharbeiten ist sinnvoll." „Es wäre gut, wenn nach Verfassen der mathematischen Facharbeiten diese stärker vor der Öffentlichkeit präsentiert werden könnten." (jeweils: Krause 2014, S. 163)

Literatur

Dettmers, S., Lüdtke, O., Neumann, M. & Trautwein, M. (2010). Aspekte von Wissenschaftspropädeutik. In: G. Nagy, M. Neumann, O. Lüdtke & K. Maaz (Hrsg.), *Schulleistungen von Abiturienten: Die neu geordnete Oberstufe auf dem Prüfstand* (S. 243-266). Wiesbaden: VS

Meiringer, M. (2010). *Das W-Seminar „Codierungstheorie" als Chance für einen kompetenzorientierten, allgemeinbildenden Mathematikunterricht am Gymnasium*. Hildesheim: Franzbecker

Krause, N.M. (2014). *Wissenschaftspropädeutik im Kontext vom Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe. Facharbeiten als mathematikdidaktischer Ansatz für eine Öffnung des Mathematikunterrichts zur Verbesserung der Studierfähigkeit und zur Veränderung des Mathematikbilds*. Unveröffentlichte Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Klembalski, K. (2008). Seminarkurs Kryptografie – Zahlentheorie. In: E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008: Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik von 13.3.2008. bis 18.3.2008 in Budapest* (S. 519-522). Münster: WTM

Knechtel, H. (2001). Facharbeiten – neuer Bestandteil des Mathematikunterrichts. *mathematik lehren, 104*, S. 67-72.

Reichel, H.C. (1991). *Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht. Mit Anregungen für das Wahlpflichtfach.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg

Metaphern als Mittel zur Bewusstmachung von Einstellungen und Haltungen

1. Einordnung

Für die Qualität der Lehrerausbildung sind nicht nur kognitive oder inhaltliche Bedingungen relevant, sondern auch emotionale Faktoren wie z. B. Haltungen und Einstellungen – zum Fach, zum Berufsbild, zum eigenen Rollenverständnis. Diese werden nicht erst im oder durch das Lehramtsstudium geformt, sondern bereits weit früher grundgelegt. Und so ist bei vielen Erstsemestern das subjektive Gefühl nicht ungewöhnlich, dass man durchaus schon unterrichten könne, weil man auf vorliegende Erfahrungsmuster zurückgreifen könne (vgl. Andelfinger/ Voigt 1986).

Solche einschlägigen Einstellungen und Haltungen sind es wert, aufgedeckt und bewusst gemacht zu werden, weil sie relevante Einflussfaktoren für den Studienverlauf und die professionelle Kompetenz als Lehrperson darstellen. Der Reflexionsbedarf muss keineswegs bewusst sein, er ist daher aber um so wichtiger, v. a. wenn negative Erfahrungen (mit dem Fach, mit dem Fachunterricht, mit Fachlehrkräften) vorliegen sollten. »Überspitzt formuliert könnte man sagen: Erst wenn die tief verankerten Einstellungen explizit gemacht und reflektiert worden sind, kann eine effektive *inhaltliche* Lehrerbildung beginnen. De facto sollten natürlich beide Ebenen wechselseitig aufeinander bezogen verlaufen« (Krauthausen/Scherer 2004, S. 79). Zur Bewusstmachung sind unterschiedliche Maßnahmen denkbar.

– *»Die Mathematik und ich«* (Fiore 1999; Krauthausen/Scherer 2004)

Studierende verfassen einen Text zu folgenden Aspekten: Welche *Inhalte* der Mathematik mögen Sie, welche nicht? Welche *Personen* haben in Ihrem ›mathematischen Leben‹ eine positive Rolle gespielt, welche eine negative? Skizzieren Sie Ihre guten Erfahrungen in Mathematik und Ihre schlechten. In welcher Art von (Lern-)Umgebung, unter welchen Rahmenbedingungen lernen Sie am besten? Welche behindern Sie eher?

– *»Spontane Assoziationen«*

In meiner Erstsemester-Vorlesung zur Einführung in die Mathematikdidaktik erfrage ich seit einigen Jahren bei allen Studierenden eingangs eine spontane Assoziation (in Gestalt *eines einzigen* Substantivs, Adjektivs oder Verbs) zum Begriff Mathematik oder Mathematikunterricht. Dabei geben 20-45 % der Erstsemester (zu 80-85% ohne Unterrichtsfach Mathematik) hochgradig bedrohliche und angstbesetzte Assoziationen an. Ein Argument

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

also für die Lehrerausbildung, erkannte, diffuse oder unbewusste Einstellungen und Haltungen explizit zu thematisieren.

– *»Mathematik unterrichten ist wie …«*

Die folgende Aufgabenstellung (nach einer Idee aus einem Seminar von Neil Pateman/UH Manoa, Honolulu), eine Mischform aus den beiden vorgenannten, habe ich seit dem Sommersemester 2013 regelmäßig erprobt:

(a) Charakterisieren Sie in einem kurzen Text Ihren angestrebten Beruf – das Unterrichten von Mathematik – mit Hilfe einer Ihnen geeignet erscheinenden *Metapher*. Es sollen die Personen der Lernenden und Lehrenden vorkommen, auch Rahmenbedingungen wie Bildungsstandards, Schulbücher und anderes, das Ihnen in dem Zusammenhang relevant erscheint.

(b) Im Plenum werden die Metaphern vorgelesen: Überlegen Sie sich *eine* ›brennende Frage‹, die sie an die Autorin/den Autor der Metaphern richten möchten. Diskutieren Sie die dabei deutlich werdenden individuellen Vorstellungen, ›Weltbilder‹, Ansichten, … und nehmen Sie dabei auch die Beziehung zu Ihrem Studium und zu sich selbst als Lernende in den Blick.

2. Metaphern

Eine Metapher ist ein sprachliches Stilmittel der ›Redekunst‹ und wird bereits von Aristoteles definiert und beschrieben. Metaphorá (altgriech. *μεταφορά*) bedeutet wörtlich Übertragung, Übersetzung, hier: die Übertragung eines Wortes auf einen (anderen) Gegenstandsbereich/Gebrauchskontext. »Damit drückt die Metapher dreierlei aus: die Sache, die das Wort nach seinem ursprünglichen, allgemeinem Gebrauch bezeichnet; die Sache, die das Wort metaphorisch oder übertragen bezeichnet, und die Gemeinsamkeit, aufgrund derer die Metapher gebildet werden konnte« (Höffe 2009, S. 188). Eine Metapher ›funktioniert‹ nur dann, wenn sie – neben der Mindestanforderung der Angemessenheit (lt. Aristoteles: weder lächerlich noch zu erhaben zu sein; Flashar 2002, S. 925) – eine Beziehung zwischen den beiden Gebrauchskontexten (Herkunft/Ressource und Ziel) gewährleistet. »Das Interaktionsgeschehen zwischen beiden Bedeutungsträgern konstituiert erst den Effekt der Metapher« (Junge 2010, S. 270).

Eine Metapher ist nicht nur ein sprachliches Phänomen, sie hat auch eine kognitive und eine emotionale Dimension. Metaphern sind ein Mittel, um das Denken zu strukturieren, die Wahrnehmung zu orientieren und damit das Alltagshandeln zu beeinflussen, indem sie kommunikatives Aushandeln von Bedeutung ermöglichen und damit letztlich den Umgang mit komplexen (z. B. Lehr-Lern-)Situationen (Sucharowski 2010). »Metaphern stellen […] ›semantischen Handlungsraum‹, zur Verfügung. Und dieser semantische Handlungsraum erlaubt: a) Handlungsrichtungen vorzuschlagen, und b) sich selber durch den Einsatz der Metapher neu zu platzieren« (Junge 2010, S. 271), z. B. bzgl. des Verhältnisses zum Fach(-Unterricht).

Mit einem metaphorisch gebrauchten Begriff werden auch seine *Assoziationen* aus dem entlehnten Gebrauchskontext in den Zielkontext übertragen (Kasten 1999). Ein Vorteil der Metapher gegenüber nicht-metaphorischen Darstellungen ist ihre ›Distanzierungs-Option‹: Man betrachtet und beurteilt den Ursprungskontext aus einer emotional neutraleren und damit leichter explizierbaren Perspektive des Zielkontextes. Im Rahmen eines als kritisch empfundenen Kontextes (Mathematikangst) kann das als erleichternd erlebt werden, einer authentischeren Einschätzung zugute kommen und auch zu einer Reflexion über ansonsten eher bedrohlich wirkende Aspekte ermutigen oder befähigen.

3. Ausgewählte Ergebnisse

Bei den Erfahrungen mit der o. g. Aufgabe waren Kontexte dominant, in denen es um das Erlernen diverser Fertigkeiten ging (fliegen, jonglieren, fischen, kochen, schwimmen, tanzen, surfen etc.). Dabei war – im Kontrast zu Postulaten der Bildungsstandards – die starke Fertigkeitsorientierung sowie ein Verständnis von Lehren als ›Beibringen‹ in traditioneller Ausprägung dominant. Gleichfalls beliebt waren Zielbereiche, die eine Person in Leitungsfunktion mit ausgewiesener Expertise zeigten (Dirigent, Reiseleiterin, Architekt, Kapitän u. Ä.), sowie ›behütende‹, pflegende oder ›aufziehende‹ Kontexte (Mutter, Hirte, Gärtner, Bäcker, Tierpfleger o. Ä.).

Auffallend war die offensichtliche *Unbefangenheit* der Ausarbeitungen – ein Beleg für gelungene emotionale Distanzierung (s. o.) durch den metaphorischen Charakter der Aufgabenstellung, oder ein (noch) fehlendes Problembewusstsein? In jedem Fall ließen sich die Texte sehr produktiv nutzen. Gerade an solchen Stellen, wo vergleichsweise unbefangene Darlegungen besonders deutlich mit Postulaten eines professionellen Berufsbildes kontrastierten, führte dies zu produktiven ›Irritationen‹, wenn der semantische Handlungsraum aufgespannt und das Interaktionsgeschehen zwischen dem Ressourcen- und dem Zielbereich diskutiert wurde. Bei nahezu allen Texten lagen zahlreiche Anknüpfungs- und Verzweigungspunkte zu fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen theoretischen Konzepten, also Kernanliegen der Lehrerausbildung, auf der Hand.

4. Vertiefende Aktivitäten

Folgende Aktivtäten waren besonders fruchtbar für die Diskussion:

- Weitere Entsprechungen einer Metapher aufdecken (sie ausbauen): zu geläufigen Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht (= Ressourcebereich) Entsprechungen im metaphorischen Zielbereich suchen und umgekehrt: Details der Metapher benennen und nach möglichen Entsprechungen im Unterricht suchen
- Die Grenzen einer Metapher ausloten (wie weit trägt sie, wann entstehen Inkonsistenzen; was wäre, wenn …)
- Verbindungen identifizieren zu Vorstellungen, Erwartungen, Befürchtungen etc., die das eigene Lernen im Studiengang (Lehrveranstaltungen, Praktika etc.) wie auch das spätere Berufsfeld betreffen
- Als Tutor(in)/Lehrende(r) im argumentativen Diskurs *prinzipiell* die Gegenposition beziehen *(advocatus diaboli*). Dies kann – weil angekündigt und als ›Rolle‹ begründet – eine Diskussion spürbar entspannen und zugleich produktiv irritieren – die beste Voraussetzung, etwas wissen, klären, lernen zu wollen (vgl. Balhorn/Büchner 2005, 6).

Literatur

Andelfinger, B., Voigt, J. (1986). Vorführstunden und alltäglicher Mathematikunterricht. Zur Ausbildung von Referendaren im Fach Mathematik (SI/SII). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1*, 2-9.

Balhorn, H., Büchner, I. (2005). *Denkwege in die Rechtschreibung. Lehrerkommentar*. Hamburg: verlag für pädagogische medien

Fiore, G. (1999): Math-Abused Students: Are We Prepared to Teach Them? *The Mathematics Teacher, 5*, 403-406.

Flashar, H. (2002, Hg.). *Aristoteles – Rhetorik. Zweiter Halbband. Werke in deutscher Übersetzung*. Berlin: Akademie Verlag.

Höffe, O. (2009, Hg.) *Aristoteles – Poetik.* Berlin: Akademie Verlag.

Junge, M. (2010, Hg.): *Metaphern in Wissenskulturen*. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Kasten, I. (1999): Metaphern im Mathematikunterricht. In Neubrand, M. (Hg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. (277-280). Hildesheim: Franzbecker.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2004). Lernbiografien von Studierenden im Fach Mathematik und Folgerungen für die Lehrerbildung. In Krauthausen, G., Scherer, P. (Hrsg.), *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung* (S. 74-82). Donauwörth: Auer.

Krauthausen, G. (2015): Metaphern als Mittel zur Bewusstmachung von Einstellungen und Haltungen. In: Rink, R. (Hg.), *Von Guten Aufgaben bis Skizzen Zeichnen. Zum Sachrechnen im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 141-153). Hohengehren: Schneider

Sucharowski, W. (2010): Metaphern und die Unternehmenskommunikation. In Junge, M. (Hrsg.), *Metaphern in Wissenskulturen* (S. 87-107). Weinheim: Verlag für Sozialwissenschaften.

Janina KRAWITZ, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Wenn der Realitätsbezug zum Problem wird: „problematische" Aufgaben und multiple Lösungen in der Primarstufe

Die Fähigkeit, realitätsbezogene Aufgaben zu lösen, ist eine wichtige Kompetenz, die national und international große Beachtung gefunden hat und im Unterricht weltweit vermittelt werden soll. Empirische Studien zeigen jedoch, dass Schülerinnen und Schüler bei Modellierungsaufgaben häufig direkte Rechenoperationen mit den gegebenen Zahlen durchführen, ohne den in der Aufgabenstellung gegebenen Realkontext angemessen zu berücksichtigen (Verschaffel et al., 2000). In der vorliegenden Untersuchung wurde der Einfluss der Aufforderung, eine zweite Lösung zu offenen Modellierungsaufgaben zu erstellen, auf diese ausgeprägte Neigung von Dritt- und Viertklässler (N=75) analysiert. Exemplarisch wird das Lösungsverhalten von Lernenden beim Bearbeiten einer spezifischen Modellierungsaufgabe, die in der Forschung als eine der so genannten Problematic Problems bekannt ist, betrachtet.

Offene Aufgaben mit multiplen Lösungen und Problematic Problems

Da offene Aufgaben nur einen Teil der für die Lösung notwendigen Informationen enthalten, erfordert ihre Bearbeitung das Treffen von Annahmen. Problematic Problems sind besondere offene Aufgaben, in denen das Aufstellen der Modellannahmen problematisch ist (Verschaffel et al., 1997). Der in der Aufgabenstellung gegebene Realkontext muss ernst genommen und durchdacht werden. Seit den Neunzigern wurden solche Aufgaben in mehreren empirischen Studien untersucht. Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler länderübergreifend große Probleme haben, bei diesem Aufgabentyp realistische Lösungen zu erstellen. Ein Grund dafür ist die ausgeprägte Neigung von Lernenden, ihr Alltagswissen vom mathematischen Lösungsprozess zu entkoppeln (Verschaffel et al., 2000). Weder Hinweise auf die erhöhte Aufgabenschwierigkeit noch realistische Illustrationen zum in der Aufgabe beschriebenen Sachverhalt haben Einfluss auf die geringe Anzahl von realistischen Lösungen (Dewolf et al., 2014; Yoshida et al., 1997). Eine Ursache für diese starke Neigung, Realität zu missachten, kann der übermäßige Umgang mit „Standard Problems" im Mathematikunterricht sein (Verschaffel et al., 2000). Standard Problems sind Aufgaben, die durch die direkte Anwendung einer oder mehrerer arithmetischer Operationen der gegebenen Zahlen modelliert bzw. gelöst werden können. Demgegenüber ist bei Non-Standard Problems eine solche direkte Anwendung von Rechenoperationen mit den vorgegebenen Zahlen nicht zielführend.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Unterbestimmte oder offene Modellierungsaufgaben zählen demnach zu Non-Standard Problems, da Schülerinnen und Schüler auf ihr Weltwissen zurückgreifen müssen, um die benötigten Annahmen treffen zu können. Dafür muss der gegebene Realkontext verstanden werden. Beim Bearbeiten von Problematic Problems wird die Notwendigkeit Annahmen zu treffen, leicht übersehen.

Unterbestimmte Modellierungsaufgaben haben außerdem die Besonderheit, dass durch die Variation von Annahmen unterschiedliche Ergebnisse entwickelt werden können. In der Sekundarstufe I zeigte sich, dass die Entwicklung multipler Lösungen einen positiven Einfluss auf Leistungen und Metakognition hat (Schukajlow & Krug, in press). Für die Primarstufe fehlt es dazu bislang an empirischen Untersuchungen. Da sowohl die mathematischen wie auch metakognitiven Fähigkeiten im Verlauf der Grundschulzeit zunehmen (Kreutzer et al., 1975; Baumert & Köller, 1996), können Unterschiede zwischen den Klassenstufen der Primarstufe vermutet werden.

Forschungsfragen

Für die Untersuchung ergeben sich damit die folgenden Forschungsfragen:

1. Welche Unterschiede gibt es zwischen der dritten und der vierten Jahrgangsstufe beim Bearbeiten von Non-Standard Problems mit multiplen Lösungen?
    a) Welchen Einfluss hat die Jahrgangsstufe auf das Lösen von Non-Standard Problems?
    b) Gibt es zwischen den Jahrgangsstufen einen Unterschied bezüglich den Anzahlen richtiger erster und zweiter Lösung?
2. Wie wirkt sich die Aufforderung, eine zweite Lösung zu erstellen, auf die Lösungen von Problematic Problems aus?

Bezüglich der Forschungsfragen haben wir folgende Erwartungen:

Der mathematische und metakognitive Vorsprung der vierten Klassenstufe macht sich beim Lösen von Non-Standard Problems bemerkbar. Demnach müsste die vierte Klassenstufe sowohl in ihren Gesamtleistungen als auch spezifisch bei den zweiten Lösungen besser abschneiden.

Die Aufforderung, eine zweite Lösung zu erstellen, hat einen positiven Effekt auf die Entwicklung von realistischen Lösungen, da eine zweite Lösung ein stärkeres Durchdenken des Problems, bzw. Hineinversetzen in die Realsituation fordert.

Methode

Die Untersuchung wurde in vier Klassen (N=75) durchgeführt. Dabei handelte es sich um jeweils zwei Klassen der dritten (N=41) und vierten Jahrgangsstufe (N=34). Eingesetzt wurde ein 60-minütiger Test mit acht unterbestimmten, offenen Modellierungsaufgaben, darunter ein Problematic Problem. Zu jeder Aufgabe erhielten die Schülerinnen und Schüler die Aufforderung zwei Lösungen anzufertigen. Vorher wurde im Rahmen einer Instruktion erklärt, wie unterbestimmte Aufgaben durch das Treffen von Annahmen gelöst werden können.

Die Lösungen des Tests wurden dichotom kodiert und anschließend mittels des Raschmodells zweidimensional skaliert. Dabei bilden jeweils die ersten bzw. zweiten Lösungen eine Dimension. Beide Dimensionen weisen eine akzeptable Reliabilität auf. Aufbauend auf dieser Skalierung wurde eine Varianzanalyse über die latenten Schülerfähigkeiten durchgeführt, um Aufschluss über die möglichen Unterschiede zwischen der Dritten- und der Vierten Klassenstufe zu bekommen. Des Weiteren werden die Lösungsquoten des Problematic Problems näher betrachtet. Wirkungen der Aufforderung zur Erstellung zweier Lösungen auf die Aufgabenbearbeitung werden durch den Abgleich der empirischen und in den Literatur vorliegenden Lösungsquoten ermittelt. Abschließend werden die Lösungsquoten zwischen erster und zweiter Lösung verglichen.

Ergebnisse und Diskussion

Die Varianzanalyse mit den Faktoren „Jahrgangsstufe“ und „Lösungsnummer“ liefert einen signifikanten Unterschied zu Gunsten der vierten gegenüber der dritten Jahrgangsstufe (η^2=0.26; p<.05). Durch die Jahrgangsstufe wird somit 26 % der Varianz in Leistungen aufgeklärt, sodass ein großer Effekt dieses Faktors vorliegt. Hingegen wird die Interaktion zwischen der Klassenstufe und der Lösungsnummer nicht signifikant (η^2=0.02; p>.05). Die Vermutung, dass die vierte Klassenstufe speziell bei den zweiten Lösungen besser abschneidet kann also nicht bestätigt werden.

Spezieller zeigen die Lösungsquoten des Problematic Problems sowohl bei der ersten wie auch der zweiten Lösung deutlich höhere Werte als die in der Literatur genannten Zahlen [1. Lösung: 12 %; 2. Lösung: 16 %; Werte in der Literatur liegen zwischen 0 % und 8 % (Verschaffel et al., 2000)]. Dies ist ein möglicher Hinweis auf die Wirksamkeit des Treatments. Allerdings können die Unterschiede durch Stichprobeneffekte oder eine andere Kodierung entstanden sein. Auffällig ist außerdem, dass bei diesem Item die Lösungsquote der zweiten Lösung höher ist als die der ersten Lösung. Dieses Phänomen tritt bei keinem anderen Item des Tests auf. So haben acht Schülerinnen und Schüler (10,7 %), die bei ihrer ersten Lösung einen unrealistischen Lösungsweg gewählt haben, bei der zweiten Lösung unter Einbeziehung ihres Alltagswissens eine realistische Lösung entwickelt. Der umgekehrte Fall – die erste Lösung realistisch und die zweite Lösung unrealistisch – kam so gut wie nicht vor. Dies spricht dafür, dass durch das Anfertigen der zweiten Lösung ein stärkeres Durchdenken des Problems gefördert wurde. Um eine zweite Lösung zu erstellen, haben sich die Schülerinnen und Schüler stärker in die Realsituation hineinversetzt, was das Anfertigen realistischer Lösungen begünstigt hat.

Die vorgestellten Ergebnisse geben Hinweise darauf, dass die Aufforderung, eine zweite Lösung zu erstellen, einen positiven Effekt auf das Anfertigen realistischer Antworten hat. Diese These soll in Folgeuntersuchungen überprüft werden.

Literatur

Baumert, J., & Köller, O. (1996). Lernstrategien und schulische Leistungen. In J. Möller & O. Köller (Hrsg.), Emotionen, Kognitionen und Schulleistung (S. 137–154). Weinheim: Beltz, Psychologie-Verl.-Union.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2014). The Impact of Illustrations and Warnings on Solving Mathematical Word Problems Realistically. The Journal of Experimental Education, 82(1), 103–120.

Kreutzer, M., Leonard, C., & Flavell, J. (1975). An interview study of children's knowledge about memory. Monographs of the Society for Research in Child, 40, 1–60.

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (in press). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. Educational Studies in Mathematics.

Verschaffel, L., Corte, E. De, & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. Learning and Instruction, 7(4), 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & Corte, E. De. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? Learning and Instruction, 7(4), 329–338.

Miriam KRIEGER, Münster, Kathrin WINTER, Münster

Mathematische Beweiskompetenzen Studierender diagnostizieren und fördern – eine Bestandsaufnahme

Abstract

Mathematische Beweise bereiten vielen Studierenden große Schwierigkeiten. Bereits in den 70er Jahren wurden bei dieser Zielgruppe Untersuchungen durchgeführt und stehen auch aktuell wieder im Fokus vieler Studien (vgl. u. a. Schupp 1974, Platz et al. 2015). Auf bestehenden Erkenntnissen aufbauend wurden seit 2013 weitere Erhebungen mit Studierenden aus NRW durchgeführt. Die aktuellen Untersuchungen sind Bestandteile des Kooperationsprojektes eProof von Arbeitsgruppen der Universitäten Koblenz/Landau und Münster (ausführliche Informationen zum Projekt: http://e-proof.weebly.com/). Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse folgen aus dem Teilprojekt BeSser „Beweiskompetenzen Studierender systematisch erweitern“, welches an der WWU Münster verortet ist. Ziel dieser Untersuchungen ist es, auf Basis der empirischen Befunde typische Fehler und Schwierigkeiten beim mathematischen Beweisen herauszustellen und daraus resultierende Konsequenzen zu erörtern.

Mathematisches Beweisen und Beweiskompetenzen

Unter einem mathematischen Beweis wird der „Vorgang [verstanden], bei dem eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert wird.“ (Meyer 2007, S. 21) Es impliziert unterschiedliche Ziele wie das Erlernen des Verifizierens, Erklärens und Systematisierens und ebenso die Förderung von Kommunikationskompetenzen und des entdeckenden Lernens (vgl. u. a. Bell 1976). Um sich dem Begriff der Beweiskompetenz zu nähern und dessen vielfältige Facetten zu beleuchten, entstand auf Basis der Bildungsstandards in Nordrhein-Westfalen und den Erkenntnissen insbesondere von Brunner (2013), Boero (1999) und Bell (1976) eine Übersicht über die einzelnen Stufen und Säulen des Oberbegriffes „Beweiskompetenz“ (vgl. Abbildung). Insgesamt lassen sich drei verschiedene Stufen der Beweisführung unterscheiden, deren Komplexität mit zunehmender Stufe kontinuierlich zunimmt. Stufe 1 umfasst das Anwenden mathematischer Sätze und Begriffe bei einzelnen Berechnungen. Diese Sätze und Begriffe sind auf Stufe 2 und 3 Grundlage einfacher bzw. zunehmend komplexerer Argumentationen in mehreren Schritten. Nach Brunner (2013) lassen sich unter dem allgemeinen Begriff der Beweiskompetenz die Teilbereiche der „fachlichen Kompetenz“, der „Systematisierungs- und Vernetzungskompe-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

tenz“, der „Darstellungskompetenz“, der „Kommunikationskompetenz“ und der „Autonomie in der Beweisführung“ subsumieren. Diese bilden, wie in Abbildung 1 veranschaulicht, die Säulen einer fundierten Beweiskompetenz.

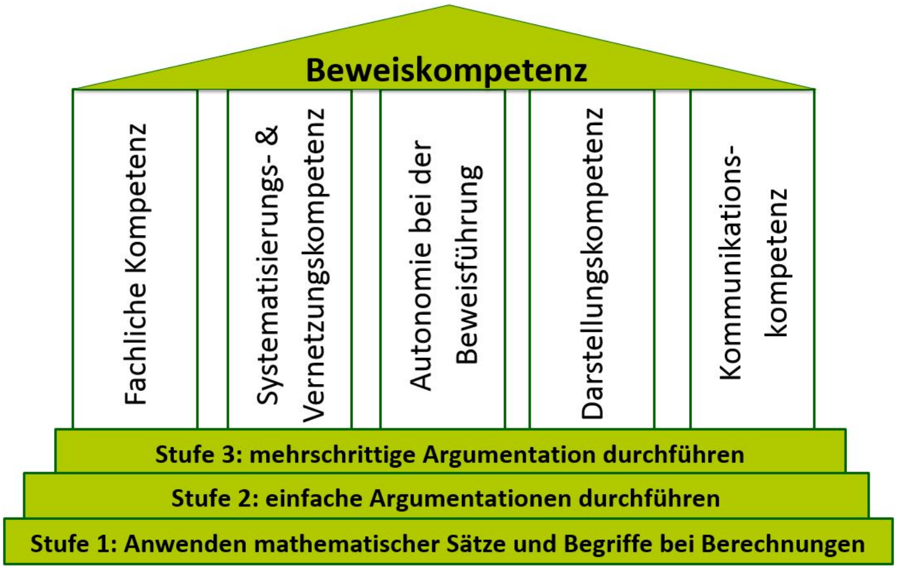


Abbildung 1: Haus der Beweiskompetenzen (in Anlehnung an Brunner 2013).

Untersuchungsdesign

Die Untersuchungen der Pretestphase sind sowohl qualitativ als auch quantitativ einzuordnen und beinhalten bspw. schriftliche Erhebungen an verschiedenen Hochschulen bei Studierenden, Befragungen Lehrender sowie Interviewstudien. Die Datenbasis für die nachfolgenden Analysen bilden insbesondere schriftlich erhobene Bearbeitungen von Beweisaufgaben bei insgesamt 326 Studierenden insbesondere aus Lehramtsstudiengängen.

Untersuchte Beweisaufgaben in der Pretestphase

1. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras. (In einem ebenen rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates)
2. Beweisen Sie: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl
3. Beweisen Sie: $\sqrt{4}$ ist eine rationale Zahl

Ergebnisse der Fehleranalysen

Eine Fehleranalyse im Bereich der Mathematikdidaktik zielt einerseits auf die Kategorisierung von Fehlern bzw. Fehlermustern und andererseits auf die Ursachenermittlung zu den einzelnen Fehlern bzw. Fehlermustern ab (vgl. Winter 2011). Im Rahmen explorativer Datenanalysen konnten auf Basis der bisherigen Erhebungen vertiefende Hypothesen zu Zusammenhängen zwischen bestimmten Fehlermustern und -ursachen beim Beweisen des Satzes des Pythagoras, der Rationalität von $\sqrt{4}$ und der Irrationalität von $\sqrt{2}$ durch Studierende entwickelt werden. Auf Grundlage dieser Zusammenhangsanalysen wurde eine erste Kategorienübersicht zu kausalen Zusammenhängen entwickelt, welche sich von den Begrifflichkeiten an ein Konzept von Prediger/Wittmann (2009) anlehnt. (vgl. Abbildung 2).

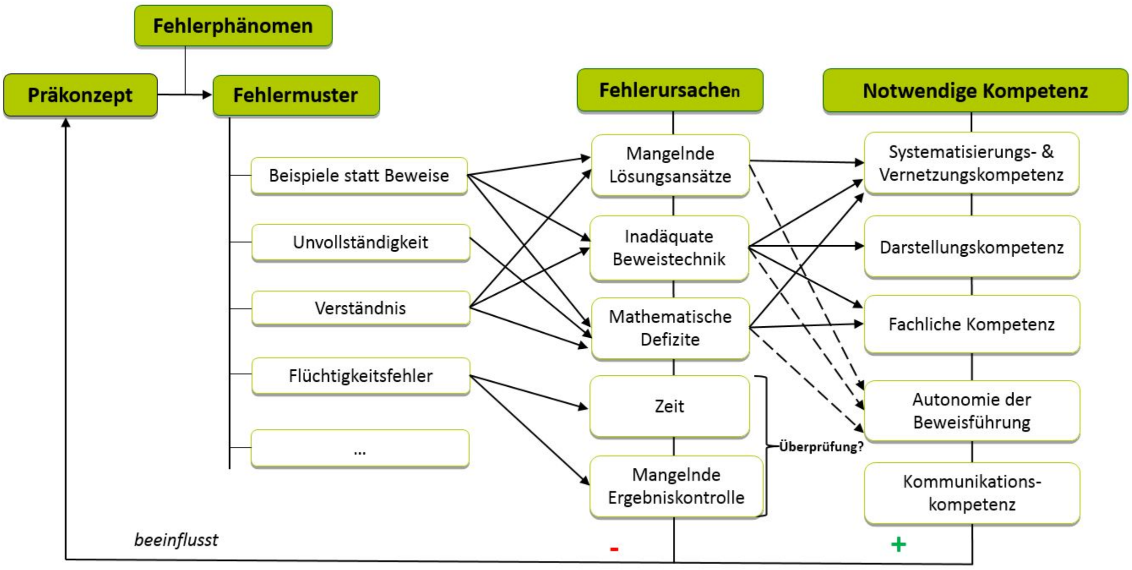


Abbildung 2: Ausschnitt aus dem Entwurf eines Kategorienschemas aufbauend auf Zusammenhangshypothesen zu Beweiskompetenzen.

