

# **Eindimensionale Modellierung von Spaltströmungen in Schraubenvakuumpumpen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Dr.-Ing.**

von der Fakultät Maschinenbau der

Technischen Universität Dortmund

genehmigte Dissertation

**Timo Jünemann, M.Sc.**

aus

Werne

Tag der mündlichen Prüfung: 10.02.2025

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

**Dortmund, 2026**



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Fachgebiet Fluidtechnik der Technischen Universität Dortmund. Mein herzlicher Dank gilt all jenen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer, der mich mit persönlicher Betreuung, kontinuierlicher Förderung und wertvollen Denkanstößen begleitet hat. Der konstruktive Austausch und die akademischen Freiheiten, ebenso wie der Rückhalt in schwierigen Lebenslagen, werden mir stets in guter Erinnerung bleiben. Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferats.

Mein Dank gilt zudem der Firma Pfeiffer Vacuum für die finanzielle Unterstützung meiner Promotion und die konstruktive Entwicklungskooperation, durch die ich spannende Einblicke in das breite Themenfeld der Vakuumerzeugung gewinnen konnte.

Ebenso möchte ich mich bei den Mitarbeitenden des Fachgebiets Fluidtechnik bedanken, die mich während meiner Tätigkeit mit ihrer Unterstützung und ihrem kameradschaftlichen Umgang begleitet haben. Durch eure freundschaftliche und hilfsbereite Art ist das Fachgebiet ein besonderer Ort, an den ich immer wieder gerne zurückdenken werde. Das inspirierende Miteinander sowie die wertvollen fachlichen Diskussionen mit euch weiß ich außerordentlich zu schätzen. Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Kollegen der Arbeitsgruppe Vakuum, Heiko Pleskun und Christopher Huck, die stets ein offenes Ohr für meine Fragen hatten und mit denen kritisches Nachdenken und gemeinsames Problemlösen immer möglich war. Heiko Pleskun danke ich zusätzlich für die Durchsicht meiner Arbeit. Thilo Hahn danke ich ebenfalls für die Durchsicht meiner Arbeit sowie für die wertvollen Perspektiven, die er als Physiker auf die Welt der Ingenieurwissenschaften eingebracht hat.

Abschließend möchte ich Sanni und meiner Familie meinen tief empfundenen Dank aussprechen. Eure beständige Unterstützung, euer Vertrauen und die Freiheiten, die ihr mir auf meinem Weg ermöglicht habt, waren unverzichtbar für meinen Werdegang.

Selm, im April 2025

Timo Jünemann



# Kurzzusammenfassung

Obwohl nur wenige Menschen direkte Berührungspunkte mit Vakuumpumpen haben, sind technische Vakua eine Voraussetzung für die Herstellung vieler Produkte des täglichen Lebens. Sowohl zur Leistungssteigerung als auch zur Verbesserung der Energieeffizienz werden Vakuumpumpen kontinuierlich von Industrie und Forschung weiterentwickelt. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf der Modellierung der internen Spaltverbindungen als wichtigstem Verlustmechanismus. Ursächlich für Spaltströmungen sind hauptsächlich zwei Mechanismen: Zum einen induziert ein Druckunterschied in benachbarten Arbeitskammern eine Strömung (Poiseuille-Strömung), zum anderen bewirkt die Schleppwirkung der Rotoren einen Transport von Gas durch die Spalte (Couette-Strömung).

Zur Modellierung der Spaltströmungen wird eine eindimensionale Theorie vorgestellt, die beide treibenden Effekte berücksichtigt und kompressible Gase beliebiger Verdünnung einbezieht. Basierend auf der kinetischen Gastheorie wird die Strömung durch eine eindimensionale Differentialgleichung der Mach-Zahl beschrieben, ohne die einschränkende Annahme eines Kontinuums. Unter Vorgabe der Drücke, Temperaturen und der Gaszusammensetzung in den angrenzenden Arbeitskammern, sowie der Spaltgeometrie und der Rotorbewegung, kann durch Lösen der Differentialgleichung der Spaltmassenstrom bestimmt werden. Unbekannte Teile der Differentialgleichung, die beispielsweise Reibung und die Form des Strömungsprofils berücksichtigen, müssen modelliert werden, um das Problem zu schließen.

Für die Reibung im Spalt werden Modelle abgeleitet, die verdünnte, laminare und turbulente Strömungen berücksichtigen. Es wird gezeigt, dass die erhöhte Reibung in einer beschleunigten Strömung gut über die Jeffery-Hamel-Lösung für einen schlanken Kanal mit Düsenkontur approximiert werden kann. Diese Lösung eignet sich auch zur Näherung der Reibung bei laminarer, kompressibler Strömung. Die Lösung für einen Diffusor zeigt eine reduzierte Reibung und bietet zudem ein Ablösekriterium für das Spaltmodell.

Die Differentialgleichung wird unter der Annahme einer vollständig ausgebildeten Strömung mit konstanter Totaltemperatur für verschiedene Spaltgeometrien von Schraubenvakuumpumpen gelöst. Zusätzlich werden Geometrien von Schraubenkompressoren betrachtet. Die Validierung der eindimensionalen Theorie erfolgt anhand verschiedener Messwerte aus der Literatur, und es wird eine ausgezeichnete Abbildungsgüte für den gesamten Bereich der Gasverdünnung festgestellt, obwohl das Modell bei großen Reynolds-Zahlen und kurzen Spalten Schwächen zeigt. Verbesserungen

könnten durch die Modellierung des Einlaufs des Geschwindigkeitsprofils und des Übergangs zwischen laminarer und turbulenter Strömung erreicht werden.

Abschließend wird die Lösung des Graetz-Problems für verdünnte Couette-Poiseuille-Strömungen und ein Modell für den Einlauf des Geschwindigkeitsprofils in laminaren Strömungen vorgestellt. Als ergänzendes Werkzeug zur Modellierung von Schraubenvakuumpumpen wird ein Verfahren zur Implementierung von Temperatursprung- und Geschwindigkeitsschlupfrandbedingungen in Ansys-CFX präsentiert und validiert.

# Abstract

Although few people have direct contact with vacuum pumps, technical vacuums are a prerequisite for the manufacture of many everyday products. Vacuum pumps are continuously developed by industry and research for performance enhancement and energy efficiency improvement. A particular focus is on modeling the internal gap connections as the most important loss mechanism. The causes of gap flows are mainly two mechanisms: On one hand, a pressure difference in adjacent working chambers induces a flow (Poiseuille flow), and on the other hand, the dragging effect of the rotors causes a transport of gas through the gaps (Couette flow).

To model the gap flows, a one-dimensional theory is introduced that takes into account both driving effects and includes compressible gases of any gas rarefaction. Based on kinetic gas theory, the flow is described by a one-dimensional differential equation of the Mach number, without the restrictive assumption of a continuum. By specifying the pressures, temperatures, and gas composition in the adjacent working chambers, as well as the gap geometry and rotor movement, the gap mass flow can be determined by solving the differential equation. Unknown parts of the differential equation, which take into account, for example, friction and the shape of the flow profile, must be modeled to close the problem.

Models are derived for the friction in the gap that consider rarefied, laminar, and turbulent flows. It is shown that the increased friction in an accelerated flow can be well approximated by the Jeffery-Hamel solution for a slender channel with a nozzle contour. This solution is also suitable for approximating the friction of laminar, compressible flow. The solution for a diffuser shows reduced friction and also provides a detachment criterion for the gap model.

The differential equation is solved under the assumption of a developed flow with constant total temperature for various gap geometries of screw vacuum pumps. Additionally, geometries of screw compressors are considered. The validation of the one-dimensional theory is carried out using various measured values from the literature, and an excellent representation quality is determined for the entire range of gas rarefaction, although the model shows weaknesses at high Reynolds numbers and short gaps. Improvements could be achieved by modeling the inlet of the velocity profile and the transition between laminar and turbulent flow.

Finally, the solution of the Graetz problem for rarefied Couette-Poiseuille flows and a model for the inlet of the velocity profile in laminar flows are presented. As an additional tool for modeling

screw vacuum pumps, a method for implementing temperature jump and velocity slip boundary conditions in Ansys-CFX is presented and validated.

# Vorveröffentlichungen zu dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Publikationen veröffentlicht oder mitgestaltet, deren Inhalt teilweise oder vollständig in dieser Arbeit wiedergegeben wird. Die folgenden Publikationen wurden im Rahmen dieser Arbeit veröffentlicht:

- [1] T. Jünemann und A. Brümmer, *Optimisation of screw spindle vacuum pumps with variable rotor pitch regarding load-lock operation*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 425, 012028 \(2018\)](#)
- [2] T. Jünemann und A. Brümmer, *One-dimensional simulation of Couette-Poiseuille flow with variable cross section for the full range of gas rarefaction*, [J Vac Sci Technol B 38, 044201 \(2020\)](#)
- [3] T. Jünemann, H. Pleskun und A. Brümmer, *Maxwell velocity slip and Smoluchowski temperature jump boundary condition for ANSYS CFX*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1180, 012037 \(2021\)](#)
- [4] T. Jünemann und A. Brümmer, *One-dimensional calculation approach for gaseous clearance flows*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1267, 012004 \(2022\)](#)
- [5] H. Pleskun, T. Jünemann und A. Brümmer, *Validation of inhomogeneous chamber states in rotary positive displacement vacuum pumps*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1267, 012010 \(2022\)](#)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzzusammenfassung</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Vorveröffentlichungen zu dieser Arbeit</b>	<b>VII</b>
<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik von trockenlaufenden Schraubenvakuumpumpen . . . . .	2
1.1.1 Bauformen und Wirkprinzip . . . . .	2
1.1.2 Arbeitsraumbegrenzende Spalte . . . . .	7
1.1.3 Strömungsmechanische und thermodynamische Einordnung . . . . .	9
1.1.4 Simulation von trockenlaufenden Schraubenvakuumpumpen . . . . .	11
1.1.5 Untersuchung allgemeiner Strömungsformen . . . . .	12
1.1.6 Spaltströmungen in trockenlaufenden Rotationsverdrängermaschinen . . . . .	15
1.2 Ziel der Arbeit und Vorgehensweise . . . . .	18
<b>2 Grundlagen der Spaltberechnung</b>	<b>21</b>
2.1 Kinetische Gastheorie . . . . .	21
2.1.1 Eigenschaften perfekter Gase . . . . .	21
2.1.2 Verteilungsfunktion der Teilchen . . . . .	23
2.1.3 Momente der Verteilungsfunktion . . . . .	24
2.1.4 Boltzmann-Gleichung und die Maxwell-Boltzmann-Verteilung . . . . .	27
2.1.5 Lösungsmethoden der Boltzmann-Gleichungen . . . . .	28
2.2 Makroskopische Erhaltungsgleichungen . . . . .	29
2.2.1 Erhaltungsgleichungen in integraler Form . . . . .	30
2.2.2 Navier-Stokes-Fourier-Gleichung und Transportgrößen . . . . .	31
2.2.3 Turbulente Strömungen . . . . .	34
2.2.4 Schlupfströmungen . . . . .	36
2.2.5 Lösungsmethoden der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen . . . . .	37
2.2.6 Analytische Lösungen für die Schlupfströmung . . . . .	39
	<b>IX</b>

<b>3</b>	<b>Beschreibung der Spaltströmung</b>	<b>43</b>
3.1	Einordnung der Spaltströmung . . . . .	44
3.1.1	II-Theorem . . . . .	44
3.1.2	Lokale strömungscharakterisierende Kennzahlen . . . . .	48
3.1.3	Ergänzung zu Gasgemischen . . . . .	49
3.2	Modellierung des eindimensionalen Strömungsbereichs . . . . .	49
3.2.1	Stationäre Erhaltungsgleichungen . . . . .	50
3.2.2	Differentialgleichung der Mach-Zahl . . . . .	55
3.2.3	Ergänzungen zu Gasgemischen . . . . .	57
3.2.4	Diskussion der Formfaktoren . . . . .	57
3.3	Zu- und Abströmung . . . . .	63
3.4	Stoßbetrachtung . . . . .	64
3.5	Lösungsverfahren für den Spaltmassenstrom . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Spaltströmung mit ausgebildetem Geschwindigkeitsprofil und konstanter Totaltemperatur</b>	<b>69</b>
4.1	Modellierung der Reibung und der Strömungsprofile im Spalt . . . . .	70
4.1.1	Laminare Couette-Poiseuille-Strömung inklusive des viskosen Geschwindigkeitsschlupfs . . . . .	72
4.1.2	Laminare Düsen- und Diffusor-Strömung . . . . .	72
4.1.3	Laminare kompressible Strömungen (inkompressible Ersatzströmung) . . . . .	75
4.1.4	Schleichende, verdünnte Strömungen . . . . .	78
4.1.5	Turbulente Strömungen . . . . .	80
4.1.6	Zusammenführung der Modellierungsansätze . . . . .	80
4.2	Modellierung der Zu- und Abströmung . . . . .	81
4.3	Ergebnisse für Spalte in Vakuumpumpen . . . . .	82
4.3.1	Spalt mit Radiuskontur . . . . .	82
4.3.2	Spalt mit planarer Kontur . . . . .	85
4.3.3	Anwendung auf eine Vakuumpumpe . . . . .	87
4.4	Ergebnisse für Spalte von Schraubenkompressoren . . . . .	91
4.4.1	Beschreibung der Spaltgeometrie . . . . .	92
4.4.2	Statische Spaltgeometrien . . . . .	93
4.4.3	Einfluss der bewegten Wand . . . . .	96
4.5	Diskussion der lokalen Strömungsgrößen . . . . .	96
4.6	Zwischenfazit . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Ergänzende Modellierungsansätze</b>	<b>103</b>
5.1	Thermischer Einlauf in einer verdünnten Couette-Poiseuille-Strömung . . . . .	103
5.1.1	Allgemeine Problemschreibung und Lösungsansatz . . . . .	104
5.1.2	Poiseuille-Strömung . . . . .	107
5.1.3	Couette-Strömung . . . . .	108
5.1.4	Couette-Poiseuille-Strömung . . . . .	109

---

5.1.5	Schlupfströmungen . . . . .	111
5.1.6	Zwischenfazit . . . . .	115
5.2	Druckverlust im Einlauf einer laminaren Poiseuille-Strömung . . . . .	115
5.2.1	Zwischenfazit . . . . .	118
5.3	Nicht-Gleichgewichtsrandbedingung für Ansys-CFX . . . . .	118
5.3.1	Implementierung in CFX . . . . .	119
5.3.2	Überschallplattenströmung . . . . .	121
5.3.3	Radiusspalt mit bewegter Wand . . . . .	124
5.3.4	Zwischenfazit . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>129</b>
	<b>Literatur</b>	<b>139</b>
<b>A</b>	<b>Lösung der Jeffery-Hamel-Strömung</b>	<b>141</b>
<b>B</b>	<b>Eigenwerte und Konstanten für die Bestimmung der dimensionslose Wandwärmestromdichten</b>	<b>143</b>



