DORNER, Christian & ABLEITINGER, Christoph
Graz, Wien

Fehler in Bearbeitungen prozeduraler Aufgaben

Einleitung

Prozedurales Wissen im Mathematikunterricht ist wieder stärker in den Fokus gerückt, auch weil tertiäre Bildungseinrichtungen das fordern (Neidorf et al., 2019). Darauf reagieren z. T. auch die für Sekundarstufen zuständigen Ministerien. Beispielsweise in Österreich sieht der 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung der Mathematik-Matura ab 2028 ein teilweises Rechnen ohne Taschenrechner oder höherwertige Technologie im Rahmen des Abiturs vor. Nach der bisher uneingeschränkten Möglichkeit höherwertige Technologie während der Prüfung zu verwenden, schwingt das Pendel anscheinend in die andere Richtung, "grundlegende Rechengänge sollen wieder" ohne Taschenrechner beherrscht werden (BMBWF, 2022).

Prozedurales Wissen (österreichischer) Maturant*innen wurde von Ableitinger & Dorner (2022) erhoben. Darauf aufbauend untersucht die vorliegende Arbeit Fehler in ihren prozeduralen Bearbeitungen und klassifiziert diese, um didaktische Implikationen daraus abzuleiten.

Stand der Forschung und theoretischer Rahmen

Die Analyse von Schüler*innenfehlern hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition (Radatz, 1979). Über die Zeit wurden dabei einige Inhaltsbereiche detailliert erforscht, wie z. B. Brüche (Padberg, 1995) oder lineare Gleichungen (Neidorf, 2019). Publikationen zu prozeduralen Fehlern beim mathematischen Arbeiten konzentrieren sich meist auf die Abgrenzung zu konzeptuellen Fehlern (z. B. Delastri & Lolang, 2023; Lenz et al., 2022). Die Fehleranalyse von Lenz et al. (2022) gibt weiter Anlass, dass konzeptuelles und prozedurales Wissen trennbar sind. Prozedurales Wissen kann bei Schüler*innen über die und in den einzelnen Themenbereiche/n unterschiedlich entwickelt sein (Lenz et al., 2022).

Einen etwas feineren Blick auf Schüler*innenausarbeitungen ermöglicht Altieris (2016) Differenzierung prozeduralen Wissens in *Kalkülkenntnis* ("Kenntnis der Symbole und der formalen Sprache der Mathematik sowie die Kenntnis von Regeln und Prozeduren, um mathematische Aufgaben zu lösen.", Altieri, 2016, S. 25) und *Kalkülfertigkeit* ("Notwendige Fertigkeiten, um Kalkülkenntnis fallspezifisch und gezielt in einer Weise anzuwenden, die in angemessener Zeit zu einem korrekten Ergebnis führt, insbesondere bei Prozeduren.", Altieri, 2016, S. 25)

Arbeiten, die diesen Aspekt in Bezug auf Schüler*innenfehler untersuchen,

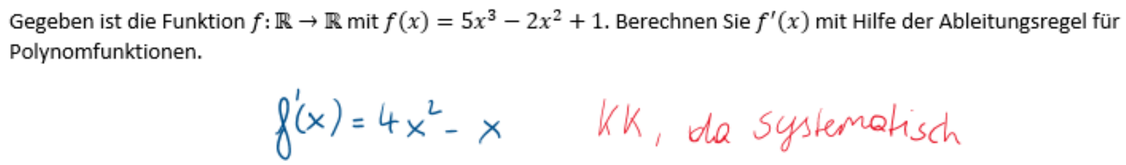
In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

sind uns nicht bekannt. Daraus ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie lassen sich Kalkülkenntnis- und Kalkülfertigkeitsfehler empirisch separieren und kategorisieren?
- Wie aufgabenspezifisch sind die unterschiedlichen Fehlertypen?