Als Beispiel für die Kategorienbildung sei ein Fehlerphänomen mit dem Muster „Beispiele statt Beweise“ – Ursache „Inadäquate Beweistechnik“ einer Studentin aus dem 5. Fachsemester Lehramt GHR, Mathematisches Grundlagenstudium aufgezeigt (vgl. Abbildung 3).

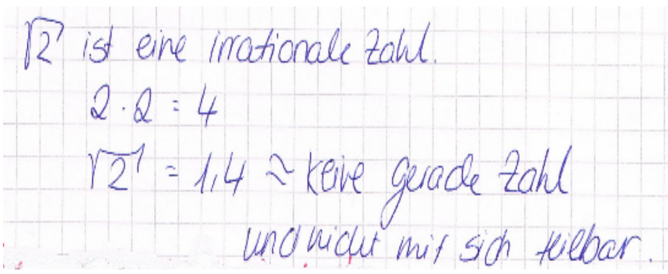


Abbildung 3: Fehlerphänomen zum Fehlermuster „Beispiele statt Beweise“.

Als gewinnbringend erwies sich zudem die Analyse der Probandenkommentare aus einer schriftlichen Erhebung sowie einer Interviewstudie im Sommersemester 2014 in Münster. So gaben die Studierenden bspw. folgende Kommentare: „Der Satz des Pythagoras ist mir ein geläufiger Begriff, jedoch fehlt mir zum Beweisen der Ansatz“ oder „Es hakt schon daran, dass ich nicht weiß, wie ich den Beweis anfangen soll“, die beide unter der Kategorie „Ansatz: Probanden benötigen eine Starthilfe bei der Beweisführung. Ohne diese kommen sie nicht weiter.“ geclustert wurden. Weitere Kategorien, die sich hierbei ergaben: Desinteresse, Mathematische Definitionen, Zeitspanne zur Schulzeit, Voraussetzungen, „Noch nie bewiesen“, Definition eines Beweises, mathematische Defizite.

Fazit und Ausblick

Das Führen mathematischer Beweise bereitet Studierenden aller Fachsemester und verschiedener Studiengänge nach wie vor Probleme. Im Projekt BeSser werden daher weitere Untersuchungen folgen, in denen bspw. das generierte Fehlerkategorienschema (vgl. Abbildung 2) weiter optimiert und die Zusammenhangsanalysen im Bereich der Fehleranalyse vertieft und validiert werden. Hierzu wurden in bisherigen Überlegungen bereits die Bereiche „Formalia“, „Fachwissen“, „Vorüberlegungen zum Beweis“, „Arbeitstechniken“, „Einstellungen“ und „Hilfestellungen während des Beweises“ herausgearbeitet, welche im Rahmen der Hauptuntersuchung noch näher spezifiziert und fachlich analysiert werden.

Literatur

Schupp, H. (1974): Untersuchungen und Überlegungen zum Stand des Beweisvermögens der Studienanfänger. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 37-42.

Bell, A. (1976): A Study of Pupil’s Proof-Explanations in Mathematical Situations. In: Educational Studies in Mathematics 7, S. 23-40.

Boero (1999). Argumentation and mathematical proof. A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.

Brunner, E. (2013). Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker

Platz, M., Krieger, M., Winter, K., Niehaus, E. Dahn, I. (2015): Beweisen lernen durch lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes. In diesem Band.

Prediger, S., Wittmann, G. (2009): „Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?“ Vorversion eines Artikels in PM Heft 27, Juni 2009, S. 4.

Brunner, E. (2013): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik.

Winter, K. (2011): „Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse.“ Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment.

Julian KRUMSDORF, Köln

Subjektive Theorien mathematisch Begabter

Was verstehen mathematisch Begabte unter »Begabung«? Welche Begabungsmerkmale und Bezugspersonen erachten sie zur Entfaltung mathematischer Begabung als wichtig? … Klären lassen sich solche Leitfragen in episodischen Interviews nach FLICK (2004) mit SII-SchülerInnen, indem man ihnen sowohl Erzählanlässe zur Darstellung ihres episodischen Wissens als auch Gelegenheiten zur Entwicklung ihres semantischen Wissens bietet. Dabei nennen sie einzelne Aspekte wissenschaftlich fundierter Begabungsmodelle.

„Begabung (…) ist die Fähigkeit, an bestimmte Sachen, anders eventuell heranzugehen, (…) damit auch eventuell anders mit ihnen umzugehen und so, auch eventuell zu ‘nem anderen Ergebnis zu kommen. (…) und ob man das unter Begabung definiert hat, ist gesellschaftsabhängig.“

„Grundausstattung, mit der man, an, Dinge, also das Leben allgemein, und speziell natürlich Probleme, äh, herangeht, und äh, womit man, dann versucht, die zu lösen .. und, je mehr Begabung man hat, desto einfacher, (…) ja, alle Arten von Problemen irgendwie zu lösen“

eingangs episodischer Interviews von SII-Schülern gegebene Begabungsdefinitionen

1. Begabungstheorien

Hinsichtlich des Begriffs der Begabung kann grundlegend zwischen Potenzial und Performanz (*potential and performance*) unterschieden werden. Dabei lässt sich Performanz als manifest gewordenes Potenzial verstehen. Beide Aspekte sind für einige Begabungsmodelle konstitutiv. Dies impliziert zum einen, dass auch sogenannte Minderleister (*underachiever*) als hochbegabt gelten, obwohl sie weniger Leistung zeigen, und zum anderen, dass »Begabung« auch als Prozess oder Entwicklung zu verstehen ist und damit eine handlungsorientierte Sichtweise eröffnen.

Die eigene Leitfadenkonzeption sieht die unvermittelt gestellte Eingangsfrage „Was ist das für Dich: »Begabung«?“ vor, eine Frage, die sich auch viele Begabungsforschende immer wieder stellen. In der Fachliteratur – so etwa in SCHICK (2008, 8f.) – finden sich einige Begabungsdefinitionen, die einen weiten Blick auf das Konstrukt »Begabung« erahnen lassen. Die genannte Autorin unterscheidet dabei zunächst zwischen IQ-, Prozentsatz-, Ex-post-facto-, Kreativitäts- und sozialen Definitionen. Alsdann bringt sie andere Definitionsklassen ins Spiel, so zum Beispiel genetisch, kognitiv, leistungs- und umweltorientierte Definitionen von »Begabung«. In diesen

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Definitionen lassen sich neben GARDNERS umstrittenen multiplen Intelligenzen detailreiche Begabungsmodelle wiederfinden, so etwa

- die Drei-Ringe-Konzeption nach RENZULLI (1978)
- das Triadische Interdependenzmodell nach MÖNKS (1987)
- das Triadische Komponentenmodell nach WIECZERKOWSKI & WAGNER (1985)
- die implizite pentagonale Begabungstheorie nach STERNBERG (1993)
- das differenzierte Begabungs- und Talentmodell nach GAGNÉ (1993)
- das Münchener Hochbegabungsmodell nach HELLER (2000)

worauf im einzelnen nicht eingegangen werden kann. Von Belang für diese Forschungsarbeit ist hauptsächlich gewesen, welche Theorien befragte SII-SchülerInnen selbst über »Begabung« entwickeln und in wie weit diese subjektiven Theorien in den gängigen Begabungstheorien aufscheinen.

2. Subjektive Theorien

Neben dem Verweis auf die vielfach englischsprachigen Arbeiten zur *beliefs*-Forschung lässt sich auf die eher klassische Definition Subjektiver Theorien (× i.e.S.) nach GROEBEN (1988) rekurrieren, begriffen als

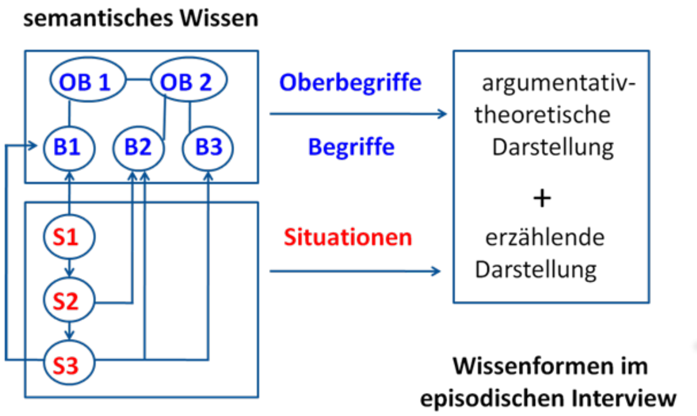
– „Kognitionen der Selbst- und Weltsicht
× die im Dialog-Konsens aktualisier- und rekonstruierbar sind
– als komplexes Aggregat mit (zumindest implizierter) Argumentationsstruktur
– das auch die zu objektiven (wissenschaftlichen) Theorien parallelen Funktionen
– der Erklärung, Prognose, Technologie erfüllt,
× deren Akzeptanz als ‚objektive' Erkenntnis zu prüfen ist."

(GROEBEN 1988, 19, 22)

Bei den »Subjektive Theorien« handelt es sich also zunächst um Denk-, Handlungs- und Wahrnehmungsweisen, die sowohl das Ich als auch die Welt als das Außer-Ich betreffen. Mit dem dritten Charakteristikum begreift der Autor »Subjektive Theorien« als „hierarchisch aufgebaute Begriffsnetze" (S. 18), welche gewisse Schlussfolgerungen erlauben, daher eine nicht weiter festgelegte Argumentationsstruktur ausbilden können. Dem vierten Charakteristikum nach liegen diese sogenannten Aggregate insofern parallel zu „‘objektiven' wissenschaftlichen Theorien". Bei der enger gefassten Definition (× i.e.S.) werden »Subjektive Theorien« im Dialog mit dem „Erkenntnis-Objekt" Mensch aktualisiert resp. rekonstruiert, um deren Angemessenheit überprüfen zu können und als Wissenschaftler insofern zu einer „objektive Erkenntnis“ gegenüber dem „Erkenntnis-Objekt“ Mensch zu gelangen.

3. Episodische Interviews

Zur Erhebung der subjektiven Theorien begabter SII-SchülerInnen über das Konstrukt »Begabung« eignen sich insbesondere episodische Interviews, welche den Befragten zum einen Erzählanlässe als auch Möglichkeiten zur argumentativ-theoretischen Darstellung ihres Wissen bieten. Das episodische Interview gilt als eine spezielle Form, ja als eine Weiterentwicklung des halbstandardisierten Interviews, welche sich zur Definition Subjektiver Theorien nach GROEBEN (1988) als kompatibel erwiesen hat und von einem Doppelcharakter aus episodischem und semantischem Wissen geprägt ist:



Wissenformen im episodischen Interview nach FLICK (2004², 159)

Die Befragung begabter SII-SchülerInnen über das Konstrukt »Begabung« hat sich an der allgemeinen Phasenstruktur episodischer Interviews nach FLICK (1997) orientiert und ist auf »Begabung« kontextualisiert worden:

Ph.	allgemein lt. Flick (1997)	kontextualisiert auf »Begabung«
1	*introducing the interview principle*	Einführung in das Prinzip episodischer Interviews
2	*the interviewee's concept of the issue*	Vorläufiges Begabungskonzept der Schüler
3	*the meaning of the issue for the interviewee's everyday life*	Bedeutung von Begabung im alltäglichen Leben
4	*focusing the central parts of the issue under study*	Fokussierung zentraler Begabungsaspekte
5	*more general topics referring to the issue under study*	Allgemeinere Aspekte von Begabung(sförderung)
6	*evaluation and small talk*	Evaluation und *small talk*
7	*Documentation*	Datenabfrage (z.B. Alter, Ge-schlecht, Klassenstufe)

Leitfragen für die kontextuell gebundenen episodischen Interviews waren:

1. Welches Begabungskonzept verfolgen (mathematisch) begabte Schüler?
2. Welche Bedeutung hat Begabung für den Alltag der begabten Schüler?
3. Welche Personen erachten begabte Schüler als Begabungsförderer?
4. Welche Begabungsmerkmale sehen begabte Schüler als zentral an?
5. Wie stehen Schüler zu allgemeinen Aspekten von Begabung(sförderung)?

Es wurden insgesamt 6 (von Seiten der kooperierenden Schule als überwiegend mathematisch hochbegabt eingestufte) SchülerInnen der Jahrgangsstufe 11 und 12 befragt. Die episodischen Interviews dauerten bis zu einer Stunde.

4. Ergebnisse

Die Transkription der Schülerinterviews nebst qualitativer Kategorisierung vermöge von Ankerbeispielen hat zu folgenden Ergebnissen geführt:

Kein Befragter formuliert eine geschlossene Theorie hinsichtlich des Begabungskonzepts. Die SchülerInnen bilden vielmehr unterschiedliche Aspekte von »Begabung« aus den gängigen Begabungsmodellen ab. »Begabung« wird häufig als eine Art Grundausstattung, Gabe oder Inventar besonderer Fähigkeiten gesehen, die domänenspezifisch eingesetzt werden. Dabei spielt Motivation bei der Entfaltung der »Begabung« eine wichtige Rolle.

Was die Werdegänge der SchülerInnen betrifft, so ist ein Bewusstwerden der eigenen »Begabung« häufig schon in der Grundschulzeit (Überspringen von Klassen, besondere Förderangebote) wahrnehmbar. Früh werden die SchülerInnen von ihren Erfolgserlebnisse und ihrer Ausrichtung auf Leistung und Gemeinschaft etwa bei den Veranstaltungen zur Begabtenförderung beeinflusst. Oft ist eine starke emotionale Verbundenheit zur Familie, zu den Fachlehrern und zu den Begabungsförderern anzutreffen. Dabei kommt es zu einer Ausprägung von individuellen Verhaltensweisen, wie mit ihrer jeweiligen »Begabung« umzugehen ist, und zu einer Reflexion über die Bedeutung von Kommunikation zur Entfaltung der »Begabung«. Umgangsweisen mit domänenbezogenen (Miss-)Erfolgen führen auch zur Selbstakzeptanz, zumal bei Differenzerfahrungen mit der sozialen Umwelt.

Literatur

Flick, U. (1997): The Episodic Interview. Small Scale Narratives as Approach to Relevant Experiences. www.lse.ac.uk/methodology/pdf/QualPapers/Flick-episodic.pdf

Flick, U. (2004²): Das halbstandardisierte Interview. In: Flick, U.: Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung. Rowohlt: Reinbek, S. 158 – 167.

Groeben, N., Wahl, D., Schlee, J. & Scheele, B. (1988): Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts. Francke Verlag: Tübingen.

Schick, H. (2008): Hochbegabung und Schule. Talentförderung, Expertiseentwicklung, Leistungsexzellenz Band 3. Lit Verlag Dr. W. Hopf: Berlin.

Ronja KÜRTEN, Gilbert GREEFRATH, Münster

Selbstwirksamkeitserwartungen angehender Ingenieurstudierender – Einflüsse von Vorkurs und Tests im Projekt Rechenbrücke

Ausgangslage

Etwa 31 % der Ingenieurstudierenden an Fachhochschulen (Abschlussjahrgang 2012) geben dieses Studium auf und studieren stattdessen ein anderes Fach oder verlassen die Hochschule. Zu diesem Ergebnis kommt das Deutsche Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung (früher: Hochschul-Informations-System HIS) (Heublein 2014, S. 501). Die Motive für einen Studienabbruch sind dabei vielfältig. Die Studie des HIS über die Ursachen eines Studienabbruchs aus dem Jahr 2010 bestimmt in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen der Fachhochschule neben finanziellen Problemen und zu hohen Leistungsanforderungen auch problematische Studienbedingungen und Prüfungsversagen als Faktoren für einen Studienabbruch (Heublein et al. 2010, S. 168). Ein weiterer Faktor für Studienerfolg ist die Selbstwirksamkeitserwartung (Schwarzer und Jerusalem 2002, S. 32f.), denn „Motivation, Gefühle und Handlungen von Menschen resultieren in stärkerem Maße daraus, woran sie glauben oder wovon sie überzeugt sind, und weniger daraus, was objektiv der Fall ist" (Bandura 1977). In diesem Beitrag soll daher die Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden am Übergang zur Fachhochschule in den Blick genommen werden.

Das Projekt Rechenbrücke

Das Projekt „Rechenbrücke" im Rahmen von „Wandel bewegt" der Fachhochschule Münster, gefördert vom BMBF, ist ein Kooperationsprojekt von fünf Fachbereichen der Ingenieurwissenschaften der Fachhochschule Münster und dem Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der Universität Münster. Im Rahmen des Projektes werden unterschiedliche Unterstützungsmaßnahmen im Bereich Mathematik für die angehenden Studierenden entwickelt, u. a. ein Mindestanforderungskatalog, ein modularisierter Vorkurs mit Mathematiktest und ein E-Learning-Angebot. Der Vorkurs umfasst zwölf Termine und behandelt, neben mathematischen Inhalten der Sekundarstufe I und II, eine Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten und metakognitive Strategien für das Studium.

Untersuchung der Selbstwirksamkeitserwartung

Selbstwirksamkeitserwartung kann definiert werden als die „subjektive Gewissheit, neue oder schwierige Situationen auf Grund eigener Kompe-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

tenz bewältigen zu können“ (Schwarzer & Jerusalem 2002, S. 35). Dabei können verschiedene Stufen der Allgemeinheit und dementsprechend verschiedene Selbstwirksamkeitserwartungen unterschieden werden (Bandura 1977, S. 194): Situationsspezifische Selbstwirksamkeitserwartung bezieht sich auf eine konkrete Handlung während allgemeine Selbstwirksamkeitserwartung eine Art „optimistische Einschätzung der generellen Lebensbewältigungskompetenz“ ist (Jerusalem & Schwarzer, 2002, S. 40). Für die Untersuchung von Selbstwirksamkeitserwartung an der Hochschule betrachten wir eine studienbezogene Selbstwirksamkeitserwartung, die als „Kompetenzüberzeugung, den Anforderungen des Studiums gewachsen zu sein“ (Alsmeier 2015, S. 42), definiert wird. Die vorgestellte Untersuchung zielt auf die Beantwortung der folgenden Forschungsfragen ab:

- „Wie entwickeln sich die [studienbezogenen] Selbstwirksamkeitserwartungen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern im Rahmen des Vorkurses?
- Welche Gründe spielen für die Entwicklung der Selbstwirksamkeitserwartungen […] eine Rolle?“ (Alsmeier 2015, S. 34)

Für die Untersuchung wurden leitfadengestützte Interviews mit Studierenden, die den Vorkurs besuchen, durchgeführt. Der Leitfaden umfasste Fragen zur Selbstwirksamkeitserwartung, zu Beliefs zur Mathematik und zur Wahrnehmung des Übergangs Schule-Hochschule. 23 Studierende wurden vor Beginn des Vorkurses interviewt und ca. sechs Wochen später zu Beginn des Semesters wurden neun dieser Probanden ein zweites Mal befragt. Die Auswahl der Studierenden für die zweite Befragung erfolgte nach einem qualitativen Stichprobenplan anhand der Ergebnisse in den Mathematiktests, die vor und nach dem Vorkurs durchgeführt wurden, sowie der Angaben im begleitenden statistischen Fragebogen.

Die Interviews wurden videografiert und für die Analyse transkribiert. Die Auswertung erfolgte mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2010). Die Veränderung der Selbstwirksamkeitserwartung wurde durch skalierende Strukturierung zu beiden Interviewzeitpunkten erfasst. Die Bewertung erfolgte dabei in den Unterkategorien „Allgemeine Überzeugungen, fachliche Überzeugungen Mathematik, fachliche, nicht-mathematische Überzeugungen (etwa Elektrotechnik), Überzeugung zum selbstregulativen Lernen, Umgang mit Herausforderungen, Umgang mit Widerständen, Attribution und soziale Modelle“ (Alsmeier 2015, S. 43). Die Gründe für die Veränderung wurden durch inhaltliche Strukturierung mit den Bewertungskategorien direkte Erfahrungen, verbale Überzeugungen, Form des Lehrangebots, soziale Einbindung, sozialer Vergleich (Alsmeier 2015, S. 101) erfasst. Die Auswertung der Interviews zeigte unterschiedliche Ergebnisse in den verschiedenen Dimensionen. Die allgemeinen Überzeugungen sowie fachliche nicht-mathematische Überzeugungen blieben über den Vorkurszeitraum hinweg konstant hoch (Alsmeier 2015, S. 48 f.).

Bei den Überzeugungen zum selbstregulativen Lernen (Lernstrategien, Überwindung von Hindernissen) sind vor Vorkursbeginn niedrige, mittlere und hohe Ausprägungen vorhanden im zweiten Interview hingegen überwiegen niedrige Überzeugungen: „Also bei mir ist es wirklich so, ich habe so viel vollgeplant in meinem Stundenplan, dass ich wirklich gucken muss, wo ich wie viele Stunden aufwende, damit ich nachher zum bestmöglichen Ergebnis komme. Was übrigens sau schwierig ist und ich richtig scheiße finde“ (Keno_t_2: 82). Gründe für die Veränderungen finden sich hier bei Problemen mit der Zeiteinteilung und dem Lehrstil an der Hochschule. Ähnlich sieht die Entwicklung der sozialen Modelle aus: Während zum ersten Interviewzeitpunkt die Einschätzungen überwiegend hoch waren, zeigt sich beim zweiten Interview eine mittlere Einschätzung beim Umgang mit sozialen Modellen (z.B. direkter Vergleich mit Kommilitonen: „Da sitzen ja eigentlich nur die Besten der Besten und deswegen ist es schwierig sich im Bezug zu denen einzuschätzen.“ (Keno_t_2: 98). Stärker fällt der Effekt bei der Attribution von Erfolg oder Misserfolg aus. Währen zum ersten Interviewzeitpunkt vorwiegend externale Misserfolgs- und internale Erfolgsattributionen vorlagen, im zweiten Interview wurden kaum Erfolgserlebnisse im Vorkurszeitraum berichtet und vorhandene Erfolge (z.B. im Nachtest) meist external attribuiert (Alsmeier 2015, S. 49 ff.).

Die mathematische Selbstwirksamkeitserwartung verhält sich ohne eindeutigen Zusammenhang zum Testergebnis bei je drei Studierenden steigend, konstant und fallend. Gründe für Verringerungen der mathematischen Selbstwirksamkeitserwartung lassen sich in der Attribution (s.o.) und der Vorhersage von Selektion durch Dozenten und Tutoren finden (Alsmeier 2015, S. 55 ff.).

Diskussion

Es konnten Veränderungen der fachlichen Überzeugungen Mathematik, Überzeugungen zum selbstregulativen Lernen, dem Umgang mit Widerständen sowie dem Umgang mit sozialen Modellen festgestellt werden. Schwierigkeiten mit dem Lehrstil, dem Umfang, der Zeiteinteilung und der Selbstmotivation traten ähnlich wie bei Rach und Heinze (2013) auf.

Kaum Veränderungen gab es in den Unterdimensionen der allgemeinen Überzeugungen sowie der fachlichen, nicht-mathematischen Überzeugungen. Hier handelt es sich offenbar um eine „überdauernde Persönlichkeitseigenschaft“ (Schwarzer und Jerusalem, 2002, S. 33). Des Weiteren können Erfolg ohne große Anstrengung zu einem labilen Bild der eigenen Kompetenz (Jerusalem, 1990) und die Vorhersage der Selektion (durch Dozierende, Tutoren) zu Verunsicherung führen (Blömeke, 2013).

Mögliche Maßnahmen in Projekt Rechenbrücke zur Förderung der Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden sind eine Umgestaltung der Tutorien um stärker Erfolgserlebnisse etwa durch moderierte Ergebnispräsentation und mehr Feed-Back durch Tutoren zu ermöglichen. Auch das stärkere Setzen von Nahzielen (Aufgabenblätter mit Feedback durch Lehrende, Schwarzer und Jerusalem 2002, S. 46) und die Förderung der Lernstrategien (Rach & Heinze 2013) sind Möglichkeiten zur Förderung der Selbstwirksamkeitserwartung .

Literatur

Alsmeier, J. (2015). Die Selbstwirksamkeitserwartung von Studienanfängerinnen und Studienanfängern – eine qualitative Untersuchung im Rahmen des Studienvorkurses Mathematik an der Fachhochschule Münster. Unveröffentlichte Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. In Psychological Review (2), S. 191–215.

Blömeke, S. (2013). Der Übergang von der Schule in die Hochschule - Empirische Erkenntnisse zur Aufnahme eines (Mathematik-) Studiums zur Bedeutung individueller und institutioneller Faktoren für die Kompetenzentwicklung. Vortrag auf der 2. KHDM -Arbeitstagung "Mathematik im Übergang Schule / Hochschule und im ersten Studienjahr". Paderborn, 20.02.2013.

Heublein, U. (2014). Student Drop-out from German Higher Education Institutions. European Journal of EDUCATION. Research, Development and Policy (4/2014). Oxford; Wiley Blackwell; S. 497-513.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., & Besuch, G. (2010). Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08. Hannover: HIS.

Jerusalem, M. (1990). Persönliche Ressourcen, Vulnerabilität und Streßerleben. Göttingen: Hogrefe.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11., aktual., überarb. Aufl. Weinheim: Beltz.

Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. In R. Biehler, S. Hußmann & P. Scherer (Hg.). Journal für Mathematik-Didaktik (34), S. 121–147.

Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (2002). Das Konzept der Selbstwirksamkeit. In: M. Jerusalem & D. Hopf (Hg.). Selbstwirksamkeit und Motivationsprozesse in Bildungsinstitutionen. Weinheim: Beltz (44), S. 28–53.

Stefanie KUHLEMANN, Oldenburg

Analyse mathematischer Schüleräußerungen durch zukünftige Lehrkräfte

Das Interpretieren von Schüleräußerungen wird als ein wichtiger Schritt des Diagnostizierens betrachtet und ist eine Voraussetzung dafür, Schülerinnen und Schüler gemäß ihrer individuellen Vorstellungen zu fördern und zu fordern. In einer qualitativen Studie haben zukünftige Mathematiklehrkräfte Aufgabenbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern analysiert und Rückmeldungen gegeben. In diesem Beitrag sollen Eigenschaften, welche sich in den Analyseprozessen zukünftiger Lehrkräfte zum Schülerdenken zeigen, beleuchtet werden.

Relevanz der Analyse von Schüleräußerungen

Für das Unterrichten von Mathematik werden prozessdiagnostische Fähigkeiten benötigt. Im Fokus dieser Studie steht eine Diagnose auf individueller Ebene, wobei es sich um eine personenspezifische diagnostische Situation mit individueller Förderung der Schülerinnen und Schüler handelt (Karst 2012). „Wenn es darum geht, Schülerinnen und Schüler individuell zu fördern, müssen Lehrpersonen verstehen, wie ihre Schülerinnen und Schüler mathematische Probleme lösen" (Rüede & Weber 2009, S. 819). Die Fähigkeit des Auseinandersetzens mit mathematischen Äußerungen von Schülerinnen und Schülern ist für die mathematikdidaktische Kompetenz von substanzieller Natur (Wollring 1999). Um das Verhalten der Schülerinnen und Schüler zu verstehen, bedarf es der Interpretation und Erklärung der mathematischen Äußerungen von Schülerinnen und Schülern und der Rekonstruktion möglicher zugrunde liegender Denkprozesse (Hasemann 1986). Dabei steht im Sinne einer prozessorientierten Diagnose die Strategie, welche bei der Bearbeitung einer Aufgabe verfolgt wurde, im Vordergrund (Wartha et al. 2008).

Wenn sich die Ideen und die Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler von Standardlösungen unterscheiden oder wenn es sich um originelle Lösungsansätze handelt, welche auch Fehlvorstellungen beinhalten können, stellt das Hineinversetzen der Lehrkräfte in individuelle Denkprozesse eine Herausforderung dar (Ball 1993). In diesen Fällen ist das Denken der Schülerinnen und Schüler nicht direkt ersichtlich oder leicht zu rekonstruieren, weshalb das Diagnostizieren in solchen Situationen als Problemlöseprozess beschrieben werden kann.

Ball et al. (2008) differenzieren das Lehrerwissen in verschiedene Wissensfacetten aus. Folgende Wissensfacetten können Einfluss auf die Analyse

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

von Schüleräußerungen haben: Das Common Content Knowledge (CCK) wird für die eigene Bearbeitung mathematischer Aufgaben benötigt sowie für die Beurteilung einer Schülerbearbeitung, um mögliche Fehler der Schülerinnen und Schüler zu identifizieren. Das Specialized Content Knowledge (SCK) beinhaltet das fachliche Wissen, das nur Lehrkräfte benötigen. Dazu zählen beispielsweise die Kenntnis mehrerer Strategien zum Lösen eines bestimmten Aufgabentyps, mehrere geeignete Darstellungsformen von bestimmten mathematischen Inhalten oder das Herausstellen von Ursachen für untypische Fehler. Das Knowledge of Content and Students (KCS) bezieht sich auf das Wissen über typische mathematische Konzepte, typische Fehler oder Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern.

Design der Studie

Der Fokus der Studie liegt auf der personenspezifischen diagnostischen Situation, welche die Rekonstruktion möglicher Gedankengänge sowie das Verfassen individueller Rückmeldungen durch zukünftige Lehrkräfte beinhaltet. Aus Gründen wie Reduktion der Komplexität der externen Einflüsse und der Ermöglichung einer tiefgründigen Analyse wurde eine Laborsituation gewählt. Im Unterrichtsgeschehen folgen viele Ereignisse in kurzer Zeit aufeinander bzw. geschehen parallel, sodass es der Lehrkraft nicht immer möglich ist, sich ausreichend Zeit für individuelle Schülerbearbeitungen zu nehmen. Es wurden drei verschiedene mathematische Problemlöseaufgaben und jeweils authentische Schüleraufgabenbearbeitungen für die Untersuchung herangezogen. Die Aufgaben bzw. Schülerbearbeitungen wurden so konzipiert, dass intensive mathematische Aktivitäten initiiert werden. Eine Stärke des Untersuchungsdesigns liegt in der Möglichkeit, die Analyseprozesse der Probandinnen und Probanden tiefgründig zu untersuchen.