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Symbole

### Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\mathbf{1}$	-	Einheitsmatrix
$a$	m	Koeffizient Superellipse, siehe (4.44)
$\alpha$	-	Entartung eines Quantenzustands, siehe (2.43)
$A$	m <sup>2</sup>	Strömungsquerschnittsfläche, siehe (2.30) bzw. (3.26)
$b$	m	Koeffizient Superellipse, siehe (4.44)
$B$	m	Breite, siehe Abb. 3.1
$c$	m s <sup>-1</sup>	Strömungsgeschwindigkeit, siehe (2.25)
$c_S$	m s <sup>-1</sup>	isentropische Schallgeschwindigkeit, siehe (2.14)
$c_p$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	spezifische isobare Wärmekapazität, siehe (2.11)
$\tilde{c}_p$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	scheinbare spezifische isobare Wärmekapazität, siehe (3.30)
$c_v$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	spezifische isochore Wärmekapazität, siehe (2.5)
$c_W$	m s <sup>-1</sup>	Wandgeschwindigkeit, siehe Abb. 2.1, Abb. 3.1 & Abb. 3.2
$\mathbf{c}$	m s <sup>-1</sup>	Teilchengeschwindigkeit, siehe (2.17)
$\mathbf{c}_T$	m s <sup>-1</sup>	thermische Eigengeschwindigkeit eines Teilchens, siehe (2.25)
$\mathbf{c}_w$	m s <sup>-1</sup>	wahrscheinlichste Geschwindigkeit einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung, siehe (2.47)
$C$	-	dimensionslose Geschwindigkeit bezogen auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, siehe (2.95)
$\mathcal{C}$	m s <sup>-1</sup>	Diffusionsgeschwindigkeit
$Ca$	-	Cauchy-Zahl, siehe (1.3)
$D_h$	m	hydraulischer Durchmesser, siehe (3.47)
$D_K$	m	Kopfkreisdurchmesser eines Rotors, siehe Tab. 4.1
$\mathcal{D}$	m s <sup>-1</sup>	Diffusionskoeffizient, siehe (2.63)
$\mathcal{D}^T$	m s <sup>-1</sup>	thermischer Diffusionskoeffizient, siehe (2.63)
$\delta$	m	Teilchendurchmesser, siehe (2.67)
$e$	J kg <sup>-1</sup>	spezifische Gesamtenergie eines Gases, siehe (2.24)
$E$	J	Gesamtenergie eines Gases, siehe (2.22)

Symbol	Einheit	Bedeutung
$f$	-	Reibbeiwert nach Darcy, siehe (3.43)
$\mathcal{F}$	$\text{m}^{-6} \text{s}^3$	Verteilungsfunktion der Gasteilchen, siehe (2.17)
$\mathcal{F}^0$	$\text{m}^{-6} \text{s}^3$	Verallgemeinerte Maxwell-Boltzmann-Verteilung, siehe (2.45)
$f$	-	Anzahl der inneren Freiheitsgrade eines Teilchens, siehe (2.5)
$\tilde{\mathcal{F}}$	-	Normierung der verallgemeinerten Maxwell-Boltzmann-Verteilung, siehe (2.46)
$F$	N	Kraft
$g$	$\text{N kg}^{-1}$	Spezifische Feldkraft, siehe (2.42)
$g$	$\text{m s}^{-1}$	Relativgeschwindigkeit zwischen zwei wechselwirkenden Teilchen, siehe (2.43)
$G$	-	reduzierte Flussrate, siehe (4.30)
$h$	$\text{J kg}^{-1}$	spezifische Enthalpie, siehe (2.10)
$H$	m	Wandabstand, Kanalhöhe, Spalthöhe, siehe Abb. 3.1
$J$	-	Konstante Jeffery-Hamel-Strömung, siehe (4.13)
$k$	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit, siehe (2.65)
$k_B$	$\text{J K}^{-1}$	Boltzmann-Konstante $k_B = 1,38064852 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ , siehe (2.1)
$K$	-	Überdruckverlust einer Einlaufströmung, siehe (5.32)
$K_1, K_2, K_3$	-	Koeffizienten des parabolischen dimensionslosen Strömungsprofils, siehe (2.95)
$K_D$	-	Impulsflussformfaktor, siehe (3.27)
$K_H$	-	Totalenthalpieflussformfaktor, siehe (3.28)
$K_{KE}$	-	Formfaktor des Flusses der kinetischen Energie, siehe (3.75)
$K_Z$	-	Zustandsformfaktor, siehe (2.95)
$Kn$	-	Knudsen-Zahl, siehe (1.1)
$\mathcal{K}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	turbulente kinetische Energie, siehe (2.81)
$L$	m	Länge. Z.B. Spaltlänge oder charakteristische Länge
$\ell$	m	mittlere freie Weglänge, siehe (1.1)
$m$	-	Exponent Superellipse, siehe (4.44)
$\dot{m}$	$\text{kg s}^{-1}$	Massenstrom, siehe Abb. 3.1
$M$	-	Mach-Zahl, siehe (1.3)
$m$	kg	Teilchenmasse, siehe (2.2)
$\mathfrak{M}$	-	Massenanteil einer Spezies am Gasgemisch, siehe (3.15)
$n$	$\text{m}^{-3}$	Teilchenanzahldichte, siehe (2.1)
$n$	-	Polytropenexponent, siehe (4.39)
$n$	-	Exponent Superellipse, siehe (4.44)
$\mathbf{n}$	-	Einheitsnormalenvektor
$N$	-	Teilchenanzahl, siehe (2.17)
$Nu$	-	Nusselt-Zahl, siehe (3.9)
$\dot{N}$	$\text{s}^{-1}$	Teilchenfluss, siehe (2.30)
$O$	$\text{m}^2$	Oberfläche, siehe (2.60)
$p$	Pa	Druck, siehe (2.1)

Symbol	Einheit	Bedeutung
$P$	W	Technische Leistung, siehe (3.10)
$Po$	-	Poiseuille-Zahl, siehe (4.11)
$Pr$	-	Prandtl-Zahl, siehe (2.72)
$\mathcal{P}$	Pa	Spannungstensor, siehe (2.36)
$\dot{q}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmestromdichte, siehe (2.40)
$\dot{Q}$	W	Wärmestrom, siehe (3.52)
$Q$	-	Menge der möglichen Quantenzustände einer Spezies, siehe (2.18)
$r$	m	radiale Ortskoordinate im Polarkoordinatensystem, siehe Abb. 4.1
$R$	m	Radius
$\tilde{R}$	$\text{K kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	scheinbare spezifische Gaskonstante
$Re$	-	Reynolds-Zahl, siehe (3.11)
$s$	m	Rotorsteigung, siehe Tab. 4.1
$S$	$\text{m}^{-6} \text{s}^2$	Kollisionsintegral der Boltzmann-Gleichung, siehe (2.43)
$\mathcal{S}$	-	Tensor zum Eliminieren der Normalkomponenten, siehe (2.84)
$Sc$	-	Schmidt-Zahl, siehe (2.74)
$S$	-	Menge der Spezies in einem Gasgemisch, siehe (2.15)
$t$	s	Zeit
$\tau$	s	Relaxationszeit, siehe (2.68)
$T$	K	Temperatur, siehe (2.1)
$T_t$	K	Totaltemperatur, siehe (3.55)
$T_D$	K	Sutherland-Verdopplungstemperatur, siehe (2.75)
$u$	$\text{J kg}^{-1}$	spezifische innere Energie, siehe (2.4)
$u$	$\text{J kg}^{-1}$	spezifische innere Energie eines Teilchens, siehe (2.21)
$U$	m	Umfang, siehe (3.42)
$v_b$	$\text{m s}^{-1}$	Geschwindigkeit eines Oberflächenelements, siehe (2.59)
$V$	$\text{m}^3$	Volumen
$\mathcal{W}$	-	dimensionslose Wandgeschwindigkeit bezogen auf die wahrscheinlichste Teilchengeschwindigkeit, siehe (3.4)
$x$	m	Ortskoordinate Hauptströmungsrichtung, siehe Abb. 2.1
$\boldsymbol{x}$	m	Ortsvektor
$X^+$	-	dimensionslose hydrodynamische x-Koordinate, siehe Abb. 5.9
$X^*$	-	dimensionslose thermische x-Koordinate, siehe (5.2)
$y$	m	Ortskoordinate quer zur Hauptströmungsrichtung, siehe Abb. 2.1
$Y$	-	dimensionslose y-Koordinate, siehe Abb. 2.1

**Griechische Buchstaben**

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha$	-	Strömungsbeiwert, siehe (3.5)
$\alpha$	rad	Öffnungswinkel Schlankkanal, siehe Abb. 4.2
$\beta$	rad	halber Öffnungswinkel Schlankkanal, siehe Abb. 4.2
$\beta_T$	-	thermischer Schlupfkoeffizient, siehe (2.84)
$\beta_p$	-	viskoser Schlupfkoeffizient, siehe (2.84)
$\gamma$	-	Adiabatenkoeffizient, siehe (2.13)
$\gamma$	-	Intermittenzfaktor
$\delta$	-	Gasverdünnungsparameter, siehe (2.103)
$\epsilon$	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$	Dissipationsrate, siehe (2.82)
$\zeta_T$	-	Temperatursprungkoeffizient, siehe (2.89)
$\eta$	-	dimensionsloser Polarwinkel Jeffery-Hamel-Strömung, siehe (4.13)
$\theta$	m	Impulsverlustdicke $\gamma - \theta$ -SST-Modell
$\theta$	-	dimensionslose Temperatur Graetz Problem, siehe (5.1)
$\Theta$	-	dimensionslose Temperatur bezogen auf die Spalteintrittstemperatur, siehe (3.3)
$\kappa$	Pa s	Volumenviskosität, siehe (2.64)
$\lambda$	-	Eigenwert des Sturm-Liouville-Problems, siehe (5.7)
$\mu$	Pa s	dynamische Viskosität, siehe (2.64)
$\xi$	-	dimensionsloser Gradient, siehe (4.27) & (4.28)
$\Xi$	-	Eigenkoeffizient des Sturm-Liouville-Problems, siehe (5.7)
$\Pi$	-	Druckverhältnis, siehe (3.2)
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Dichte, siehe (2.2)
$\sigma$	$\text{m}^2$	Kollisionsquerschnitt, siehe (2.43)
$\sigma_t$	-	Tangentialer Impulsakkommodationskoeffizient, siehe (2.85)
$\sigma_E$	-	Energieakkommodationskoeffizient, siehe (2.90)
$\tau$	Pa s	Schubspannung, Schubspannungstensor, siehe (2.36)
$\varphi$	-	Polarwinkel - Jeffery-Hamel-Strömung, siehe Abb. 4.2
$\varphi_x$	-	dimensionslose Normalkraft, siehe (4.31)
$\Phi$	var.	Transportgröße / Stoßinvariante, siehe (2.21)
$\Phi$	-	normierte Wandwärmestromdichte Graetz-Problem, siehe (5.4)
$\bar{\Phi}$	var.	Moment der Verteilungsfunktion, siehe (2.21)
$\dot{\Phi}$	var.	Flussdichte einer Transportgröße, siehe (2.31)
$\chi$	-	Diffusionsverhältnis, siehe (2.66)
$\psi$	-	Eigenfunktion des Sturm-Liouville-Problems, siehe (5.7)
$\Psi$	-	dimensionslose Leistung, siehe (3.10)
$\omega$	$\text{s}^{-1}$	turbulente Wirbelfrequenz, siehe (2.83)
$\omega$	$\text{rad s}^{-1}$	Winkelgeschwindigkeit, siehe Abb. 4.5

## Subskripts

Subskript	Bedeutung
1	vor dem Verdichtungsstoß
2	nach dem Verdichtungsstoß
A	Austritt
app	scheinbar „apparently“
C	Couette
CP	Couette-Poiseuille
char	charakteristisch
E	Eintritt
eff	effusion
fd	vollständig ausgebildet „fully developed“
FS	Strömungsablösung „flow separation“
h	hydraulisch, hydrodynamisch
i	i-te Spezies eines Gasgemischs
I	I-ter Quantenenergiezustand
I	Eintritt der 1D-Domäne
II	Austritt der 1D-Domäne
in	innere
j	j-te Spezies eines Gasgemischs
JH	Jeffery-Hamel
k	Richtungsindex
KV	Kontrollvolumen
krit	kritisch
min	minimaler Wert
n	n-tes Element einer unendlichen Reihe
P	Poiseuille
r	radial
R	Reib
Ref	Referenz
SVW	Saint-Venant & Wantzel
t	turbulent
T	thermisch. Z.B. thermisches Kriechen
th	theoretisch
trans	translatorisch
W	Wand
W1	Wand 1 (obere Wand)
W2	Wand 2 (untere Wand)
x	in Hauptströmungsrichtung
$\infty$	sehr weit weg oder ein Grenzwert
$\tau$ , nn	Normalkomponenten im Schubspannungstensor

### Superskripts

Superskript	Bedeutung
(1)	Fall 1 Graetz-Problem
(2)	Fall 2 Graetz-Problem
C	Couette
P	Poiseuille
R	Reynolds

### Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
CFD	Computational Fluid Dynamics
DSMC	Direct Simulation Monte-Carlo
SSVP	Schraubenspindelvakuumpumpe
NSF	Navier-Stokes-Fourier

# 1 Einleitung

Die Erzeugung von technischen Vakua ist elementarer Bestandteil vieler industrieller und wissenschaftlicher Anwendungen. Insbesondere spielt die Erzeugung sauberer, ölfreier Vakua eine wichtige Rolle, beispielsweise in der Halbleiter-, Chemie- und Lebensmittelindustrie, aber auch in wissenschaftlichen Anwendungen wie der Massenspektroskopie. Das im Verhältnis zu anderen Maschinentypen große Saugvermögen macht die Schraubenvakuumpumpe vor allem für industrielle Zwecke interessant. In den letzten Jahren gewannen trockenlaufende Schraubenvakuumpumpen zunehmend an Bedeutung, da diese, im Gegensatz zu beispielsweise mehrstufigen Roots-Pumpen oder ölgeschmierten Drehschieberpumpen eine bessere Verträglichkeit gegenüber Schmutzpartikeln und geringen Flüssigkeitsmengen aufweisen. Zudem werden bauartbedingt weniger Teile benötigt, was sich wiederum günstig auf die Montage und Wartung auswirkt.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der thermodynamischen Simulation von trockenlaufenden Schraubenvakuumpumpen. Diese Pumpen unterscheiden sich von herkömmlichen Schraubekompressoren durch eine deutlich erweiterte Umschlingung, die für das Erreichen eines hohen Druckverhältnisses essenziell ist. Allerdings bedingt eine Rotorumschlingung von mehr als  $360^\circ$  die Notwendigkeit alternativer Profilformen. Während gängige symmetrische Rotorprofile, wie Zykloiden- oder Evolventenverzahnungen, eine mehrzählige Konstruktion ermöglichen, erfordern asymmetrische Profile, wie das Quimby-Profil, eine andere Herangehensweise. Die umfangreiche Rotorumschlingung, die typischerweise mit einer variablen Rotorsteigung einhergeht, stellt eine bedeutende Herausforderung in der Rotorfertigung dar. Die Rotoren müssen mit äußerst geringen Toleranzen hergestellt werden, um die für den Trockenlauf erforderlichen minimalen Spaltmaße zwischen den Rotoren sowie zwischen den Rotoren und der Gehäusebohrung zu gewährleisten. Die thermodynamisch nachteiligen Spalte sollten so klein wie möglich, aber gleichzeitig ausreichend groß gehalten werden, um ein Anlaufen – also den Kontakt zwischen sich relativ zueinander bewegenden Bauteilen – zu vermeiden. Um eine Berührung der Rotoren zu verhindern, ist in der Regel ein Synchronisationsgetriebe erforderlich.

