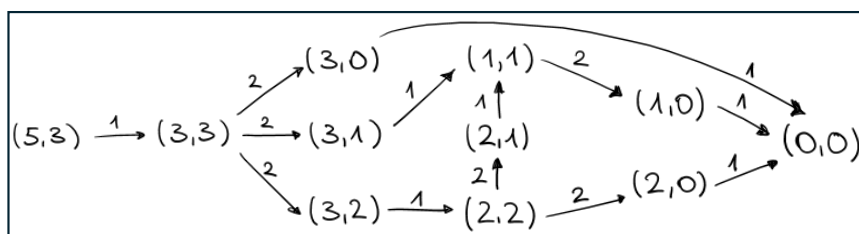


Strategy Stealing - Eine Suche nach nutzlosem Wissen

Stellen wir uns vor, wir lebten in einem Zeitalter der Nützlichkeit, in dem der Mathematikunterricht vollständig auf Anwendungen ausgerichtet ist und den Lernenden die schöngeistige Facette der Mathematik vorenthalten wird. Als Lehrperson wären wir es gewohnt, dass anwendungsorientierte Inhalte von den Lernenden als besonders motivierend empfunden werden.

Der Pausengong ertönt. Soeben haben wir den heutigen Unterricht abgeschlossen, da treten zwei Lernende an uns heran. Es sind zwei, die aus der Reihe tanzen und uns fragen, ob Mathematik wirklich ausschließlich ein Werkzeug ist, wie dies von unserem Mathematikunterricht suggeriert wird. Wie sollen wir antworten? Die Lernenden mit einem einfachen Nein in die Pause zu schicken, erscheint uns mit Blick auf die Bedeutung der Frage nicht angemessen. Lieber möchten wir ihnen an einem Beispiel vorführen, dass Mathematik viel mehr für den Menschen bereithält als ihren bloßen Anwendungscharakter. Bei der Suche nach einem geeigneten Beispiel kommen uns Spiele in den Sinn. Menschen spielen seit jeher Spiele, wie Schach oder Go, ohne einen größeren Nutzen davon zu erwarten. Das mathematische Gebiet der kombinatorischen Spieltheorie beschäftigt sich insbesondere mit Gewinnstrategien derartiger Zweipersonenspiele und hat bislang keine nennenswerten Anwendungen von sich getragen. Uns kommt ein bekanntes kombinatorisches Spiel in den Sinn.

Nim ist ein Zweipersonenspiel, das mit einem Paar (m, n) von natürlichen Zahlen gespielt wird. Ein gültiger Zug besteht darin, eine Zahl auszuwählen und sie durch eine kleinere natürliche Zahl zu ersetzen. Diejenige Person, die das Zahlenpaar $(0,0)$ hinterlässt, gewinnt das Spiel. Die Gewinnstrategie ist einfach zu formulieren: Ziehe in das Spiel mit zwei gleichen Zahlen. Das bedeutet, wenn man ein Spiel vorliegen hat, in dem die Startsituation aus zwei ungleichen Zahlen, wie etwa $(5,3)$, besteht, dann befindet sich Person 1 in einer Gewinnposition. Person 2 ist aufgrund der Gewinnstrategie gezwungen nach jedem Zug zwei ungleiche Zahlen zu hinterlassen und Person 1 kann stets ein



Spiel mit zwei gleichen Zahlen herstellen, bis sie schließlich in $(0,0)$ zieht. Sind die beiden Zahlen zu Beginn des Spiels gleich, dann wechseln die Rollen der Spielenden, sodass sich Person 2 in einer Gewinnposition befindet.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

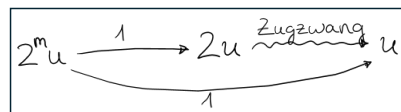
Nachdenklich betrachten wir unsere Ausführungen an der Tafel. Die geschilderte Gewinnstrategie besitzt außerhalb des Spiels keine Anwendung. Im Kontext des Spiels kann sie jedoch als anwendungsorientiert gelten, da sie dem Nutzen dient, den Sieg zu erzwingen. Diese Feststellung stimmt uns unzufrieden, denn unser Ziel war es, den Lernenden jene schöngestige Seite der Mathematik zu zeigen, die völlig losgelöst von jedweden Nutzen ist. Wir suchen daher nach einem besseren Beispiel. Da kommt uns eine Idee. Wir rufen uns zwei bekannte Spiele - Tic-Tac-Toe und Piet Heins Hex - ins Gedächtnis. Beide Spiele haben die für unsere Zwecke interessante Eigenschaft, dass ein zusätzlicher Zug für die jeweils ziehende Person nur von Vorteil sein kann. Wir präsentieren den Lernenden das nachfolgende Spiel, das ebenfalls diese Eigenschaft aufweist.