Im Rahmen einer Studie wurden leitfadengestützte halbstandardisierte Einzelinterviews mit 19 Mathematikstudierenden des gymnasialen Lehramts, welche sich am Ende ihrer universitären Ausbildung befanden, durchgeführt und videographiert. Die Studierenden sollten die Problemlöseaufgaben ohne eine zeitliche Beschränkung schriftlich bearbeiten und im unmittelbaren Anschluss daran eine Schülerbearbeitung zu derselben Aufgabe analysieren. Sie wurden in dem Interview aufgefordert mögliche Gedankengänge zu rekonstruieren, die der Aufgabenbearbeitung zugrunde liegen könnten, und individuelle Rückmeldungen bzw. Hilfestellungen zu den jeweiligen Aufgabenbearbeitungen zu geben.

Eigenschaften der Analyseprozesse

Das Datenmaterial wurde mittels induktiv gebildeter Kategorien analysiert. Nach einem Fallvergleich wurden auf Grundlage einer Gruppierung ähnlich beschaffener Ausschnitte der Analyseprozesse Eigenschaften dieser Analysen herausgearbeitet. Diese Eigenschaften der Analyseprozesse lassen sich grob in die Kategorien rechenbetonte Orientierung und konzeptuelle Orientierung einteilen.

Rechenbetonte Orientierung: Im Rahmen der rechenbetonten Orientierung werden Äußerungen einer Schülerin oder eines Schülers isoliert betrachtet, einzelne Rechnungen nachvollzogen oder die in den Schüleräußerungen vermuteten Rechnungen bewertet. In dieser Orientierung finden sich Eigenschaften der formalen Perspektive aus dem Kategoriensystem von Rüede & Weber (2012) wieder.

Konzeptuelle Orientierung: Diese Orientierung lässt sich dadurch charakterisieren, dass Zusammenhänge zwischen Äußerungen betrachtet oder mögliche Prinzipien ausgemacht werden, welche hinter Äußerungen vermutet werden.

Im Folgenden werden die Eigenschaften der konzeptuellen Orientierung genauer erläutert, indem Unterkategorien dieser Orientierung dargestellt werden. Die Unterkategorien lassen sich nicht strikt voneinander trennen, sondern haben durchaus Überschneidungen.

- *Innere Logik der Schülerbearbeitung*: Unter dieser Kategorie werden Aspekte aufgefasst wie das Betrachten der Schülerbearbeitung als Ganzes und das Suchen nach invarianten Beziehungen, das Betrachten jeder invarianten Beziehung als Schema, das Vermuten einer Lösungsidee, das Ableiten von Schlussfolgerungen, das Herleiten eines allgemeinen Musters aus vielen Facetten oder eines allgemeinen Zusammenhangs sowie das Hineinsehen oder Schaffen einer Struktur.
- *Metakognitive Orientierung*: Die metakognitive Orientierung beinhaltet das Nennen von eigenen Verständnisdefiziten, eine Selbstüberwachung aus Schülerperspektive oder eine Überprüfung, ob die Lösungsidee zielführend ist.
- *Fehler*: Unter diesen Aspekt fallen das Entdecken von Unstimmigkeiten, das Deuten von Fehlern, das Erfassen von Fehlermustern mit eigenen Darstellungsmitteln, das Vermuten von Fehlerursachen oder das Einordnen von Fehlern (Flüchtigkeitsfehler, systematischer Fehler).
- *Vorstellungen/Fehlvorstellungen*: In dieser Kategorie werden aus systematischen Fehlern Fehlvorstellungen hergeleitet oder aus vielen Facetten

ein allgemeines Muster oder ein allgemeiner Zusammenhang hergeleitet sowie das allen Gemeinsame, Muster oder Zusammenhänge mit spezifischen Darstellungsmitteln erfasst.

- *Überprüfung der Fehlerhypothese*: In dieser Orientierung werden Schlussfolgerungen hergeleitet, die Schülerbearbeitung wird als Ganzes betrachtet und anschließend werden gezielt Teiläußerungen fokussiert.

Fazit

Auf der bisherigen Datenbasis konnten Eigenschaften von Analyseprozessen aufgezeigt werden. Generell lässt sich feststellen, dass einige Probandinnen und Probanden in der rechenbetonten Orientierung verbleiben, andere wechseln in eine konzeptuelle Orientierung oder wechseln häufiger zwischen diesen beiden Orientierungen. Es zeigen sich dabei Unterschiede in der Tiefenstruktur der Analyse. Bei vielen Probandinnen und Probanden verlaufen die Analyseprozesse vom Wahrnehmen über das Schematisieren hin zum Erfassen und viele haben das Anliegen, aus einzelnen Äußerungen ein Beziehungsnetz zu erstellen.

Literatur

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 371-397.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Hasemann, K. (1986). *Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen.* Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Karst, K. (2012). *Kompetenzmodellierung des diagnostischen Urteils von Grundschullehrern.* Münster: Waxmann.

Rüede, C. & Weber, C. (2009). Keine Diagnose ohne Auseinandersetzung mit Form, Inhalt und Hintergrund von Schülertexten. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 – Vorträge der 43.Tagung für Didaktik der Mathematik*, 819-822. Münster: WTM Verlag.

Rüede, C. & Weber, C. (2012). Schülerprotokolle aus unterschiedlichen Perspektiven lesen – eine explorative Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), 1-28.

Wartha, S., Rottmann, T. & Schipper, W. (2008). Wenn üben einfach nicht hilft. Prozessorientierte Diagnostik verschleppter Probleme aus der Grundschule. *Mathematik lehren*, 150, 20-25.

Wollring, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In C. Selter & G. Walther, *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann.* Stuttgart: Ernst Klett.

Jessica KUNSTELLER, Köln

Familienähnlichkeiten und ihre Bedeutungen im Sprachspiel „Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht“

In der mathematikdidaktischen Diskussion wird das Lernen von und durch Ähnlichkeitsbeziehungen - wenn auch mit verschiedenen Begrifflichkeiten und Ausprägungen (z.B. Brinkmann 2002, English & Sharry 1996, Sfard 2008) - vielfach akzentuiert. Hierbei wird betont, dass das Erkennen und Nutzen gewisser Ähnlichkeiten für das Lernen von Mathematik sinnvoll ist bzw. hierfür nutzbar sein kann. In diesem Beitrag soll unter Verwendung von Ludwig Wittgensteins (1889-1951) Begriff „Familienähnlichkeit“ eine Perspektive auf Lernprozesse aufgezeigt werden, indem „Beziehungen von Ähnlichkeiten“ fokussiert werden.

Der Begriff „Familienähnlichkeit“ nach L. Wittgenstein (1953)

In seiner Sprachspielphilosophie verwendet L. Wittgenstein den Begriff „Familienähnlichkeit“, den er zwar nicht definiert, aber an Beispielen, u. a. am Begriff „Zahl“, erläutert: „Und ebenso bilden z.B. die Zahlenarten eine Familie. Warum nennen wir etwas ‚Zahl’? Nun etwa, weil es eine - direkte -Verwandtschaft mit manchem hat, was man bisher Zahl genannt hat; [...].“ (PU §67)

Werden Zeichen wie „23“, „36 kg“ und „HS 2“ betrachtet, so wird deutlich, dass sie bzw. Teile derer als „Zahlen“ bezeichnet werden können. Die verschiedenen Zeichen weisen eine Ähnlichkeit nicht nur hinsichtlich ihrer Gestalt, sondern auch hinsichtlich ihrer Bezeichnungen auf. Weiterhin könnten einige dieser Zeichen als natürliche Zahlen aufgefasst bzw. in verschiedene Zahlaspekte untergliedert werden. Solche Ähnlichkeiten oder „Verwandtschaften“, die wir z. B. bei dem Begriff „Zahl“ sehen, bezeichnet Wittgenstein als Familienähnlichkeiten: „Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort ‚Familienähnlichkeiten’; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc. - Und ich werde sagen: die ‚Spiele‘ bilden eine Familie.“ (PU §67)

Spiele (wie z. B. Tennis und Schach) haben gleiche bzw. vergleichbare Eigenschaften, jedoch müssen nicht alle Eigenschaften identisch sein, um die Spiele als Spiele zu bezeichnen. Auch wenn nur eine einzelne Eigenschaft übereinstimmt, so sind es doch (Sprach-)Spiele: „[...] there is no fixed list of family characteristics, nor fixed number required for admission, nor sharp border for the individual characteristics themselves” (Hallet 1977,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

S.150). Familienähnlichkeiten können demnach als das Übereinstimmen von gewissen nicht näher definierbaren Eigenschaften gefasst werden.

Im Folgenden wird an einem empirischen Beispiel gezeigt, dass Ähnlichkeiten und welche Arten von Ähnlichkeiten in Lernprozessen realisiert werden. Die kurze Analyse kann durch die Lektüre von Kunsteller & Meyer (2014) vertieft werden. Insbesondere wird dort der Fokus auch auf das Nutzen von Ähnlichkeiten zwischen den Bearbeitungen verschiedener Aufgaben gelegt.

Empirie

In einem Unterrichtsversuch[1] wurde SchülerInnen einer vierten Klasse die folgende Darstellung gezeigt:

$$\begin{aligned}67148 &= 6\cdot\ 10000\ + 7\cdot\ 1000\ + 1\cdot\ 100\ + 48\\ &= 6\cdot(2500\cdot 4) + 7\cdot(250\cdot 4) + 1\cdot(25\cdot 4) + 48\\ &= 4\cdot(6\cdot 2500) + 4\cdot(7\cdot 250) + 4\cdot(25\cdot 1) + 48\end{aligned}$$

Die dazugehörige Aufgabenstellung war: „Formuliere anhand dieser Darstellung eine Regel dafür, wann sich eine beliebige Zahl durch 4 teilen lässt.“ Es werden nun diejenigen Regeln, die Mara und Rico im Kontext der Teilbarkeit durch 4 geäußert haben, auf Familienähnlichkeiten untersucht.

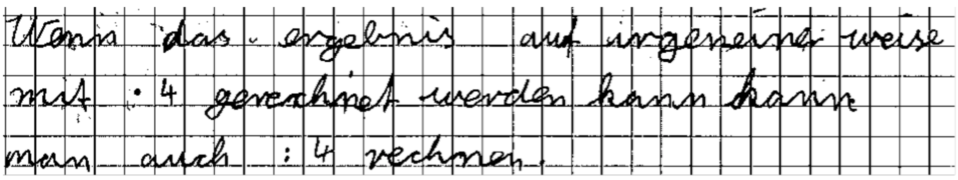


Abb. 1: Regel von Rico

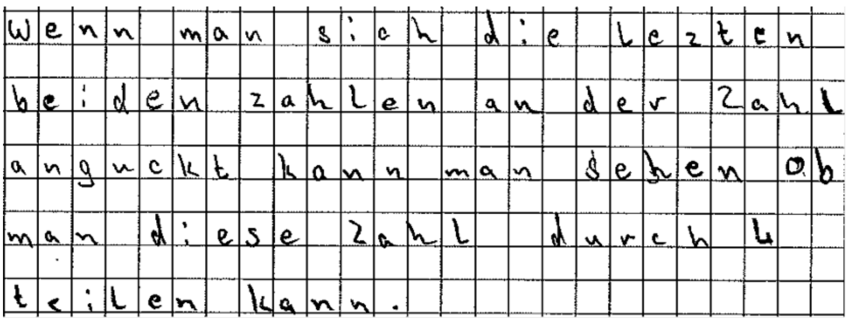


Abb. 2: Regel von Mara

[1] Aus forschungslogischer Sicht musste eine derart komplexe Aufgabe gewählt werden, um das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten auch zwischen verschiedenen Aufgaben fokussieren zu können. Diese Forschungsperspektive impliziert keine direkten Handlungsempfehlungen für den regulären Unterricht.

Beide Regeln weisen Ähnlichkeiten auf der semantischen Ebene auf, zumal die Regel von Rico zur finalen Begründung der Endstellenregel zur Teilbarkeit durch 4, hier in Ansätzen impliziert in der Regel von Mara, zusammenhängen. Weiterhin beschreiben sie die Teilbarkeit durch 4 – jeweils von einer anderen Perspektive bzw. einer anderen Richtung. „: 4 rechnen" (Rico) und „durch 4 teilen" (Mara) drücken eine ähnliche Bedeutung aus. (*Familien-)Ähnlichkeiten semantischer Art* beschreiben also die ähnlichen Bedeutungen von Wörtern im Sprachgebrauch.

Betrachtet man die schriftlichen Elemente, so können Ähnlichkeiten zwischen „durch 4", „: 4", „· 4" in den Regeln und in der vorgegebenen Darstellung ausgemacht werden. Sie beinhalten alle das Zeichen „4" und ähnliche Symbole bzw. Ausdrücke für Operationen. Im Kontext von solchen schriftlichen Elementen (Dokumente, Schulbuch, Tafelanschrieb) soll von *(Familien-)Ähnlichkeiten (schrift-)bildlicher Art* gesprochen werden. Sie beziehen sich auf Ähnlichkeiten zwischen ikonischen und symbolischen Elementen, ohne notwendig solche semantischer Art zu implizieren. Die Regeln von Rico und Mara wurden aufgeschrieben und in der Unterrichtsinteraktion verbalisiert, sodass aus der Nähe (schrift-)bildlicher Art auch eine solche phonetischer Art wurde. (*Familien-)Ähnlichkeiten phonetischer Art* bezeichnen Ähnlichkeiten zwischen den Lautbildern von Worten. So können z. B. Worthülsen oder -stämme ähnlich zueinander sein, wie etwa den Ausdrücken „teilen" und „teilbar" die Worthülse „teil" gemeinsam ist.

Weitere (Familien-)Ähnlichkeiten lassen sich auf der inferentiellen Ebene rekonstruieren, denn alle Regeln wurden im Kontext der gestellten Aufgabe entdeckt und lassen sich entsprechend der Theorie der Abduktion, als abduktiv gewonnene Gesetze rekonstruieren (s. Meyer 2007). Des Weiteren stellen die Regeln Kausalzusammenhänge dar und wurden in der Unterrichtssequenz zur finalen Begründung der Teilbarkeitsregel durch 4 verwendet. (*Familien-)Ähnlichkeiten inferentieller Art* lassen sich auch dann feststellen, wenn sich bspw. Begründungsstrukturen vergleichen lassen oder die funktionalen Bestandteile der Inferenzen (Schlussformen) einander ähneln.

Abschluss und Ausblick

Mit Wittgensteins Worten verdeutlichen die Kurzbetrachtungen der in diesem Beitrag thematischen Regeln ein komplexes „Netz von Ähnlichkeiten" (PU §66), welches Lernende realisieren. Mittels der verschiedenen Arten von (Familien-)Ähnlichkeiten lassen sich aus mathematikdidaktischer Sicht mündliche oder schriftliche Schüleräußerungen rekonstruieren bzw. die Rekonstruktionen von Inferenzen tiefergehend analysieren.

Der Fokus auf die verschiedenen (Familien-)Ähnlichkeiten ermöglicht zugleich die Orientierung von Verstehensprozessen, insofern Ähnlichkeiten in der mathematikdidaktischen Diskussion (s. Einleitung) eine bedeutsame Rolle zugewiesen wird. Die verschiedenen Kategorien ermöglichen weiterhin eine Strukturierung der in der obigen Parenthese angedeuteten Begriffsvielfalt. Mit Lorenz (1995, S. 99) lässt sich das Verwenden von Analogien als das Übertragen von Eigenschaften zwischen „zwei Arten [...] einer Gattung" verstehen. Hierbei werden vorhandene semantische Ähnlichkeiten zwischen den Arten genutzt und auf andere erweitert. Anders verhält es sich bei Metaphern (u. a. Sfard 2008), wie bei „Ast", bei denen die Ähnlichkeiten semantischer Art mit einer solchen phonetischer und/oder (schrift-)bildlicher Art einhergehen.

In weiteren empirischen Untersuchungen sollen, durch die Rekonstruktion empirischen Datenmaterials, die theoretischen Begriffe weiter ausgeschärft und womöglich erweitert werden. Insbesondere wird dabei der Analysefokus auf das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Aufgabenlösungen durch die Lernenden und somit die Perspektive auf das „Lernen durch Ähnlichkeiten" gelegt. Denn die hier nur in Ansätzen präsentierten (Familien-)Ähnlichkeiten beziehen Bedeutung darin, dass solche (Arten von) Ähnlichkeiten die nachfolgenden Äußerungen von SchülerInnen und somit Lernprozesse beeinflussen. Dies wird in weiteren Veröffentlichungen weiter ausgeführt.

Literatur

Brinkmann, A. (2002): Über Vernetzungen im Mathematikunterricht. Dissertation Universität Duisburg, Institut für Mathematik. Duisburger elektronische Texte.

English, L. & Sharry, P. (1996): Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics 30, S. 135-157.

Hallett, G. (1977): A Companion to Wittgenstein's Philosophical Investigations. Cornell UP: Ithaca.

Kunsteller, J. & Meyer, M. (2014): Zur Rolle von Familienähnlichkeiten bei der Einführung der Potenzfunktionen. In: Der Mathematikunterricht 60 (2), S. 50-57.

Lorenz, K. (1995): Analogieschluß. In: J. Mittelstraß (Hrsg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd. 1. Stuttgart: Metzler.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Franzbecker: Hildesheim.

Sfard, A. (2008): Thinking as communication. Cambridge UP: New York.

Wittgenstein, L. (1984): Werkausgabe 1. Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp: Frankfurt. (erstmals 1953 erschienen)

Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Expertisemerkmale von Mathematiklehrkräften und anforderungshaltige Situierungen - Fragen an Untersuchungsdesigns

Fachdidaktisch relevante Expertisemerkmale von Mathematiklehrkräften korrespondieren mit Praxisanforderungen des Lehrer(innen)berufs und können sich daher im Umgang mit konkreten Unterrichtsinhalten oder in Bezug auf Unterrichtssituationen artikulieren. Um Expertisemerkmale zu beschreiben, stehen nicht nur Fragen wie „Wie denken Expert(inn)en?“, „Was wissen sie?“, „Wie nehmen sie Kontexte ihres Berufsfeldes wahr?“, „Wie nutzen sie ihr Wissen?“, „Welche expert(inn)entypischen Sichtweisen / Überzeugungen sind zu erwarten?“ im Mittelpunkt, sondern auch normative Fragen wie „Was sollten sie aus theoretischen Gründen wissen / können?“ können von großer Bedeutung sein. Expertise kann sich beispielsweise beim Untersuchen von Vorstellungen von Lernenden, beim Vorbereiten und Gestalten von Lernumgebungen, bei der Analyse und Auswahl von Aufgaben, beim Handeln und Reagieren im Unterricht, beim Reflektieren pädagogischer Praxis, bei kriteriengestützter Awareness, oder bereichsbezogenem Noticing zeigen, dementsprechend bieten sich jeweils darauf gerichtete Situierungen zur Erhebung von Expertisemerkmalen an.

Eine Reihe von Forschungsansätzen orientiert sich an einer solchen Betrachtung professionstypischer Anforderungen. Beispielsweise beschreiben die Begriffe „professional vision“ (Sherin & van Es, 2009), „usable knowledge“ (Kersting et al., 2012), „noticing“ im Sinne von „selective attention“ (vgl. z.B. Seidel et al., 2013) oder von „knowledge-based reasoning“ (Sherin, 2007), sowie der Begriff der „Awareness“ (Mason, 2002) Expertisemerkmale, die sich unmittelbar auf Situierungen im Klassenraum beziehen. Diese Konstrukte verstehen sich dennoch auch in einer allgemeineren, über einzelne situative Kontexte hinausgehenden Form, was zu Herausforderungen in der entsprechenden Erhebungsmethodik von Studien führt, die diese Konstrukte untersuchen wollen.

Modelle wie das von Ball, Thames & Phelps (2008) oder von Baumert & Kunter (2006, S. 482) versuchen demgegenüber gleichsam einen Gesamtüberblick über bestimmte Expertisebereiche zu geben. Die hier erscheinenden wenig inhalts- oder situationsspezifischen Konstrukte haben offensichtlich eine deutliche Distanz zu konkreten Situierungen, was zu großen untersuchungsmethodischen Herausforderungen führt, sofern die Konstrukte mit Designs untersucht werden, die anforderungshaltige Situierungen nutzen. Das Modell von Komponenten professionellen Wissens von Kuntze (2012) unterscheidet im Vergleich zu diesen Modellen zwischen situations-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

und inhaltsübergreifenderen Komponenten professionellen Wissens auf der einen Seite im Vergleich zu inhaltsspezifischen oder sogar unterrichtssituationsbezogenen Komponenten professionellen Wissens auf der anderen Seite. Dies erleichtert bereits auf der theoretischen Ebene, die Interpretation empirischer Ergebnisse, die im Zusammenhang mit anforderungshaltigen Situierungen entstanden sind.

Insgesamt ist anzumerken, dass praxisrelevante Expertisemerkmale in aller Regel nicht völlig situierungsfrei erhoben werden können – ganz offensichtlich muss zumindest andeutungsweise ein Bezug zu irgendeiner expertiserelevanten Situation hergestellt werden. In der Art und Weise, in der dies erfolgt, ergeben sich allerdings viele „Freiheitsgrade". So eröffnet sich ein Entscheidungsspektrum zwischen der Nutzung authentischer Unterrichtssituationen mit relativ viel Kontextinformation einerseits und idealisierteren bzw. typisierten Situierungen mit teils ausgeblendeter Kontextinformation andererseits. Weitere Entscheidungen betreffen die

- Verwendung speziell hergestellter, „artifizieller" Vignetten vs. die Nutzung authentischen Materials
- Zielrichtung der Anforderung an die Befragten zwischen dem Untersuchen/Analysieren gegebenen Materials einerseits und dem Produzieren/Fortsetzen im Anschluss an gegebenes Material andererseits
- Rolle der Befragten zwischen Handlungssimulation bzw. einer Intervention einerseits und Reflexion bzw. Beobachterrolle andererseits
- Nutzung eigenen Unterrichts vs. fremden Unterrichts
- Wahl des Formats bzw. der Mediennutzung: Hier können beispielsweise Realhandlung, Video, Animation, Cartoon oder verschiedene Textformate (z.B. Transkript, narrativer Text) in Frage kommen
- Entscheidung, ob Die Befragung mit Zeitmessung bzw. Zeitdruck stattfinden soll
- verwendeten Frageformate (z.B. offen, Multiple-Choice, …)

Nicht zuletzt diese „Freiheitsgrade" situierter Erhebungsformate eröffnen Möglichkeiten der Konkretisierung, des Herstellens von Validität und damit die Chance, (abstraktere) Konstrukte mit konkreten Unterrichtssituationen zu verbinden, Möglichkeiten in Verbindung mit dem Verdeutlichen der Relevanz des Expertisemerkmals – dadurch, dass die Bedeutung bestimmter Konstrukte für die Unterrichtspraxis exemplifiziert werden kann – sowie Möglichkeiten der Fokussierung etwa auf die die Art, wie Lehrkräfte angesichts von Situationskontexten auf ihr Wissen zugreifen.

Umgekehrt ergeben sich für Untersuchungsdesigns jedoch auch Herausforderungen, beispielsweise im Zusammenhang mit der Validität der Situierungen für das untersuchte Konstrukt (wie gut gelingt es, das betrachtete Konstrukt in der situierten Erhebung abzubilden?), mit der Relevanz für das Expertisefeld (wie bedeutsam ist das durch das Erhebungsformat addressierbare Konstrukt für ein (oder mehrere) Expertisefeld(er)?), sowie im Zusammenhang mit der Generalisierbarkeit von den einzelnen Situierungen aus im Hinblick auf das zu untersuchende Konstrukt (inwiefern erlaubt es das Design, von den situiert erhobenen Daten auf ein übergreifenderes Konstrukt zu schließen?). Diese Möglichkeiten und Herausforderungen helfen, konkrete Studien zu diskutieren. Als Beispiele können etwa die in Abbildung 1 zusammengestellten Studien betrachtet werden. Die Erhebungsformate variieren bei diesen Studien von der Verwendung von Ausschnitten aus authentischen Unterichtsvideos über aufgabenbezogene Situierungen bis hin zu eher kontextinformationsarmen speziell konzipierten Textvignetten.

Studie	**Studie 1: Sichtweisen zu Unterrichtsqualitätsmerkmalen**	**Studie 2: Sichtweisen zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt**	**Studie 3: Sichtweisen zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch**
Quelle	(Kuntze, 2006, 2008)	(Kuntze & Zöttl, 2008; Kuntze, 2011)	(Schmailzl & Kuntze, 2009; Kuntze, 2009)
Konstrukt	Sichtweisen zu Unterrichtsgesprächsphasen (kleinschrittig fragend-entwickelnd vs. eher diskursiv) bezüglich der Qualitätsmerkmale kognitive Aktivierung, Argumentationsgehalt, Lernen an Fehlern	Sichtweisen zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt (Modell vorgegeben/eindeutige Lösung vs. substanzielles Modellierungserfordernis)	Sichtweisen (und Wissen) zum Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht
Expertise als...	positive Einschätzung zu diskursivem Unterrichtsgespräch	positive Wahrnehmung des Lernpotentials von Aufgaben mit Modellierungsgehalt	positive Sicht und Wissen zu Möglichkeiten, Fehler diskursiv aufzuarbeiten
Situierungsformat	Ausschnitte aus realen Unterrichtsvideos	Situierung an gegebenen Aufgaben zur Leitidee Messen in der Geometrie (Flächeninhalte)	artifizielle Textvignetten
Frageformat	offene und Multiple-Choice-Fragen	Multiple-Choice	offen (mit einleitender Multiple-Choice-Frage)

Abbildung 1: Kriteriengeleiteter Überblick über drei Beispielstudien

Die Passung zum jeweiligen Konstrukt wird mit Hilfe des Modells von Kuntze (2012) dadurch erleichtert, dass dort inhalts- und situationsbezogene Komponenten professionellen Wissens verortet und theoretisch eingeordnet werden können. Beispielsweise bilden die speziell entsprechend eines theoriebasierten Rasters konzipierten Vignetten in Studie 3 für die dortige Untersuchung eine wesentliche Brücke zwischen den betrachteten Konstrukten und den gewählten Situierungen. Eine detailreichere Diskussion der drei Studien und weiterer, insbesondere laufender Untersuchungen vor dem Hintergrund der eingangs skizzierten Überlegungen kann im Rahmen dieses Beitrags leider nicht erschöpfend geleistet werden – er kann dennoch dazu anregen, Bezüge zwischen Expertisemerkmalen und anforderungshaltigen Situierungen in Untersuchungen kritisch zu reflektieren.

Literatur

Ball, D., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9(4), 469-520.

Kersting, N., Givvin, K., Thompson, B., Santagata, R, & Stigler, J. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. Am. Educ. Research Journal, 49(3), 568-589.

Kuntze, S. (2006). Video technology in the assessment of an in-service teacher learning program – Differences in mathematics teachers' judgements on instructional quality. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 38(5), 413–2421.

Kuntze, S. (2008). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und situiert erhobenen unterrichtsbezogenen Kognitionen und Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. Unterrichtswissenschaft, 36(2), 167-192.

Kuntze, S. (2009). Mathematics teachers' views about dealing with mistakes in the classroom. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conf. of the IGPME, Vol. 3 (pp. 449-456). Thessaloniki, Greece: PME.

Kuntze, S. (2011). In-Service and Prospective Teachers' Views about Modelling Tasks in the Mathematics Classroom – Results of a Quantitative Empirical Study. In G. Kaiser et al. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (pp. 279-288) Dordrecht: Springer.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 273-292.

Kuntze, S. & Zöttl, L. (2008). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt. mathematica didactica, 31, 46-71.

Mason, J. (2002). Researching Your Own Practice. The Discipline of Noticing. London: Routledge Falmer.

Schmailzl, S. & Kuntze, S. (2009). Situationsbezogene und übergreifende Überzeugungen von Mathematiklehrkräften zum Lernen an Fehlern und zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch. BZMU 2009 (S. 847-850). Münster: WTM.

Seidel, T., Blomberg, G., & Renkl, A. (2013). Instructional strategies for using video in teacher education. Teaching and Teacher Education, 34, 56–65.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision. Journal of Teacher Education, 60(1), 20–37.

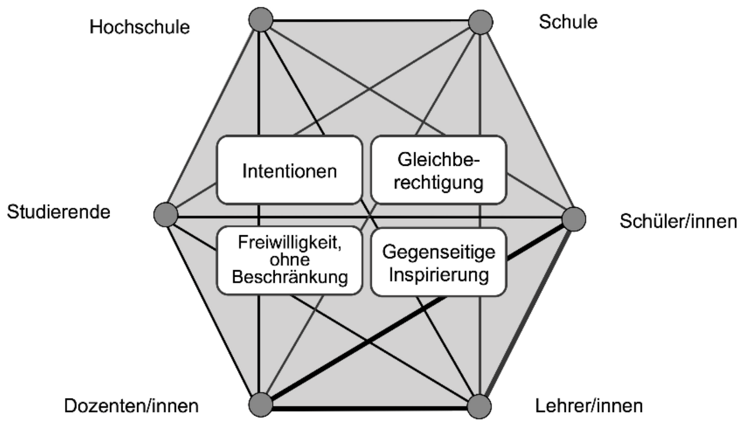
Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. In R. Goldman (Ed.), Video research in the learning sciences (pp. 383–395). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4–14.

Jenny KUROW, Halle (Saale)

Mathematik konkret im Tandem Schule - Hochschule

Das Konzept der Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich der Mathematik, wird seit dem letzten Jahrzehnt als ein Weg der Förderung von Schüler/innen besonders vorangetrieben (vgl. Vogt, S. 53). Ein interessanter Ansatz ist z.B. das Coaching im Fachunterricht (vgl. Hirt/Mattern). Hier soll aber die Zusammenarbeit zwischen Schülern/Schülerinnen, Lehrer/in und Dozent/in und insbesondere der Aspekt gegenseitig inspirierender Zusammenarbeit thematisiert werden.



Der nun vorgestellte Ansatz des Tandems Schule – Hochschule gliedert sich in ein Vernetzungskonzept beider mit dem Schwerpunkt der Förderung von mathematisch interessierten Schüler/innen ein. Angelehnt an Czerwanski ist die Vernetzung von Schule und Hochschule im Kontext des Mathematikunterrichts von vier Merkmalen gekennzeichnet: 1. Die Beteiligten orientieren sich am Forschungsgegenstand Mathematik. Die Zielsetzungen der Einzelnen können zunächst unterschiedlich sein. 2. Die Beteiligten agieren gleichberechtigt im Rahmen ihrer Vorkenntnisse und Möglichkeiten. 3. Die Teilnahme basiert auf Freiwilligkeit und ist ohne Zulassungsbeschränkung. 4. Die Beteiligten inspirieren sich gegenseitig. Der Begriff Tandem Schule – Hochschule beschreibt in diesem Zusammenhang das Treffen einer Lehrerin/eines Lehrers und einer Dozentin/eines Dozenten, um in gemeinsamer Arbeit und im gegenseitigen Austausch mathematisch interessierte Schüler/innen in eigenem forschend-entdeckendem Lernen zu fördern. Auf der Basis gemeinsamer Intentionen und Freiwilligkeit betont dieser Ansatz insbesondere die Prinzipien der Gleichberechtigung und der gegenseitigen Inspiration und rückt die Beziehung zwischen Lehrer/in und Dozent/in verstärkt in den Mittelpunkt.