Die wesentliche Herausforderung in der Auslegung einer Schraubenvakuumpumpe ist die Vorhersage des thermodynamischen Betriebsverhaltens. Insbesondere sind hier makroskopische Größen wie die Leistungsaufnahme und der geförderte Massenstrom von Interesse. Allerdings sind auch andere Größen wie beispielsweise Temperaturverläufe von Belang, um Rückschlüsse auf die Bauteilausdehnung treffen zu können oder die Kühlung auszulegen. Da Schraubenvakuumpumpen als Rotationsverdrängermaschine einzuordnen sind, ist das Kammermodellverfahren das wichtigste Berechnungs-

verfahren. Hierbei erfolgt die numerische Berechnung auf Basis der Massen- und Energieerhaltung pro Arbeitskammer. Die genaue Bestimmung der Massenströme in den Maschinenspalten ist hierbei besonders wichtig. Diese sind abhängig von verschiedenen Randbedingungen wie beispielsweise Druckverhältnisse oder der Rotorbewegung.

Im Folgenden wird der Stand der Technik zur Simulation von Rotationsverdrängermaschinen sowie der internen Spaltverbindungen dargestellt. Ein weiterer Fokus liegt auf der Berechnung verdünnter Spaltströmungen. Basierend auf dem Stand der Wissenschaft wird ein Bedarf der Forschung abgeleitet, aufgrund dessen das Ziel der Arbeit formuliert wird.

## 1.1 Stand der Technik von trockenlaufenden Schraubenvakuumpumpen

Im allgemeinen Sprachgebrauch bezeichnet ein Vakuum den Zustand eines Raums dessen Druck unterhalb des Atmosphärendrucks liegt. In der Norm DIN28400-1<sup>6</sup> ist ein Vakuum konkreter definiert als „der Zustand eines Gases, wenn in einem Behälter der Druck des Gases und somit die Teilchenanzahldichte niedriger ist als außerhalb oder wenn der Druck des Gases niedriger ist als 300 mbar, d.h. kleiner als der niedrigste auf der Erdoberfläche vorkommende Druck“. Der erste Nachweis eines Vakuums erfolgte durch Evangelista Torricelli und Blaise Pascal im Jahre 1644 bzw. 1647 mit Hilfe eines einseitig verschlossenen und mit Quecksilber gefüllten Rohres. Einen entscheidenden Beitrag zur Erzeugung von technischen Vakua lieferte kurze Zeit später Otto von Guericke mit der Erfindung einer Kolbenluftpumpe. Seitdem finden technische Vakua vermehrt Anwendungen in Industrie und Forschung für deren unterschiedliche Anforderungen eine Vielzahl an verschiedenen Prinzipien zur Vakuumerzeugung entwickelt wurden. Technische Arbeitsmittel zur Erzeugung von Vakua werden üblicherweise als „Pumpe“ bezeichnet, obwohl diese im eigentlichen Sinne Kompressoren für verdünnte Gase sind. Mit Vakuumpumpen ist es möglich einen Druckbereich über 15 Größenordnungen, von  $10^{-10}$  Pa bis  $10^5$  Pa in einer Vakuumkammer zu erzeugen. Eine Einstufung der Qualität eines Vakuums erfolgt anhand des statischen Drucks bzw. anhand der Teilchenanzahldichte. In **Tab. 1.1** ist die Klassifizierung verschiedener Vakua aufgeführt.<sup>7</sup>

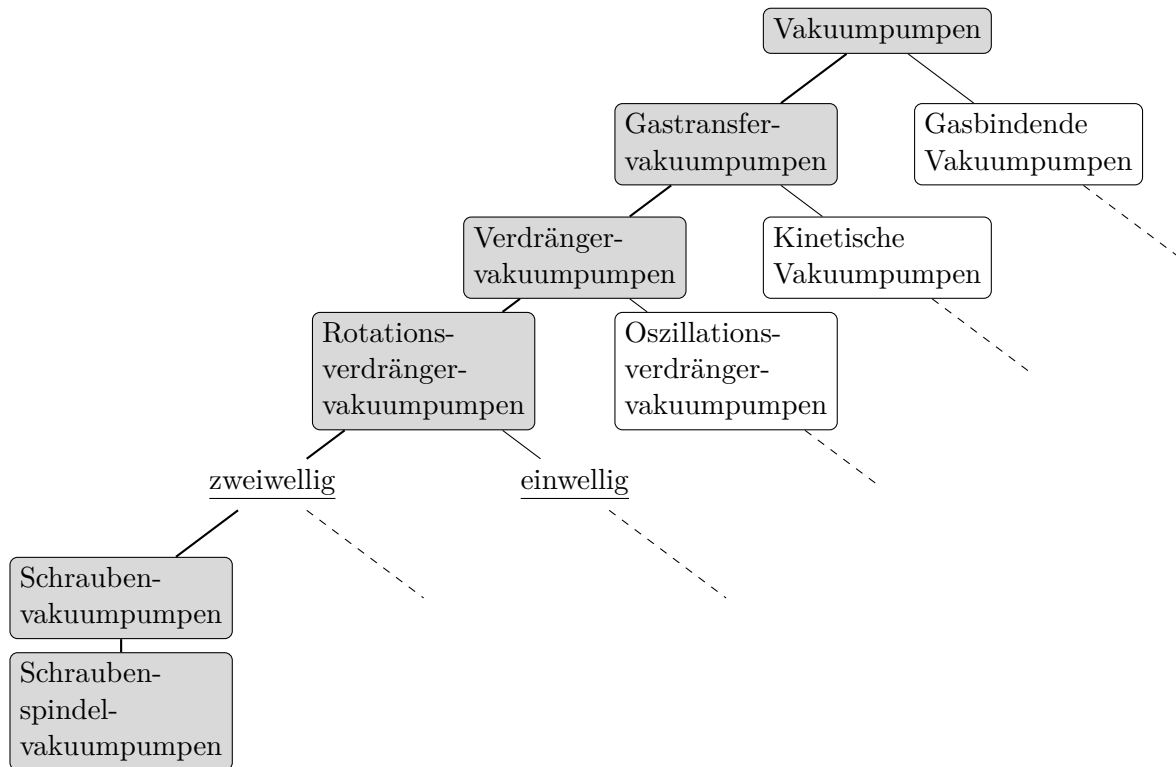
**Tab. 1.1** Druckbereiche der Vakuumtechnik und deren charakteristischen Größen (Zahlenangaben für Gase mit Stoßradien und molekularer Masse ähnlich Luft und 300 K, auf Zehnerpotenzen gerundet)<sup>7</sup>

	Großvakuum	Feinvakuum	Hochvakuum	Ultrahochvakuum
Druck $p$ [Pa]	$10^5 - 10^2$	$10^2 - 10^{-1}$	$10^{-1} - 10^{-5}$	$< 10^{-5}$
Teilchenanzahldichte $n$ [ $\text{m}^{-3}$ ]	$10^{25} - 10^{22}$	$10^{22} - 10^{19}$	$10^{19} - 10^{15}$	$< 10^{15}$
Mittlere freie Weglänge $\ell$ [m]	$10^{-7} - 10^{-4}$	$10^{-4} - 10^{-1}$	$10^{-1} - 10^3$	$> 10^3$

### 1.1.1 Bauformen und Wirkprinzip

Die Einteilung der Vakuumpumpen erfolgt nach dem Wirkprinzip und der Bauart, wie in **Abb. 1.1** dargestellt. Die erste grobe Unterteilung vollzieht sich zunächst in gasfördernde und gasbindende Vakuumpumpen. Die gasbindenden Pumpen nutzen die Adsorptions-, Kondensations- und Diffusionsmechanismen, um Gasteilchen des zu fördernden Mediums auf den Bauteiloberflächen zu binden.

Die Gastransfervakuumpumpen werden weiter in kinetische und Verdrängervakuumpumpen unterteilt. Die in dieser Arbeit untersuchten Schrauben(spindel)vakuumpumpen lassen sich weiter in die zweiwelligen Rotationsverdrängermaschinen einordnen. Der Wirkmechanismus einer Verdrängermaschine ist durch einen gekapselten Arbeitsraum gekennzeichnet, dessen Größe sich zyklisch ändert. Bei zweiwelligen Rotationsverdrängermaschinen bildet sich dieser Arbeitsraum zwischen zwei Rotoren aus. Der Wirkmechanismus der Verdrängermaschinen unterscheidet sich von denen der kinetischen Vakuumpumpen, deren Energiewandlung in einem offenen Arbeitsraum basierend auf einer Impulsänderung des Gases erfolgt.<sup>7</sup>



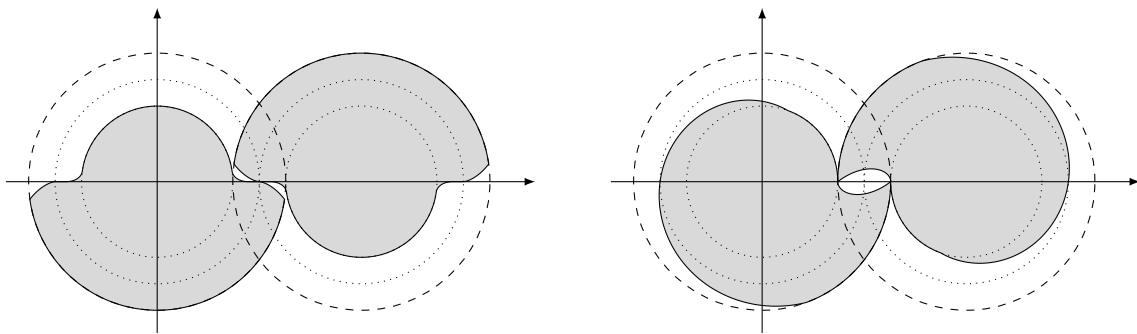
**Abb. 1.1** Einordnung von Schrauben- bzw. Schraubenspindelvakuumpumpen nach dem Wirkprinzip.

Eine weiterführende Unterteilung kann basierend auf der Anwesenheit eines Hilfsfluids erfolgen, das mit dem zu fördernden Gas in Berührung kommt. Für gewöhnlich handelt es sich bei diesem Hilfsfluid um Öl oder Wasser, das zur Kühlung des Gases und der Bauteile, zur Abdichtung der den Arbeitsraum begrenzenden Spalte oder zur Schmierung der Bauteiloberflächen und somit zur Verschleißminderung dienen kann. Die möglichen Nachteile sind die Verunreinigung der Vakuumkammer durch das Hilfsfluids oder die Verschmutzung des Hilfsfluids durch Prozessgase oder Schmutzpartikel. Mit dem Aufkommen der Halbleiterindustrie seit den 80er-Jahren gewinnen hilfsfluidfreie, also trockenlaufende, Vakuumpumpen zunehmend an Bedeutung, aber auch in der Lebensmittelindustrie und in der Forschung sind saubere Vakua unabdingbar.<sup>7</sup>

Ferner können Schraubenvakuumpumpen noch nach der Gestaltung der Rotoren und der Form der inneren Verdichtung unterschieden werden. Eine erste grobe Unterteilung erfolgt anhand der Form der Rotorprofile. Diese können sowohl symmetrisch als auch asymmetrisch ausgeführt werden.<sup>7</sup> Bei

der symmetrischen Gestaltung sind beide Zahnflanken eines Zahns spiegelsymmetrisch zueinander. Eine asymmetrische Gestaltung verspricht eine bessere Abdichtung; sie ist jedoch herausfordernd für die Fertigung, da die Profile einen Hinterschnitt aufweisen können.<sup>8</sup> Durch die asymmetrische Gestaltung wird die Größe einer Kopfrundungsöffnung (Blasloch) reduziert, was die verbesserte Abdichtung erklärt, allerdings führt dies zu größeren Flächen der übrigen Blaslöcher bzw. zu nicht vollständig geschlossenen Profileingriffslinien. Asymmetrische Profile sind aus diesem Grund in der Zähnezahl auf eins limitiert oder es muss auf eine größere Umschlingung verzichtet werden. Oftmals werden asymmetrische Rotorprofile derart gestaltet, dass sich eine Arbeitskammer über beide Rotoren erstreckt.<sup>7</sup> Insbesondere im Bereich der Schraubenkompressoren dominieren die asymmetrischen Rotorprofile bei im Vergleich zu Vakuumanwendungen geringer Umschlingung.<sup>9,10</sup> Eine mögliche Verwendung eines Schraubenkompressors als Schraubenlader für Vakuumanwendungen konnte von Nadler<sup>11</sup> in einer exemplarischen Analyse bestätigt werden.

Die in **Abb. 1.2** dargestellten Stirnschnitte eines Zykloiden- und eines Quimby-Profiles haben sich etabliert. Das Zykloidenprofil findet sowohl in ein- als auch in zweizähliger Variante Anwendung, wohingegen das asymmetrische Quimby-Profil aus den oben genannten Gründen nur einzählig ausgeführt werden kann. Die einzähligen Maschinen haben einen größeren Zahnlückenraum, was das Verhältnis des geförderten Fluidvolumens zum Bauvolumen der Maschine verbessert. Außerdem weisen die eingängigen Maschinen bessere Eigenschaften hinsichtlich der Spaltverbindungen und Dichtungen auf. Hingegen sind mehrgängige Profile nahezu frei von Unwucht, weshalb diese insbesondere für schnelllaufende Anwendungen von Interesse sind.<sup>8,12</sup> Der Außendurchmesser liegt für gängige Maschinen zwischen 40 und 250 mm.<sup>13</sup>



**Abb. 1.2** Etablierte Stirnschnitte für Schraubenspindelvakuumpumpen: Eingängiges Zykloiden-Profil (links) und eingängiges Quimby-Profil (rechts).