Methode

Die analysierten Schüler*innenausarbeitungen entstammen der ersten Erhebung des Projekts "OFF" im Jahr 2021 (siehe Ableitinger & Dorner, 2023). Die dort verwendeten 24 Items sollen das prozedurale Wissen österreichischer Maturant*innen abtesten (ohne Formelheft und ohne Technologie). Um die Fehler der Schüler*innen entsprechend der Theorie entweder als Fehler in der Kalkülkenntnis oder in der Kalkülfertigkeit einordnen zu können, wurde für jede Aufgabe ein eigenes Codiermanual verfasst. Bei der Aufgabe PA11, siehe Abb. 1, umfasst die Kalkülkenntnis die Summen- und Differenzenregel und die Ableitungsregeln für Potenzfunktionen, konstante Faktoren und konstante Funktionen. Diese Fehlerart wird dichotom aufgefasst, entweder man besitzt die Kenntnis oder nicht. Ein*e Schüler*in kann somit höchstens einen Fehler in dieser Kategorie aufweisen, siehe Tab. 1.


Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$. Berechnen Sie $f'(x)$ mit Hilfe der Ableitungsregel für Polynomfunktionen.

$f'(x) = 4x^2 - x$ KK, da systematisch

Abbildung 1: Fehlerhafte Ausarbeitung der Aufgabe PA11

Die Kalkülfertigkeit inkludiert in diesem Fall das Ausführen der angeführten Regeln und die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen. Eine feinere Untergliederung soll genauere Aussagen über Fehler in der Kalkülfertigkeit ermöglichen. Dabei unterscheiden wir Fehler in den Grundrechnungsarten (a), bei Operationen höherer Ordnung, z. B. Potenzieren, Wurzelziehen (b), beim Einsetzen in eine Gleichung oder Funktionsgleichung (c), beim Rechnen mit Variablen und Termen (d) und beim Anwenden der Bruchrechenregeln, beim Kürzen bzw. Erweitern oder beim Umwandeln in Dezimalzahlen (e). Bei der Kalkülfertigkeit wurde auch mitgezählt, wie viele Fehler der jeweiligen Kategorie in der Bearbeitung zu finden sind, siehe Spalten a, b, c, d, e in Tab. 1. Systematische Bearbeitungsmängel werden als Fehler in der Kalkülkenntnis eingeordnet. In Abb. 1 kann dem*der Schüler*in folgendes falsches Vorgehen unterstellt werden: sowohl der Koeffizient als auch der Exponent wurde um eins verringert. Es liegt also ein Fehler in der Kalkülkenntnis vor, ein Fehler in der Kalkülfertigkeit ist entsprechend des Manuals hier nicht zu finden.

In Abb. 2 ist ein Fehler beim Operieren mit ganzen Zahlen zu sehen, dieser ist der Kalkülfertigkeit zuzuordnen. Die Rechenregel für das Skalarprodukt, also die Kalkülkenntnis bei dieser Aufgabe, erweist sich als korrekt.

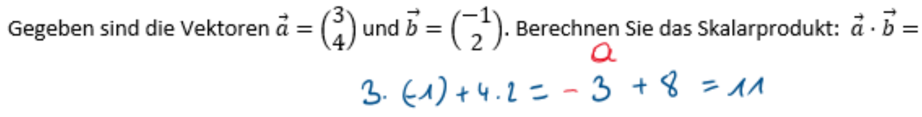


Abbildung 2: Fehlerhafte Ausarbeitung der Aufgabe PB08

Zwei Rater codierten die insgesamt 455 Testhefte (Testheft A: 230, Testheft B: 225, siehe Bezeichnung der Items in Tab. 1) mit je zwölf Aufgaben. Ungefähr ein Fünftel der Daten wurde doppelt geratet. Im Folgenden sind Minimalwert, Maximalwert und die Quartile der berechneten 24 Cohens Kappas angegeben: $\kappa_{min} = 0{,}64$, $\kappa_{0,25} = 0{,}71$, $\kappa_{0,5} = 0{,}81$, $\kappa_{0,75} = 0{,}89$, $\kappa_{max} = 1$. Diese Werte sind im Großen und Ganzen sehr zufriedenstellend.

Ergebnisse

Tab. 1 listet die Anzahlen der Fehler der Schüler*innen nach Art pro Aufgabe auf. Je nach Aufgabe finden sich unterschiedliche Muster.