Forschungsfragen

- Gelingt es im Tandem – Ansatz eine gegenseitige Inspiration von Schule und Hochschule zu erreichen?

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Was sind leistungsstarke Gelingensfaktoren?
- Wie lassen sich diese Gelingensfaktoren umsetzen? (Konsequenzen für Schule bzw. Hochschule)

Untersuchungsdesign

Ziel ist es dieses Vernetzungskonzept zu explorieren. Neben theoretischen Überlegungen soll eine Fallstudie helfen, Tendenzen zu erkennen. Diese besteht aus drei Teilschritten. Es beginnt mit von der Hochschule gestalteten „Mathematik-Forscher"-Arbeitsgemeinschaften (vgl. Kurow), wird fortgeführt mit der Durchführung der AGs im Tandem Schule – Hochschule und endet mit einer Lehrerfortbildung im Sinne einer Professionellen Lerngemeinschaft mit spezieller Orientierung. In dieser auf den Unterricht orientierten Phase, erfolgt die Gestaltung durch die Schulen, aber weiterhin im Forschungsaustausch mit der Hochschule.

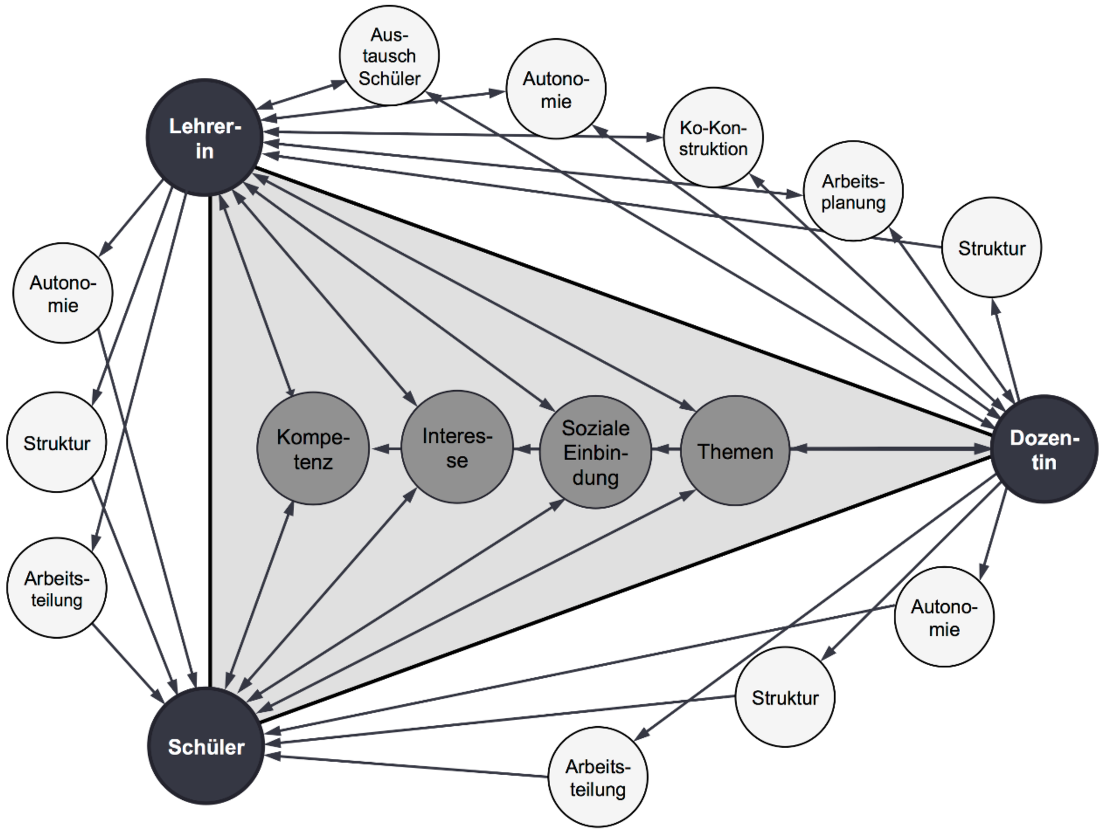
Die Untersuchung der Forschungsfragen zum Tandem – Ansatz erstreckte sich über das 2. Schulhalbjahr des Schuljahres 2013/14. Im Tandem Schule – Hochschule wurde gemeinsam, gleichberechtigt eine Mathematik-AG vorbereitet, durchgeführt und reflektiert. Gemeinsames Ziel war es, den Schüler/innen eine langfristige Möglichkeit zu geben, sich eigenständig und kreativ mit Mathematik auseinanderzusetzen. Methodische Grundlage bildete das forschend – entdeckende Lernen. Dies ging mit einer anderen Rollenverteilung einher. Die Lehrpersonen waren Teil des „Forscher"-Teams und leiteten dies nicht als Experte an. Die Teilnahme war für alle Beteiligten freiwillig.

Vor Beginn und nach Ende der Arbeitsgemeinschaft wurde die Lehrerin mit Hilfe eines Leitfadens interviewt. Am Ende des Schulhalbjahres wurden außerdem Interviews mit den Schülern/Schülerinnen der Arbeitsgemeinschaft durchgeführt. Weitere Auswertungsinstrumente waren die Videografie der Arbeitsgemeinschaft und die teilnehmende Beobachtung.

Ergebnisse: Aspekte der Kooperation im Tandem Schule – Hochschule

Eine qualitative Auswertung der Kooperationsaspekte ergab Folgendes: Es konnten vier Aspekte herausgestellt werden, die die gemeinsame Basis der Zusammenarbeit darstellen. Dies sind die Kompetenzunterstützung, das Interesse an der gemeinsamen Arbeit, die soziale Einbindung und die inhaltliche Anregung. Hier befanden sich <u>alle</u> Beteiligten in der Rolle des Gebenden und Nehmenden.

Neben diesen vier Kooperationsaspekten gab es weitere die in der Arbeitsgemeinschaft von Bedeutung waren, bei denen die Rollen erfahrungsbedingt nicht gleichverteilt sind. Hier sind die Autonomieunterstützung, die strukturierende Unterstützung und die Arbeitsteilung zu nennen.



Außerdem gab es weitere Aspekte, die nur zwischen der Lehrerin und der Dozentin insbesondere in den Vor- und Nachbereitungen von Bedeutung waren. Das war zum einen die strukturierende Unterstützung und zum anderen der schülerbezogene Austausch. Die gemeinsame Arbeit war zudem von der gemeinsamen Arbeitsplanung geprägt. Bedeutend war außerdem eine gewisse Autonomieunterstützung und die Ko–Konstruktion sowie Reflexion. Die Lehrerin und Dozentin tauschten sich in den innerschulischen Arbeitstreffen hinsichtlich der Förderung der Schüler/innen im Fach Mathematik aus und entwickelten dabei Problemlösungen.

Es konnten weiterhin verschiedene Wirkungen auf die Teilnehmenden identifiziert werden. Die Schüler/innen haben sich persönlich und fachlich weiterentwickelt. Einen wichtigen Effekt der Zusammenarbeit für sie bildete die Arbeitsform der Arbeitsgemeinschaft. Sie haben nun einen Ort zur kreativen Auseinandersetzung mit eigenen, für sie subjektiv wichtigen Problemstellungen gewonnen. Zudem entwickelten sie Freude an der neuen, anregenden Arbeitsweise und der Mathematik.

Auch die Lehrerin konnte sich persönlich und beruflich weiterentwickeln. Sie konnte mit Unterstützung neue Methoden kennenlernen und erproben und deren Stärken und Schwächen erkennen, ihren eigenen Unterricht hinsichtlich der Ziele, Methoden und Inhalte stark reflektiert. Durch die gemeinsame Arbeit und deren Ergebnis wurde sie nachhaltig für das Konzept aktiviert. Durch die gemeinsame Arbeit und die Unterstützung berichtet die Lehrerin zudem von einer Steigerung der Motivation. Außerdem ist der gewinnbringende Austausch zu nennen. Die gemeinsame Arbeit führte auch zu verstärkter Freude an der Arbeit, Freude durch das enorme Engagement der Schüler/innen und Freude durch die Anerkennung der Arbeit auch im Kollegium.

Ähnliche Effekte traten auch auf der Seite der Dozentin auf. Auch hier kam es zu einer persönlichen Weitenentwicklung, zu Bestärkung der Motivation und zum gewinnbringenden Austausch. Es gelang Ansätze aus der Mathematikdidaktik mit der Lehrerin ausführlich, offen zu diskutieren und gemeinsam an Ansätzen und Lösungen zur Förderung von Schülern/Schülerinnen zu arbeiten. Neue Ideen und Impulse konnten umgesetzt und reflektiert werden. Dies steht damit in direkter Beziehung zur beruflichen Weiterentwicklung. Auch hier trat der Effekt der Freude an der Arbeit durch die gemeinsame Tätigkeit auf. Bedeutend waren aber vor allem neue Forschungsimpulse durch die gemeinsame Arbeit.

Fazit und Ausblick

Ziel war eine Vernetzung aller Beteiligten im Sinne einer gegenseitigen Inspiration. Es konnte gezeigt werden, dass die Arbeit im Tandem eine aktive Beziehung zwischen Schüler/innen, Lehrer/in und Dozent/in ermöglicht. Es konnten einige Aspekte herausgestellt werden, die in der Zusammenarbeit von besonderer Bedeutung sind. Alle Erkenntnisse sollten in die Lehramtsausbildung einfließen, um den Studierenden neuartige, aktiv-kreativ anregende Einsichten für die eigene Tätigkeit zu eröffnen. Eine Möglichkeit diesen Ansatz in die Breite und den Unterricht zu tragen, kann Lehrerfortbildung, im Sinne einer Professionellen Lerngemeinschaft mit spezieller Orientierung, sein. Diese finden seit dem Schuljahr 2014/15 statt.

Literatur

Czerwanski, A. (2003). Netzwerke als Praxisgemeinschaften. In A. Czerwanski (Hrsg.), *Schulentwicklung durch Netzwerkarbeit.*(S. 9–18). Gütersloh: Bertelsmann Stiftung.

Hirt, U. & Mattern, K. (2014). *Coaching im Fachunterricht*. Weinheim Basel: Beltz.

Kurow, J. (2014). Mathematik und Musik: Schülerinnen und Schüler entdecken das Monochord – zur Vernetzung von Schule und Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 679–682). Münster: WTM.

Vogt, T. (2010). Schule + Hochschule = Netzwerkprojekt – Die Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematik-Vereinigung* , *18*, S. 53–54.

Ana KUZLE, Osnabrück

Metakognitive Prozesse beim mathematischen Problemlösen von Grundschulkindern erfassen

Empirische Ergebnisse zeigen, dass Metakognition Einfluss auf den Erfolg im Mathematikunterricht nehmen kann. Um Metakognition bewusst in den Unterricht einzubringen, ist es aber zunächst nötig zu wissen, wie Schülerinnen und Schüler beim Erlernen und Lösen mathematischer Sachverhalte gedanklich handeln. Im diesen Artikel stelle ich eine Technik zur Untersuchung angelehnt am Modell von Wilson und Clarke (2004) dar, anhand dessen das metakognitive Verhalten von Grundschulkindern beobachtet wurde.

1. Metakognition modellieren: Modell nach Wilson und Clarke

Wilson und Clarke (2004) benennen drei Funktionen der Metakognition: (1) Awareness, (2) Evaluation und (3) Regulation. (1) *Metakognitive Awareness* (Bewusstheit, Erkenntnis) steht in Beziehung zu der individuellen Kenntnis, wo sich ein Lernender im aktuellen Lernprozess, beziehungsweise Problemlöseprozess, befindet; (2) *Metakognitive Evaluation* (Bewertung, Einschätzung) umfasst die Einschätzung über den eigenen Denkprozess, aber auch die Einschätzung der Persönlichkeitsmerkmale, wie der Leistungsfähigkeit und der eigenen Einschränkungen, da diese in bestimmten Situationen den Lernprozess beeinflussen; (3) *Metakognitive Regulation* (Steuerung) geschieht wenn eine Person seine metakognitiven Fähigkeiten benutzt, um sein Wissen und sein Denken zu steuern. Die metakognitive Steuerung stützt sich auf das individuelle Wissen (über sich selbst und über Strategien, einschließlich wie und warum besondere Strategien verwendet werden) und benutzt die Führungskompetenz (wie die Planung, Selbstkorrektur, Zielsetzung), um den Gebrauch der eigenen kognitiven Ressourcen zu verbessern.

Wilson und Clarke (2004) haben eine Technik zur Untersuchung entwickelt, welche von ihnen als Multi-Method Interview bezeichnet wird, anhand dessen das metakognitive Verhalten von Schülerinnen und Schüler beobachtet werden kann. Diese Technik wurde dann bei Schülerinnen und Schülern aus der sechsten Klasse angewandt. Dies bedeutet, dass während der Rekonstruktion metakognitiver Prozesse Karten mit Statements zu den drei Teilaspekten der Metakognition genutzt werden. Zudem werden Karten aus dem Bereich der Kognition zur Verfügung gestellt, sowie freie, leere Karten zum Verfassen zusätzlicher Gedankenvorgänge bereitgelegt. Diese Karten liegen offen auf dem Tisch, so dass die Schülerinnen und Schüler

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

darauf zurückgreifen können, um ihren eigenen Denkprozess chronologisch darzulegen. Der Ablauf eines Interviews sah so aus, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer eine mathematische Problemlöseaufgabe erhielten, die sie dann, während sie gefilmt wurden lösten und die Unterstützungskarten in einen gedanklichen Ablauf brachten. Diese Video-Aufnahme haben sie anschließend noch einmal betrachtet, um eventuelle Fehler oder Unstimmigkeiten bei der Rekonstruktion des Ablaufs mit Hilfe der Karten zu finden und sie daraufhin neu zu sortieren. Zur Darstellung der Ergebnisse ihrer Untersuchung haben Wilson und Clarke (2004) außerdem ein Modell entwickelt, um die Strukturen der Metakognition und der Beziehungen zu kognitiven Handlungen zu veranschaulichen und eventuelle Muster in diesen darzulegen (siehe Abbildung 1).

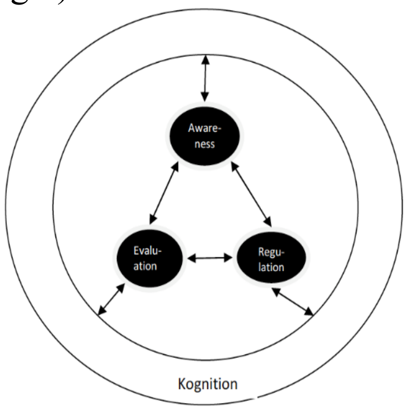


Abbildung 1. Struktur von Metakognition

2. Studie mit den Grundschulkindern

Im Folgenden soll der Aufbau der Untersuchung bezüglich metakognitiver Prozesse beim mathematischen Problemlösen von jeweils sechs Grundschulkindern in Klasse zwei und vier beim Bearbeiten von drei Problemlöseaufgaben dargestellt werden. Für jede dieser Aufgaben werden dreißig Minuten Bearbeitungs- und Besprechungszeit angesetzt, zuzüglich fünfzehn Minuten zur Vor-und Nachbereitung des Raumes und Materials. Die Einzelgespräche sind entsprechend der im vorigen Punkt genannten Studie von Wilson und Clarke (2004) so konzipiert, dass zunächst das Kind die Aufgabe erhält und löst. Anschließend werden die metakognitiven Prozesse und Strategien rekonstruiert, wobei für diese Untersuchung angepasste Unterstützungs- und freie Karten genutzt werden. Während der anschließenden Besprechung stellt sich die Unterstützung durch den Gesprächsleiter insofern dar, dass er in Zusammenarbeit mit dem Kind die metakognitiven Prozesse und Strategien anhand der Unterstützungs- und freien Karten rekonstruiert. Um die Rekonstruktion der metakognitiven Prozesse und Strategien während der Lösung der Aufgabe zu erleichtern, werden in Anlehnung an die oben genannte Studie von Wilson und Clarke (2004) Unterstützungskarten verwendet (siehe Abbildung 2). Diese sind in Bezug auf

Metakognition vor allem drei Bereichen zuzuordnen: Awareness, Evaluation und Regulation (siehe Tabelle 1).

Awareness Ich habe darüber nachgedacht, was ich schon alles weiß. Ich habe versucht mich daran zu erinnern, ob ich so eine Aufgabe vorher schon einmal gelöst habe. Ich habe über etwas nachgedacht, was mir bereits schon einmal geholfen hat. Ich dachte: „Ich weiß, was zu tun ist.“ Ich dachte: „So eine Aufgabe kenne ich bereits.“	**Evaluation** Ich habe darüber nachgedacht, ob das, was ich tue, funktioniert. Ich habe kontrolliert, was ich gemacht habe. Ich habe darüber nachgedacht, wie ich vorgegangen bin. Ich dachte: „Das schaffe ich nicht.“
Regulation Ich habe mir einen Plan (im Kopf) gemacht, um das Problem zu lösen. Ich habe über andere Möglichkeiten zur Lösung nachgedacht. Ich habe über meinen nächsten Schritt nachgedacht. Ich habe mein Vorgehen geändert.	**Allgemein** Ich habe eine Tabelle gemacht. Ich habe eine Zeichnung gemacht. Ich habe ein Bild gemalt.

Tabelle 1. Unterstützungskarten

Je nach Aufgabe gibt es zusätzlich verschiedene kognitive Unterstützungskarten, welche besonders die genutzten Strategien widerspiegeln.

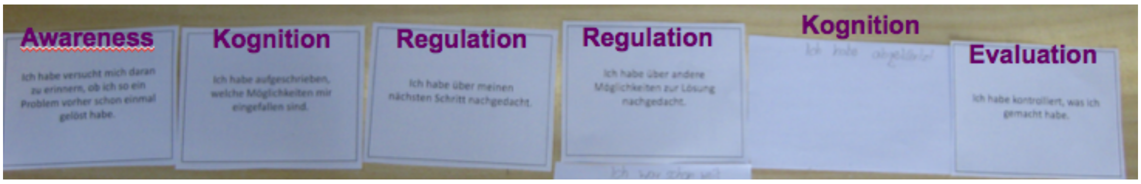


Abbildung 2. Rekonstruktion der metakognitiven Prozesse

Ausgehend von den oben genannten theoretischen Überlegungen waren folgende Forschungsfragen von Interesse:

- Welche metakognitiven Struktursequenzen lassen sich bei den Grundschulkindern identifizieren?
- Inwieweit lässt sich das Multi-Method-Interview (MMI) in der Grundschule umsetzten, um die metakognitiven Prozesse von Grundschulkindern zu erfassen?

3. Ergebnisse

Bezüglich der zu erwartenden metakognitiven Prozesse ist es schwierig, im

Vorhinein festzulegen, welche zu erwarten sind. Hierzu kann nur ein Idealverlauf dargestellt werden, welcher vermutlich mit Abstufungen in der Realität zu sehen sein wird. Im günstigsten Fall finden alle drei Komponenten der Metakognition statt und stehen in einer Wechselbeziehung zu kognitiven Aktivitäten. Nach Wilson und Clarke (2004) sind vor allem Reihenfolgen der Form A, E, R und A, R, E mit jeweils kognitiven Tätigkeiten zwischen den einzelnen Komponenten zu erwarten. Die empirischen Ergebnisse haben bereits diese Hypothese bestätigt, wobei diese waren oft in längeren Sequenzen eingebettet (z.B. A, A, E, K, E, R, K; A, A, A, K, E, R, E, R, K, K; A, K, R, R, K, K, E; A, R, K, K, K, E, E).

Darüber hinaus war zu beobachten, dass der Umfang der metakognitiven Prozesse von der zweiten zur vierten Klasse hin zunimmt, die Abfolgen waren allerdings bei den Zweitklässlern typischer als bei den Viertklässlern. Auch bezüglich der Metakognition konnten keine bestimmten Prozessabfolgen in Verbindung mit einer erfolgreichen Lösung der Aufgabe gebracht werden – sowohl längere, als auch kürzere Abfolgen haben zum korrekten Ergebnis geführt, genauso wie Folgen, die alle Komponenten der Metakognition enthielten, als auch welche, die nur zwei aufwiesen. Hierbei war auch nicht von Bedeutung, in welcher Reihenfolge diese auftraten.

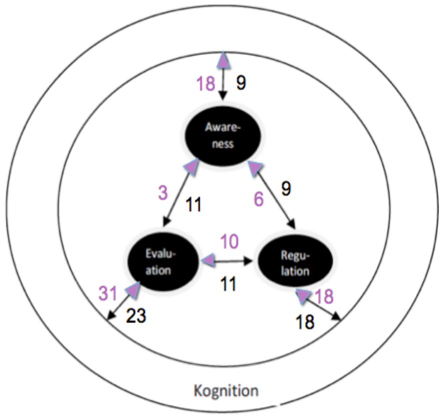


Abbildung 3. Modell der Metakognition und Kognition für die gesamte Stichprobe

Es gestaltete sich schwierig, die Denkprozesse der Kinder in der Besprechungsphase zu rekonstruieren. In der zweiten Klasse lag dies beispielsweise daran, dass die Gesprächsleiterin häufig die Aussagen der Unterstützungskarten vorlesen und kurz erläutern musste und die Kinder bei vielen Karten die Nutzung bejahten. Im Nachhinein ist aber fraglich, ob sie wirklich verstanden hatten, was gemeint war. In der vierten Klasse war dieses Phänomen zwar nicht so ausgeprägt, allerdings konnte bei der Analyse der Ergebnisse festgestellt werden, dass einige Denkprozesse untergegangen wurden. Wäre das Video noch einmal angeschaut worden, wäre dies zum einen für die Gesprächsleiterin offensichtlicher gewesen und zum anderen hätten die Kinder selber Lücken in ihrer Prozessabfolge entdecken können.

Literatur

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 25–48.

Claudia LACK, Wiesbaden

Qualität von Förderunterricht im Fach Mathematik in der Grundschule – Anspruch und Realität

1. Einleitung

Förderunterricht hat eine lange Tradition an Deutschlands Schulen. Ziel ist es, Schülerinnen und Schülern in besonderen Lernsituationen durch Unterstützungsmaßnahmen eine erfolgreiche Teilnahme am Regelunterricht zu ermöglichen. Dies lässt sich entweder binnendifferenzierend in Form von Doppelsteckungen von Lehrkräften oder durch außendifferenzierende Maßnahmen umsetzen (entweder parallel zum Regelunterricht oder zusätzlich in Randstunden). In der Praxis zeigt sich, dass die Schulen verstärkt in die Außendifferenzierung gehen und hierzu Förderstunden anbieten. Es stellt sich nun die Frage, welche Qualität Förderunterricht im Vergleich zum Regelunterricht aufweist und ob es angemessen ist, Förderunterricht vorrangig außendifferenzierend umzusetzen. Leider ist Förderunterricht in seinen verschiedenen Organisationsformen aus wissenschaftlicher Sicht ein wenig bearbeitetes Feld: „Eine empirisch bislang ungeklärte ist, welche Wirksamkeit die Maßnahmen ausweisen" (Arnold 2008, S. 388). Hier soll das Forschungsprojekt erste Aufschlüsse bringen.

2. Definition

Im Folgenden werden unter Förderunterricht ergänzende und zeitlich befristete schulische Maßnahmen verstanden, die Schülerinnen und Schüler planvoll und individuell dabei unterstützen sollen, erfolgreich den eigenen Lernprozess fortzusetzen. Diese Maßnahmen können sowohl in Form der Binnendifferenzierung als auch außendifferenzierend umgesetzt werden.

3. Chancen und Risiken der verschiedenen Organisationsformen

Setzt man Förderunterricht durch das Angebot von Förderstunden um, so ermöglicht man den betroffenen Schülerinnen und Schülern gegebenenfalls mehr Lernzeit (wenn die Stunden zusätzlich zum Regelunterricht angeboten werden). Außerdem können Kinder aus verschiedenen Klassen oder Jahrgängen zusammen genommen werden. Ziel ist die Bildung kleiner, möglichst homogener Lerngruppen, in denen Schülerinnen und Schüler mehr Zuwendung und gezielte Unterstützung erhalten. Hierin liegen jedoch verschiedene Risiken, wie z. B. die Stigmatisierung (vgl. Sandfuchs 2005, Burk 1993), der häufig programmatische Charakter der Angebote (vgl. Burk 1993, Lorenz 2003, Scherer/Moser Opitz 2010) und das oft passivistische Lernen (Seligman 1999). Setzt man Förderunterricht durch Doppelste-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ckungen um, so fällt das Risiko der Stigmatisierung weg. Es müssen außerdem keine neuen Lernsituationen kreiert werden und die Kinder können die aus dem Regelunterricht bekannte Hilfsmaterialien oder -strategien nutzen. Dementsprechend sind hier die Gefahren eines passivistisch ausgerichteten Unterrichts weniger hoch.

Es lässt sich feststellen, dass in der Diskussion um die Chancen und Risiken der verschiedenen Organisationsformen von Förderunterricht eine deutliche größere Zahl von Argumenten für die Nutzung von Doppelsteckungen spricht. Rein theoretisch kann also davon ausgegangen werden, dass hier eine höhere Unterrichtsqualität und damit verbunden ein größerer Erfolg der Maßnahme erzielt wird als durch das Angebot von Förderstunden. Da jedoch beide Organisationsformen faktische Vorteile gegenüber dem Regelunterricht bieten (kleinere Gruppen, mehr Lehrkraftressourcen), versprechen sie demnach beide eine bessere Unterrichtsqualität als Regelunterricht.

4. Hypothesen

Auf der Basis des dargestellten theoretischen Fundaments werden die folgenden Hypothesen aufgestellt:

Hypothese 1: Im Förderunterricht angeboten als zusätzliche Förderstunden zeigt sich eine höhere Unterrichtsqualität als im Regelunterricht, da äußere Bedingungen – insbesondere die Schüler-Lehrer-Relation und die reduzierte Heterogenität der Lernvoraussetzungen – die Umsetzung eines qualitativ hochwertigen Unterrichts erleichtern.

Hypothese 2: Unterricht mit Doppelsteckung weist eine höhere Unterrichtsqualität auf als der Regelunterricht, weil – bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen – die Schüler-Lehrer-Relation halbiert wird.

Hypothese 3: Unterricht mit Doppelsteckung ist dem herkömmlichen Förderunterricht überlegen, weil hier die Risikofaktoren des herkömmlichen Förderunterrichts kaum bestehen.

5. Die eigene Untersuchung

Der Studie liegen Unterrichtsbeobachtungsdaten der Hessischen Schulinspektion aus den Kalenderjahren 2011 bis 2014 zugrunde. Die Unterrichtsqualität wird über den Beobachtungsbogen der Hessischen Schulinspektion operationalisiert. Anhand des Bogens können die Organisationsformen Regelunterricht mit einer Lehrkraft, Regelunterricht mit mehreren Lehrkräften und Förderunterricht unterscheiden werden.

Aus den vorliegenden Daten wurde eine Stichprobe gezogen, die alle Unterrichtsbeobachtungen mit den folgenden Merkmalen einschließt: Mathe-

matikunterricht, Jahrgangsstufen 1 bis 4 an Grundschulen, festgelegte Lerngruppengrößen (zwischen 13 und 25 im Regelunterricht bzw. 2 und 12 im Förderunterricht), Organisationsform entweder Regelunterricht mit 1 Lehrkraft, Regelunterricht mit mind. 2 Lehrkräften (Doppelsteckung) oder Förderunterricht mit 1 Lehrkraft, mindestens zwei verschiedene Organisationsformen konnten im Mathematikunterricht an der betreffenden Schule beobachtet werden. Die resultierende Stichprobe setzt sich aus 767 Unterrichtsbeobachtungen an insgesamt 215 Grundschulen zusammen.
Zur Auswertung wurden einfaktorielle Varianzanalysen (multivariat für den globalen Effekt, univariat für die Einzeleffekte) mit dem Faktor „Organisationsform“ herangezogen, sowie für die Vergleiche der drei Gruppen auf Itemebene T-Tests für unabhängige Stichproben.

6. Interpretation der Ergebnisse

Hypothese 1 kann aufgrund der Ergebnisse verworfen werden. In keinem Item des Unterrichtsbeobachtungsbogens zeigt sich der Förderunterricht gegenüber dem Regelunterricht signifikant überlegen. Das Gegenteil ist eher der Fall: Im Förderunterricht wird in vielen Bereichen eine schwächere Unterrichtsqualität als im Regelunterricht deutlich (z. B. Anwendungsorientierung, Strukturierung, Zieltransparenz). Chancen zur Individualisierung, die sich aus der kleineren Lerngruppe ergeben, werden in diesem Sinne nicht genutzt. Besonders deutlich bestätigt werden hingegen einige der von Sandfuchs (2005) beschriebenen Risiken, insbesondere die Organisation des Lernens als passivistischer Vorgang. Im Förderunterricht findet u. a. deutlich weniger selbstständiges Lernen statt als im Regelunterricht.
Hypothese 2 wird durch die Ergebnisse nur in wenigen Teilbereichen bestätigt. Eine bedeutsam höhere Unterrichtsqualität zeigt sich im Unterricht mit Doppelsteckung gegenüber dem Unterricht mit nur einer Lehrkraft bei der Förderung der Sozialkompetenz, der Förderung der Methodenkompetenz, der Aufforderung zur Reflexion von Lernprozessen und der individuellen, anlassbezogenen Unterstützung im Unterricht.
Hypothese 3 wird durch die Ergebnisse deutlich untermauert. Viele Kriterien guten Unterrichts werden im Regelunterricht mit Doppelsteckung signifikant besser umgesetzt als im Förderunterricht. Betrachtet man die betreffenden Items inhaltlich, so zeigt sich die Überlegenheit der Doppelsteckung bzw. die Unterlegenheit des herkömmlich organisierten Förderunterrichtswie auf der Grundlage der von Sandfuchs (2005) formulierten Risiken bei einigen der Items, die zentral sind für einen konstruktivistisch ausgerichteten und kompetenzorientierten Unterricht: Die Förderung überfachlicher Kompetenzen, die Arbeit an problemorientierten Aufgaben und die Eröffnung und Nutzung von Möglichkeiten zum selbstständigen Lernen.