34 ist ein Zweipersonenspiel, das mit der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 gespielt wird. Die Spielenden ziehen abwechselnd ohne zurücklegen eine Zahl aus der besagten Menge. Diejenige Person, die zuerst vier Zahlen gezogen hat, deren Summe die Zahl 34 ergibt, gewinnt das Spiel. Sind alle Zahlen gezogen und hat keine der beiden Personen ein passendes Zahlenquartett in ihrem Besitz, so endet das Spiel im Unentschieden. Beispielsweise ergibt sich ein Unentschieden, wenn Person 1 die Zahlen von 1 bis 8 und Person 2 die Zahlen von 9 bis 16 zieht. Ähnlich wie bei Tic-Tac-Toe und Hex lässt sich folgendermaßen zeigen, dass Person 2 für das Spiel 34 wenigstens ein Unentschieden erzwingen kann. Angenommen Person 2 besitzt eine Gewinnstrategie. Nachdem Person 1 in ihrem ersten Zug eine beliebige Zahl a gewählt hat, stellt sie sich vor, sie habe den Zug gar nicht durchgeführt und Person 2 würde das Spiel beginnen. Person 1 schlüpft damit gedanklich in die Rolle von Person 2 und kann dann entsprechend der vorausgesetzten Gewinnstrategie von Person 2 spielen. Sollte jene Gewinnstrategie zu einem gewissen Zeitpunkt von Person 1 verlangen, die bereits gezogene Zahl a zu wählen, dann zieht Person 1 stattdessen eine beliebige noch verfügbare Zahl b , stellt sich jedoch vor, die eigentlich bereits früher gezogene Zahl a gewählt zu haben. Die Funktion der Zahl a wird von da an von der Zahl b übernommen und Person 1 fährt weiter mit der Gewinnstrategie fort. Da der von Person 1 weggedachte Zug für Person 1 mit Blick auf das Ziel des Spiels nur von Vorteil ist, kann Person 1 mit der von Person 2 gestohlenen Strategie den Sieg erzwingen. Die Annahme, dass Person 2 eine Gewinnstrategie besitzt, führt somit zum Widerspruch.

Unsere Vorführung stimmt uns dieses Mal positiver. Wir konnten zwar zeigen, dass Person 1 beim Spiel 34 wenigstens ein Unentschieden erzwingen kann. Beim konkreten Spielen ist diese Erkenntnis jedoch erfreulich nutzlos, da uns das gegebene Argument nicht verrät, auf welche Weise Person 1 dies

bewerkstelligen kann. Wir erinnern uns nun, dass man mit einer etwas anderen Argumentation vergleichbar nutzloses Wissen auch noch über einige andere Spiele, wie David Gales Chomp und John Conways Sylver Coinage, gewinnen kann. Wir illustrieren den Lernenden das betreffende Argument anhand des nachfolgenden Zweipersonenspiels.

Iteriert-halbiert ist ein Spiel, das mit einer beliebigen natürlichen Zahl n beginnt. Ist n eine gerade Zahl, dann besteht ein gültiger Zug darin, n durch eine von 1 verschiedene in n enthaltene Zweierpotenz zu teilen. Ist n eine ungerade Zahl, dann besteht ein gültiger Zug darin, $n - 1$ durch eine von 1 verschiedene in $n - 1$ enthaltene Zweierpotenz zu teilen. Das Spiel wird mit der so neu erhaltenen Zahl weitergespielt. Diejenige Person, die 0 als Zahl hinterlässt, gewinnt das Spiel. Für gewisse Spielsituationen dieses Spiels ist es möglich, zu zeigen, dass Person 1 eine Gewinnstrategie besitzt, ohne anzugeben, wie diese Gewinnstrategie konkret aussieht. Wir betrachten dazu ein Spiel, das mit einer durch 4 teilbaren Zahl g beginnt. Dann können wir g als $2^m u$, mit $m \geq 2$ und einer ungeraden Zahl u , schreiben. Person 1 erwägt nun g durch 2^{m-1} zu teilen, also die Zahl $2u$ zu hinterlassen, und prüft, ob sie damit eine Gewinnposition für Person 2 hinterlassen würde.