Schraubenvakuumpumpen werden in der Regel als Vorpumpen eingesetzt, welche gegen Atmosphärendruck verdichten. Das erzielte Vakuum liegt dabei im Bereich von Grob- und Feinvakuum. In modernen Pumpen kann auch die obere Grenze des Hochvakuums erreicht werden. Aufgrund der sehr großen Druckverhältnisse weisen die Pumpen einen großen Umschlingungswinkel, oft von mehr als zwei Umdrehungen auf, sodass die damit einhergehende große Anzahl von Arbeitskammern zu einer verbesserten Abdichtung führt.<sup>7</sup> Schraubenvakuumpumpen mit großer Umschlingung werden als Schraubenspindelvakuumpumpen (SSVP) bezeichnet, für die eine axiale Förderung charakteristisch ist. Alternativ wird zur Unterscheidung von Schraubenkompressoren vorgeschlagen, dass

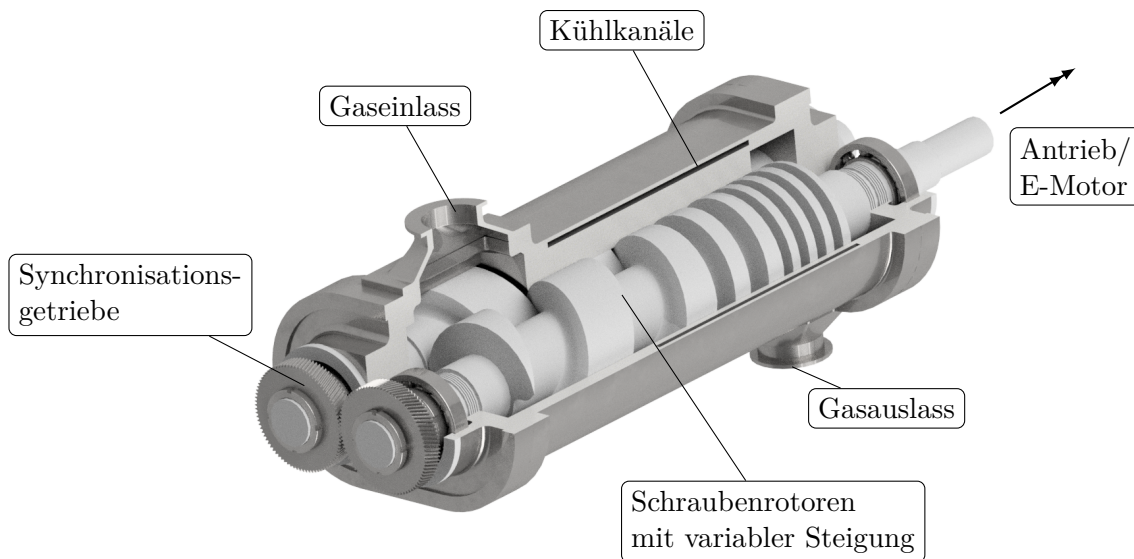
bei Schraubenspindelpumpen die Arbeitskammern eindeutig den Rotoren zuzuordnen sind.<sup>14</sup> Nach diesem Kriterium zählen Maschinen mit Quimby-Profil nicht zu den Schraubenspindelpumpen.

Die innere Verdichtung wird bei modernen Schraubenvakuumpumpen in der Regel durch eine variable Rotorsteigung realisiert,<sup>15,16</sup> allerdings kann diese auch alternativ oder ergänzend durch eine Verdichtung gegen eine Endplatte realisiert werden.<sup>7,16</sup> Hierbei wird der Gasauslass durch eine gezielte Bedeckung der Auslassflächen verzögert. Diese Gestaltung ist heutzutage vorwiegend bei Schraubenkompressoren mit konstanter Steigung zu finden, allerdings gibt es auch aktuelle Untersuchungen, die eine variable Rotorsteigung für Schraubenkompressoren unter bestimmten Randbedingungen empfehlen.<sup>17</sup> Die Auslegung der idealen Rotorsteigung ist Bestandteil verschiedener Optimierungsbemühungen.<sup>1,17,18</sup> Zusätzlich gibt es noch exotischere Formen der inneren Verdichtung, wie beispielsweise eine Veränderung der Profildurchmesser, wie sie bei modernen Pumpen zum Teil auch vorzufinden sind.<sup>16</sup>

Der Aufbau einer modernen Schraubenspindelvacuumpumpe ist in **Abb. 1.3** dargestellt. Die dargestellte Maschine hat einzahnige Rotoren mit einem Zykloiden-Profil und einer variablen Steigung. Der für trockene Anwendungen erforderliche synchrone und kontaktlose Betrieb der Rotoren wird durch ein präzises Synchronisationsgetriebe auf der Saugseite realisiert. Die Drehzahl einer Schraubenvakuumpumpe ist abhängig von der Baugröße und dem gewählten Profil. Größere Pumpen werden in der Regel mit einer niedrigeren Drehzahl betrieben. Die Umfangsgeschwindigkeit kann bis zu ungefähr  $110 \text{ ms}^{-1}$  betragen. Zwischen den Rotoren und zwischen den Rotoren und dem Gehäuse befinden sich Spalte, die der Betriebssicherheit dienen, aber innere Leckage verursachen und daher möglichst eng ausgeführt sind. Zur Abfuhr der Kompressionswärme werden das Gehäuse und gelegentlich auch die Rotoren aktiv gekühlt. Dies erfolgt für gewöhnlich durch eine Wasserkühlung, aber auch eine Ölkühlung kann insbesondere bei den Rotoren erfolgen. Eine reine Luftkühlung ist nur in Ausnahmen zu finden. In Abhängigkeit des gewählten Kühlsystems und des Betriebspunkts liegen die Bauteiltemperaturen zwischen  $20^\circ\text{C}$  und  $200^\circ\text{C}$ . Die Gastemperaturen können bis zu  $300^\circ\text{C}$  betragen. Die unterschiedliche Temperatúrausdehnung der Bauteile muss bei der Auslegung der Pumpen berücksichtigt werden, um trotz enger Maschinenspalte ein Anlaufen der Rotoren zu vermeiden. In der Praxis liegen die resultierenden Spalthöhen je nach Baugröße und Betriebspunkt zwischen  $0,05 \text{ mm}$  und  $0,3 \text{ mm}$ . Eine Abdichtung des Getrieberaums, gegenüber dem im Idealfall ölfreien Schöpfraum der Rotoren, erfolgt in der abgebildeten Maschine über ein System von Kolbendichtringen, aber auch Labyrinthdichtungen oder berührende Kunststoffdichtungen können eingesetzt werden. Für eine verbesserte Ölfreiheit können die Rotoren auch fliegend gelagert werden. Zur Abdichtung des Motor- und Getrieberaums gegenüber korrosiven Prozessgasen kann ergänzend Sperrgas verwendet werden. Der Motor und das Getriebe sitzen in modernen Pumpen direkt auf den Rotoren, um die hermetische Abdichtung der Pumpen zu verbessern.

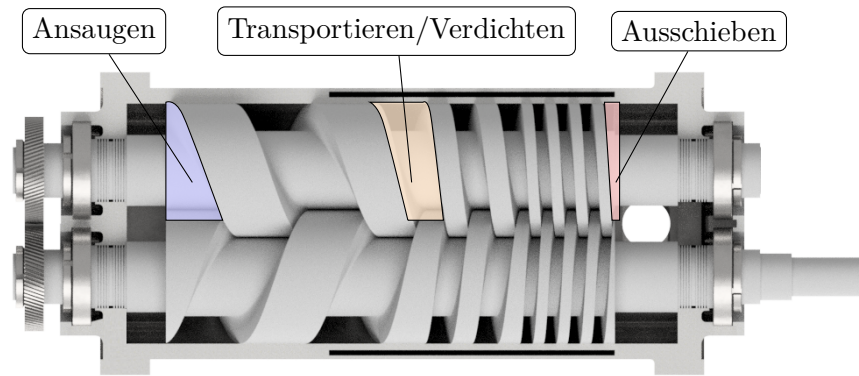
Um Überkompression in bestimmten Betriebspunkten zu vermeiden, und damit die Pumpenleistung zu reduzieren oder thermische Überlast zu vermeiden, werden verschiedene Maßnahmen ergriffen: Zum einen kann ein Überströmventil vorgesehen werden, welches allerdings durch aggressive Gase und Partikel verschmutzt oder beschädigt werden kann. Optional größere Spalte auf der Saugseite der Maschine vermeiden eine starke Überkompression, reduzieren jedoch die effektiv geförderte

Fluidmasse bei höheren Ansaugdrücken. Für niedrigere Ansaugdrücke hingegen ist der Verlust gering, da die saugseitigen Spalte strömungsformbedingt verhältnismäßig dicht sind. <sup>7,13</sup>



**Abb. 1.3** Aufbau einer modernen Schraubenspindelvakuummpumpe.

In den Zahnluken einer Schraubenvakuumpumpe bilden sich Arbeitskammern aus, die infolge der Rotordrehung das Arbeitsfluid von der Saugseite zur Hochdruckseite transportieren. Im Falle von symmetrischen Profilen liegen Arbeitskammern getrennt auf beiden Rotoren vor. Das Arbeitsspiel der Schraubenspindelvakuummpumpe wird in drei Phasen unterschieden, welche in [Abb. 1.4](#) dargestellt sind. In der ersten Phase, dem Ansaugen, bilden sich die Arbeitskammern auf der Saugseite der Rotoren aus. Über den Stirnschnitt sowie ggf. radiale Einlassflächen ist die Arbeitskammer mit dem Niederdruckstutzen verbunden, sodass diese während der Entstehung mit dem Arbeitsfluid gefüllt wird. Mit weiterer Rotordrehung schließen die Einlassflächen ab und das Arbeitsfluid liegt nun in einer gekapselten Arbeitskammer vor. Die Arbeitskammer wandert mit fortlaufender Rotordrehung in der zweiten Phase, der Transportphase, in Richtung der Hochdruckseite. Bedingt durch die variable Rotorsteigung und die Rückströmung durch die Spalte wird das Fluid in dieser Phase komprimiert. Mit dem Erreichen der Hochdruckseite öffnet die Arbeitskammer axial und die letzte Phase, das Ausschieben, beginnt. Durch eine Endplatte kann das Ausschieben gezielt verzögert werden, um eine zusätzliche innere Verdichtung zu erzielen. Das Arbeitsspiel endet mit dem vollständigen Verschwinden der Arbeitskammer, d.h. Schraubenspindelvakuummpumpen haben keinen Schadraum. Dem Massentransport entgegen wirken die Rückströmungen durch die betriebsbedingten Spalte. <sup>7,16,19,20</sup>



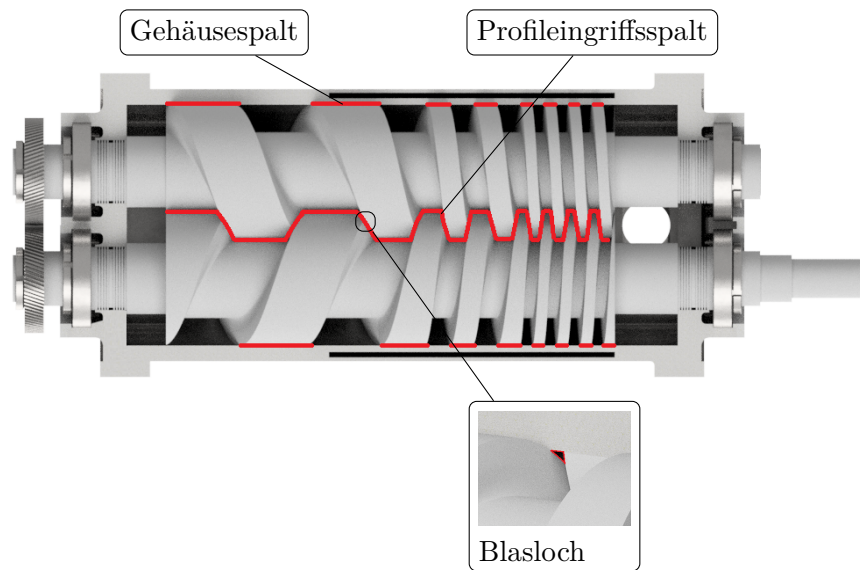
**Abb. 1.4** Die drei Phasen des Arbeitsspiels einer Schraubenspindelvakuumpumpe.