7. Fazit und Anregungen zur Veränderung des Förderunterrichts

Die an den meisten Schulen übliche Verwendung zusätzlicher Lehrerstunden zur Einrichtung von Förderunterricht im Sinne außendifferenzierender Förderstunden ist vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse kritisch zu hinterfragen und es empfiehlt sich die alternative Verwendung der Stunden zur Doppelsteckung. Aber auch in dieser Organisationsform ist die Praxis nicht durchgängig zufriedenstellend, insbesondere bezogen auf die Binnendifferenzierung besteht Handlungsbedarf.

Auf der Basis der vorliegenden Ergebnisse sowie der im Rahmen der theoretischen Auseinandersetzung mit Förderunterricht dargestellten Erkenntnisse werden die folgenden Anforderungen formuliert:

Förderunterricht bedarf mehr Beachtung und Unterstützung – sowohl (fach)didaktisch, pädagogisch als auch systemisch, ansonsten bleibt er „lediglich Kosmetik am System Schule“ (Sandfuchs 2005, S. 347).

Förderunterricht ist so zu gestalten, dass er im konstruktivistischen Sinne sowohl auf das erfolgreiche Vorankommen im eigenen Lernprozess als auch auf die dazu notwendigen überfachlichen Kompetenzen (Lernhaltung) ausgerichtet ist.

Als Organisationsform ist die Doppelsteckung den zusätzlichen Förderstunden vorzuziehen.

Literatur

Arnold, K.-H. (2008). Rahmenbedingungen für Förderung und Förderorte bzw. Förderinstitutionen. In O. Graumann et al. (Hrsg.): *Handbuch Förderung* (S. 388-438). Weinheim und Basel: Beltz.

Burk, K. (Hrsg.) (1993). *Fördern und Förderunterricht. Mehr gestalten als verwalten. Teil 10.* Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Lorenz, J. (2003). *Lernschwache Rechner fördern.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Sandfuchs, U. (2005). Fördern und Förderunterricht. In W. Einsiedler et a.. (Hrsg.). *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik* (S. 342-348). 2. Auflage. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Scherer, P.; Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Seligmann M. E. (1999): *Erlernte Hilflosigkeit.* Weinheim: Beltz.

Unterrichtsbeobachtungsbogen der Hessischen Schulinspektion (Abruf 1. März 2015): https://portal.hessen.de/irj/servlet/prt/portal/prtroot/slimp.CMReader/HKM_15/IQ_Internet/med/420/42073978-9388-2317-9cda-ae2389e48185,22222222-2222-2222-2222-222222222222

Silke LADEL, Saarbrücken und Ulrich KORTENKAMP, Potsdam

Dezimalbrüche und Stellenwerttafeln

Ziel dieser Forschungsarbeit ist es, ein virtuelles Material zum Umgang mit Dezimalbrüchen zu entwickeln welches anschlussfähig ist und Kinder beim Transfer zwischen Zahlvorstellung und symbolischer Schreibweise unterstützt. Hierzu gehen wir im Folgenden zunächst auf ausgewählte Probleme der Kinder beim Umgang mit Dezimalbrüchen ein.

1. Ausgewählte Probleme beim Umgang mit Dezimalbrüchen

Probleme und Fehlvorstellungen von Kindern beim Umgang mit Dezimalbrüchen sind bekannt und gut erforscht (vgl. u.a. Padberg 1989, 2002, 2009, Heckmann 2005, 2006, Padberg & Heckmann 2007). Im Folgenden werden insbesondere solche Probleme aufgegriffen, die sich aus der Sprache, der Notation, sowie aus dem Material zur Veranschaulichung ergeben.

Dezimalbrüche begegnen den Kindern bereits sehr früh. Aus dem Alltag kennen sie beispielsweise Notationen wie 2,49 € durch die Ausschilderung von Preisen oder 1,35 m für Größenangaben. Im Unterricht lernen die Kinder Dezimalbrüche im Zusammenhang mit Größen in Klasse 2 kennen. Hier werden bereits „Grundlagen" für Fehlerstrategien wie der Komma-trennt-Strategie gelegt, da die Kinder das Komma als Trennzeichen zwischen verschiedenen Größeneinheiten kennenlernen (vgl. Heckmann 2005, von Schwerin 2012). Diese Komma-trennt-Vorstellung wird durch die Sprechweise der Zahlen, wie z.B. „drei Meter sechsundsiebzig" für 3,76 m oder gar „drei fünfundneunzig" für 3,95 € unterstützt. Die Komma-trennt-Vorstellung wird durch die Verwendung des Kommas als Trennzeichen in der Sprache (Aufzählungszeichen) unterstützt, ebenso wie durch die Nutzung eines eigenen Kästchens bei der Notation im Heft. Die Vorstellung, dass das Komma zwei natürliche Zahlen voneinander trennt wird von Bikner-Ahsbahs (2013) auch als „Situationsverhaftung in den natürlichen Zahlen" benannt.

Die Ähnlichkeit der Stellenwertbezeichnungen (Zehner – Zehntel, Hunderter – Hundertstel, Tausender – Tausendstel) ist ebenso eine Problematik, die sich aus der Sprache ergibt und zu inhaltlichen Fehlvorstellungen führen kann. So wirkt beispielsweise ein Zehntel kleiner als ein Hundertstel, weil Entsprechendes für die Stellenwerte der natürlichen Zahlen Zehner und Hunderter gilt (vgl. Heckmann 2005). So werden die Kinder durch die sprachliche Nähe der Stellenwertbezeichnungen zu fehlerhaften Transfers verleitet. Unter anderem verleitet diese Ähnlichkeit auch zur Annahme des Kommas als Symmetrieachse. Die ist eine weitere Fehlvorstellung, die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zwar deutlich hinter die Komma-trennt-Vorstellung zurücktritt, dennoch aber vertreten ist (Padberg 2008).

2. Material zur Arbeit mit Dezimalbrüchen

Die Fehlvorstellung des Kommas als Symmetrieachse wird teilweise durch Material unterstützt. Bei näherer Betrachtung des Montessori Multiplikationsbretts für Dezimalbrüche sind die Zehner beispielsweise in dunkelblauer Farbe gekennzeichnet, die Zehntel in hellblauer, die Hunderter sind dunkelrot gefärbt, die Hundertstel hellrot, usf. Ein dunkelroter Hunderter ist zwar soviel Wert wie zehn dunkelblaue Einer, ein hellrotes Hundertstel allerdings nicht soviel wie zehn hellblaue Zehntel!

Grundsätzlich können Veranschaulichungen die Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen unterstützen. So ist der Zahlenstrahl als lineares Modell sehr gut zur Vermittlung von Vorstellungen zur Anordnung und Dichte von Dezimalbrüchen geeignet. Geht es jedoch um die Veranschaulichung des Stellenwertaufbaus der Zahlen, so sind andere Materialien zu bevorzugen. Teilweise wird Mehrsystemmaterial dazu verwendet, um das Wissen der Kinder über Bündeln/Entbündeln mit dem Konzept des Stellenwerts zu verknüpfen. Schwierig wird es allerdings, wenn das Material, das zuvor zur Veranschaulichung der natürlichen Zahlen verwendet wurde nun umgedeutet wird. Ebenso können die kleinen Würfel als erkennbare Grundeinheit zu Irritationen führen und zum Zählen verleiten. Eine gedankliche Erweiterung der Würfel, Platten und Stangen auf kleinere oder größere Einheiten ist ebenfalls schwierig, weshalb das Mehrsystemmaterial zur Veranschaulichung von Dezimalbrüchen nicht geeignet ist.

Lineare Arithmetik-Blöcke, die v.a. in Australien sehr positiv diskutiert und verbreitet sind, stellen ein weiteres mögliches Arbeitsmittel zur Veranschaulichung von Dezimalbrüchen dar (vgl. Stacey u.a. 2001). Die strukturelle Ähnlichkeit zum Zahlenstrahl sorgt dafür, dass die Vorteile des Zahlenstrahls auch bei den linearen Arithmetik-Blöcken vorhanden sind. Mit unterschiedlich langen Zylindern lassen sich Dezimalbrüche linear darstellen, was insbesondere für den Größenvergleich von Dezimalbrüchen vorteilhaft sein kann. Zur Veranschaulichung von Additions- und Subtraktionsaufgaben werden die Zylinder stellengerecht angeordnet. Betrachtet man jedoch die Stufen zur Erarbeitung des Stellenwertsystems von Gerster und Walter (vgl. Ladel 2013) so stellt man fest, dass man damit auf eine niedrigere Abstraktionsstufe zurückfällt, die bereits in der 1. Klasse verlassen wurde: Bündelungsmaterial mit Erhalt des Volumens. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler *„das Prinzip der dezimalen Unterteilung als konstituierendes Grundprinzip erkennen und anschauliche Vorstellungen* *mit den Stellenwerten verbinden, anstatt sie rein formal als Begriff auswendig zu lernen"* (Heckmann 2006, S. 48). Dieses Prinzip wird bereits in Klasse 1/2 grundgelegt. Häufig gewöhnen sich die Kinder bereits dann bestimmte Denkweisen an und halten sich mit Rezepten über Wasser wie z.B. „Nullen anhängen" oder „Nullen streichen" (vgl. Schmassmann 2009), was nicht selten durch entsprechende ‚Tipps' in Schulbüchern unterstützt wird. Diese Denkgewohnheiten, die im Umfang mit natürlichen oder ganzen Zahlen noch funktioniert haben führen bei der Zahlbereichserweiterung in die rationalen Zahlen jedoch zu einem Bruch (!) und sollten deshalb vermieden werden.

3. Curricularer Aufbau am Beispiel der Stellenwerttafel-App

Gaidoschik (2008) und Moser Opitz (2007) weisen darauf hin, dass ein Grund für Schwierigkeiten im Umgang mit Dezimalbrüchen in den mangelnden Vorkenntnissen des Basisstoffes aus den ersten vier Schuljahren liegt (vgl. Schmassmann 2009). Deshalb ist es wichtig bei der Entwicklung von Material für die Arbeit mit Stellenwerten insbesondere auf deren Anschlussfähigkeit zu achten. Dies wurde in der vorgestellten Stellenwert-App[1] befolgt. So gibt es in den Einstellungen die folgenden Möglichkeiten:

Im sogenannten Montessori-Modus kann man zwischen gleichartigen und farbigen Zählmarken wählen. Dadurch besteht die Möglichkeit auf eine niedrige Abstraktionsstufe zu gehen und zunächst mit verschiedenfarbigen Marken entsprechend der Stellenwerte zu handeln. Die Anzahl der Stellen vor und nach dem Komma ist erweiterbar, so dass von Klasse 1 an mit Einern und Zehnern gearbeitet und das dezimale Prinzip durch die Erweiterbarkeit auf Dezimalzahlen als konstituierendes Grundprinzip erkennbar wird. Bei der Erweiterung auf Dezimalbrüche wurde darauf geachtet, dass das Komma nicht als symmetrischer Doppelstrich veranschaulicht wurde, sondern unsymmetrisch (ein dicker und ein dünner Strich) gestaltet ist. Die Zahl der in jeder Stelle gelegten Plättchen wird in der jeweiligen Titelspalte angezeigt, sind es zehn oder mehr, so fokussiert die rote Farbe die Aufmerksamkeit der Kinder darauf, dass zu Bündeln ist, um die Zahl in Standard-Form lesen zu können. Die Zahl in Standard-Form kann zusätzlich verbal-symbolisch (z.B. „eins Komma drei zwei vier") und nonverbal-symbolisch (z.B. „1,324") angezeigt werden. Die verbal-symbolische Repräsentation kann dazu genutzt werden den genannten sprachlich bedingten Fehlerstrategien entgegen zu wirken. Die nonverbal-symbolische Repräsentation ist stets in der Standard-Form gegeben, so dass damit verdeutlicht

[1] Kortenkamp, U. und Ladel, S. (2012). Stellenwerttafel. App für iOS. https://itunes.apple.com/de/app/stellenwerttafel/id568750442?mt=8.

werden kann, dass ein und dieselbe Zahl unterschiedliche Repräsentationsmöglichkeiten in der Stellenwerttafel hat. Aufgaben der Art „Wie viele Tausendstel hat die Zahl 1,234“ können damit gut veranschaulicht werden.

4. Ausblick

Im Kooperationsprojekt *Deciplace* mit der Universität Bremen (A. Bikner-Ahsbahs, D. Behrens) soll die virtuelle Stellenwerttafel hinsichtlich Ihrer Unterstützungsmöglichkeiten beim Stellenwertkonzept von Dezimalbrüchen untersucht werden (vgl. Behrens 2015).

Literatur

Behrens, D. (2015). How a digital place value chart could foster substantial understanding of place value. In *Proceedings of CERME 15, to appear.*

Bikner-Ahsbahs, A. (2013). Wenn situationale Bedingungen die Entwicklung des Dezimalbruchkonzepts stören. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Münster:WTM-Verlag S. 152 – 155.

Gaidoschik, M. (2008). ‚Rechenschwäche’ in der Sekundarstufe: Was tun? *Journal für Mathematikdidaktik*. 49, Band 3/4, S. 287-294.

Heckmann, K. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten. Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses. *mathematica didactica* 28/2, S. 71 – 87.

Heckmann, K. (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Dissertation. Berlin: Logos Verlag

Heckmann, K. (2007). Von Zehnern zu Zehnteln. Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. *mathematik lehren*. 42, S. 45 – 51.

Heckmann, K. & Padberg, F. (2007). Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses bei Schülerinnen und Schülern der Klasse 6

Ladel, S. (2013). „Garantierter Lernerfolg“ oder „Digitale Demenz“? Zum frühen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM Verlag.

Ladel, S. und Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric activity theory. In: Lindmeier, A., Heinze, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bd. 1, S. 188–192.

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. 1. Auflage. Bern/Stuttgart/Wien: Haupt.

Padberg (1989). Dezimalbrüche – problemlos und leicht? In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 42 (1989) 7, S. 387-395.

Padberg, F. (2008). Unser Stellenwertsystem – keineswegs leicht und problemlos! In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: Martin Stein Verlag. S. 547-550

Schmassmann, M. (2009). „Geht das hier ewig weiter? Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert“. Fördernder Arithmetikunterricht in der Sekundarstufe I. S. 167 – 185.

Stacey, K., Helme, S., Archer, S & Condon, C. (2001). The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: A comparison of two models for teaching decimal numeration. *Educational Studies in Mathematics*. 47, 199-221.

Von Schwerin, I. (2012). Dezimalbrüche – „die Zahlen mit dem Satzzeichen dazwischen“. In: *Kopf und Zahl* 18. S. 1 – 5.

Xenia LAMPRECHT, Bamberg

Das Projekt ‚Förderung und Diagnose in differenten Rahmenbedingungen' (FeDeR)

Vor dem Hintergrund eines inklusiven Mathematikunterrichts wird im Forschungsprojekt ein Förderkonzept zum ‚Multiplikativen Verständnis' entworfen, das in differenten Settings eingesetzt werden kann. Test- und Aufgabenformate wurden in der Pilotuntersuchung erprobt. In diesem Beitrag werden das Gesamtkonzept sowie die Pilotuntersuchung vorgestellt.

1. Theoretische Rahmung

Verschiedene Lehrpläne für die Grundschule haben versucht, die Inklusionsforderung des Übereinkommens über die Rechte von Menschen mit Behinderungen von 2006, der UNESCO von 2010 und des KMK-Beschlusses von 2011 zumindest in den normativen Vorgaben aufzugreifen. Ein Baustein der Theorie des Gesamtkonzepts ist somit das Thema ‚*Inklusion*', in dem die Mathematikdidaktik auf die Bezugswissenschaft Pädagogik trifft (Abb. 1).

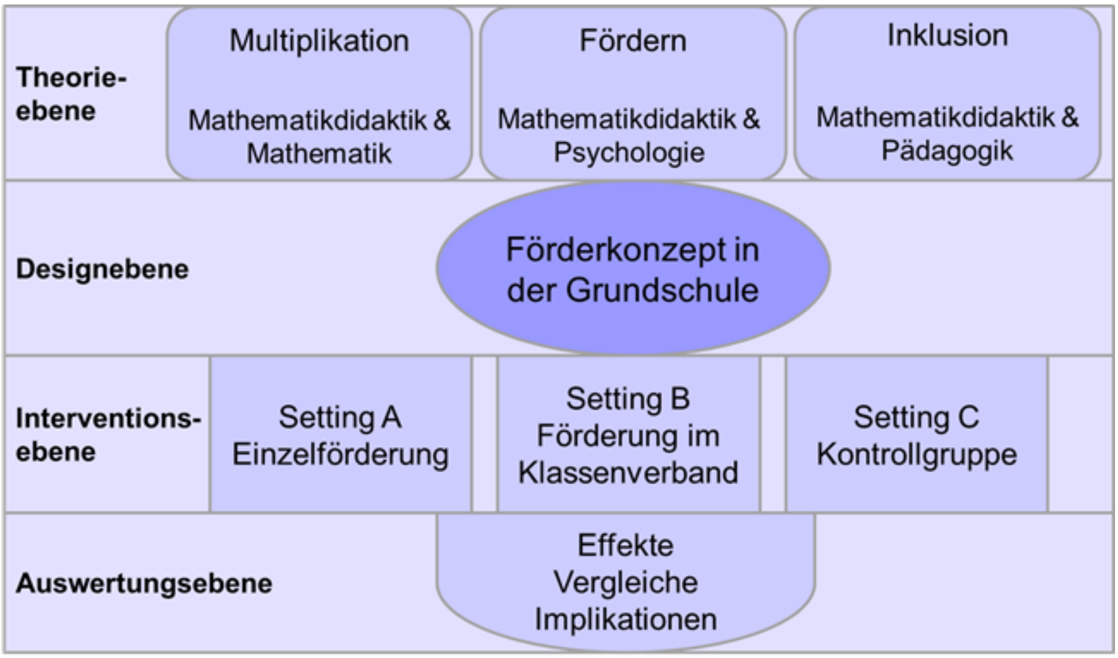


Abbildung 1: Übersichtsdarstellung des Gesamtkonzepts

Durch die Inklusionsforderung wird die Heterogenität in den Klassen zunehmen, so dass Überlegungen verstärkt werden müssen, wie Kinder mit unterschiedlichsten Voraussetzungen entsprechend gefördert werden können. Ein weiterer Baustein der Theorie ist somit das Thema ‚*Fördern*', wobei hier die Mathematikdidaktik u.a. auf die Bezugswissenschaft Psychologie trifft. Natürlich gibt es bereits Lernumgebungen und Förderkonzepte

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

auf dem Markt. Darüber hinaus existieren auch etliche Konzepte zum Thema Fördern, die wissenschaftlich erforscht sind. Allerdings liegt der Schwerpunkt hier eher auf der Förderung im additiven Bereich. Es kann ein Forschungsdesiderat ausgemacht werden.

Der Schwerpunkt des Projekts ‚FeDeR' liegt deswegen in der Förderung im multiplikativen Bereich. Somit ergibt sich ein weiterer Baustein der Theorie: das Thema ‚*Multiplikation*'. Die Mathematikdidaktik trifft hier auf die Bezugswissenschaft Mathematik.

Zusammenfassend steht Forschungsfrage I im Mittelpunkt der Arbeit:

Welche Antworten kann der Mathematikunterricht der Grundschule auf die Inklusionsforderung im Inhaltsbereich Multiplikation anbieten?

Es gilt somit ein Förderkonzept zum ‚Multiplikativen Verständnis' zu entwickeln. Den Kern des Gesamtkonzepts bildet deswegen die Designebene. Als konstruktives Element wird auf dieser Ebene ausgehend von theoretischen Überlegungen ein Förderkonzept entworfen.

Weil die Grundsatzfrage bei Förderkonzepten darin besteht, auf welche Art und Weise sinnvollerweise gefördert werden kann, sind auf der Interventionsebene verschiedene Settings geplant. Setting A sieht den Einsatz des entwickelten Förderkonzepts in der Einzelförderung vor. Bei Setting B wird das Konzept im Klassenverband eingesetzt. Selbstverständlich wird auch eine Kontrollgruppe einbezogen (Setting C). Damit werden nicht nur das Konzept, sondern auch die Auswirkungen der verschiedenen Settings auf die Effekte überprüft.

Dies lässt sich in Forschungsfrage II zusammenfassen:

Welche Effekte zeigen differente Interventionssettings bezüglich des multiplikativen Verständnisses?

Bei der Auswertung geht es also um Effekte der differenten Settings, Vergleiche, die gegebenenfalls gezogen und Implikationen, die abgeleitet werden können.

Im Mittelpunkt der Arbeitsdefinition zum ‚Multiplikativen Verständnis', die theoriebasiert entwickelt wurde, stehen die *Grundvorstellungen* wesentlicher Aspekte der Multiplikation (wiederholte Addition, kartesisches Produkt) und der Einsatz von unterschiedlichen *Repräsentationsformen*. Das Verständnis eines mathematischen Inhalts kann nur dann erreicht werden, wenn Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung (Handlung, Bild, Realsituation) aktiviert werden können (Wartha & Schulz, 2011, S. 5). Außerdem ist es wichtig, die Übersetzungsprozesse zwischen den Repräsentationsformen zu fördern (Bönig, 1995).

2. Pilotuntersuchung

Für das Förderkonzept wurden Test- und Aufgabenformate in fünf verschiedenen Teilbereichen, die aufgrund der eigenen Arbeitsdefinition als wesentlich identifiziert werden konnten, entwickelt. Die Pilotuntersuchung fand von Juni 2014 bis Oktober 2014 in einem Pre-Post-Post-Design (n = 8, 4 w) in der Einzelförderung statt. Dadurch konnte einerseits ein besserer Einblick in die Denkprozesse und Interaktionen der Kinder und andererseits ein Feedback zur Handhabung der Förderaufgaben gewonnen werden. Weil die Hauptuntersuchung darauf abzielt, die Effekte der Settings festzustellen, wurden zudem Testaufgaben zum ‚Multiplikativen Verständnis' (16 Items) zu den verschiedenen Teilbereichen entwickelt. Die Pilotierung erlaubte somit auch eine Überprüfung und Bewertung der Eignung und Durchführbarkeit des Tests. Der Fokus der Pilotierung lag auf der Evaluation der Test- und Förderaufgaben. Im Folgenden soll ein exemplarischer Einblick in die Pilotuntersuchung gegeben werden. Dieser bezieht sich auf den Unteraspekt ‚Punktefelddarstellung', der sich dem Teilbereich ‚*Übersetzung von der Darstellung in die Symbolform*' und umgekehrt ‚*Übersetzung von der Symbolform in die Darstellung*' zuordnen lässt.

Das erste Element der Pilotuntersuchung ist der Einsatz des Pretests, um herauszufinden, ob und in welchen Bereichen die Kinder einen Förderbedarf zeigen. Auf den Aspekt ‚Punktefelddarstellung' beziehen sich vier Items des Tests zum ‚Multiplikativen Verständnis', zwei davon auf die Übersetzung von der Darstellung in die Symbolform und zwei davon auf die Übersetzung von der Symbolform in die Darstellung.

Das zweite Element der Pilotuntersuchung ist die Durchführung des Bielefelder Rechentests (BIRTE 2). Er wurde als Korrektiv eingesetzt, um herauszufinden, ob das entsprechende Kind zusätzlich Schwierigkeiten in den Bereichen ‚Zahl- und Größenvorstellung' sowie ‚additive Rechenoperationen' hat.

Das dritte Element der Pilotuntersuchung sind leitfadengestützte Interviews. Zu Beginn jedes Förderbausteins wurde ein Interview durchgeführt, das sich an den Testaufgaben im Pretest orientierte, um Genaueres über das Denken der Kinder herauszufinden und gezeigte Lösungsansätze nachzuvollziehen. Die Fragen wurden überwiegend zu den Aufgaben gestellt, die das Kind nicht oder unpassend gelöst hat. Dabei wurde das Kind teilweise auch mit passenden Kinderlösungen konfrontiert, um kognitive Konflikte auszulösen und Gespräche anzuregen.

Das vierte und zentrale Element der Pilotuntersuchung sind die Fördereinheiten. Zum ausgewählten Aspekt ‚Punktefelddarstellung' müssen wechselseitige Übersetzungsprozesse zwischen Darstellung und Symbolform geleistet werden. Malaufgaben können auf dem Punktefeld eingezeichnet, abgedeckt und mit Plättchen gelegt werden. Durch verschieden farbige Plättchen kann das Entdecken bzw. Wiedererkennen der Eigenschaft Distributivität gefördert werden.

Die letzten beiden Elemente der Pilotuntersuchung bilden die Posttests. Sie fanden im Anschluss an die Durchführung der Fördereinheiten und ca. drei Monate später statt, um auch Langzeiteffekte feststellen zu können.

3. Fazit und Ausblick

Nach Durchführung der Pilotuntersuchung ist festzustellen, dass sich der Test zum ‚Multiplikativen Verständnis' dafür eignet, individuelle Förderbereiche festzustellen und Lernerfolge zu identifizieren. Des Weiteren ist die Durchführbarkeit der Testaufgaben und Förderformate gegeben. An einigen Stellen sind Effekte der Förderaufgaben bereits sichtbar geworden. Aufgrund der Erkenntnisse der Pilotuntersuchung wurden Adaptionen und Anpassungen vorgenommen, wie beispielsweise eine noch intensivere Vernetzung der Fördereinheiten, um langfristiges Lernen verstärkt zu unterstützen. Die Hauptuntersuchung wird derzeit (seit Januar 2015) durchgeführt.

Literatur

Bönig, D. (1995). Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Bundesregierung der Bundesrepublik Deutschland (2006). Übereinkommen der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderung. Bundesgesetzblatt Teil 2, Nr. 35. Zugriff am 10.02.2015. Verfügbar unter http://www.un.org/Depts/german/uebereinkommen/ar61106-dbgbl.pdf

Deutsche UNESCO-Kommission e.V. (DUK) (Hrsg.) (2010). Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik (2. Aufl.). Zugriff am 10.02.2015. Verfügbar unter http://unesco.de/fileadmin/medien/Dokumente/Bibliothek/InklusionLeitlinienBildungspolitik.pdf

KMK (2011). Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20.10.2011). Zugriff am 10.02.2015. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_10_20-Inklusive-Bildung.pdf

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Zugriff am 10.02.2015. Verfügbar unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Christine LANGENFELD, Augsburg, Christian GROSS, Augsburg

Offener Unterricht vs. Lehrerzentrierter Unterricht – Methodenvergleich anhand von tatsächlichem Lernzuwachs und Schülerreflexion

Gruppenarbeit, Lerntheke oder doch ein Lehrer-Schüler-Gespräch? Ziel dabei ist immer der Lernzuwachs bei den Schülern. Die hier vorgestellte Zulassungsarbeit thematisiert die Erreichung dieses Ziels in Abhängigkeit von der jeweils gewählten Methode im speziellen Fall der Prüfungsvorbereitung auf den Teil A der Mathematikprüfung des Qualifizierenden Hauptschulabschlusses in Bayern. Ein Vergleich zwischen zwei Klassen, die eine lehrerzentrierte bzw. eine offene Sequenz durchliefen, soll Aufschluss über die Wirkung der Methoden geben.

Im Folgenden stellen wir die Hintergründe, die Vorbereitung, die Durchführung und die Ergebnisse mit ihrer Interpretation dar.

Hintergründe

Seit dem Schuljahr 2006/2007 ist die besondere Leistungsfeststellung zum Qualifizierenden Hauptschulabschluss (QA) in Bayern für das Fach Mathematik in zwei Teile gegliedert, die von den Schülern separat bearbeitet werden. Teil A muss ohne Hilfsmittel innerhalb von 30 Minuten bearbeitet werden. Hier kann ein Drittel der Gesamtpunktzahl erworben werden. Für Teil B bleiben den Schülern im Anschluss 70 Minuten zur Bearbeitung. Hier sind Hilfsmittel, also Taschenrechner und Formelsammlung, erlaubt. Die hier präsentierte Sequenz sollte die Schüler auf den Teil A vorbereiten.

Vorbereitung

Zu diesem Zweck wurden die Prüfungsaufgaben der Jahre 2007 bis 2013 nach Thematik gegliedert und ihr Anteil an der Gesamtpunktzahl ermittelt. Hierbei ergab sich das in Tabelle 1 dargestellte Bild. Dabei wurden unter „Zahlen und Grundrechenarten“ Aufgaben zu Grundrechenarten, Zahlenfolgen und Zahldarstellungen zusammengefasst. „Geometrie“ meint hauptsächlich Aufgaben zur Leitidee „Messen“, während „Räumliches Vorstellungsvermögen“ ausschließlich Aufgaben zu „Raum und Form“ enthält. „Fermi-Aufgaben“ fasst die typischen Schätzaufgaben zusammen, meist unter Verwendung eines geeigneten, ikonisch gestützten Maßstabs. „Gleichungen“ bezieht sich auf Lücken in linearen Gleichungen, deren Äquivalenzumformungen und das Umstellen von Formeln. Unter „grafische Darstellungen“ wurden Aufgaben eingeordnet, bei denen der Schwerpunkt darauf liegt, Informationen aus Grafiken zu entnehmen. Die anderen beiden Aufgabentypen sind selbsterklärend.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Tabelle 1: Aufgabentypen im Teil A des QA und ihre Anteile an der Gesamtpunktzahl

Aufgabentyp	prozentualer Anteil
Zahlen und Grundrechenarten	21,8%
Geometrie	18,8%
Prozentrechnen und Proportionalität	18,3%
Räumliches Vorstellungsvermögen	14,3%
Fermi-Aufgaben	11,2%
grafische Darstellungen	7,1%
Gleichungen	6,3%
Statistik	2,2%

Durchführung

Die Vorbereitungssequenz wurde in zwei Parallelklassen der neunten Jahrgangsstufe in der Mittelschule Fischach mit 19 bzw. 20 Schülern durchgeführt. Aufgrund der dort gegebenen Rahmenbedingungen wurden beide Sequenzen in fünf Unterrichtseinheiten à 45 Minuten zu den fünf häufigsten Aufgabentypen aus Tabelle 1 untergliedert. Den Sequenzen ging ein Vortest zur Leistungsdiagnose voran, ein entsprechender Nachtest sowie ein ergänzender Schülerreflexionsbogen zur Beurteilung der Sequenz bildeten den Abschluss. Für jeweils 18 Schüler liegen vollständige Datensets vor. Die in beiden Klassen verwendeten Methoden des offenen bzw. lehrerzentrierten Unterrichts sind Tabelle 2 zu entnehmen.