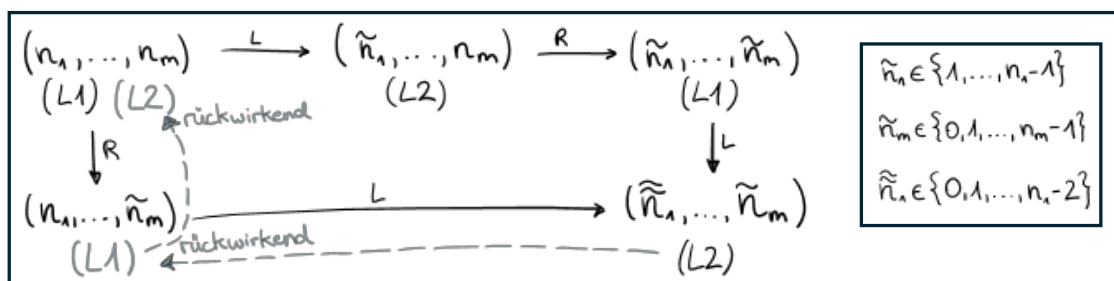


- Sofern das der Fall ist, wird der einzig mögliche Zug, den Person 2 in dieser Situation machen kann, nämlich durch 2 zu teilen und u zu hinterlassen, zugleich der vorgeschriebene Zug aller möglichen Gewinnstrategien von Person 2 sein. Person 1 wird dann anders als zuvor erwogen die Zahl g durch 2^m statt durch 2^{m-1} teilen, um damit selbst u zu hinterlassen und die Gewinnstrategie von Person 2 zu stehlen.
- Sofern das nicht der Fall ist, muss es sich, da das Spiel kein Unentschieden zulässt, um eine Gewinnposition für Person 1 handeln. Person 1 wird dann tatsächlich den erwogenen Zug durchführen.

In beiden Fällen kann Person 1 somit den Sieg erzwingen. Allerdings bleibt unklar, wie Person 1 prüfen kann, welcher der beiden Fälle zutrifft. Das Argument liefert somit noch keine konkrete Gewinnstrategie für Person 1. Ziemlich nutzlos denken wir uns zufrieden. Da fällt uns noch ein drittes Strategieklaue-Argument ein, das man insbesondere von John Conways Blue-Red-Hackenbush her kennt. Wir präsentieren es den Lernenden am Beispiel des nachfolgenden Zweipersonenspiels.

Partizan Endnim wird mit einer Menge (n_1, n_2, \dots, n_m) von natürlichen Zahlen gespielt, wobei die Reihenfolge der Zahlen entscheidend ist.

Im Vergleich zu den bisherigen Spielen, sind die Zugmöglichkeiten der Spielenden unsymmetrisch, sodass wir ihnen entsprechende Namen verleihen: Links muss die ganz linke Zahl ungleich 0 durch eine kleinere natürliche Zahl ersetzen und Rechts muss die ganze rechte Zahl ungleich 0 durch eine kleinere natürliche Zahl ersetzen. Diejenige Person, die die letzte Zahl auf 0 setzt, gewinnt das Spiel. Das Spiel $(5,4)$ kann beispielsweise mit der Gewinnstrategie von Nim, unabhängig davon, wer das Spiel beginnt, von Links gewonnen werden. Im Weiteren sagen wir, dass $L1$ bzw. $L2$ für ein Spiel gilt, sofern das Spiel eine Gewinnposition für Links ist, falls Links beginnt bzw. sofern das Spiel eine Gewinnposition für Links ist, falls Rechts beginnt. Sei nun (n_1, n_2, \dots, n_m) ein Spiel für das $L1$ gilt, derart, dass die Gewinnstrategie von Links nicht verlangt n_1 auf 0 zu setzen. Dann gilt für dieses Spiel auch $L2$, wie die folgende Abbildung zeigt.



Betrachten wir die Spiele, die nach drei Zügen entstehen können, wenn Links beginnt und die vorausgesetzte Gewinnstrategie verfolgt (oberer Weg zum Spiel $(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_m)$ in der Abbildung). Für diese Spiele gilt jeweils $L2$. Beginnt Rechts hingegen, dann kann Links das Spiel, das durch die Eröffnung von Rechts entsteht, in eines der zuvor betrachteten Spiele, für die $L2$ gilt, überführen (unterer Weg zum Spiel $(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_m)$ in der Abbildung). Somit muss für sämtliche Spiele, die Rechts beim eröffnenden Zug als Optionen hat, rückwirkend $L1$ gelten und daher wiederum rückwirkend für das Ausgangsspiel (n_1, n_2, \dots, n_m) neben $L1$ auch $L2$ gelten.

Welch schöner Abschluss, bemerken wir. Eine spezielle Gewinnstrategie für Links, falls Links anfängt und von der wir nicht wissen, wie sie aussieht, kann von Links auch dann genutzt werden, wenn Rechts beginnt. Ein Ergebnis, das für Links somit in doppelter Hinsicht als nutzlos erscheint. Da ertönt die Schulglocke erneut. Die Pause ist zu Ende und wir verabschieden uns von den beiden Lernenden. Auf dem Weg zum Lehrkräftezimmer kommen uns noch einige weitere Spiele in den Sinn, bei denen uns ein Strategieklaum möglich erscheint. Dabei wird uns bewusst, dass es uns Spaß macht, nach derartigen Spielen zu suchen. Wir fragen uns, ob diese nicht-konstruktiven Beweise, die wir als schön empfinden, als eine Art Kontrapunkt zum utilitaristischen Zeitgeist gerade wegen ihrer Nutzlosigkeit bildend sein könnten.