Item	**KK**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**Item**	**KK**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
PA01	22	0	0	0	121	0	**PB01**	15	2	0	0	0	8
PA02	24	0	0	33	44	0	**PB02**	24	20	0	0	0	0
PA03	3	7	0	0	2	0	**PB03**	55	8	16	0	0	0
PA04	75	4	1	1	36	1	**PB04**	63	1	12	0	0	0
PA05	140	5	4	0	0	4	**PB05**	64	44	0	8	40	10
PA06	24	13	3	0	80	1	**PB06**	97	24	28	0	34	0
PA07	72	31	0	3	42	5	**PB07**	127	24	25	18	17	2
PA08	104	41	12	18	8	11	**PB08**	58	13	0	0	0	0
PA09	161	13	0	4	0	0	**PB09**	34	28	0	0	0	9
PA10	32	34	6	45	0	0	**PB10**	169	0	0	0	3	0
PA11	19	4	0	0	2	0	**PB11**	127	0	0	0	0	0
PA12	156	0	0	0	4	0	**PB12**	77	17	18	6	0	4

Tabelle 1: Anzahl der prozeduralen Fehler aufgeschlüsselt nach Art und Item

Kurzbeschreibung der Items: PA01: Formel umformen, PA02: Binomische Formel, PA03: lineare Glg., PA04: Polynomdivision, PA05: Potenz vereinfachen, PA06: Bruchglg., PA07: Glgsys. 2x2 Additionsver., PA08: Quadratische Glg., PA09: Kreuzprodukt, PA10: Differenzenquot., PA11: Ableitung Polynomf., PA12: partielle Integration, PB01: Bruchadd., PB02: Division

Dezimalzahlen, PB03: partielles Wurzelz., PB04: Gleitkommadarst., PB05: Glgsys. 2x2 Einsetz., PB06: Wurzelglg., PB07: biquadratische Glg., PB08: Skalarprodukt, PB09: Linearkomb., PB10: Produktregel, PB11: Ableitung Kettenregel, PB12: bestimmtes Integral;

Diskussion

Prozedurales Wissen zeigt sich facettenreich. Die berechneten Interraterreliabilitätswerte bekräftigen die verwendete Theorie nach Altieri (2016) und die dort vorgenommene Unterteilung in Kalkülkenntnis und Kalkülfertigkeit. Durch das Erlauben eines Formelheftes wären sicher einige Kalkülkenntnisfehler vermeidbar gewesen (z. B. bei PA08, PA09, PA12, PB07, PB10, PB11). Durch die Verwendung eines gewöhnlichen wissenschaftlichen Taschenrechners ließe sich ein Großteil der a-, b- und e-Kalkülfertigkeitsfehler verhindern. Die Ergebnisse geben Anlass als Lehrperson beim Scheitern der Schüler*innen an prozeduralen Aufgaben einen genaueren Blick auf die Art der Fehler zu werfen, um passend zu intervenieren.

Literatur

Ableitinger, C., & Dorner, C. (2023). Measuring Austrian students' procedural knowledge at the end of upper secondary level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, published online, 23 Seiten.

Altieri, M. (2016). *Erfolg in Mathematikklausuren ingenieurwissenschaftliche Studiengänge unter besonderer Berücksichtigung prozeduralen Wissens*. Dissertation, Technische Universität Dortmund.

BMBWF (2022). *SRP Mathematik (AHS): 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung des Mathematik-Unterrichts und der Mathematik-Matura*.

Delastri, L., & Lolang, E. (2023). Students' conceptual error and procedural error in solving algebraic problems. *Multicultural Education, 9*(1), 18-24.

Dorner, C., & Ableitinger, C. (2022). Procedural mathematical knowledge and use of technology by senior high school students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology, 18*(12), em2202.

Lenz, K., Reinhold, F., & Wittmann, G. (2022). Topic specificity of students' conceptual and procedural fraction knowledge and its impact on errors. *Research in Mathematics Education*, online, 25 Seiten.

Neidorf, T., Arora, A., Erberber, E., Tsokodayi, Y., & Mai, T. (2019). *Student Misconceptions and Errors in Physics and Mathematics - Exploring Data from TIMSS and TIMSS Advanced*. Springer.

Padberg, F. (1995). *Didaktik der Bruchrechnung*. Spektrum, akademischer Verlag.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.