Vor- und Abschlusstest orientierten sich vom Umfang und von den gestellten Aufgabentypen her am Teil A des QA. Der Abschlusstest war an einigen Stellen anspruchsvoller als der Vortest, da die beteiligten Lehrkräfte diesen benoten wollten. Beispielsweise war die Systematik der fortzusetzenden Zahlenfolgen schwerer zu durchschauen. Auch enthielt die Abschlusstest-Sachaufgabe zum Bereich „Zahlen und Grundrechenarten“ weniger Alltagsbezug für die Schüler; das Ergebnis war zusätzlich als Zehnerpotenz darzustellen. Die Fermi-Aufgabe des Abschlusstests erforderte einen komplexeren Lösungsweg. Schließlich beinhaltete die Kopfgeometrie-Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen im Vortest nur aus Einheitswürfeln zusammengesetzte Körper, während die Schüler im Nachtest auch mit komplexeren zusammengesetzten Körpern operieren mussten.

Tabelle 2: Übersicht Sequenzplanung mit verwendeten Methoden

Stundenthema	Methode des offenen Unterrichts	Methode des lehrerzentrierten Unterrichts
Räumliches Vorstellungsvermögen	Stationentraining	Partnerarbeit (PA), Lehrer-Schüler-Gespräch (LSG)
Zahlen und Grundrechenarten	Lerntheke	Sammlung von Ideen, LSG, Einzelarbeit (EA)
Geometrie	Brainstorming, Gruppenarbeit	Sammlung von Ideen, LSG, PA
Prozentrechnen und Proportionalität	Gruppenpuzzle, Gruppenturnier	EA, LSG
Fermi-Aufgaben	Spiel, Gruppenarbeit	PA. LSG

Ergebnisse und Interpretation

Tabelle 3 gibt die Ergebnisse von Vor- und Nachtest in Form von der durchschnittlich erreichten Punktzahl je Klasse im Vergleich zur Gesamtpunktzahl wieder.

Tabelle 3: Durchschnittlich erreichte Punktzahlen in Vor- und Abschlusstest

Klassendurchschnitt in Punkten	Klasse „offen“	Klasse „lehrerzentriert“
Vortest	9,3 von 16	7,8 von 16
Abschlusstest	9,3 von 16	9 von 16

Anhand der dargestellten Zahlen lässt sich erkennen, dass Klasse „lehrerzentriert“ einen größeren Lernzuwachs zu verzeichnen hatte als Klasse „offen“, allerdings nicht statistisch signifikant – dies war aufgrund des geringen Stichprobenumfangs jedoch auch kaum zu erwarten. Beim Vergleich von Vor- und Abschlusstest ist wie oben erwähnt zu beachten, dass der Nachtest einen höheren Schwierigkeitsgrad als der Vortest hatte. Daher kann auch bei Klasse „offen“ von einem Lernzuwachs gesprochen werden.

Bei der Auswertung des Reflexionsbogens ergab sich eine einheitliche Meinung der Schüler beider Klassen darüber, dass die gestellten Aufgaben in den Sequenzen nicht zu schwer oder zu unklar gestellt waren, dass der Unterricht oft Spaß gemacht hat und dass selten Unterforderung herrschte. Unterschiede zwischen den Klassen werden in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Unterschiede zwischen den Klassen bei Beantwortung des Reflexionsbogens

Item	Klasse „offen“	Klasse „lehrer-zentriert“
Ich habe in den Stunden mein Grundwissen wiederholt.	oft	Immer
Ich habe mich überfordert gefühlt.	selten	Nie
Ich habe das Gefühl, dass ich etwas dazu gelernt habe.	oft	Selten

Da es sich bei den vermittelten Unterrichtsinhalten tatsächlich um Grundwissen handelte, sind die Resultate zum ersten Item nicht überraschend. Die aufgetretenen Unterschiede lassen sich auf die vertraute Präsentationsform des Unterrichtsstoffes in der Klasse „lehrerzentriert“ im Vergleich zur bei den Schülern eher ungewohnten Präsentationsform durch offene Unterrichtsmethoden zurückführen.

Auch die Überforderung, die in Klasse „offen“ selten, aber in Klasse „lehrerzentriert“ nie vorkam, kann durch die Methoden des offenen Unterrichts begründet werden, die den Schülern größtenteils unbekannt waren. Sie mussten ihre Konzentration also nicht nur auf die fachlichen Inhalte, sondern auch auf die Durchführung der Methoden richten.

Die letzte Zeile in Tabelle 4 scheint den Ergebnissen von Vor- und Nachtest zu widersprechen. Allerdings werden durch offene Unterrichtsmethoden auch Kompetenzen gefördert, die über das rein Fachliche hinausgehen und damit in Vor- und Nachtest nicht abgeprüft wurden. Der von den Schülern aus Klasse „offen“ angenommene Lernzuwachs könnte sich folglich auf Kompetenzen dieser Art beziehen.

Hinsichtlich des Effizienzvorteils von lehrerzentriertem gegenüber offenem Unterricht bestätigt unsere Studie daher die bereits in der Hattie-Studie publizierten Resultate.

Literatur

Hattie, J. (2013). Lernen sichtbar machen. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von Visible Learning. Besorgt von Wolfgang Beywl und Klaus Zierer. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren

Langenfeld, C. (2014). Quali-Vorbereitung lehrerzentriert oder offen? – Der A-Teil der besonderen Leistungsfeststellung zum Qualifizierenden Hauptschulabschluss in Bayern und zwei Sequenzen zu seiner Vorbereitung im Vergleich. Zulassungsarbeit zur Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen. Universität Augsburg

Matthias LEHNER, München, Kristina REISS, München

Eyetracking und Stochastik. Entscheidungsstrategien an Vierfeldertafeln analysiert mit Hilfe von Blickbewegungen

1. Theoretischer Hintergrund

Bei der Behandlung von Vierfeldertafeln im Mathematikunterricht, ist ein häufig verwendetes Beispiel die Frage, welche von zwei Düngersorten die bessere ist. Ausgangspunkt können beispielsweise die folgenden konkreten Häufigkeiten sein:

	hochwachsend	Klein
roter Dünger	3	8
gelber Dünger	4	13

Eine intuitive Entscheidungsstrategie, die allerdings als korrekt angesehen wird, ist ein Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (McKenzie 1994). Hier wird der Anteil hochwachsender Pflanzen bei beiden Düngersorten verglichen (Shaklee & Hall, 1983). Manchmal wird diese Vorgehensweise auch als multiplikative Vier-Feld-Strategie bezeichnet. Shaklee und Hall (1983) beobachten diese Strategie nur bei knapp 32 % der untersuchten Studierenden. Häufig werden einfachere Strategien benutzt: Einige Personen argumentieren ohne die gegebenen Informationen zu berücksichtigen. Bei Verwendung der so genannten Zelle a-Strategie basiert die Entscheidung auf der Zahl im Feld oben links. Wird diese als kleinste (oder größte) erkannt, basiert darauf die getroffene Entscheidung (Shaklee & Hall, 1983). Zwei-Feld-Strategien basieren auf einem Vergleich der beiden Zahlen in der oberen Zeile (a versus b) beziehungsweise der linken Spalte (a versus c) (Klayman & Ha, 1987). Drei-Feld-Argumente entstehen durch Kombination der beiden Zwei-Feld-Strategien. Additive Vier-Feld-Argumente benutzen zwar alle Informationen, die in der Vierfeldertafel gegeben sind; jedoch werden anstatt bedingter Wahrscheinlichkeiten die Differenzen der Häufigkeiten verglichen (Shaklee & Hall, 1983; McKenzie, 1994).

Verschiedene Autoren untersuchten bereits früh Vierfeldertafeln. So führten Inhelder und Piaget (1958) ein Experiment durch, bei dem Versuchspersonen anhand ausgehändigter Karten über die Korrelation von Augen- und Haarfarbe zu entscheiden hatten (blaue Augen bzw. keine blauen Augen; blonde Haare bzw. keine blonden Haare). Personen, die sowohl blaue Augen als auch blonde Haare hatten, wurden von Inhelder und Piaget Zelle a (oben links) einer Vierfeldertafel zugeordnet, von den Versuchspersonen

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

wurde diese Information bevorzugt berücksichtigt. Informationen, die sich in Feld d (unten rechts) fanden, wurden am wenigsten berücksichtigt (beide Merkmale abwesend). Auch eine Studie von Wasserman, Dorner und Kao (1990) betrachtete die subjektive Bedeutung der vier Zellen. Feld a wurde als wichtigstes genannt, Feld d war die Zelle mit geringster Relevanz.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Versuchspersonen eine Entscheidungsstrategie zuzuordnen. In den Experimenten von Inhelder und Piaget (1958) sowie Shaklee und Hall (1983) wurde die Vorgehensweise im Anschluss an die Problemlösephase von den Versuchspersonen erfragt. Dies setzt voraus, dass keine sprachlichen Barrieren vorliegen. Shaklee und Hall (1983) stellen fest, dass die Ergebnisse subjektiv verzerrt sind und bei manchen Versuchspersonen Selbstüberschätzung vorliegt. Ein anderer Ansatz wird in den rule diagnostic problems bei Shaklee und Hall (1983) vorgestellt: Den Versuchspersonen werden nacheinander zwölf Vierfeldertafeln vorgelegt, die in vier Kategorien gegliedert sind. Aus den Antworten der Testteilnehmer kann auf deren Entscheidungsstrategie geschlossen werden: Bei Verwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten können alle Items korrekt beantwortet werden. Personen, die eine additive Vier-Feld-Strategie verwenden, lösen nur die Aufgaben dreier Kategorien richtig. Bei Benutzung einer Zwei-Feld-Strategie können nur die Aufgaben zweier Kategorien gelöst werden, bei Verwendung der Zelle a-Strategie nur die Probleme der ersten Kategorie (Shaklee & Hall 1983). Diese Vorgehensweise ist objektiv, jedoch können keine unbekannten Strategien erfasst werden. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die Versuchsperson ihre Strategie während der Bearbeitung der Items nicht variiert.

Mit diesem Hintergrund verfolgt unsere Studie das Ziel zu zeigen, dass sich die subjektive Bedeutung auch in den Betrachtungszeiten der Zellen zeigt. Wir nutzen dazu Blickbewegungen. Zusätzlich erfolgt eine Klassifizierung der Entscheidungsstrategien nach der Zahl der Zellen, die für die Entscheidungsfindung herangezogen werden. Wir betrachten einen möglichen Zusammenhang zwischen den Betrachtungszeiten einzelner Felder und den verwendeten Entscheidungsstrategien.

2. Methode

In der vorliegenden Studie ist die Betrachtungszeit einzelner Felder der Vierfeldertafel eine zentrale Größe. Die Blickbewegungen werden bei dem verwendeten Gerät mit Hilfe von Infrarot-Reflexionen rekonstruiert. Das zugrundeliegende Paradigma ist, dass stets diejenigen Punkte im Aufmerksamkeitsfokus der Versuchspersonen liegen, die zum jeweiligen Zeitpunkt fixiert werden (vgl. Holmquist et al. 2011). Aus den Fixationszeiten der vier Felder einer Vierfeldertafel kann also darauf geschlossen werden, wie lange den Feldern die Aufmerksamkeit zuteil wurde.

In der durchgeführten Studie wurden 26 Studierende unterschiedlicher Fachrichtungen untersucht. In Einzelinterviews am Eyetracker hatten diese zwölf Probleme mit Hilfe von Vierfeldertafeln zu bearbeiten. Dabei wurden die Blickbewegungen aufgezeichnet. Wir verwendeten die Items aus den rule diagnostic problems, um den Versuchspersonen eine Strategie zuzuordnen. Zusätzlich wurden im Anschluss an die Bearbeitung der Items die Versuchspersonen nach der verwendeten Strategie befragt.

Für die Auswertung ist die Fixationszeit der einzelnen Felder von Relevanz. Da die gesamte Bearbeitungszeit eines Items bei unterschiedlichen Personen schwankt, werden relative Größen verwendet. Um für jede Testperson vier Kennwerte zu erhalten, mitteln wir die Betrachtungszeiten der vier Felder über alle Items. Diese Vorgehensweise liefert für jede Testperson die mittleren Betrachtungszeiten der vier Felder der Tafel. Für weitere Analysen sind abweichende Auswertungsmethoden denkbar.

3. Ergebnisse

Wie in Abschnitt 1 beschrieben, sollen in diesem Beitrag zwei Fragen untersucht werden: Bei der ersten Frage gehen wir aus von der beschriebenen Einschätzung der Wichtigkeit der Zellen einer Vierfeldertafel, wonach Zelle a am wichtigsten eingeschätzt wird, und Zelle d am wenigsten wichtig. Wir nehmen an, dass diese Einschätzung ein Faktor ist, der die Aufmerksamkeitsverteilung auf die Felder beeinflusst. Wir wollen untersuchen, wie sich dies – basierend auf dem Paradigma – in den Blickbewegungen zeigt. Bezugnehmend auf diese Frage ist keinerlei Spezifizierung der Strategien erforderlich. Die Betrachtungszeit der vier Felder wurde über alle Versuchspersonen gemittelt, dies ergab für das Feld a (oben links) einen mittleren Anteil von 0.538 an der gesamten Betrachtungszeit. Zelle d (unten rechts) hatte mit 0.073 einen deutlich geringeren Anteil an der Betrachtungszeit. Zelle b (0.124) und Zelle c (0.265) lagen dazwischen. Diese Zahlen unterscheiden sich hochsignifikant ($p < 0.001$). Die Testteilnehmer betrachteten also die Zellen unterschiedlich lang; Zelle a wurde am längsten betrachtet, Zelle d am wenigsten lang. Dies bestätigt die Erwartungen, die aus den Ergebnissen von Inhelder und Piaget (1958) sowie Wasserman, Dorner und Kao (1990) resultieren.

In der zweiten Forschungsfrage sollen Zusammenhänge zwischen den Strategien und den Betrachtungszeiten einzelner Felder gefunden werden. Multiplikative und additive Vier-Feld-Strategien sind die einzigen Strategien, bei denen Feld d für die Entscheidungsfindung herangezogen wird. Daher vermuten wir, dass die Personen, die mit einer dieser Strategien argumentieren, Zelle d länger betrachten als die übrigen Personen. Die Betrachtungszeit bei Nutzern einer Vier-Feld-Strategie war tatsächlich 0.102, bei einer anderen Strategie nur 0.035. Diese Zahlen unterscheiden sich hochsignifikant und bestätigen die Vermutung, zumal die Effektstärke d = 1.64 auf einen großen Effekt hinweist. Weiter wird bei Verwendung der Zwei-Feld-Strategie a versus c für die Entscheidungsfindung ausschließlich die linke Spalte herangezogen. Daher ist es naheliegend, dass Personen, die mit dieser Strategie argumentieren, länger auf die linke Spalte blicken als die übrigen. Die mittlere Betrachtungszeit der linken Spalte unter den Personen, die mit der Strategie a versus c argumentierten, war 0.926, unter den übrigen nur 0.755. Der hochsignifikante Unterschied bestätigt wiederum die Hypothese. Auch hier ist der Effekt mit d = 1.62 groß. Die Klassifikation der Strategien erfolgte mit Hilfe der rule diagnostic problems. Die Auswertung der Selbsteinschätzung lieferte nur geringfügig andere Ergebnisse.

Dieser Beitrag zeigt, dass Zusammenhänge zwischen den Entscheidungsstrategien an Vierfeldertafeln – bestimmt mit Selbsteinschätzung sowie den rule diagnostic problems – und den Blickbewegungen bestehen. In einem nächsten Schritt ist zu untersuchen, wie aus den Blickbewegungen Rückschlüsse auf Entscheidungsstrategien gezogen werden können.

Literatur

Holmquist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & van de Wejier, J. (2011). Eye Tracking. A comprehensive guide to methods and measures. . Oxford: Oxford University Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence. New York: Basic Books.

Klayman, J., & Ha, Y.-W. (1987). Confirmation, Disconfirmation, and Information in Hypothesis Testing. Psychological Review, 94, 211-228.

McKenzie, C. (1994). The Accuracy of Intuitive Judgement Strategies: Covariation Assesment and Bayesian Inference. Cognitive Psychology, 26, 209-239.

Shaklee, H., & Hall, L. (1983). Methods of Assesing Strategies for Judging Covariation between Events Journal of Educational Psychology, 75, 583-594.

Wasserman, E., Dorner, W., & Kao, S. (1990). Contributions of Specific Cell Information to Judgements of Interevent Contingency. Journal of Experimental Psychology, 16(3), 509-521.

Katja LENGNINK, Gießen

Begriffe bilden im Geometrieunterricht – Eine Reflexion von Lehr-Lernprozessen

Begriffsbildungsprozesse sind zentral beim Mathematiklernen, insbesondere auch in der Geometrie. In diesem Text werden zwei Szenen zum Erkunden ebener Figuren vorgestellt und auf die Begriffsbildungsprozesse hin analysiert. Sie stammen aus der Arbeit mit Besuchsklassen in der LernWerkstatt Mathematik der Universität Gießen, die kurz vorgestellt wird.

Konzept der LernWerkstatt Mathematik der Universität Gießen

In der LernWerkstatt Mathematik (eingerichtet 2012) werden Aktivitäten aus Studium und Forschung mit der Unterrichtspraxis und der zweiten Phase der LehrerInnenbildung verbunden. Damit werden drei Ziele verfolgt:

Studierende des Lehramts Mathematik werden mit Materialien und Methoden der Mathematikdidaktik vertraut gemacht. Sie lernen in der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern ihr theoretisches Wissen reflektiert anzuwenden und arbeiten an theoretischen Reflexionen zur Praxis in Seminar- und Abschlussarbeiten. Dafür kommen Besuchsklassen in die LernWerkstatt. Zudem wird seit drei Jahren von Sebastian Schorcht ein Problemlösekurs für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler angeboten, der jährlich von Studierenden vorbereitet und betreut wird. Die Aktivitäten werden anhand von Videoaufzeichnungen ausgewertet und reflektiert.

Über diese Arbeit im Rahmen des Studienangebots hinaus werden in der LernWerkstatt Prozesse der Vorstellungs- und Begriffsentwicklung zu mathematischen Inhalten untersucht. Dabei sind auch die Entwicklung von Lernumgebungen im Bereich der Sekundarstufen und deren systematische Analyse im Fokus. Hierfür werden Schülerbearbeitungen und Videos erhoben und hinsichtlich des Materialeinsatzes beim Lernen, den typischen Lernhürden und der Heterogenität beim Lernen ausgewertet.

Zuletzt dient die LernWerkstatt Mathematik als Ort für die Vernetzung zu inner- und außeruniversitären Einrichtungen. So finden regelmäßig Lehrerfortbildungen statt und es wurde eine Kooperation mit den Studienseminaren initiiert, mit dem Ziel, die Lernbereiche erster und zweiter Bildungsphase intensiver zu vernetzen.

Begriffsbildungsprozesse beim Geometrielernen – ein Beispiel

Im Folgenden wird aus der Arbeit mit einer 5. Klasse einer Gesamtschule berichtet. Den Schülerinnen und Schülern wurden ebene Vierecke wie Dra-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

chen, gleichschenklige Trapeze, Quadrate, Rechtecke und Parallelogramme aus Papier vorgelegt. Sie bekamen dazu die folgende Aufgabenstellung:

Zerlege die Figur in Teile und lege sie zu einer anderen dir bekannten ebenen Figur zusammen. Schere und Kleber sind erlaubt.

Die Aufgabe stellte einen Vertiefungsauftrag zur Arbeit an ebenen Vierecken dar. Die Eigenschaften ebener Vierecke wurden vorher bereits erarbeitet und sollten nun angewendet werden. Bei der Bearbeitung werden Eigenschaften (wie etwa parallel, gleichlang, symmetrisch, rechtwinklig) für den Aufbau neuer ebener Figuren genutzt. Es werden insbesondere Begründungsaktivitäten angeregt, wenn die neu erstellten Figuren benannt und ihre Eigenschaften geprüft werden, was mathematisches Argumentieren fördert. Darüber hinaus werden Vorstellungen zur Zerlegung von Vierecken und zum flächengleichen Zusammenlegen angebahnt, die im weiteren Unterricht für die Entwicklung von Flächeninhaltsformeln ebener Figuren genutzt werden können.

Szenen der Bearbeitung

Marlene (M) betrachtet ein Drachenviereck und sucht durch Andeuten eines Faltprozesses eine Schnittmöglichkeit. Sie entscheidet sich für die Symmetrieachse. Eine Studentin (St) sitzt neben ihr:
M: „So, oder?“
St: Hmm (zustimmend).
Marlene führt den Schnitt aus und erhält zwei Dreiecke. Sie legt sie zunächst wieder zum Ausgangsdrachen zusammen.
M: „So wär‘s wieder ein Drachen.“
St: „Dann wär‘s wieder ein Drache. … Und wie könntest du das irgendwie noch verknüpfen, dass es was anderes wird?“
Marlene legt die beiden kurzen Seiten der Teildreiecke zusammen und erhält ein Dreieck. Ein Dreieck hatte sie bereits aus anderen Figuren durch Zerlegen und Zusammenfügen erhalten.
M: „Aber dann wird‘s wieder ein Dreieck.“
St: „Dann wird’s wieder ein Dreieck.“
M: „Ja.“
St: „Wolltest du was anderes machen?“
M: „Ja.“
St: „Und wenn du diese Seite an diese Seite kleben würdest?“
Marlene fixiert ein Parallelogramm, das sich von dem bereits aufgeklebten in seiner Form genügend unterscheidet.

Es fällt auf, dass Marlene die ebenen Figuren (Drache und Dreieck) mit ihren Namen benennen kann. Sie versucht, eine „neue“ Figur zu erhalten. Allerdings hat sie bereits ein Dreieck, ein Rechteck und ein Parallelogramm auf ihr Papier geklebt, so dass ein vollständig neuer Formentyp nicht generiert werden kann. Die sprachliche Arbeit mit Marlene bleibt auf der Ebene des intuitiven Begriffsverständnisses stehen, die Figuren werden korrekt benannt, aber ihre Eigenschaften werden nicht thematisiert (Weigand 2009, S.119 ff). Dass Marlene mehr leisten könnte, wird an ihrem Kommentar in der zweiten Zeile der folgenden Szene deutlich.

Die Schülerin Julia (J) holt sich Hilfe bei der bereits in der vorherigen Szene beteiligen Studentin. Sie hat ein gleichschenkliges Trapez bereits durch einen Schnitt entlang seiner Symmetrieachse zerlegt. Marlene verfolgt das Gespräch, während sie die Teildreiecke zum Parallelogramm aufklebt.

St: „Also, … Trapez,… da sind die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander."
M: „Ach ist das das da?" (zeigt auf eine aufgeklebte Figur auf ihrem Blatt)
St: „Genau, das war deine Ausgangsfigur."
Wendet sich wieder Julia zu.
St: „Wenn du das einfach in der Mitte teilst, dann hast du halt ein kleines Trapez, weil die Seiten ja immer noch parallel zueinander sind. Ok?"
J: „Und wenn das hier noch länger wär, dann wär's ein Quadrat?" (deutet auf die kürzere Seite der Parallelen)
St: „Nein, … das ist ja immer noch ein Trapez, weil das hier so dreieckig ist."
J: „Oder ein Rechteck. Also so könnte man's…" (schiebt die beiden Trapezteile umgedreht aneinander)
St: „Aha"
J: „Ist aber ein Rechteck, oder?"
St: „Ist ein Rechteck? Sollen wir das nachmessen, oder siehst du das schon so?"
J: „Also ich finde, … das sieht kürzer aus." (zeigt auf eine Seite der Figur)
St: „Sekunde." (greift nach einem Geodreieck auf dem Tisch) „Hier, miss nach."
J: (misst die erste Seitenlänge der Figur) „Bei Null ansetzen. … Das geht bis zur fünf ein halb."
St: „Ok, 5,5."
J: „Und das sind … fast sieben." (misst die zweite Seitenlänge)
St: „Ok"
J: „Ich hatte Recht!"
St: „Rechteck, bin ich einverstanden."
Wenngleich einige fachliche und methodische Schwierigkeiten in der obigen Szene aufscheinen, erreicht sie doch ein anderes begriffliches Niveau

als die erste Szene. So verwendet die Studentin zur Erklärung des Begriffs Trapez den Relationsbegriff der Parallelität von Seiten. Damit wird ein inhaltliches Begriffsniveau eingenommen. Die Schülerin zeigt anhand einiger Äußerungen, dass sie griffige Vorstellungen von ebenen Figuren hat, zum Beispiel beim Verlängern einer Trapezseite zum Quadrat. Diese werden allerdings in der Szene nicht weiter bearbeitet. Zudem fällt auf, dass Julia selbst auf die Verifikation ihrer Behauptungen drängt. („Ist aber ein Rechteck, oder?“) Dies führt zur Aktivität des Nachmessens, was allerdings nicht die entscheidenden Eigenschaften eines Rechtecks in den Blick nimmt.

Diskussion

Die beiden Szenen verdeutlichen zum einen die große Heterogenität der Schülerinnen und Schüler einer Klasse in Bezug auf die begriffliche Durchdringung des Themenfeldes. Dies reicht von Schwierigkeiten beim intuitiven Begriffsverständnis (Benennen von Figuren) über inhaltliches Begriffsverständnis (Benennen von Eigenschaften) bis hin zum Beginn eines integrierten Begriffsverständnisses (Aufbau eines Begriffsnetzes). Zudem zeigt sich, dass es den Studierenden nicht leicht fällt, die begriffliche Arbeit mit Schülerinnen und Schülern gezielt anzuleiten. Die nötigen Theorien des Begriffslernens sind zwar theoretisch bekannt, können aber in der Praxis noch nicht umgesetzt werden. Es ist daher geplant, die Arbeit mit Videoausschnitten und Transkripten im Studienplan weiter zu auszubauen, um die Professionalisierung der angehenden Lehrkräfte in diesem Bereich langfristig anzulegen und unterrichtspraktisch anzubinden.

Literatur

Weigand, H.-G., Filler, A. F., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum.

Justus-Liebig-Universität Gießen (2015). *LernWerkstatt.* Verfügbar unter http://www.uni-giessen.de/cms/fbz/fb07/fachgebiete/mathematik/idm/lernwerkstatt/index_html [08.02.2015].

Felix LENSING, Bettina ROESKEN-WINTER, Berlin

Wie viel Grenzwert braucht der Mensch? – Unendlichkeit dynamisch und statisch begreifen

Im Alltag bezeichnet ein Grenzwert eine *real messbare* Größe, die aus rechtlichen Gründen nicht überschritten werden sollte (z. B. CO_2- oder Feinstaub-Grenzwert). Demgegenüber zeichnet sich der mathematische Grenzwertbegriff gerade dadurch aus, ein *theoretisches Gedankenkonstrukt* zu sein, welches einem unendlichen Prozess ein idealisiertes Ergebnis zuordnet. Aus didaktischer Perspektive kann somit die Frage aufgeworfen werden, inwiefern eine rein theoretische Auseinandersetzung mit Grenzwerten im Mathematikunterricht überhaupt legitimiert werden kann.

1. Warum müssen Grenzwerte unterrichtet werden?

Die innermathematische Notwendigkeit der Thematisierung des Grenzwertbegriffs im Mathematikunterricht (MU) wird unmittelbar deutlich, wenn man sich den MU ohne Grenzwerte vorstellt: Zahlreiche Phänomene der Sekundarstufe I (z. B. Inkommensurabilität, irrationale Zahlen, Kreisberechnung nach Archimedes, Heron-Verfahren) können ohne Grenzwerte nicht adäquat erfasst werden. Darauf aufbauend beruht die heutige (Standard-)Analysis auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen (z. B. Zwischenwertsatz oder Monotoniekriterium) und ist damit ohne die Hinzunahme von Grenzwerten als Grundlage für den Ableitungs- sowie den Integralbegriff undenkbar (Danckwerts & Vogel, 2006).

Bereits Hilbert (1926) wies darauf hin, dass „die endgültige Aufklärung über das Wesen des Unendlichen [...] weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur Ehre des menschlichen Verstandes selbst notwendig geworden“ (S. 163) ist. Die Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff kann somit auch aus einer erkenntnistheoretischen Perspektive legitimiert werden. Ein Blick in die Kernlehrpläne der einzelnen Bundesländer verdeutlicht, dass von Hilberts Aufklärungspostulat heute nur noch der Terminus eines ‚inhaltlich-anschaulichen' bzw. ‚propädeutischen' Grenzwertbegriffs im Schulalltag übrig geblieben ist (vgl. Blum, 1979; Jahner, 1976 für eine ausführliche Darstellung des propädeutischen Grenzwertbegriffs). Was mit diesem Terminus jedoch gemeint ist, wird im Rahmen der Lehrpläne in der Regel verkürzt oder auch gar nicht expliziert, sodass selbst vielen angehenden sowie praktizierenden Lehrerinnen und Lehrern der unterrichtspraktische Umgang mit Grenzwerten weiterhin ein Rätsel bleiben muss.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Welche Sichtweisen im Umgang mit Grenzwerten gibt es?

Im Umgang mit Grenzwerten von Folgen lassen sich zwei charakteristische Perspektiven unterscheiden: die *dynamische* und die *statische* Sichtweise. Die *dynamische Sichtweise* charakterisiert eine Folge als nicht endenden Prozess, der sich bei Konvergenz einem stabilen Zustand nähert (vom Hofe, 1998). Die Mathematik war viele Jahrhunderte von diesen dynamischen Vorstellungen des Unendlichen geprägt und auch Newton, Leibniz oder Cauchy versuchten das Unendliche mit Hilfe der dynamischen Sichtweise zu konzeptualisieren. Mitte des 19. Jahrhunderts wandte sich der Konsens in der Mathematik von der dynamischen hin zu einer statischen Sichtweise. Die *statische Sichtweise* ist durch die Idee zu beschreiben, den dynamischen „Prozess in Gedanken anhalten zu können, d.h. Momentaufnahmen bzw. einzelne Folgenglieder statisch zu betrachten" (vom Hofe, 1998, S. 273) und mündet schließlich in der „Epsilontik"-Definition von Weierstraß. In Bezug auf die individuelle Begriffsbildung ist die dynamische Sichtweise die vorherrschende Perspektive im MU, da die Lernenden einerseits in der Sekundarstufe I vornehmlich dynamische Erfahrungen im Umgang mit Grenzwerten machen und anderseits die Strategien im Umgang mit endlichen Prozessen auf die Auseinandersetzung mit unendlichen Prozessen übertragen (Marx, 2013). Dies begünstigt jedoch die Ausbildung zahlreicher Fehlvorstellungen wie Bender (1991) in diesem Zusammenhang ausführt: „Ein Grenzprozeß [sic] führt nicht zum Grenzwert, da er kein Ende hat und selbst wenn er eines hätte, dieses nie erreichen würde" (S. 240). Die Betrachtung einer Folge in dynamischer Sichtweise kann, so Bender (1991), immer nur das *numerisch* Wesentliche erfassen und nicht das *infinitesimal* Wesentliche – den für die Frage nach Konvergenz entscheidenden Teil. Erst die statische Sichtweise ermöglicht es, das infinitesimal Wesentliche durch die Umkehrung der Beweislast der rationalen Argumentation zugänglich zu machen und damit eine verlässliche Aussage über Existenz und Eindeutigkeit des Grenzwerts als idealisiertes Endprodukt treffen zu können. Aus didaktischer Perspektive schließt sich die nachstehende Frage an.