### 1.1.2 Arbeitsraumbegrenzende Spalte

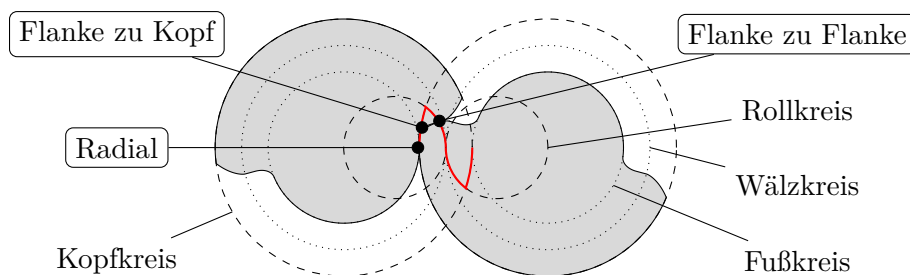
In [Abb. 1.5](#) sind die drei inneren Verbindungen einer Schraubenspindelvakuumpumpe mit Zykloidenprofil dargestellt. Der Gehäusespalt verbindet zwei direkt aufeinanderfolgende Arbeitskammern auf demselben Rotor. Er vermeidet die Berührung des Rotoraußendurchmessers mit dem Gehäuse. Er kann in guter Näherung als planparalleler Spalt mit einer bewegten Wand angenommen werden. Im Relativsystem der Arbeitskammer bewegt sich das Gehäuse und der Einfluss der Rotorbewegung quer zur Strömungsrichtung wird in der Regel vernachlässigt. Der Profileingriffsspalt entsteht aus dem Spiel zwischen den Rotoren und erstreckt sich entlang der Quasi-Eingriffslinie – das ist die imaginäre Linie, entlang der sich spielfreie Rotoren berühren würden. Dieser Spalt verbindet Kammern sowohl auf demselben Rotor als auch zwischen verschiedenen Rotoren. Eine im strengen Sinn nicht betriebssicherheitsbedingte Verbindung ist die Kopfrundungsöffnung, auch Blasloch genannt, im Bereich der Verschneidungskante. Diese ist bedingt durch die Profilform und verbindet zwei benachbarte Arbeitskammern auf beiden Rotoren. Es wird durch die beiden Rotoren und das Gehäuse begrenzt und ähnelt bei Schraubenspindelumpen einem Trapezoid.<sup>19,20</sup>

Ferner wird der Profileingriff in Abhängigkeit der Eingriffspunkte im Stirnschnitt unterteilt. Der Stirnschnitt eines Zykloidenrotorpaars inklusive Eingriffslinie ist in [Abb. 1.6](#) dargestellt. Der Eingriff der Zahnflanken verläuft wie bei einem Zykloidengetriebe auf den Rollkreisen und wird durch die Schnittlinie der Kopfkreise begrenzt. Ein weiterer Teil der Eingriffslinie liegt auf dem Rand der Schnittlinie der Kopfkreise und resultiert aus der Quasi-Berührung zwischen dem Zahnkopf und dem Zahnfuß des Gegenrotors. Die Quasi-Berührung zwischen dem Kopfkreis und dem Fußkreis bildet den Radialspalt.<sup>1</sup>

Diese Unterteilung des Profileingriffspalts ist sinnvoll, da so eine Zuordnung der verbundenen Arbeitskammern und von geeigneten Spaltkonturen möglich ist. Der Radialspalt verbindet zwei Arbeitskammern auf demselben Rotor. Seine Kontur bilden zwei konvexe Radien. Der Spalt zwischen Zahnkopf und Zahnflanke verbindet dieselben Arbeitskammern wie der Radialspalt. Seine Kontur bildet die konkave Einhüllende am Zahnfuß auf der einen Seite und die Keilform des Übergangs zwischen Zahnflanke und Kopfkreis auf der anderen Seite. Der Flanke-zu-Flanke-Spalt verbindet Arbeitskammern auf Haupt- und Gegenrotor, er wird durch zwei Konvexe Konturen begrenzt.<sup>1</sup>



**Abb. 1.5** Profileingriffslinie einer Schraubenspindelvakuum-pumpe mit Zykloiden-Profil im Achsschnitt.



**Abb. 1.6** Profileingriffslinie einer Schraubenspindelvakuum-pumpe mit Zykloiden-Profil im Stirnschnitt.

Neben der Ableitung der Profileingriffsspaltverbindungen aus der Quasi-Eingriffslinie, werden in der Literatur auch alternative mögliche Verbindungen im Bereich der Schnittlinse identifiziert. Dies liegt daran, dass bisher nur wenig Untersuchungen zu den Leckagewegen im Zahnengriff existieren und somit die Verbindungen angenommen werden müssen.<sup>21</sup> An den Zahnflanken grenzen vier Arbeitskammern aneinander, sodass drei mögliche Verbindungen identifiziert werden können (eine mehr als aus der Eingriffslinie folgt).<sup>19,22</sup> Demzufolge geht aus der Literatur keine einheitliche geometrische Beschreibung des Profileingriffsspalts im Bereich der Zahnflanken hervor. Es kann allerdings davon ausgegangen werden, dass die Verbindungen über zwei gegenüberliegende konvexe Wände beschrieben werden können.<sup>18,21</sup> Oftmals wird vereinfachend ein planparalleler Spalt angenommen.<sup>18–20</sup>

In Schraubenspindelvakuum-pumpen mit Quimby-Profil liegt keine geschlossene Profileingriffslinie vor, sodass sich eine Arbeitskammer über beide Rotoren erstreckt, aber dafür auf einer Seite kein Blasloch existiert. Der übrige Profileingriffsspalt kann durch zwei gegenüberliegende Radien beschrieben werden. Der Gehäusespalt ist ähnlich wie bei dem Zykloidenprofil nahezu planparallel.<sup>12</sup>

### 1.1.3 Strömungsmechanische und thermodynamische Einordnung

Für die Auslegung oder Simulation einer Schraubenvakuumpumpe ist es entscheidend, die internen Mechanismen zu erkennen und diese, sofern sie eine relevante Größenordnung erreichen, in Bezug auf Zielparame-ter wie das Saugvermögen oder die Innenleistung zu berücksichtigen. Insbesondere die Spaltverbindungen haben einen starken Einfluss auf das Betriebsverhalten von Rotationsverdränger-maschinen. Neben dem dissipativen Effekt sind diese auch für die Kühlung der Maschinen von Bedeutung.<sup>13,19</sup> In der Praxis wird am häufigsten Luft gefördert, die wie oben beschrieben von einem Fein- bzw. Grobvakuum gegen Atmosphärendruck verdichtet wird. Es können aber auch andere Gase oder Gasgemische gefördert werden.<sup>13</sup> Die Strömungen in den Spalten sind getrieben von den anliegenden Druckgefällen und den bewegten Bauteiloberflächen. Theoretisch können auch Temperatur- und Konzentrationsunterschiede eine Spaltströmung hervorrufen, was in der Regel vernachlässigbar ist.<sup>23</sup> Für die Auslegung einer Schraubenvakuumpumpe ist es wichtig sowohl die Fluidreibung als auch den Wärmeübergang zwischen Fluid und Bauteilen angemessen abzubilden. Zudem können auch Trägheitskräfte Druckänderungen hervorrufen. Zur Auswahl einer geeigneten Modellierung ist eine Abschätzung über dimensionslose Kennzahlen sinnvoll.

In Anbetracht der niedrigen Drücke, spielt *Gasverdünnung* für Schraubenvakuumpumpen eine besondere Rolle, deren Einfluss üblicherweise in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl beschrieben wird:

$$Kn = \frac{\ell}{L_{char}} \quad (1.1)$$

Die Knudsen-Zahl  $Kn$  setzt die mittlere freie Weglänge  $\ell$  (vgl. Tab. 1.1), die ein Fluidteilchen im statistischen Mittel zurücklegt, bis es mit einem anderen kollidiert, in Bezug zu einer charakteristischen Länge  $L_{char}$ . Eine Einteilung von Strömungen in verschiedene Bereiche der Gasverdünnung in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl wird in Tab. 1.2 angegeben. Für kleine Knudsen-Zahlen überwiegt die Anzahl der Kollisionen zwischen den Gasteilchen gegenüber den Kollisionen von den Teilchen mit den Wänden. Für große Knudsen-Zahlen gelten die Annahmen eines Kontinuums nicht mehr und Diffusionsprozesse treten mehr in den Vordergrund.<sup>7</sup>

**Tab. 1.2** Strömungsbereiche in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl nach Beskok<sup>24</sup>.

Strömungsbereich	Kontinuumsstr.	Schlupfstr.	Übergangsstr.	Molekulare Str.
Knudsen-Zahl	$Kn < 0,01$	$0,01 \leq Kn < 0,1$	$0,1 \leq Kn < 10$	$Kn \geq 10$

In einem Kontinuum werden zur mathematischen Modellierung der Strömung von linear-viskosen Newtonschen Fluiden die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen (NSF) verwendet. Dieses System aus partiellen Differentialgleichungen beschreibt die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie, wobei die Schubspannungen und die Wärmeströme linear von den Geschwindigkeits- bzw. Temperaturgradienten abhängen.<sup>25</sup> Auch im Bereich der Schlupfströmung sind die NSF-Gleichungen in guter Näherung gültig. Allerdings entsteht ein Geschwindigkeitsschlupf und ein Temperatursprung an der Wand, die durch geeignete Randbedingungen berücksichtigt werden müssen. Ab der Übergangsströmung können kontinuumsmechanische Ansätze nicht mehr genutzt werden und es muss eine

teilchenorientierte Modellierung gewählt werden. In der Regel wird eine statistische Beschreibung der Teilchenbewegung über die Boltzmann-Gleichung gewählt. Der Grenzfall stellt die freie molekulare Strömung dar, in der keine Teilcheninteraktionen mehr berücksichtigt werden müssen.<sup>7,24</sup> In den Spalten einer Vakuumpumpe treten aufgrund der kleinen Spalthöhen und der zum Teil sehr niedrigen Drücke, alle beschriebenen Strömungsformen auf.<sup>13,20,21,23</sup>

Neben der Knudsen-Zahl ist die Reynolds-Zahl von entscheidender Bedeutung. Sie setzt die stationäre Trägheitskraft der Strömung in Bezug zu der viskosen Reibungskraft:

$$Re = \frac{\text{stationäre Trägheitskraft}}{\text{viskose Reibungskraft}} \quad (1.2)$$

Für schleichende Strömungen ( $Re < 1$ ) gelten die stationären Trägheitskräfte als vernachlässigbar. Diese Strömungen werden als Stokes-Strömungen bezeichnet. Wird eine Kontinuumsströmung für große Reynolds-Zahlen instabil, dann treten instationäre, dreidimensionale Verwirbelungen in verschiedenen Größenordnungen auf, welche als *Turbulenz* bezeichnet werden. Während eine große Trägheit dazu führt, dass die Strömung instabil werden kann, können Reibkräfte dies dämpfen und die Strömung damit stabilisieren. Eine stabile Kontinuumsströmung verläuft in Schichten und wird daher als laminar bezeichnet. Für große Reynolds-Zahlen ist die Strömung turbulent. Die kleinste Reynolds-Zahl, ab der Turbulenz beobachtet wird, wird als kritische Reynolds-Zahl bezeichnet. Die Reynolds-Zahl-abhängige Einteilung einer druckgetriebenen Strömung in einem planparallelen Spalt ist in **Tab. 1.3** aufgeführt. Untersuchungen an generischen Spalt-Konturen belegen, dass die kritische Reynolds-Zahl in den Spaltverbindungen einer Schraubenvakuumpumpe überschritten werden kann und so das Auftreten von Turbulenz in Betracht gezogen werden muss.<sup>21,23</sup>

**Tab. 1.3** Strömungsbereiche eines planparallelen Spalts in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl

Strömungsbereich	Laminare Str.	Übergangsstr.	Turbulente Str.
Reynolds-Zahl	$Re \leq 3000$	$3000 < Re \leq 8000$	$Re \geq 8000$

Als nächstes wird betrachtet, inwiefern die Kompressibilität des Fluids in Spalten zu berücksichtigen ist. Hierzu wird die aus der Festkörpermechanik bekannte Cauchy-Zahl verwendet, welche die stationäre Trägheitskraft und die Elastizitätskraft miteinander in Bezug setzt. Für die Elastizität wird in der Strömungsmechanik der Kehrwert der isentropen Kompressibilität des Fluides verwendet, welche direkt mit der isentropen Schallgeschwindigkeit zusammenhängt. Damit ist die Cauchy-Zahl für Strömungen gegeben mit:

$$Ca = \frac{\text{stationäre Trägheitskraft}}{\text{elastische Kraft}} = \left( \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} \right)^2 = M^2 \quad (1.3)$$

Für Cauchy-Zahlen  $Ca < 0,1$  bzw. gebräuchlicher für Mach-Zahlen  $M < 0,3$  kann die Dichteänderung im Fluid vernachlässigt und die Strömung als inkompressibel betrachtet werden.<sup>26</sup> Die Mach-Zahl ist definiert als das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur isentropen Schallgeschwindigkeit des Fluids. Messungen an Spaltkonturen belegen, dass in Schraubenvakuumpumpen große Mach-Zahlen auftreten. Besonders deutlich wird dies an der Beobachtung von verblockten

Strömungen, bei denen der Massendurchsatz unabhängig vom Spaltaustrittsdruck ist.<sup>27</sup> In diesem Fall hat die Mach-Zahl an einer Position innerhalb des Spalts den Wert Eins ( $M = 1$ ). Das Druckverhältnis, bei dem eine Verblockung auftritt, wird als kritisches Druckverhältnis bezeichnet. In Spaltverbindungen wird in der Regel der Austrittsdruck auf den Eintrittsdruck bezogen, sodass der Wert unter eins liegt. Bei den Spaltkonturen im Bereich des Profileingriffs (s.o.) treten „lavaldüsenartige“ Strömungskonturen auf, deren Querschnitt sich zunächst verengt und anschließend wieder aufweitet, sodass auch Überschallströmungen  $M > 1$  möglich sind. Die Strömungen in den Spalten sind daher als kompressibel zu betrachten.

### 1.1.4 Simulation von trockenlaufenden Schraubenvakuumpumpen

Rotationsverdrängermaschinen werden nach heutigem Stand auf vier verschiedene Weisen simuliert. Diese gehen von einfachen funktionalen bzw. analytischen Ansätzen bis hin zur mehrphasigen, mehrdimensionalen, numerischen Strömungssimulation mit verformten Gitternetzen. Des Weiteren gibt es noch hybride Ansätze, die verschiedene Ansätze kombinieren.

Unter stark vereinfachenden Annahmen lässt sich die Komplexität einer Rotationsverdrängermaschine derartig reduzieren, dass ein *funktionaler Zusammenhang* zur Bestimmung einer Kenngröße resultiert.<sup>19,22</sup> Beispielsweise konnte von Rohe<sup>19</sup> ein Ansatz herausgearbeitet werden, der eine Abschätzung des Enddrucks, also des tiefsten erzielbaren Vakuums, einer Schraubenspindelvakuumpumpe ermöglicht. Mit steigender Modellierungstiefe ist allerdings eine numerische Simulation erforderlich.

Die nächsthöhere Detailstufe ist das *Kammermodellverfahren*. Dieses geht wie die funktionalen Zusammenhänge davon aus, dass sich die Rotationsverdrängermaschine durch mehrere Fluidvolumen approximieren lässt, welche durch verschiedene Verbindungen verbunden sind. Die Volumen sind begrenzt durch funktionsbedingte Spalte sowie Bauteiloberflächen, welche Stoff- und/oder Energietransport ermöglichen. Der Zustand des Fluids in der Arbeitskammer wird in der Regel als homogen angenommen, allerdings gibt es inzwischen auch Ansätze eine Druckverteilung in den Arbeitskammern bei verdünnten Gasen<sup>28</sup> zu berücksichtigen oder eine Flüssigkeitsansammlung<sup>29</sup> zu modellieren. Im Rahmen der Kammermodellsimulation werden Stoff und Energie bilanziert, um den Betriebszustand der Maschine zu ermitteln. Darüber hinaus kann eine Drehwinkelabhängigkeit der Geometrie berücksichtigt werden. Die Abbildungsgüte wird maßgeblich von der Modellierungstiefe der Spaltströmung<sup>17,19,20,30</sup> und der Ein-<sup>31</sup> und Auslassdrosselung<sup>30</sup> beeinflusst, aber auch Wärmeübergänge<sup>19</sup> können einen signifikanten Einfluss haben. Für Mehrphasengemische sind metastabile Fluidzustände von Bedeutung.<sup>32</sup> Die Kammermodellsimulation ist vielfach in der Simulation von Rotationsverdrängermaschinen erprobt.<sup>19,20,33,34</sup>

Eine vereinfachte Form der Kammermodellsimulation ist die *Pumpstufensimulation*, wie sie vorwiegend in der Simulation von Spindelpumpen verwendet wird. Anstatt einer drehwinkelabhängigen Abbildung der Geometrie, wird die Rotationsverdrängermaschine in einer Reihenschaltung von Pumpstufen abstrahiert. Neben der Förderung von Flüssigkeiten, wird dieser Simulationsansatz auch für die Simulation von Schraubenspindelvakuumumpen verwendet.<sup>16,19</sup> Entscheidend für die Abbildungsgüte ist hierbei eine große Anzahl von Arbeitskammern.