Wie können Vermittlungsprozesse zwischen dynamischer und statischer Sichtweise unterrichtspraktisch gestaltet werden?

Als Ausgangspunkt weiterer stoffdidaktischer Überlegungen soll die folgende Problemstellung dienen: Welche lokale Änderungsrate hat die Funktion $\mathrm{f(x)} := \sqrt{\mathrm{x}}$ an der Stelle $\mathrm{x}_0 = 2$? In Abbildung 1 sind die sukzessiven linksseitigen Approximationen des Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 2$ (dynamische Sichtweise) mit Hilfe von Differenzenquotienten für die Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ (Abb. 1, dritte Spalte) im Vergleich zur

Normalparabel $g(x) := x^2$ (Abb. 1, vierte Spalte) gegenübergestellt. Während die dynamische Sichtweise am Beispiel der Normalparabel scheinbar Aufschluss über das infinitesimal Wesentliche gibt, führt die Betrachtung des *numerisch* Wesentlichen am Beispiel der Wurzelfunktion zu keiner glaubhaften Hypothese über das Ergebnis des Grenzprozesses. Im Rahmen der dynamischen Sichtweise wird im Iterationsprozess unter Rückgriff auf rationale Näherungswerte (endliche Dezimalbrüche) versucht, eine Idee für das idealisierte Endprodukt dieses Prozesses (Grenzwert als Zahl) zu entwickeln. Ist der Grenzwert des Differenzenquotienten eine rationale Zahl, funktioniert dies im Allgemeinen sehr gut, da sich die Näherungswerte bei sukzessiver Verkleinerung der Intervalle einem im Prozess selbst ersichtlichen stabilen Zustand (endlicher oder unendlich periodischer Dezimalbruch) nähern (Abb. 1, vierte Spalte). Ein irrationaler Grenzwert (unendlich nicht-periodischer Dezimalbruch) ist jedoch nicht anhand von rationalen Näherungswerten[1] im Prozess erkennbar (Abb. 1, dritte Spalte). Auf diese Weise werden die Lernenden für die Notwendigkeit des Einsatzes einer alternativen Sichtweise sensibilisiert.

A linkss...	B kritisc...	C wurzel	D normal
1.9	2	0.358087	3.9
1.99	2	0.353996	3.99
1.999	2	0.353598	3.999
1.9999	2	0.353558	3.9999
1.99999	2	0.353554	3.99999

Abb. 1 Linksseitige Approximation des Differentialquotienten mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 2$ am Beispiel der Wurzelfunktion und der Normalparabel

Die statische Betrachtung und Umformung des Differenzenquotienten auf symbolischer Ebene kann nun zur Berechnung des Differentialquotienten eingesetzt werden:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Dies ist zwar noch nicht die statische Sichtweise auf den Grenzwert, jedoch kann die Frage nach dem einzig sinnvollen Wert, der angenommen werden kann, wenn sich x immer weiter der 2 nähert, auf symbolischer Ebene wieder beantwortet werden. Im nächsten Schritt kann das auf diese Weise gewonnene Ergebnis mit Hilfe der Approximationsvorstellungen überprüft werden, sodass die dynamische Sichtweise in der Rückschauperspektive, wenn der Grenzwert als idealisiertes Ergebnis bereits bekannt ist, wieder sinnvoll eingesetzt werden kann. Der Grad der sich anschließenden Formalisierung der statischen Sichtweise ist dabei sicherlich lerngruppenspezi-

[1] Auch wenn die Näherungswerte im Beispiel nicht zwingend rational sein müssen, so sind es zumindest die Werte, die der Rechner rundet.

fisch zu variieren und könnte auch im Sinne einer Umgebungsbestimmung zu konkreten Fehlerschranken (Blum, 1979) propädeutisch bleiben.

Fazit und Ausblick

Einerseits stellt der Versuch, die historische sowie die individuelle lernpsychologische Begriffsentwicklung auszublenden und den Grenzwertbegriff formal korrekt einzig mit Hilfe der statischen Sichtweise und der damit verbundenen Epsilontik unterrichten zu wollen, ein Paradebeispiel einer ‚antididaktischen Inversion' im Sinne Freudenthals dar. Andererseits fördert die Ausblendung der mathematikhistorischen Entwicklung hin zur statischen Sichtweise zwar die Ausbildung einer Approximationsvorstellung, führt jedoch nicht zu einem wirklichen Verständnis von Grenzwerten. Unter der Prämisse eines ‚intellektuell ehrlichen' Umgangs mit dem Grenzwertbegriff muss der MU somit Vermittlungsprozesse zwischen den dynamisch-prozesshaft geprägten Vorstellungen der Lernenden und der statischen Sichtweise initiieren, um so eine adäquate Begriffsbildung im Umgang mit dem Grenzwertbegriff zu ermöglichen. Der vorliegende Beitrag weist auf dieses Forschungsdesiderat hin und schlägt auf Basis einer didaktischen Analyse des Gegenstands einen ersten Ansatz zur unterrichtspraktischen Umsetzung dieses Vermittlungsprozesses vor. Zukünftige fachdidaktische Forschung könnte somit unter Berücksichtigung der historischen Genese des Grenzwertbegriffs die zahlreich vorhandenen stoffdidaktischen Analysen (z. B. Blum, 1979; Bender, 1991; vom Hofe, 1998) mit empirisch erhobenen Schülervorstellungen (z. B. Friedrich, 2002; Marx, 2013) synthetisieren und als Ausgangspunkt eines Design-Based Research-Prozesses verstehen, der das Ziel verfolgt, evidenzbasierte Lernumgebungen zum langfristigen Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs zu entwickeln.

Literatur

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *44* (4), 238–243.

Blum, W. (1979). Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *25* (3), 42–50.

Danckwerts, R & Vogel, D. (2006) *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier Spektrum Verlag.

Friedrich, H. (2002). *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*. Paderborn: Universität Paderborn.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95, 161-190.

Jahner, H. (1976). Modell für einen Minimalkurs „Analysis". *Neue Unterrichtspraxis*, *9,* 276-288.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34* (1), 73–97.

Vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19* (4), 257–291.

Timo LEUDERS, Freiburg

Höhere Algebra für das Lehramt – Interaktive, genetische und visuelle Zugänge

Gruppe, Ringe und Körper als mathematische Operationsstrukturen werden im Rahmen der so genannten „höheren", „modernen" bzw. "abstrakten" Algebra auch im Lehramtsstudium behandelt (CMBS, 2012). Die angebotenen Lehrveranstaltungen sind aber oft mit dem „Blick nach vorne" angelegt, d.h. sie wollen universelle mathematische Konzepte und Werkzeuge bereitstellen, die Studierende als zukünftige Forschende oder als Anwender von Mathematik verwenden können. Künftige Lehrkräfte brauchen jedoch eher einen „Blick zurück": Sie müssen erkennen, in welcher Weise die abstrakten mathematischen Strukturen die vereinheitlichenden Konzepte für die Schulmathematik darstellen, und aus welchen Problemen und Fragen heraus sie entstanden sind:

> In contrast with the normal courses that are relentlessly "forward- looking" (i.e., the far-better-things-to-come in graduate courses), considerable time should be devoted to "looking back. (Wu, 1999; zitiert nach CBMS, 2012, S. 53)

Im folgenden wird ein Lehrkonzept vorgestellt (Leuders 2015), bei dem Lehramtsstudierende sich die zentralen Konzepte der Algebra aktiv, genetisch sowie interaktiv mit computergestützten Erkundungen erarbeiten. Studierende sollen dabei Antworten auf folgende Fragen finden bzw. selbst entwickeln:

- Aus welchen Problemen entstehen die relevanten Konzepte? (horizontale Mathematisierung)
- Welche Phänomene/Situationen/Beispiele (auch aus der Schule) werden auf universelle Weise beschrieben? (vertikale Mathematisierung)
- Welche sind die Kernideen? Welches sind relevante Grundvorstellungen? (Sinnstiftung)
- Was lernt man über mathematische Denkweisen/Erkenntnis? (epistemische Reflexion)

Bei der wurden Erfahrungen bzw. Prinzipien aus folgenden Bereichen genutzt:

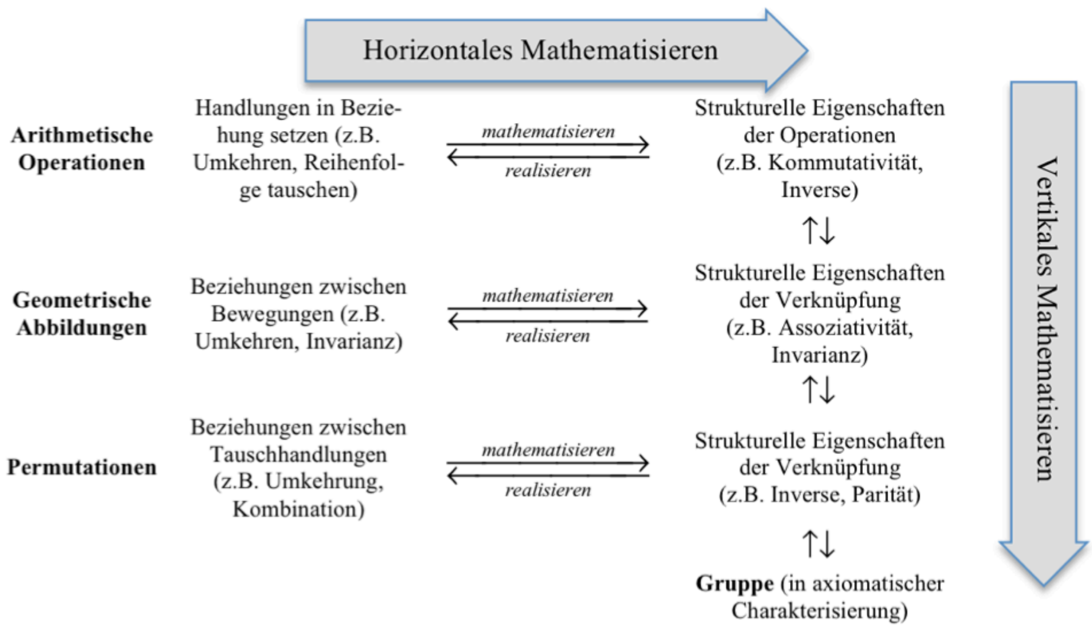
- Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse (Treffers, 1977; Freudenthal 1991)
- Visualisierungen beim entdeckenden Lernen
- Stoffdidaktische Analyse mit Blick auf Lehrerbildung (Klein 1908; mathematical knowledge for teaching, Rowland & Ruthven 2008)

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Forschung zum Lernen der höheren Algebra (z.B. Weber & Larsen 2008)
- Konzepten und Anregungen aus bestehender Lehrbuchliteratur (z.B. Carter 2009).

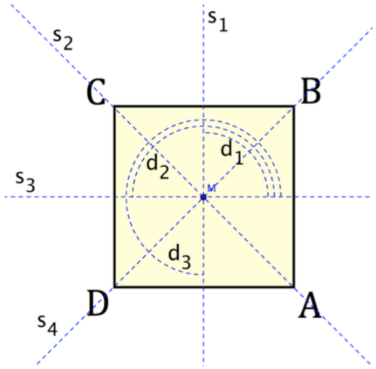
Zudem wurden extensiv das Dynamische Geometriesystem Geogebra eingesetzt, um Applets für das interaktive und visuell gestützte Erkunden zu entwickeln. Alle Beispiele in diesem Beitrag stammen aus „Erlebnis Algebra“ (Leuders 2015).

Kernelement des Konzeptes sind vielfache horizontale Mathematisierungsprozesse, in denen Studierend zentrale Konzepte (im Bereich von Gruppen, Ringen und Körpern aus zugänglichen Problemen und umfassenden Erkundungserfahrungen heraus selbstständig entwickeln (vgl. auch Hussmann, Leuders, Prediger und Barzel 2014). Ziel ist in mehreren Anläufen zunächst immer wieder der Gruppenbegriff (Leuders, im Druck):



In weiteren, vertikalen Mathematisierungsprozessen werden dann Gemeinsamkeiten und logische Abhängigkeiten ausgelotet und ein axiomatisiertes, abstraktes Gruppenkonzept entwickelt.

Beispiel 1: Interaktive Erkundung der Verknüpfung von Deckabbildungen. Das Computerapplet erlaubt eine flexible und visuell animierte Darstellung der Deckabbildungen.

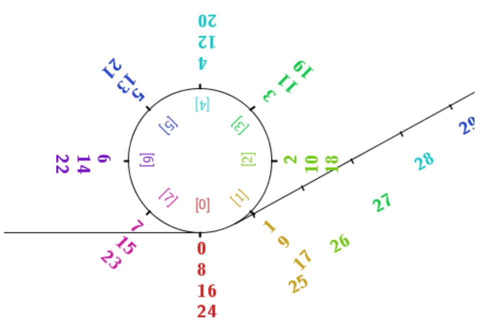


∘	1	r	r^2	r^3	s_1	s_2	s_3	s_4
1	1	r	r^2	r^3	s_1	s_2	s_3	s_4
r	r	r^2	r^3	1	s_4	s_1	s_2	s_3
r^2	r^2	r^3	1	r	s_3	s_4	s_1	s_2
r^3	r^3	1	r	r^2	s_2	s_3	s_4	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	1	r	r^2	r^3
s_2	s_2	s_3	s_4	s_1	r^3	1	r	r^2
s_3	s_3	s_4	s_1	s_2	r^2	r^3	1	r
s_4	s_4	s_1	s_2	s_3	r	r^2	r^3	1

Beispiel 2: Über Symmetriebrechung gelangt man zu den Konzepten „Untergruppe“ und „Schnitt von Gruppen“. Das Gruppenkonzept wird zunächst als konkrete Symmetriegruppe erlebt. Phänomene wie Invarianz, Erzeugung, Symmetriebrechung etc. dienen als Erfahrungsbasis:

$$\{1, d_{90}, d_{180}, d_{270}, s_a, s_1, s_2, s_3\} \cap \{1, d_{120}, d_{240}, s_a, s_b, s_c\} = \{1, s_a\}$$

Beispiel 3: Der aufgewickelte Zahlenstrahl als Visualisierung der Restklassenarithmetik. Anstelle der Arithmetik der bekannten Zahlbereiche, wird der verfremdende Blick auf die Restklassenarithmetik und ihre Phänomene geworfen. Auch hier treten wieder Faktorgruppen als Phänomen auf und können erstmals formalisiert werden:

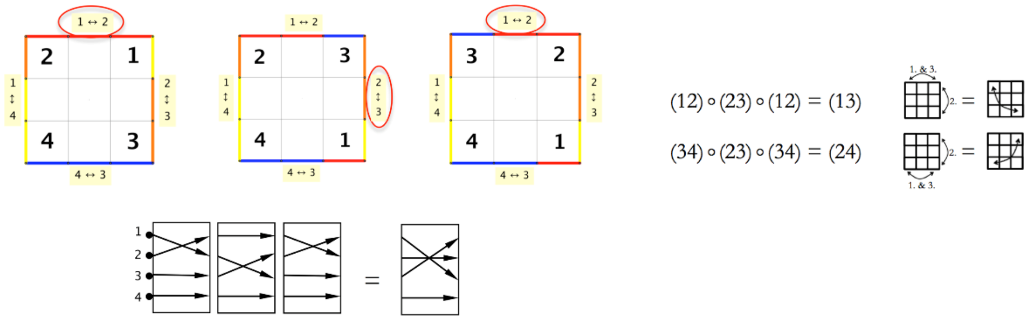


•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
3	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
6	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
7	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
10	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
11	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1

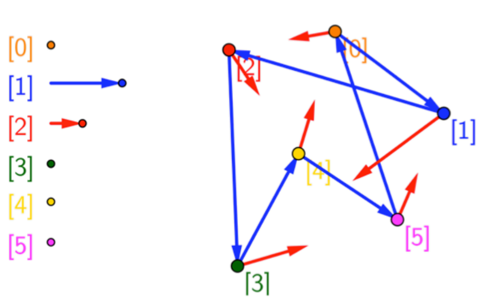
umsortieren →

•	0	4	8		1	5	9		2	6	10		3	7	11
0	0	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0
4	0	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0
8	0	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0
1	0	0	0		1	1	1		2	2	2		3	3	3
5	0	0	0		1	1	1		2	2	2		3	3	3
9	0	0	0		1	1	1		2	2	2		3	3	3
2	0	0	0		2	2	2		0	0	0		2	2	2
6	0	0	0		2	2	2		0	0	0		2	2	2
10	0	0	0		2	2	2		0	0	0		2	2	2
3	0	0	0		3	3	3		2	2	2		1	1	1
7	0	0	0		3	3	3		2	2	2		1	1	1
11	0	0	0		3	3	3		2	2	2		1	1	1

Beispiel 4: Die Lösung des zweidimensionalen Zauberwürfels dienst als Anlass zur Entwicklung eines Permutationskalküls:



Beispiel 5: Die Untersuchung des abstrakten Gruppenkonzeptes geschieht mithilfe von Cayleydiagrammen:



+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Literatur

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers II Issues in mathematics education*. Providence: AMS.

Carter, N. C. (2009). *Visual group theory*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: China lectures. Klüwer

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S., & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA). *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 419-422). Münster: WTM Verlag

Leuders (im Druck). *Gruppen als Modelle – Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse*. Erscheint in: G. Kaiser & W. Henn: Festschrift für Werner Blum.

Leuders, T. (2015). *Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Springer

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). *Mathematical knowledge in teaching* (Vol. 50): Springer.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). *Teaching and learning group theory. Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, (73), 139.

Timo LEUDERS, Freiburg

Validität von Modellierungen mathematischer Kompetenzen

Kompetenzmodellierung

Das Ergebnisorientierung in der Bildungspolitik und die Forderung nach diagnostischen, der Heterogenität der Schülerschaft Rechnung tragenden Lehrformen, haben das Interesse an Kompetenzmodellierungen gestärkt. Die Fachdidaktiken sind gefragt, fachbezogene Theorien zu Schülerkompetenzen zu konstruieren und empirisch zu fundieren praktikabler Diagnoseinstrumente für die Unterrichtspraxis zu entwickeln.

In dem Überblicksartikel von Leuders (2014) wird ein vergleichender Blick auf einige prototypische Anwendungen der Modellierung mathematischer Kompetenzen geworfen, wie sie in den letzten Jahren vorgeschlagen oder umgesetzt wurden. Ziel ist dabei, theoretisch aufzuzeigen, auf welche Weise die *Validität* solcher Modelle bewertet werden kann und welche Rolle hierbei die fachdidaktische Perspektive spielt. Es wird aufgezeigt, wie eine systematische Bewertung von sechs Validitätsaspekten (inhaltliche, kognitive, strukturelle, generalisierende, externe und konsequentielle Validität) eine differenzierte Einschätzung bestehender Anwendungen von Kompetenzmodellierungen und Hinweise für deren Weiterentwicklung liefern kann.

Im Vortrag wurden einige Beispiele für Kompetenzmodellierungen aus dem genannten Beitrag dargestellt und hinsichtlich ihrer Validität diskutiert. Kompetenzmodellierungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie als *theoretischen* Ausgangspunkt einen *Kompetenzbegriff* wählen (Weinert 2001; Klieme 2004) und dass sie *methodisch* auf neuere *psychometrische Modelle* latenter Persönlichkeitsmerkmale zurückgreifen (Rost 2004; Wu u. Adams 2007). Eine Aufgabe der Fachdidaktiken besteht folglich darin, ihr spezifisches Wissen über den Kontext in die Kompetenzforschung einzubringen (Wendt u. Bos 2011; Leuders 2011). Der Begriff *Kompetenzmodellierung* hebt den Prozesscharakter der Konstruktion und Anwendung von Kompetenzmodellen hervor. Diese Auffassung findet man auch im DFG-Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (2007-2013, Klieme u. Leutner 2006), welches sich entlang der Bereiche „theoretische Modelle“, „psychometrische Modelle“, „Messkonzepte und Messverfahren“ und „Nutzung von Diagnostik und Assessment“ strukturiert (vgl. Pellegrino, Chudowsky u. Glaser, 2001).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Validitätsaspekte

Betrachtet man Kompetenzmodellierung unter der Frage der Validität, so eignet sich in besonderer Weise die Perspektive von Messick (1989, 1995), welche Validität nicht als eine Reihe von Eigenschaften eines Messinstruments sondern als fortwährendem Prozess der argumentativen und empirischen Verteidigung miteinander verbundener Validitätsaspekte ansieht. Die Fachdidaktiken können von dieser differenzierteren Sichtweise auf Validität profitieren. Messick (1995) unterscheidet und beschreibt sechs Validitätsaspekte: (1) Inhaltliche Validität: Curriculare und theoretische Absicherung des modellierten Bereichs (content aspect), (2) Kognitive Validität: Passung der kognitiven Prozesse bei der Kompetenzerfassung zum postulierten theoretischen Kompetenzmodell (substantive aspect), (3) Strukturelle Validität: Passung von theoretischem Kompetenzmodell und gewähltem psychometrischem Messmodell (structural aspect), (4) Verallgemeinerbarkeit: Angemessenheit einer über die Aufgaben- und Personengruppe hinausgehenden Interpretation (generalizability aspect), (5) Externe Validität: Angemessenheit mit Blick auf konvergente, diskriminante und prädiktive Zusammenhänge mit anderen Konstrukten (external aspect), (6) Konsequentielle Validität: Angemessenheit der Nutzung im pädagogischen oder bildungspolitischen Kontext (consequential aspect).

Diese sechs Validitätsaspekte erlauben eine systematische, alle Schritte einer Kompetenzmodellierung durchdringende Validitätsanalyse, die dabei hilft, die für jeden Schritt spezifischen Validitätsbedrohungen zu erkennen und zu bewältigen.

(1) Inhaltliche Validität (content aspect): Am Beginn einer Kompetenzmodellierung steht die Setzung eines inhaltlichen Rahmens, dessen Breite und Auflösungsvermögen erheblich variieren kann: von der gesamten schulischen Domäne Mathematik bis hinunter zur Beschreibung bestimmter Einzelfähigkeiten, wie z.B. der Addition im Zehnerraum.

Bei der Modellierungen breiter und mittlerer Kompetenzbereiche fußt die Absicherung der inhaltlichen Validität oft auf einer Ableitung aus normativen Beschreibungen eines Kompetenzbereiches, was man auch als curriculare Validität bezeichnen kann. Bei mittlerer Breite kann die von Newell u. Simon (1972) beschriebene cognitive task analysis (CTA) besonders affin zum Kompetenzkonzept, da sich Kompetenzen sich ja qua Definition über typische Anforderungssituationen definieren (Weinert 2001). Dabei besteht oft ein Spannungsverhältnis zwischen deskriptiven und normativen Zielsetzungen, die mit einer Kompetenzmodellierung vorgenommen werden: Sollen beispielsweise die Kompetenzmodelle, die Bildungsstandards zugrunde liegen, das normalerweise Erreichbare beschreiben oder sollen sie neue curriculare Impulse setzen? Bei der Modellierung engerer Kompetenzbereiche können Theorien über die jeweils relevanten Kognitionen zu Rate gezogen werden (Embretson 1994; Mislevy 1996; Rupp u. Mislevy 2007). Dies kann sowohl theoretisch als auch empirisch durchgeführt werden, was in der Fachdidaktik in etwa den beiden komplementären Ansätzen der stoffdidaktischen Analyse durch Expertinnen und Experten einerseits und der empirischen Analyse individueller Lernprozesse in Fallstudien andererseits entspricht.

(2) Kognitive Validität (substantive aspect): Die Brücke zwischen theoretischen Kompetenzmodellen und ihrer empirischen Erfassung bildet die Konkretisierung der Theorieelemente durch Aufgabensituationen. Eine mangelnde Passung zwischen den theoretischen Konstrukten und den tatsächlich ablaufenden Kognitionen, die durch die spezifische Operationalisierung angeregt werden, kann eine ernste Validitätsbedrohung darstellen. Der Weg von den allgemeinen Situationen, welche als konstitutiv für einen Kompetenzbereich angesehen werden, bis hin zu den konkreten Erfassungsituationen gleicht einem mehrschrittigen Übersetzungsvorgang, bei dem jedesmal die inhaltliche Bedeutung beeinträchtigt werden kann.

Argumente zur kognitiven Validität können theoretischer oder empirischer Natur sein. Sie können über das Urteil von Expertinnen und Experten generiert werden (Rubio et al. 2003 oder durch eine Untersuchung der Bearbeitungsprozesse unter testnahen Bedingungen in so genannten „cognitive labs“ (Snow u. Lohman 1989) erfolgen.

(3) Strukturelle Validität (structural aspect): Zur psychometrischen Beschreibung von Kompetenzen kann auf eine Vielzahl von Messmodellen zurückgegriffen werden, welche durch eine probabilistische Modellierung latenter Fähigkeiten dem nicht-deterministischen Charakter menschlicher Leistungen Rechnung tragen (Rost 2004; DiBello et al. 2007). Eine Vielzahl von Modellvarianten ergibt sich durch (i) Art und Zahl zu schätzender Parameter, (ii) Art und Zahl der latenten Variablen und (iii) strukturelle Eigenschaften (z.B. Dimensionalität). Die große Vielfalt dieser Modelle erlaubt es, solche auszuwählen, die das Verhalten der Probanden auf eine möglichst passende Weise beschreiben und damit reliable und valide Messungen ermöglichen. Wenn eine solche Passung jedoch nicht exploratorisch durch Anpassung hinreichend vieler Parameter geschehen soll, braucht es a priori eine strukturelle Korrespondenz zwischen gewähltem psychometrischem Modell und dem zu modellierenden Kompetenzbereich. Hartig (2008) zählt zu Kriterien für eine strukturell valide Modellwahl die angemessene Wahl der Art der Personenvariablen (kontinuierlich/kategorial), der dimensionalen Struktur oder der (nicht)kompensatorischen Modellierungsansätze.

(4) Verallgemeinerbarkeit (generalizability aspect) und

(5) Externe Validität (external aspect) wurden im Vortrag nicht behandelt – s. aber Leuders (2014).

(6) Konsequentielle Validität (consequential aspect): Die Nutzung von Kompetenzmodellierungen für das Bildungsmonitoring auf Systemebene, die Rückmeldung von Leistungsdaten auf Klassen- und Schulebene mit dem Ziel der Schul- und Unterrichtsentwicklung, die Professionalisierung im Sinne der Förderung diagnostischer Kompetenzen von Lehrkräften oder die Unterstützung individueller Diagnose zur Vorbereitung pädagogischer Förderentscheidungen bedarf jeweils angpasster Formate (Pellegrino et al. 2001, S.2: „Often a single assessment is used for multiple purposes; in general, however, the more purposes a single assessment aims to serve, the more each purpose will be compromised. For instance, many state tests are used for both individual and program assessment purposes. This is not necessarily a problem, as long as assessment designers and users recognize the compromises and trade-offs such use entails.“

Beispielmodellierungen

Im Vortrag und in Leuders (2014) wurde eine Reihe von Kompetenzmodellierungen für den Mathematikunterricht der letzten Jahrzehnte vorgestellt und hinsichtlich der genannten Validitätsaspekte diskutiert:

Typ 1: Eindimensionale Kompetenzskalen für breite curricularen Bereichen mit eine kontinuierliche Fähigkeitsvariable zum direkten Vergleich zwischen Individuen oder Gruppen. *Typ 2: Mehrdimensionale Kompetenzskalen* für einen curricular engeren Bereich durch mehrere kontinuierliche Fähigkeitsvariablen zur Identifikation von unterschiedlichen Fähigkeitsprofilen. *Typ 3: Kompetenzstufenmodelle* mit theoretisch a priori definierten Stufen sowie *Typ 4: Kategoriale Kompetenzstrukturmodelle* mit einem engen Fähigkeitsbereich auf der Basis kognitiver Theorien und kategorialer Fähigkeitsvariablen zur Rückmeldung über die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Kompetenzprofil („kognitive Diagnosemodelle“)

Die kritische Darstellung von Vorzügen aber auch typischen Validitätsbedrohungen, sowie eine ausführliche Literaturliste findet man bei

Leuders, T. (2014). Modellierungen mathematischer Kompetenzen – Kriterien für eine Validitätsprüfung aus fachdidaktischer Sicht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(1), 7-48. doi: 10.1007/s13138-013-0060-3

Anke LINDMEIER, Meike GRÜSSING, Aiso HEINZE, Kiel

Mathematisches Argumentieren bei fünf- bis sechsjährigen Kindern

Die Fähigkeit von Kindern zum mathematischen Argumentieren ist aus verschiedenen Perspektiven ein für die Mathematikdidaktik interessanter Untersuchungsgegenstand: Zum einen sind mathematische Argumentationsfähigkeiten ein Zielbereich von Mathematikunterricht mit Grundlegung in der Grundschule (KMK, 2004). Dies legitimiert sich durch den speziellen Charakter der Mathematik als „beweisende Wissenschaft", in der das Beweisen als Hauptmerkmal einer deduktiven Wissenschaft erscheint, wobei Beweisen wiederum als Spezialfall von mathematischem Argumentieren aufgefasst werden kann (zsf. Jahnke & Ufer, 2015). Neben diesen Gegenstandsaspekt tritt zum anderen ein Lernprozessaspekt, da Argumentationsprozessen beim Erwerb konzeptuellen Verständnisses eine wichtige Rolle zugeschrieben wird (Kuhn, 1993). Mathematische Argumentation ist unter diesem Blickwinkel auch eine unterrichtliche Kommunikationsform.

Doch trotz des zugesprochenen Stellenwertes sind mathematische Argumentationskompetenzen von Kindern im Vor- oder Grundschulalter wenig untersucht. Insbesondere ist unklar, was unter einer altersgemäßen Form von mathematischer Argumentation vor Schulbeginn verstanden werden kann. Die Voraussetzungen in Bezug auf diese Fähigkeiten zu Schulbeginn sind also bisher unzureichend beschrieben. Ziel dieser Studie ist entsprechend, für Kinder im letzten Kindergartenjahr eine Modellierung der Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren vorzuschlagen.

Zudem stellt sich die Frage nach der Eigenständigkeit und Ausprägung dieser Fähigkeiten. In der Kognitionspsychologie erwies sich bei Untersuchungen zum schlussfolgernden Denken bei Kindern insbesondere die Abgrenzung zu Wissen sowie generischen Fähigkeiten (z.B. kognitive Grundfähigkeiten; Sprachfähigkeiten) als schwierig. Mathematisches Wissen entwickelt sich zudem in dieser Altersgruppe schnell, so dass das Alter der Kinder zudem berücksichtigt werden muss (zsf. Goswami, 2001).