Den detailliertesten Einblick in die Arbeitskammern liefert die *mehrdimensionale Strömungssimulation*, wobei hier die Modellierung des Fluids von entscheidender Bedeutung ist. In der Regel kann ein Newton'sches Fluid und ein Kontinuum angenommen werden. Eine detailliertere Modellierung ist hier ausschließlich für Turbulenzeffekte oder Mehrphasigkeit erforderlich. Die Bilanzierung der Erhaltungsgrößen erfolgt basierend auf den Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen. Die Grenzen erreichen diese Gleichungen bei zunehmender Gasverdünnung, wenn die Annahme eines Kontinuums keine Gültigkeit mehr besitzt. Allerdings kann der Kontinuumsansatz durch Modifikation der Randbedingungen auch im Bereich moderater Gasverdünnungen, dem sogenannten Schlupf-Regime, verwendet werden. Für größere Gasverdünnung wird die Direct-Simulation-Monte-Carlo(DSMC)-Methode verwendet, welche eine Modellierung der Boltzmann-Gleichung darstellt. Hierbei wird das Fluid auf Teilchenebene betrachtet, wobei zur Reduktion des Rechenaufwands gleichwertige Teilchen zu Teilchenpaketen zusammengefasst werden. Die Kollision einzelner Teilchen(pakete) erfolgt basierend auf einem statistischen Ansatz. Die exakte Position und Bewegungsrichtung wird zum Bestimmen der Kollisionspartner nicht verwendet. Verfahren, die den Impuls und Ort der einzelnen Teilchen berücksichtigen, werden als Particle-Tracking-Methoden bezeichnet. Diese sind extrem aufwendig, benötigen allerdings kein Rechenetz. Im Bereich einer molekularen Strömung müssen Teilchen-Teilchen-Interaktionen nicht mehr berücksichtigt werden. Ein solches Verfahren ist beispielsweise die Test-Partikel-Methode.

In der Simulation von Schraubenkompressoren und -expandern ist die Simulation mit *Computational Fluid Dynamics* (CFD) Stand der Technik<sup>35–37</sup>. Hierbei stellen die Netzgenerierung<sup>38–41</sup> und die Turbulenzmodellierung<sup>36,42</sup> die größten Herausforderungen dar. Zudem ist die Rechenzeit deutlich größer als beispielsweise beim Kammermodellverfahren. Die Simulation von Vorvakuumpumpen erfordert allerdings eine Kopplung von Teilchen- und Kontinuumssolvern, was für die Simulation von Rotationsverdrängermaschinen derzeit nicht bekannt ist. Grundsätzlich ist auch eine vollständig teilchenorientierte Simulation denkbar, allerdings müsste hierzu eine extrem hohe Rechenzeit in Kauf genommen werden. Nadler und Brümmner<sup>43</sup> verwendeten die Testpartikel-Methode zur exemplarischen Berechnung einer Wälzkolbenpumpe.

Alternativ zur vollständigen numerischen Simulation der Rotationsverdrängermaschine ist es möglich, sich auf die Simulation einzelner Aspekte zu konzentrieren. So lässt sich beispielsweise die Untersuchung von Spaltströmungen<sup>17,23</sup> vertiefen, die Druckverteilung in den Arbeitskammern<sup>28</sup> präziser bestimmen oder die hydraulischen Verluste in nasslaufenden Schraubenmaschinen<sup>29</sup> genauer ermitteln. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen lassen sich Modelle entwickeln, die in der Kammermodellsimulation eingesetzt werden können, um die Abbildungsgenauigkeit zu erhöhen, während die Rechenzeiten weiterhin in einem akzeptablen Rahmen bleiben.

### 1.1.5 Untersuchung allgemeiner Strömungsformen

Die Physik der Spaltströmung überschneidet sich mit einer Vielzahl anderer technischer Anwendungen. Modelle aus diesen Anwendungen können auf die Spaltströmung in Vakuumpumpen übertragen werden, was bereits in einigen der oben beschriebenen Spaltmodelle geschehen ist. Im Folgenden

werden einige wichtige allgemeine Strömungsphänomene vorgestellt, die Einfluss auf die Wirkung einer Schraubenvakuumpumpe nehmen.

*Inkompressible Strömungen* sind inzwischen gut untersucht und in vielen Standardwerken<sup>7,44,45</sup> beschrieben. Oftmals werden einfache Kanalströmungen oder angeströmte Platten untersucht und daraus einfache Modelle für ingenieurtechnische Anwendungen abgeleitet. Beispiele hierfür sind die Nusselt-Korrelationen für Wärmeübergänge und das Colebrook-Diagramm für die Fluidreibung. Der einfachste Fall einer stationären, inkompressiblen, viskosen Strömung ist die durch einen planparallelen Spalt. Ist diese hydrodynamisch vollständig ausgebildet, lässt sich das Geschwindigkeitsprofil für eine laminare Strömung analytisch exakt beschreiben, sodass direkt die Wandreibung bestimmt werden kann. Zu unterscheiden sind zwei Sonderfälle: Im ersten Fall, der Schleppströmung, wird die Strömung durch eine Bewegung der Spaltwände hervorgerufen. Die Schleppströmung wird auch als Couette-Strömung bezeichnet, benannt nach M. Couette, der entscheidende Beiträge zur Untersuchung der Schleppströmung leistete. Der zweite Fall ist die druckgetriebene Poiseuille-Strömung, benannt nach dem Physiker J.L.M. Poiseuille, der diese Strömung zeitgleich mit seinem Kollegen G.H.L Hagen im Jahr 1846 zuerst analytisch beschrieb. Die Kombination beider Strömungsformen wird Poiseuille-Couette-Strömung genannt, diese ist unter anderem bei Gleitlagerströmungen von Bedeutung.<sup>45</sup>

Für laminare Strömungen in Kanälen mit nicht-konstanten Querschnitten, können ebenfalls Lösungen gefunden werden. Eine übliche Methode ist hierbei die Schlankkanaltheorie. Für Düsen- und Diffusoren kann mit der Jeffery-Hamel-Strömung die Reibung der eingelaufenen Strömung bestimmt und zusätzlich ein Kriterium für die Strömungsablösung im Diffusor gefunden werden.<sup>45,46</sup>

Insbesondere für kurze Spalte sind Einlaufverluste von Bedeutung. Die Abweichungen des Druckverlusts einer nicht-ingelaufenen Strömung zu dem einer eingelaufenen wird als Überdruckverlust bezeichnet. Zusammenhänge für den Überdruckverlust und die Einlauflänge laminarer Strömungen in einem planparallelen Spalt gibt Chen<sup>47</sup> an. Bei Spalten, in denen die Strömung am Eintritt einschnürt, kann die Arbeit von Mises<sup>48</sup> von Bedeutung sein, welche die Einschnürung quantifiziert, um Ausflusskoeffizienten für Behälter mit verschiedenen Ausflussgeometrien zu bestimmen.

Der Wärmeübergang in einer hydrodynamisch eingelaufenen, laminaren Strömung in einem Kanal oder einer Rohrleitung kann durch eine Reihenentwicklung gefunden werden. Für Rohrleitungen mit konstanter Temperatur wird dies auch als Graetz-Problem bezeichnet. Für den planparallelen Spalt ist das Problem ebenfalls gelöst und auf den Fall unterschiedlicher Wandtemperaturen und Wandwärmeströme erweitert. McCuen, Kays und Reynolds<sup>49</sup> stellen eine Lösung vor, mit der die Vorgabe eines Wandtemperaturverlaufs möglich ist.<sup>49-54</sup> Neben diesen Lösungen können auch Nusselt-Korrelationen für thermisch und hydrodynamisch nicht ausgebildete Strömungen angegeben werden, allerdings nur für konstante Wandtemperaturen.<sup>44</sup>

In vielen technischen Anwendungen ist die Strömung turbulent. Diese wird oft als stationär betrachtet, obwohl kleinere instationäre Fluktuationen vorliegen. Für diese Strömungen können keine exakten Lösungen bestimmt werden, sondern die Turbulenz muss modelliert werden. Gleichungen zur Beschreibung des Reibbeiwerts und der Wärmeströme sind nur empirischer bzw. halb-empirischer

Natur. Die gebräuchlichsten Gleichungen zur Beschreibung des Reibbeiwerts von turbulenten Strömungen in hydraulisch-glaten Rohren gehen auf Prandtl und Blasius zurück.<sup>45</sup> Für den Wärmeübergang in turbulenten Rohrströmungen gilt die Nusselt-Korrelation nach Gnielinski<sup>44</sup> als sehr gut bestätigt. Elementarlösungen für den turbulenten Wärmeübergang in einem planparallelen Spalt werden von McCuen, Kays und Reynolds<sup>49</sup> angegeben und verifiziert.

Eine grundlegende Arbeit zur Bestimmung des Massendurchsatzes von *kompresiblen Strömungen* liefern Saint-Venant und Wantzel<sup>55</sup>. Sie formulieren einen Ansatz zur Berechnung eines theoretischen Massenstroms für das isentrope Ausströmen aus einem Kessel, vergleichen diesen mit Messungen und zeigen dabei zum ersten Mal den Effekt einer verblockten Strömung. Der Ansatz wird später von Hartshorn und Strutt<sup>56</sup> erneut aufgegriffen und das kritische Druckverhältnis für unterschiedliche Formen der Ausströmdüsen ermittelt. Eine detailliertere experimentelle Untersuchung der Strömung innerhalb und im Nachlauf von Düsen unterschiedlicher Form liefert Stanton<sup>57</sup>. Dabei untersucht er zusätzlich die Stoßwellen stromabwärts mittels Druckmessungen und unterstützend visuell mittels Schlierentechnik. Jobson<sup>58</sup> stellt einen Berechnungsansatz vor mit dem die Einschnürung inkompressibler Strömungen in Blenden auf eine kompressible Strömung umgerechnet wird. Mit diesem Ansatz berechnet er den Einfluss des Druckverhältnisses auf den Blendendurchflusskoeffizienten. Hierbei geht er allerdings davon aus, dass die Druckverteilung an den Düsenwänden stromaufwärts weiterhin der einer inkompressiblen Strömungen entspricht. Der Ansatz liefert gute Ergebnisse für scharfe Blenden, versagt allerdings bei längeren Düsenkonturen für niedrige Druckverhältnisse deutlich kleiner Eins. Bragg<sup>59</sup> verbessert diesen Ansatz für konvergente Düsen, indem er diesen um eine kompressible Betrachtung der Wanddrücke stromaufwärts erweitert. Ergänzende Messungen zum kritischen Ausströmen durch symmetrische Düsen liefern Tang und Fenn<sup>60</sup>.

Auch für einfache kompressible Kanalströmungen mit konstantem Querschnitt können Stromfaden-Lösungen bestimmt werden. Diese sind für adiabate reibungsbehaftete Strömungen die Fanno-Linie und für diabate reibungsfreie Strömungen die Rayleigh-Linie. Ein Standardwerk zur Berechnung von kompressiblen Gasströmungen liefert Shapiro<sup>61,62</sup>. Der im Kontext dieser Arbeit relevante Teil ist die von ihm entwickelte eindimensionale Beschreibung, die sowohl die Fanno-Linie als auch Rayleigh-Linie beinhaltet, aber auch variable Strömungsquerschnitte und Gaszusammensetzungen berücksichtigt. Vorgestellt wird ein vollständiger Lösungsansatz inklusive verschiedener Sonderfälle wie kritische Strömungen, d.h. Mach-Zahl gleich Eins, oder senkrechte Verdichtungsstöße. Für letztere werden die Rankine-Hugoniot-Beziehung gelöst. Zur Lösung der Strömungsgleichung nach Shapiro werden Modelle zur Abbildung der Reibung und des Wärmeübergangs benötigt. Für turbulente Strömungen gelten in guter Näherung die Reibungsgesetze aus der inkompressiblen Strömung.<sup>62</sup> Für laminare Strömungen mit kleiner Mach-Zahl errechnen Berg, Seldam und Gulik<sup>63</sup> Geschwindigkeitsprofile, die nur leicht von der inkompressiblen Lösung abweichen, womit die Reibung ebenfalls der einer inkompressiblen Strömung entspricht. Dies wird mittels Gesamtdruckverlustmessungen über einen Spalt durch Celata et al.<sup>64</sup> und Harley et al.<sup>65</sup> bestätigt. Allerdings zeigen Asako et al.<sup>66</sup> sowie Hong, Asako und Lee<sup>67</sup> durch numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung, dass die Reibung in einer laminaren, kompressiblen Strömung stark von der Mach-Zahl abhängt. So ist die Reibung bei einer Mach-Zahl von  $Ma = 0,7$  ca. 30% größer als im inkompressiblen Fall. Für laminare Strömungen geben Asako et al.<sup>66</sup> Näherungsformeln an, welche ebenfalls für die Schlupf-

strömung gelten. Um den Wärmeübergang in einer kompressiblen Strömung zu korrigieren, schlägt Shapiro<sup>62</sup> eine Anpassung der Fluidtemperatur in Wandnähe durch einen Rückgewinnungsfaktor vor. Basierend auf experimentellen Werten zeigt er, dass dieser bei Rohrströmungen zwischen 0,87 und 0,91 liegt.

Darüber hinaus gibt es umfangreiche Untersuchungen zur *verdünnten Gasströmung* in Kanälen, Rohren und Spalten auf dem Gebiet der Mikrokanäle in den vergangenen Jahrzehnten. Theoretische Ansätze liefern hauptsächlich analytische Lösungen für die freie molekulare Strömung und das Schlupfregime. Der Mangel an Wissen im Bereich der Übergangsströmung wird typischerweise durch das Lösen der linearisierten Boltzmann-Gleichung geschlossen.<sup>68-76</sup> Je nachdem, ob die Reibung oder der Wärmeübergang im Mittelpunkt der Arbeit steht, wird entweder das Bhatnagar, Gross und Krook<sup>77</sup>-Modell oder das Shakov<sup>78</sup>-Modell verwendet, um den Kollisionsterm der Boltzmann-Gleichung zu lösen. Untersuchungen zur Couette-Poiseuille-Strömung im Bereich großer Knudsen-Zahlen finden sich im Zusammenhang mit Gleitlagern. Zum Beispiel entwickelten Fukui und Kaneko<sup>79</sup> eine verallgemeinerte Schmierfilmtheorie nach Reynolds, um die Tragfähigkeit von Gleitlagern zu bestimmen. Dies geschieht durch eine Überlagerung der Poiseuille- und Couette-Massenströmungen. Später erweitern sie das Modell um das thermische Kriechen.<sup>80,81</sup> Sharipov, Fahrenbach und Zipp<sup>82</sup> verwenden diesen Ansatz zum ersten Mal im Zusammenhang mit Vakuumpumpen bei der Berechnung einer Holweck-Pumpe.

### 1.1.6 Spaltströmungen in trockenlaufenden Rotationsverdrängermaschinen

Nun soll gezielt auf den Stand der Wissenschaft zu der Ermittlung von Strömungsbeiwerten von Spaltströmungen in Schraubenmaschinen eingegangen werden. Dabei liegt der Fokus auf den einphasigen Strömungen von idealen Gasen. Die Spaltströmungen in Schraubenmaschinen lassen sich primär durch zwei überlagerte Strömungen beschreiben. Dieses ist zum einen die druckgetriebene Strömung, zum anderen die durch die Bewegung der Rotoren verursachte Schlepplströmung. Des Weiteren wirken sich Wärmeübertragung und die Art des Fluids auf den Massenstrom aus. Außerdem beeinflussen ggf. in der Strömung auftretende Turbulenzen sowie die bereits erwähnten Gasverdünnungseffekte die Dissipation innerhalb der Strömung und müssen daher ebenfalls mitberücksichtigt werden. Werte für den Massenstrom lassen sich durch aufwendige Experimente ermitteln. Zusätzlich besteht die Option einer numerischen Strömungssimulation. Darüber hinaus finden sich in der Literatur analytische und eindimensionale Simulationsansätze. Sinnvollerweise erfolgt vor dem Beginn der Untersuchungen eine Dimensionsanalyse, um die unabhängigen Parameter zu ermitteln. Der Massenstrom wird üblicherweise dimensionslos als Strömungsbeiwert dargestellt. Der Strömungsbeiwert bezieht den realen Massenstrom auf einen theoretischen Massenstrom, für den verschiedene Ansätze existieren. Der für Schraubenmaschinen gebräuchlichste Ansatz, ist das Modell nach Saint-Venant und Wantzel<sup>55</sup>. Dieses berechnet den Massenstrom auf Grundlage einer isentropen Blendenströmung mit gegebenem Druckverhältnis. Der Vorteil dieses Berechnungsansatzes ist, dass der Einfluss des Druckverhältnisses auf den Strömungsbeiwert entsprechend gering ausfällt. Ein für Vakuumpumpen gebräuchlicherer Ansatz ist der Bezug auf den Massenstrom einer verblockten Blendenströmung. Die Berechnung erfolgt gemäß Saint-Venant und Wantzel, allerdings für das kritische Druckverhältnis. Zuletzt ist eine Normierung zu nennen, die im Rahmen verdünn-

ter Kanalströmungen bevorzugt verwendet wird. Diese bezieht den realen Massenstrom auf den Effusionsmassenstrom einer molekularen Blende.

### *Schraubenkompressoren und -motoren*

Fister und Neumann<sup>83</sup> bestimmten mittels numerischer, stationärer, kompressibler Strömungssimulationen Strömungsbeiwerte des Gehäusespalts, des Profileingriffspalts, des Stirnspaltes und des Blasloches. Dabei variieren sie für eine Rotorgeometrie das Druckverhältnis über dem Spalt, die Gastemperatur und die Rotordrehzahl. Nach deren Einschätzung kann die Strömung in den Dichtspalten als laminar betrachtet werden, wohingegen für das Blasloch ein Prandtl-Mischungsmodell, also ein Turbulenzmodell, gewählt wird. Insbesondere bei Druckverhältnissen nahe Eins kann ein Einfluss der Läuferdrehung gezeigt werden. Für den Strömungsbeiwert des Blasloches ist eine starke Reynolds-Zahl-Abhängigkeit festzustellen.

Eine Auswahl generischer, ebener Spaltkonturen untersucht Peveling<sup>30</sup> im stationären Strömungsexperiment und variiert dazu Druckverhältnis, Reynolds-Zahl und Spalthöhe, wobei Reynolds-Zahl und Druckverhältnis nicht getrennt variiert werden, was die Interpretation erschwert. Dennoch kann ein deutlicher Einfluss der Spalthöhe auf den Strömungsbeiwert festgestellt werden. Ein steigender Eintrittsdruck, und somit auch eine steigende Reynolds-Zahl reduziert den Strömungsbeiwert, obwohl bei großen Reynolds-Zahlen eine reduzierte Reibung, relativ zum dynamischen Druck der Strömung, und somit Gegenteiliges zu erwarten ist. Die Messungen von Peveling zeigen zum Teil Strömungsbeiwerte bezogen auf Saint-Venant und Wantzel größer eins. Dies ist durch konvergent-divergente Spaltkonturen zu erklären, die es ermöglichen, dass der statische Druck im engsten Querschnitt niedriger als der Austrittsdruck werden kann.

Den Einfluss der Rotorbewegung auf den Strömungsbeiwert untersucht Dreißig<sup>84</sup>. In einem generischen Experiment wird der Massenstrom im Spalt zwischen einem drehenden Zylinder und verschiedenen konkaven Gegenkonturen gemessen. Mit einer Dimensionsanalyse bestimmt Dreißig die dimensionslosen Einflussgrößen für den Strömungsbeiwert. Bei einer adiabaten Betrachtung sind diese die Reynolds-Zahl, die Umfangs-Mach-Zahl des Zylinders, die Mach-Zahl der Spaltströmung und das Druckverhältnis über den Spalt. Die Ergebnisse der Experimente überträgt er anschließend auf die statischen Messungen von Peveling<sup>30</sup> und stellt diese drehwinkelabhängig für den Gehäuse- und Stirnspalt eines Schraubenmotors mit SRM-Profil dar. Für die dargestellten Ergebnisse kann ein deutlicher Einfluss der Rotordrehung festgestellt werden.

Fan und Chen<sup>85</sup> präsentieren einen Ansatz zur Berechnung der Druckverteilung und des Massenstroms in einem Spalt eines Kompressors, der identisch mit dem Ansatz der eindimensionalen Strömung nach Shapiro<sup>61</sup> ist. Allerdings scheint diese Arbeit den Autoren nicht bekannt zu sein. Sie gehen von einer adiabaten Strömung aus. Die Reibung wird laminar bzw. turbulent nach Blasius abgeschätzt. Es wird beispielhaft die Strömung durch einen Spalt zwischen zwei exzentrischen Zylindern berechnet.

Einen quasi-eindimensionalen Berechnungsansatz für adiabate, kompressible Strömungen in engen Spalten großer Länge stellt Huang<sup>86</sup> vor. Er vernachlässigt dabei die Änderungen der Zustandsgrößen quer zur Strömungsrichtung sowie die Änderung des Strömungsquerschnitts in der Massenerhal-

tung. Die reduzierten partiellen Differentialgleichungen für Masse, Impuls und Energie werden mit einer Integralmethode gelöst. Informationen über das Geschwindigkeitsprofil und die Wandreibung sind dabei direkt Teil der Lösung und müssen nicht wie im Ansatz von Shapiro<sup>61</sup> modelliert werden. Für laminare, kompressible Strömungen ist dies ein Vorteil. Huang stellt die quasi-eindimensionale Lösung einer numerischen, zweidimensionalen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung gegenüber. Die Abweichung liegt dabei zwischen 15% bei kleinen Spalthöhen von 0,1 mm und 95% bei sehr großen Spalthöhen von 2 mm.

Ishii et al.<sup>87</sup> berechnen die Spaltmassenströme in Scroll-Kompressoren über einen inkompressiblen Stromfaden. Der Reibbeiwert wird nach Blasius abgeschätzt. Die Dichte für den Stromfaden wird über eine polytrope Entspannung in den Spalt berechnet. Zur Validierung wird ein Experiment verwendet, welches den zeitabhängigen Druckabfall in einem Behälter misst, welcher sich über eine Spaltkontur gegen Atmosphäre entspannt. Simulation und Messungen zeigen eine gute Übereinstimmung. Zuletzt vergleichen sie den inkompressiblen Ansatz am Beispiel des Radialspalts mit einer Fanno-Strömung. Die Fanno-Strömung weicht deutlich von den Messungen ab, da diese den konvergent-divergenten Verlauf der Radialspaltkontur nicht mit abbildet. Ishii et al.<sup>88</sup> erweitern das Modell um den Einfluss der Oberflächenrauigkeit und untersuchen deren Einfluss auf den Wirkungsgrad eines Scroll-CO<sub>2</sub>-Kompressors, wobei eine größere Oberflächenrauigkeit den Liefergrad und Gesamtwirkungsgrad des Kompressors verbessert.

Bell et al.<sup>89</sup> verfolgen einen Simulationsansatz analog zu Shapiro<sup>61</sup>, verzichten allerdings auf die Annahmen idealer Gase zugunsten realer Fluideigenschaften. Es folgt ein Anfangswertproblem aus vier Differentialgleichungen für die Zustandsgrößen und einer Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit, die parallel zueinander gelöst werden. Basierend auf den ermittelten Massenströmen entwickeln die Autoren Korrelationen für den Strömungsbeiwert des Flanken- und Radialspalts von Scroll-Kompressoren in Abhängigkeit einer Reynolds-Zahl, die mit dem theoretischen Massenstrom nach Saint-Venant und Wantzel<sup>55</sup> gebildet wird.

Eine detaillierte Untersuchung der Spaltströmungen in einem Schraubenkompressor liefert Utri<sup>17</sup>. Ausgehend von einer Dimensionsanalyse untersucht er den Einfluss verschiedener Kennzahlen auf die Strömungsbeiwerte der Gehäuse- und Stirnspalte im Experiment und in numerischen Strömungssimulationen. Basierend auf der Untersuchung entwickelt er Korrelationsgleichungen und bindet diese in ein Kammermodellverfahren ein.

### *Schraubenvakuumpumpen*

Eine grundlegende Arbeit für die Kammermodellsimulation von Schraubenvakuumpumpen liefert Wenderott<sup>21</sup> mit der Vermessung einer breiten Variation von Spaltkonturen im Bereich der verdünnten Strömungen. Er ermittelt den von Eintrittsdruck und Druckverhältnis abhängigen Massenstrom durch die Spaltkonturen. Alle Messungen erfolgten bei Umgebungstemperatur. Rohe<sup>19</sup> nutzt diese Daten erstmalig in einer diabaten Kammermodellsimulation. Hierzu nutzt er die Knudsen-Ähnlichkeit, um den Eintrittsdruck für den Zugriff auf die Wenderott-Daten temperaturabhängig zu korrigieren. Stratmann<sup>20</sup> erweitert die Messdatenbank um Simulationsdaten für Massenströme unter dem Einfluss einer bewegten Spaltberandung im Bereich molekularer Strömungen. Für die Kontinuumsströmung vernachlässigt er den Einfluss der Wandbewegung und für den Bereich der

Übergangsströmung gibt er einen Interpolationsansatz an. Nadler<sup>11</sup> erweitert die Abbildung mit den Wenderott-Daten um Interpolationsansätze zwischen den Spaltgeometrien und erweitert somit den zulässigen Geometrieparameterbereich. Zudem zeigt er, dass durch eine geschickte Entdimensionierung der Wandgeschwindigkeit die Durchlaufwahrscheinlichkeiten aus den Simulationen von Stratmann<sup>20</sup> zu einer einzigen Kurve zusammenfallen. Zudem vergleicht Nadler die Spalt Datenbank mit Massenströmen basierend auf Sharipov und Seleznev<sup>90</sup> und diskutiert Vor- und Nachteile im Zusammenhang mit Schraubenvakuumpumpen.

Müller<sup>13</sup> verwendet einen Ansatz analog zur eindimensionalen Berechnung von kompressiblen Strömungen nach Shapiro<sup>61</sup> zur Berechnung des Gehäusespalts einer Schraubenspindelvakuumpumpe. Er vernachlässigt Querschnittsänderungen und bewegte Berandungen, berücksichtigt dafür aber ein Strömungsprofil im Spalt. Er bestimmt die Reibung und die Wärmeströme ortsabhängig mit inkompressiblen, numerischen Strömungssimulationen und nutzt diese als Datenbasis für die eindimensionale Simulation. Für die Übertragung der inkompressiblen Daten auf die kompressible Strömung entwickelt er eigene Modelle. Basierend auf den Lösungen der linearisierten Boltzmann-Gleichung von Sharipov<sup>73,76</sup> berücksichtigt er den Einfluss der Gasverdünnung auf die Reibung und den Wärmeübergang. Das Modell verifiziert er an Messungen mit guten Übereinstimmungen sowohl für den Massenstrom als auch für die Wandwärmeströme. Zudem verdeutlicht seine Arbeit, dass der Wärmeübergang den Spaltmassenstrom beeinflusst. Er beurteilt zu Beginn seiner Arbeit eine Vielzahl von strömungsmechanischen Phänomenen hinsichtlich deren Einfluss auf die Gehäusespaltströmung. So kann beispielsweise das Auftreten von Taylor-Wirbeln vernachlässigt werden.

Huck, Pleskun und Brümmer<sup>91</sup> entwickeln ein Modell analog zur verdünnten Gleitlagertheorie nach Fukui und Kaneko<sup>79</sup>. Dabei gehen sie von schleichenden Strömungen aus, berücksichtigen allerdings den Einfluss örtlicher Dichteunterschiede auf die Fluidreibung. Sie entwickeln ein Experiment zur Bestimmung des Massenstroms zwischen einem rotierenden Zylinder und einer planaren Gegenkontur und verifizieren damit das Modell. Sie variieren die Knudsen-Zahl, das Spaltdruckverhältnis sowie die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders und stellen dabei eine gute Übereinstimmung zwischen 1D-Modell und Experiment für Knudsen-Zahlen  $Kn > 0,01$  fest. Die Abweichungen führen die Autoren auf die fehlende Abbildung der Trägheit zurück, sodass sich beispielsweise keine verblockte Strömung mit dem Modell abbilden lässt. Weitere Untersuchungen am 1D-Modell und Experiment präsentiert Huck<sup>23</sup> in seiner Dissertation. Ergänzt werden die Untersuchungen um DSMC-Simulationen und um die Betrachtung eines planparallelen Spalts. Des Weiteren diskutiert er die Grenzen der eindimensionalen Theorie und den Einfluss einer thermischen Kriechströmung auf Spaltströmungen in Vakuumpumpen. Letzter ist nur bei Druckverhältnissen nahe Eins und in Kombination mit großen Temperaturunterschieden in einer nennenswerten Größenordnung.