Die Forschungsfragen sind entsprechend: (1) Über welche (Vorläufer-) Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren verfügen Kinder im letzten Kindergartenjahr? (2) Können diese Fähigkeiten von mathematischem Wissen sowie kognitiven Grundfähigkeiten differenziert werden?

Frühe mathematische Argumentationsfähigkeiten – was ist das?

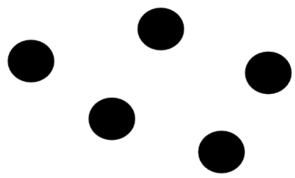
Mathematisches Argumentieren ist als eine der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik Grundschule

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

beschrieben (KMK, 2004). Neben der selbstständigen Prüfung mathematischer Aussagen (im engeren Sinn mathematisches Argumentieren) umfasst die Beschreibung auch Vorläuferfähigkeiten (z.B. mathematische Zusammenhänge erkennen; Begründungen nachvollziehen). In den amerikanischen Bildungsstandards werden mathematische Argumentationsfähigkeiten bereits im Vorschulbereich gefordert (NCTM, 2000, 2003).

Für die Situation in Deutschland ist unklar, ob und in welchem Umfang Kinder zu Beginn der Grundschulzeit bereits solche Kompetenzen ausgebildet haben. Aufgrund der vergleichsweise gering ausgeprägten systematischen mathematischen Lerngelegenheiten im Kindergarten in Deutschland dürften hier eher die o.g. Vorläuferfähigkeiten, denn mathematisches Argumentieren im engeren Sinne erwartet werden.

(Handpuppe sitzt auf dem Tisch)
Hier lege ich ein paar Steine hin.
(Steine hinlegen)
Bodo möchte diese Steine gerne zählen.
Das macht er so:



(Handpuppe spielen und immer einen Stein berühren)
„Eins, …, zwei, …, zwei, …, drei, …, vier. Vier Steine!“
Welchen Fehler hat Bodo da beim Zählen gemacht?
(Falls Kontrastierung mit richtigem Zählen: 1x Frage wiederholen)

Bewertungskriterium: Identifiziert ursächlichen Fehler. Bewertung: 1 Punkt: „zwei doppelt gezählt“ wird erkannt; 0 Punkte: z. B. Kontrastierung mit richtigem Zählprozess, vergessen/überspringen/schlampig gezählt

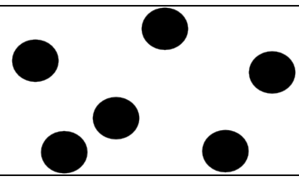
Abb. 1: Beispielaufgabe zu Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren, Aspekt Nachweisen

Als früh verfügbare Fähigkeiten mit Bezug zu mathematischen Argumentationsprozessen kann das (a) Erkennen von Beziehungen (zwischen Objekten/Eigenschaften/Strukturen) sowie das (b) Verallgemeinern (Ausgangslage analysieren und fortsetzen; Muster extrapolieren) gesehen werden. Im engeren Sinne bereits mathematische Argumentationsfähigkeiten sind das (c) Ziehen von Schlüssen (Analyse eines Problems führt zu einem Schluss auf nicht direkt Sichtbares; Schlussfolgern auf Basis eines Falls/mehrerer Fälle) und das (d) Nachweisen (Argumente überprüfen; Gegenbeispiele formulieren; Argumente finden; vgl. Beispielaufgabe in Abb. 1) zu identifizieren. Vorerst wurden diese vier Teilaspekte des mathematischen Argumentierens berücksichtigt und operationalisiert, wobei angepasst an die Zielgruppe der Kinder im Kindergartenalter ein materialbasiertes Interview gewählt wurde.

Anlage der Studie und Stichprobe

In der vorliegenden Studie wurde entsprechend ein materialbasierter Test zu Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren (14 Items in 13 Stämmen) entwickelt und bei N = 120 Kindern (44% weiblich) im Alter von M = 70,6 Monaten (SD = 5,5 Monate) eingesetzt. Zur differenzierten Analyse der Testcharakteristika wurde bei einer Teilstichprobe von N = 83 Kindern (M = 68,9 Monate, SD = 4,3 Monate, 43% weiblich) an einem weiteren Testtag die Arbeitsgedächtnisleistung (HAWIK-IV, Subtest „Zahlen nachsprechen“, Petermann & Petermann, 2008) als Indikator für kognitive Grundfähigkeiten sowie mathematisches Wissen erhoben. Um sprachauffällige Kinder identifizieren zu können wurde zudem ein bildbasierter Sprachindikator (Eigenentwicklung, 2 Items) verwendet, der erforderte, in nicht-mathematischen Alltagssituationen eine einfache Implikation anzugeben. Insgesamt wurden 9 Kinder aus der Auswertung ausgeschlossen, da sie dies nicht konnten. Die Analysen im Folgenden beziehen sich also auf insgesamt 111 Kinder, wobei für 75 ein vollständiger Datensatz vorliegt.

Hier lege ich ein paar Steine hin.
(Steine auf den Tisch legen)
Kannst du diese Steine bitte einmal laut zählen?
Wie viele Steine sind es dann insgesamt?



Bewertung: 1 Punkt: richtig gezählt und richtige Antwort gegeben;
0,5 Punkte: richtig gezählt; 0 Punkte: sonst

Abb. 2: Beispielaufgabe zum mathematischen Wissen

Ein zusätzlicher Test Test zum mathematischen Wissen (Eigenentwicklung, 17 Items in 11 Stämmen, Beispielaufgabe siehe Abb. 2) war ebenfalls als materialbasiertes Interview gestaltet und umfasste die mathematischen Inhalte, die im Argumentationstest genutzt werden sollten.

Ergebnisse

Im ersten Schritt wurden Skalenanalysen durchgeführt, um die Eigenschaften der entwickelten Tests zu überprüfen. Die interne Konsistenz des mathematischen Wissenstests erwies sich mit Cronbachs Alpha = .69 (SE = .01) als zufriedenstellend. Die 75 Kinder erzielten hier im Mittel eine Lösungsrate von M = .58 (SD = .16). Der Test konnte also gut die Fähigkeiten der Kinder abbilden. Der Test zu den (Vorläufer-)Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren wies eine interne Konsistenz von Cronbachs Alpha = .68 (SE = .01) auf, was als zufriedenstellend bewertet wurde. Mit einer mittleren Lösungsrate von M = .29 (SD = .19) ist der Test für die Gesamtstichprobe von 111 Kindern als eher schwer einzustufen.

Die Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren korrelieren positiv mit dem mathematischen Wissen ($r = .58$, $p < .001$) bzw. der Arbeitsgedächtnisleistung ($r = .29$, $p = .01$), jedoch nicht mit dem Alter der Kinder ($r = .04$, $p = .75$). Im Regressionsmodell kann nur das mathematische Wissen als signifikante Einflussgröße bestätigt werden, die ergo ca. 34% der Varianz der Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren erklären kann. Die Konstrukte Wissen und mathematische Argumentationsfähigkeiten können entsprechend als hinreichend unabhängig bewertet werden.

Zusammenfassung und Diskussion

Auch wenn in dem Argumentationstest im Wesentlichen Vorläuferfähigkeiten im Sinne des Herstellens von Zusammenhängen bzw. des Nachvollziehens von Begründungen abgebildet wurde, so wird deutlich, dass es sich bei diesem Konstrukt um mehr als mathematisches Begriffswissen handelt. In einer Folgestudie soll die Entwicklung dieser Fähigkeiten im Verlauf des letzten Kindergartenjahres untersucht werden, um ihre Stabilität bzw. Variabilität im Übergang zur Grundschulzeit einschätzen zu können. Darüber hinaus stellt sich die Frage nach der spezifischen Prädiktionskraft für die mathematische Argumentationskompetenz (vgl. Gegenstandsaspekt) und den mathematischen Kompetenzerwerb (vgl. Lernprozessaspekt) im Grundschulalter.

Literatur

Goswami, U. (2001). *So denken Kinder.* Bern: Huber.

Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Heidelberg: Springer Spektrum.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. München: Luchterhand.

Kuhn, D. (1993). Science as argument: Implications for teaching and learning scientific thinking. *Science Education*, *77*(3), 319-337.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2003) (Hrsg.) *Navigating through problem solving and reasoning in preK-K.* Reston, VA: NCTM.

Petermann, F. & Petermann, U. (Hrsg.) (2008). *Hamburg-Wechsler-Intelligenztest für Kinder IV (HAWIK-IV)*. Bern: Huber.

Frauke LINK, Konstanz

Best practice 2.0 – Von der Schwierigkeit von guten Beispielen zu lernen

Vor drei Jahren wurde für die Hochschule für Technik, Wirtschaft und Gestaltung (HTWG) in Konstanz im Rahmen des vom Ministerium für Wissenschaft und Kultur Baden-Württemberg geförderten Projektes „Hereinspaziert! – forschend lernen an der HTWG“ unter anderem ein pragmatischer Ansatz gesucht, die Bedingungen der Studieneingangsphase in Mathematik ergänzend zu den Vorkursen zu verbessern. Gefunden wurde das Projekt „Mathe plus“ der Ruhr-Universität Bochum (vgl. Griese et al. 2011, Griese & Kallweit 2013, Lehmann & Rösken-Winter 2013). Das Best-Practice-Modell auf einen anderen Hochschultyp zu übertragen scheint nach verschiedenen Anläufen gelungen. In der Retrospektive wird reflektiert, welche Kernaspekte an der HTWG zum Erfolg führten.

1. Ausgangsproblematik, Best Practice und eigene Rahmenbedingungen

Bei der HTWG Konstanz handelt es sich um eine Hochschule für angewandte Wissenschaften mit den sechs Fakultäten Bauingenieurwesen, Maschinenbau, Elektrotechnik und Informationstechnik, Informatik, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften und Architektur und Gestaltung. In vielen der Fakultäten ist Mathematik verpflichtendes Fach in den ersten Semestern des Bachelor-Studiums und wichtige Grundlage für weitere, technische oder wirtschaftliche Fächer.

Die Rahmenbedingungen an der Universität Bochum in der Mathematikausbildung der zukünftigen Ingenieurinnen und Ingenieure und im Projekt Mathe Plus waren gekennzeichnet durch eine zentrale Mathematik-Grundlagenveranstaltung für alle Studierenden, durch eine Projektverankerung in der Fakultät für Mathematik und durch eine bereits bestehende offene mathematische Sprechstunde.

Die Rahmenbedingungen an der HTWG Konstanz waren gekennzeichnet durch dezentrale Mathematik-Grundlagenveranstaltungen (ca. 10 verschiedene, studiengangbezogene Veranstaltungen), durch Projektverankerung am Präsidium (Vizepräsidentin für Lehre) und durch enge Bindung der Studierenden in ihren Studiengängen, durch einzelne fakultätseigene Mathematikprogramme aber ohne hochschulweite Strukturen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Projektphasen

Seit dem Sommersemester 2013 wurde das an der HTWG sogenannte „Lerngruppenprojekt Mathematik“ semesterbegleitend durchgeführt und von der ursprünglichen Variante aus weiterentwickelt.

Folgende Bestandteile wurden dabei verändert: Die in Mathe Plus eingesetzte **Probeklausur** kann wegen der Diversität der Veranstaltungen nicht zentral gestellt werden. In einigen Veranstaltungen gibt es Zwischentests, anderen Lehrenden wird sie als didaktisches Mittel empfohlen. Die **Anmeldung** findet auf Papier statt und wird nur zu Organisationszwecken eingesetzt. Es gibt keine Auswahl der Studierenden. Jeder darf sich anmelden und mitmachen. Darüber hinaus wird zu Semesterbeginn das Projekt in jeder Veranstaltung persönlich vorgestellt. Ein **Helpdesk** war organisatorisch für die verschiedenen Veranstaltungen nicht aufrecht zu erhalten. Stattdessen wurden Studiengang spezifische Tutoren in die Lerngruppenveranstaltung integriert. Zur **digitalen Unterstützung** gehört seit kurzer Zeit auch ein Grundlagenkurs in Mathematik, der auf der zentralen Lernplattform mit WIRIS© implementiert wurde. Das **Repetitorium** kann nicht vor der Klausur stattfinden, da diese direkt im Anschluss an das Semester geschrieben wird. Sie ist laut Studien- und Prüfungsordnung unmittelbar abzulegen. Wir bieten also das Repetitorium auf Anfrage an, wenn jemand trotz regelmäßiger Teilnahme an der Lerngruppe die Prüfung nicht besteht.

Folgende Bestandteile sind unverändert geblieben: Das **Lerngruppentreffen** findet wöchentlich statt. Gruppenbildungsprozesse werden von der Leitung unterstützt. Die Leitung leistet auf mehreren Ebenen inhaltliche und didaktische Arbeit. Auch **Arbeitsbücher** werden als didaktisches Element zur Verankerung der lernstrategischen Wissenselemente nach wie vor eingesetzt.

Folgende Bestandteile sind nicht weitergeführt worden: Das **Auswahlverfahren** wurde gar nicht erst eingesetzt, da die Befürchtung bestand, Studierende abzuschrecken. Die Verbindlichkeit der **Teilnahmevereinbarung** schien ebenfalls zu strikt. Das **Learning Log** bzw. Lerntagebuch ist nicht mehr Bestandteil der Veranstaltung. Es wurden ähnliche Erfahrungen gemacht wie bei Kallweit & Griese (2014, siehe auch Griese & Kallweit 2014). Es gibt kein **E-Learning-Netzwerk** zum Austausch mehr, da es auf der zentralen Lernplattform nicht ausreichend angenommen wurde und der Austausch über soziale Netzwerke sich als rechtlich kritisch erwies. Auch **Paten** gibt es in der Form von Mathe Plus nicht mehr. Allerdings erweisen sich die Tutoren in der Lerngruppe häufig auch als Ansprechpersonen in dieser Funktion.

3. Rückblick: Rekonstruktion von Erfolgsfaktoren

Die erfolgreiche Adaption von Best Practice ist nicht selbstverständlich. Was waren also die Bedingungen, die die Projektstruktur an der HTWG haben entstehen lassen? Es können an dieser Stelle keine abschließend sicheren Faktoren analysiert werden. Einige Punkte haben sich jedoch als besonders wichtig herausgestellt.

Bei der Einrichtung des Lerngruppenprojekts war vor allem die Unterstützung aller Beteiligten wichtig. In Einzelgesprächen mit allen Lehrenden der Mathematik im ersten Semester ging es vielfach auch um Anerkennung der Mühen und Strukturen, die schon vorher geschaffen worden waren, um das Problem der Heterogenität im Fach Mathematik im Studieneinstieg zu bewältigen. Auch die grundsätzliche Frage danach, wie viel zusätzliche Starthilfe eine Bildungsinstitution leisten kann, soll oder muss war Teil des Diskurses. Nach dem ersten Semester mit einer Lehrperson wurde der Kreis im zweiten Durchlauf um eine weitere erweitert, dann um fünf weitere, um schließlich genug Erfahrung in der konkreten Projektausgestaltung zu besitzen, um auch die restlichen Studierenden wie Lehrenden an das Projekt zu koppeln. Erst im vierten Durchlauf wurde das Lerngruppenprojekt hochschulöffentlich, zu einem Zeitpunkt, an dem auch alle Studierenden die Möglichkeit zur Partizipation hatten.

Die Flexibilität in der Ausgestaltung der Veranstaltungsabläufe war zwingend notwendig, um das Lerngruppenprojekt, wie oben beschrieben, an die örtlichen Gegebenheiten anzupassen.

Während die Konzeption von Mathe Plus aus der Theorie heraus entstanden ist und seither weiterentwickelt wird, lassen sich durch die verschiedenen Stadien während der Adaption Qualitäts-Kriterien verschiedener Programmbestandteile feststellen. Eines dieser kritischen, aber wichtigen Punkte ist die **Lerngruppen-Leitung**. Im Vergleich zu einem Semester, in dem die Lerngruppen-Leitung auf Studierende übertragen wurde, war die Erfolgsquote der Studierenden, als auch die Akzeptanz des – zugegebenermaßen nicht ganz einfachen – didaktischen Konzepts unter den Studierenden höher. Wenig überraschend aber doch deutlich zeigte sich, dass die Lerngruppen-Leitung dann erfolgreich ist, wenn ausreichend Mathematikwissen vorhanden ist und die Person in der Lage und willens ist, eine Leitungsfunktion zu übernehmen, die das Anregen von Gruppen- und Lernprozessen einschließt. Fachdidaktisches Wissen erwies sich nicht direkt als nötig.

Das regelmäßige Studierendenfeedback zeigt uns, dass die Studierenden aus **Unsicherheit** zu uns kommen. Sie wissen nicht, ob sie zu Studienbeginn genug Mathematik beherrschen und ob sie in der Lage sein werden, den Anforderungen im Studium zu genügen. Das Lerngruppen-Projekt gibt ihnen also emotionale Sicherheit. Wir vermuten, dass dies die Veranstaltung zu Beginn attraktiv macht: Die Aussicht auf unmittelbare fachliche Hilfe, die Aussicht auf „Belohnung“ durch das Repetitorium, als auch die fremdgesteuerte Aufnahme in eine Gruppe. Dies könnte auch erklären, dass die Studierenden über das Semester die zunächst für sie zeitlich und inhaltlich belastenden Themen akzeptieren: Dies sind das aktive und selbstgesteuerte Arbeiten in einer Lerngruppe und die Wissens-Inputs zu Lernthemen, die von ihnen zu Beginn erst einmal „ausgesessen“ werden, bis etwa nach der fünften Sitzung erkannt wird, welchen Nutzen die Inputs haben können.

Im Bereich Lernstrategien, der zentraler Aspekt in der Entwicklung von Mathe Plus war, zeigt sich an der HTWG, dass allein in Bezug auf die regelmäßige Anwesenheit während des Lerngruppen-Projektes ein wesentlicher Indikator für das Bestehen der Abschlussklausur ist.

4. Fazit

Das Abgucken hat sich bewährt und wird zur Nachahmung empfohlen. Das Anpassen war nötig aber möglich. Es ergeben sich einige interessante Fragen, insbesondere aber die Frage danach, warum das Konzept auch ohne einige der ursprünglichen Bestandteile funktioniert.

Literatur

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., & Rösken, B. (2011). Mathematik als Eingangshürde in den Ingenieurwissenschaften. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster, Germany: WTM, S. 319-322.

Griese, B., & Kallweit, M. (2013). Lernunterstützung in Mathematik - Erfahrungen aus der Servicelehre. In R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.): *Vol. 2013, Nr. 1. khdm-Report, Mathematik im Übergang Schule / Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung,* S. 67-68.

Griese, B., & Kallweit, M. (2014): Lerntagebücher in der Studieneingangsphase - eine Bilanz. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster, Germany: WTM, S. 455-458.

Kallweit, M., & Griese, B. (2014): Serious Gaming an der Hochschule - Mit Avataren zum Studienerfolg? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster, Germany: WTM, S. 591-594.

Lehmann, M., & Rösken-Winter, B. (2013). Starthilfe ins Studium – Konzept und Wirksamkeitsstudien des Projektes Mathe/Plus. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM-Verlag, S. 608-611.

Michael LINK, Franziska VOGT, Bernhard HAUSER, St.Gallen

Einstellungen von pädagogischen Fachkräften aus der Schweiz, Deutschland und Österreich zur mathematischen Förderung im Kindergarten

Im Rahmen des IBH-Projekts *spimaf* (Kooperationspartner PH St.Gallen, PH Weingarten, Uni Zürich, BaKiP Feldkirch und das Land Vorarlberg) wurden Einstellungen von pädagogischen Fachkräften zur mathematischen Förderung im Kindergarten erfasst. Mit den erhobenen Daten wurde u. a. die Frage untersucht, ob sich vor dem Hintergrund der länderspezifischen Kontextbedingungen Unterschiede in den Einstellungen der pädagogischen Fachkräfte zur mathematischen Förderung im Kindergarten zeigen. Ausgangspunkt war ein Ergebnis des Vorgängerprojekts *SpiF*, in dem sich – im Gegensatz zu Studien in Deutschland – keine signifikanten Unterschiede in den Lernfortschritten von einer Interventionsgruppe, die mit einem Trainingsprogramm zur mathematischen Förderung gearbeitet hat, zur Kontrollgruppe gezeigt haben (Hauser et al. 2014). Mögliche Ursachen für dieses Ergebnis könnten in Unterschieden im Bereich der Einstellungen der im Vorschulbereich tätigen Personen in Deutschland und der Schweiz liegen.

Kontexte vorschulischer Bildung

In Deutschland, Österreich und der Schweiz herrschen unterschiedliche Rahmenbedingungen für das vorschulische Lernen in Kindergärten und Kindertagesstätten. Während dieser Bereich in Deutschland und Österreich traditionellerweise dem sozialen Sektor zugeordnet war, ein Teil der vorschulischen Einrichtungen von privaten Trägern verantwortet wird und der Besuch nach wie vor unverbindlich ist, sind Kindergärten in der Schweiz inzwischen vollständig ins öffentliche Bildungssystem integriert (vgl. Oberhuemer, Schreyer & Neuman 2010, Stamm 2009). Mit dem HarmoS-Konkordat aus dem Jahr 2007 wurde der obligatorische Schuleintritt auf das vollendete 4. Lebensjahr festgelegt; damit wird der Besuch eines zweijährigen Kindergartens als erster staatlicher Bildungseinrichtung Pflicht. Im letzten Jahrzehnt wurden in Österreich und Deutschland bundeslandübergreifende Rahmenpläne für die pädagogische Arbeit in vorschulischen Einrichtungen erarbeitet und ein Bildungsauftrag für diese formuliert und konkretisiert. In der Schweiz gibt es Erziehungs- und Bildungspläne für den Kindergarten seit den 1990er Jahren (Vogt 2010). Aktuelle Entwicklungen weisen in Richtung einer engeren Verzahnung zwischen vorschulischer und schulischer Bildung: Im gerade neu erarbeiteten Lehrplan 21 für die Volksschule (D-EDK 2014) wird der Kindergarten nicht mehr als eigene Stufe ausgewiesen, sondern in einen Zyklus, der die beiden Kindergartenjahre

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

und die ersten beiden Primarschuljahre umfasst, integriert. Darin werden die zu erwerbenden Kompetenzen nach Fachbereichen, u. a. zu Mathematik, strukturiert und beschrieben.

Der Großteil der in deutschen Vorschuleinrichtungen tätigen pädagogischen Fachkräfte sind Erzieherinnen und Kinderpflegerinnen, die in Fachschulen für Sozialpädagogik und in Berufsfachschulen ausgebildet werden. Die größte Gruppe der in den österreichischen Vorschuleinrichtungen arbeitenden pädagogischen Fachkräfte sind die Kindergartenpädagoginnen. Sie absolvieren ab Klasse 9 eine fünfjährige Ausbildung an den Bundesanstalten für Kindergartenpädagogik (BAKiP), wobei ein Teil der Regelschulbesuchs integriert ist (die Schülerinnen und Schüler erwerben integriert die Matura und damit den Hochschulzugang). In der Schweiz heißen die im Kindergarten tätigen pädagogischen Fachkräfte heute Kindergartenlehrpersonen (früher: Kindergärtnerinnen). Bis Ende der 1990er Jahre wurden sie in sog. Kindergärtnerinnen-Seminaren ausgebildet, die dabei zu durchlaufende Ausbildung war vergleichbar mit der an den BAKiPs in Österreich. Seither absolvieren zukünftige Kindergartenlehrpersonen ein dreijähriges Bachelor-Studium an Pädagogischen Hochschulen, gemeinsam mit den Primarschullehrpersonen.

Zusammenfassend kann man festhalten: In Deutschland und auch in Österreich ist in den letzten 10, 15 Jahren eine Annäherung der vorschulischen Einrichtungen an das öffentliche Bildungssystem zu beobachten (vgl. Carle 2010), während in der Schweiz die Integration des Kindergartens als vorschulische Bildungseinrichtung ins öffentliche Bildungswesen in verschiedenen Bereichen schon weit fortgeschritten ist. Dies kann Auswirkungen auf die professionellen Einstellungen der pädagogischen Fachkräfte und die Gestaltung von Lerngelegenheiten im Kindergarten zur Folge haben (Burkhardt Bossi, Lieger & Kucharz 2014).

Professionelle Einstellungen pädagogischer Fachkräfte

Über alle Bildungsstufen hinweg werden professionelle Einstellungen als ein Teil professioneller Kompetenz in Lehrberufen aufgefasst; ihnen wird einen Brückenfunktion von der Umsetzung von Wissen in Handeln zugesprochen (vgl. Felbrich, Schmotz & Kaiser 2010). Anders (2012) unterscheidet eine Reihe von Facetten von Einstellungen, die im Sinne dieser Brückenfunktion Einfluss auf die Gestaltung der pädagogischen Arbeit im Kindergarten haben können. Sie nennt u.a. die epistemologischen Einstellungen zu verschiedenen Bildungsbereichen. Im Bereich Mathematik unterscheidet man hier zwischen Einstellungen bezogen auf das Fach Mathematik und Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik (vgl.

Felbrich, Schmotz & Kaiser 2010). Neben diesen gibt es weitere mögliche Facetten, die nach Anders die professionelle Haltung ausmachen und die pädagogische Arbeit im Kindergarten beeinflussen können, so z.B. Vorstellungen über die Aufgabe des Kindergartens, zum Stellenwert verschiedener Bildungsbereiche und zur eigenen pädagogischen Rolle oder Einstellungen zu frühpädagogischen Ansätzen wie Montessori oder dem Situationsansatz.

Zu einigen dieser Facetten von professionellen Einstellungen bei pädagogischen Fachkräften in Vorschuleinrichtungen liegen schon empirische Ergebnisse vor: In einer Untersuchung von Benz (2012) hat sich gezeigt, dass Erzieherinnen aus Deutschland mehr einer konstruktivistischen Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik zustimmen als einer instruktionalistischen Sichtweise. Zu Formen der Gestaltung mathematischen Lernens im Kindergarten und deren Begründung sind die Ergebnisse der qualitativen Studie von Schuler & Wittmann (2014) aufschlussreich: Die Erzieherinnen berichteten einerseits von einer mathematischen Förderung in Alltagssituationen und andererseits von einer Förderung mittels spezifischer Trainingsprogramme. Während bei ersterem die Freiwilligkeit und das Anknüpfen an die Interessen der Kinder betont wurde, wurde der Einsatz der Programme mit einem im Vergleich zum Alltag zielorientierterem, weniger zufälligem Lernen und der Schulvorbereitung begründet.

Ergebnisse

Orientiert an bestehenden Instrumenten wurden verschiedene Facetten der professionellen Einstellungen pädagogischer Fachkräfte in Form von Skalen erfasst. Die Items der Skalen bestehen aus Aussagen, zu denen die pädagogischen Fachkräfte auf gestuften Likertskalen ihre Zustimmung zum Ausdruck bringen sollen. Die Untersuchung wurde in Form eines Online-Fragebogens durchgeführt. Insgesamt nahmen 545 pädagogische Fachkräfte an der Untersuchung teil (D: 146, A: 171, CH: 228).

Im Bereich der epistemologischen Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik stimmen die pädagogischen Fachkräfte aus allen drei Ländern im Mittel der konstruktivistischen Perspektive auf Mathematik zu und lehnen eine transmissionsorientierte Sichtweise eher ab. Zwischen den Personen der drei Länder zeigen sich keine statistisch relevanten Unterschiede, die unterschiedlichen Kontextbedingungen in den drei Ländern schlagen sich hier nicht nieder. Ebenso zeigten sich keine Unterschiede in Bezug auf den wahrgenommenen Nutzen von spezifischen Lehrmitteln und Programmen zur mathematischen Frühförderung. Mittels einer eigenen Skala wurde eine eher passive Haltung zur mathematischen Förderung im Kindergarten abgebildet, nach der diese nebenbei im Alltagsgeschehen stattfinden sollte, ohne dass eine Planung oder Vorbereitung notwendig wäre. Während die Personen aus Deutschland und Österreich den Aussagen dieser Skala im Mittel eher zustimmen (M=4.09, SD=0.68 und M=4.01, SD=0.76), lehnen die Personen aus der Schweiz die Aussagen eher ab (M=3.36, SD=0.62; der Wert 3.5 stellt eine neutrale Haltung zu dieser Skala dar). Dieser Unterschied liegt im Bereich einer Standardabweichung und ist statistisch signifikant, er kann als zielgerichtetere Herangehensweise der Schweizer pädagogischen Fachkräfte an die mathematische Förderung im Kindergarten gedeutet werden. Darin spiegelt sich die vorangeschrittene Integration der vorschulischen Bildung ins öffentliche Bildungssystem in der Schweiz wider.

Literatur

Anders, Y. (2012). *Modelle professioneller Kompetenzen für frühpädagogische Fachkräfte.* Expertise zum Gutachten "Professionalisierung in der Frühpädagogik" im Auftrag des Aktionsrats Bildung. München: vbw.

Benz, Ch. (2012). Attitudes of Kindergarden Educators about Math. In: *JMD*, 33, H.2, S. 203-232.

Burkhardt Bossi, C., Lieger, C. & Kucharz, D. (2014). Die Struktur der teilnehmenden frühpädagogischen Einrichtungen in der Schweiz und Deutschland. In: D. Kucharz, K. Mackowiak, S. Ziroli, A. Kauertz, E. Rathgeb-Schnierer & M. Dieck (Hrsg.), *Professionelles Handeln im Elementarbereich (PRIMEL).* Münster: Waxmann.

Carle, U. (2010). Curriculare und strukturelle Entwicklungen in Deutschland. In: M. Leuchter (Hrsg.), *Didaktik für die ersten Bildungsjahre. Unterricht mit 4- bis 8-jährigen Kindern.* Zug: Klett und Balmer Verlag.

D-EDK (2014). *Lehrplan 21.* Luzern: D-EDK Geschäftsstelle.

Felbrich, A., Schmotz, Ch. & Kaiser, G. (2010). Überzeugungen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In: S. Blömeke, G. Kaiser, R. Lehmann (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R. & Rechsteiner, K. (2014). Förderung früher mathematischer Kompetenzen. Spielintegriert oder trainingsbasiert. In: Frühe Bildung, Vol. 3 (3), S. 139-145.

Oberhuemer, P. , Schreyer, I. & Neuman, M. (2010). *Professionals in early childhood education and care systems.* Opladen: Verlag Barbara Budrich.

Schuler, S. & Wittmann, G. (2014). Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule aus der Sicht von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen. In: *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 7, S. 62-75.

Stamm, M. (2009). *Frühkindliche Bildung in der Schweiz. Eine Grundlagenstudie im Auftrag der Schweizerischen UNESCO-Kommission.* Universität Fribourg.

Vogt, F. (2010). Curriculare und strukturelle Entwicklungen in der Schweiz. In: M. Leuchter (Hrsg.), *Didaktik für die ersten Bildungsjahre. Unterricht mit 4- bis 8-jährigen Kindern.* Zug: Klett und Balmer Verlag.