### 1.2 Ziel der Arbeit und Vorgehensweise

Aus dem präsentierten Stand der Technik folgt, dass das Kammermodellverfahren nach wie vor eine bevorzugte Methode zur thermodynamischen Modellierung von Schraubenvakuumpumpen ist. Die Stärke des Kammermodellverfahrens ist zum einen die kosteneffiziente Simulation, welche alle

Druckbereiche bei geeigneter Modellierung mitberücksichtigen kann. Zum anderen werden einzelne Wirkmechanismen getrennt modelliert, was aus wissenschaftlicher Sicht eine Einflussanalyse und somit eine gezielten Maschinenoptimierung ermöglicht. So kann beispielsweise der Einfluss einzelner Spaltverbindungen auf die Güte der Maschine untersucht werden, um anschließend die Rotorgeometrie diesbezüglich zu optimieren. Aus dieser Betrachtung und dem bereits aufgeführten großen Einfluss der Spaltverbindungen auf die Schraubenmaschine leitete sich die Motivation einer präzisen Modellierung dieser Verbindungen im Rahmen von Kammermodellsimulationen ab.

Obwohl die grundlegenden Wirkmechanismen der Spaltverbindungen weitgehend verstanden sind, mangelt es noch an einer Methode, die die Berechnung der Spaltströmungen ermöglicht, wobei sämtliche dieser Einflussparameter berücksichtigt werden. Das zu entwickelnde Werkzeug soll direkt im Rahmen einer Kammermodellsimulation angewendet werden können und als solches kosteneffizient sein. Ein Verfahren, welches dies ermöglicht, ist die eindimensionale Berechnung von kompressiblen Strömungen, wie von Shapiro<sup>61</sup> und Müller<sup>13</sup> vorgestellt. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf Vakuumpumpen und somit auf verdünnten Gasen, welche als ideale Gase angenommen werden können. Zwar bietet das von Müller<sup>13</sup> vorgestellte Verfahren bereits die Möglichkeit, eine Gasverdünnung zu berücksichtigen, es kann allerdings variable Strömungsquerschnitte und bewegte Berandungen nur unzureichend abbilden. Der eindimensionale Ansatz von Huck<sup>23</sup> löst dieses Problem, allerdings unter Vernachlässigung der Trägheit der Strömung und damit unzureichenden Ergebnissen bei hohen Drücken bzw. Reynolds-Zahlen. Ziel dieser Arbeit ist es diese beiden Ansätze miteinander zu verknüpfen.

Dazu wird zunächst, der Literatur folgend, ein System eindimensionaler Erhaltungsgleichungen aus der kinetischen Gastheorie hergeleitet und so formal die Gültigkeit der eindimensionalen Gleichungen für verdünnte Strömungen belegt. Sobald die Grundlagen der Zusammenhänge zwischen molekularen Teilchenbewegungen und makroskopischen Zustandsgrößen gelegt sind, erfolgt darauf stützend eine Dimensionsanalyse der Spaltströmung und die relevanten physikalischen Effekte werden identifiziert. Für diese isolierten Wirkmechanismen werden Modelle herausgearbeitet, die in das Spaltmodell integriert werden. Das Modell wird unter Annahme einer konstanten Totaltemperatur sowie einer vollständig ausgebildeten Strömung gelöst und mit einer Auswahl von messtechnischen Spaltuntersuchungen aus der Literatur verglichen. Dabei werden neben Spalten in Vakuumpumpen auch Schraubenkompressoren berücksichtigt. Basierend auf den Gegenüberstellungen werden die Stärken und Schwächen des Modells aufgedeckt und ein Ausblick für potenzielle Verbesserungen gegeben.

Um zukünftig auch den Wärmeübergang im Spalt für leichtverdünnte Strömungen mit Couette-Anteil lösen zu können, wird das Graetz-Problem einer Couette-Poiseuille-Strömung mit Geschwindigkeitsschlupf und Temperatursprung gelöst. Für den zusätzlichen Druckverlust einer laminaren, nicht vollständig ausgebildeten Strömung wird ein Modell entwickelt, das mit einer geringen Anzahl von Gleichungen in das vorgestellte eindimensionale Verfahren integriert werden kann.

Abschließend wird ein Verfahren vorgestellt und validiert, mit dem Geschwindigkeitsschlupf- und Temperatursprungrandbedingungen in den kommerziellen CFD-Solver Ansys CFX implementiert werden können. Numerische Strömungssimulationen, die unter Verwendung dieser Randbedingung

durchgeführt werden, stellen einen hervorsagenden Ausgangspunkt für eine Weiterentwicklung des präsentierten Spaltmodells oder der Kammermodellsimulation von Vakuumpumpen im Allgemeinen dar.

## 2 Grundlagen der Spaltberechnung

Die Simulation von Spaltströmungen in Vakuumpumpen erfordert sowohl kontinuumsmechanische als auch gaskinetische Ansätze, um den gesamten Druckbereich abzubilden. Zunächst werden die Grundlagen der kinetischen Gastheorie dargelegt. Basierend auf dieser Theorie erfolgt dann die Überleitung zu den allgemeinen Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik. Des Weiteren werden die makroskopischen Eigenschaften von Fluiden, insbesondere von idealen Gasen, zusammenfassend erläutert. Entsprechende Inhalte für Gase und Gasgemische sind an die Standardwerke von Hänel<sup>92</sup>, Struchtrup<sup>93</sup> und Bird<sup>94</sup> angelehnt. Zur allgemeineren Betrachtung von Teilchen mit inneren Freiheitsgraden wird die Beschreibung nach Giovangigli<sup>95</sup> gewählt, die die inneren Freiheitsgrade über Quantenzustände berücksichtigt. Alternative Ansätze über eine Verteilungsfunktion der inneren Freiheitsgrade werden von Pavić<sup>96</sup> oder Desvilletes, Monaco und Salvarani<sup>97</sup> vorgestellt und führen zu denselben makroskopischen Erhaltungsgleichungen. Darüber hinaus wird gezeigt, wie aus diesen allgemeinen Erhaltungsgleichungen die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen hervorgehen und wie deren Transportgrößen auf die Eigenschaften der Teilchen zurückzuführen sind. Zudem werden verschiedene Konzepte präsentiert, mit denen die Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik unter verschiedenen Randbedingungen gelöst werden können. Die in diesem Kapitel präsentierten Grundlagen entsprechen dem aktuellen Stand der Wissenschaft und bilden die Basis, auf die in den nachfolgenden Kapiteln zurückgegriffen wird, um das Modell für die Spaltströmung zu entwickeln.

### 2.1 Kinetische Gastheorie

#### 2.1.1 Eigenschaften perfekter Gase

Die Zustandsgleichung idealer Gase beschreibt den Zusammenhang zwischen der Teilchenanzahldichte  $n$ , dem Druck  $p$  und der Temperatur  $T$  eines Gases im thermodynamischen Gleichgewicht. Dies impliziert, dass die Teilchen statistisch gleichmäßig im Raum verteilt sind, sowie dass sowohl die Teilchengeschwindigkeiten als auch die innere Energie der Teilchen gleichverteilt sind. Das Gesetz wurde zunächst empirisch ermittelt, lässt sich allerdings ebenfalls aus der kinetischen Gastheorie ableiten. Die Zustandsgleichung idealer Gase lautet

$$p = nk_{\text{B}}T, \quad (2.1)$$

dabei bezeichnet  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Alternativ kann auch die Formulierung in Abhängigkeit von der Dichte des Gases  $\varrho$  erfolgen

$$p = \varrho \frac{k_B}{m} T. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet  $m$  die Teilchenmasse. Die Dichte des Gases ist das Produkt aus Teilchenanzahldichte und der Teilchenmasse

$$\varrho = mn. \quad (2.3)$$

Die Temperatur  $T$  ist ein Maß für die Energie, welche den Teilchen innewohnt. Diese Energie teilt sich im Gleichgewicht gleichermaßen auf die translatorischen und inneren Freiheitsgrade der Teilchen auf nach dem Gleichverteilungssatz der Energien. In der Gaskinetik ist es allerdings üblich, die Temperatur allgemein als alternatives Maß für die spezifische innere Energie  $u$  zu verwenden. So ist die Temperatur auch für starke Abweichungen vom Gleichgewicht definiert über

$$u = c_V T, \quad (2.4)$$

wobei  $c_V$  die spezifische isochore Wärmekapazität des Gases bezeichnet. Diese wird unter Berücksichtigung der Anzahl der inneren Freiheitsgrade  $f$ , der Teilchenmasse  $m$  wie folgt berechnet:

$$c_V = \frac{3 + f}{2} \frac{k_B}{m} \quad (2.5)$$

Die Anzahl der Teilchenfreiheitsgrade entspricht mindestens den drei translatorischen Freiheitsgraden und je nach Teilchenform und Energieniveau können noch innere Freiheitsgrade in Form von Rotations- und Schwingungsfreiheitsgraden hinzukommen. Für Gase im Nichtgleichgewicht, ist der Gleichverteilungssatz nicht mehr gültig, sodass z.B. bei schnellen Änderungen die innere Energie  $u_{in}$  der Teilchen der translatorischen Energie  $u_{tr}$  nicht mehr folgt. Die gesamte innere Energie für Gase mit inneren Freiheitsgraden ist damit gegeben als

$$u = u_{tr} + u_{in}. \quad (2.6)$$

Entsprechend folgt eine Aufteilung in translatorische

$$u_{tr} = \frac{3}{2} \frac{k_B}{m} T_{tr} \quad (2.7)$$

und innere Temperatur

$$u_{in} = \frac{f}{2} \frac{k_B}{m} T_{in}, \quad (2.8)$$

welche im Gleichgewichtszustand identisch sind. Für ideale Gase im Nichtgleichgewicht behält das ideale Gasgesetz seine Form, allerdings wird nur die translatorische Temperatur verwendet:

$$p = nk_B T_{tr} \quad (2.9)$$

Eine weitere wichtige kalorische Zustandsgröße für offene Systeme ist die spezifische Enthalpie  $h$ . Diese ist definiert als die Summe aus der inneren Energie  $u$  und dem Verhältnis zwischen Druck  $p$  und Dichte  $\rho = nm$  des Fluids

$$h := u + \frac{p}{\rho}. \quad (2.10)$$

Für ideale Gase im Gleichgewicht ist die Enthalpie proportional zur Temperatur mit der spezifischen isobaren Wärmekapazität  $c_p$  als Proportionalitätsfaktor

$$h = c_p T. \quad (2.11)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Temperatur und des idealen Gasgesetzes folgt für die isobare Wärmekapazität im Gleichgewicht

$$c_p = \frac{5 + f}{2} \frac{k_B}{m}. \quad (2.12)$$

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität wird auch als Adiabatenkoeffizient  $\gamma$  bezeichnet. Dieser ist für ideale Gase nur von den inneren Freiheitsgraden abhängig

$$\gamma = \frac{5 + f}{3 + f}. \quad (2.13)$$

Unter Verwendung des Adiabatenkoeffizienten kann die isentrope Schallgeschwindigkeit  $c_s$  bestimmt werden. Diese berechnet sich in zusätzlicher Abhängigkeit von der Teilchenmasse und der Temperatur wie folgt

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B}{m} T}. \quad (2.14)$$

Für Gasgemische behalten die dargestellten Zusammenhänge ihre Form, allerdings müssen die Massenanteile der einzelnen Spezies berücksichtigt werden. Für ein Gemisch aus Spezies  $i \in \mathcal{S}$  gelten die obigen Zusammenhänge für die mittlere Teilchenmasse

$$m = \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \frac{n_i}{n} \quad (2.15)$$

an Stelle der Teilchenmasse einer einzelnen Spezies und für die spezifische isochore Wärmekapazität des Gemisches

$$c_V = \sum_{i \in \mathcal{S}} \frac{n_i m_i}{n m} c_{V,i}. \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Verteilungsfunktion der Teilchen

Die makroskopischen Eigenschaften idealer Gase lassen sich allgemein auf die mikroskopische Bewegung der Teilchen zurückführen. So ist die Temperatur ein Maß für effektive kinetische Energie der Teilchen und der Druck das Ergebnis der Impulsänderung, welche die Teilchen bei der Kollision mit einer Oberfläche erfahren. Die zentrale Größe der kinetischen Gastheorie ist hierbei die Verteilungsfunktion der Teilchen, welche das Gas auf statistischer Grundlage beschreibt. Ist die Verteilungsfunktion bekannt, ist der Zustand des Gases nahezu vollständig beschrieben. Oftmals

wird in der Literatur die Verteilungsfunktion von Teilchen ohne innere Freiheitsgrade betrachtet, die vor allem Edelgase gut beschreibt. Da in dieser Arbeit allerdings auch Gase bzw. Gasgemische wie Luft mit inneren Freiheitsgraden der Teilchen betrachtet werden, soll hier eine erweiterte Betrachtung erfolgen. Die folgenden Abschnitte orientieren sich dabei an Giovangigli <sup>95</sup> und berücksichtigen die Quantenzustände der inneren Freiheitsgrade. Es wird ein nicht-reaktives, verdünntes Gasgemisch mit verschiedenen Spezies von Teilchen mit inneren Freiheitsgraden betrachtet. Die Verteilungsfunktion

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}, I) = \frac{dN_{iI}}{dV d\mathbf{c}} = \frac{dN_{iI}}{dx_1 dx_2 dx_3 dc_1 dc_2 dc_3} \quad (2.17)$$

beschreibt die Anzahl  $dN_{i,I}$  der Teilchen einer Spezies  $i \in \mathcal{S}$  mit einem gegebenen Quantenenergieniveau  $I$  die sich in einem 6-dimensionalen Orts-  $d\mathbf{x}$  und Geschwindigkeitsraumelement  $d\mathbf{c}$  (Phasenraum) befinden. Demnach ergibt sich die Teilchenanzahldichte  $n_i$  einer Spezies  $i$  aus dem Integral über den Geschwindigkeitsraum  $\mathbb{R}^3$  summiert über alle Quantenenergieniveau  $I \in \mathcal{Q}_i$ :

$$n_i(\mathbf{x}, t) = \frac{dN_i}{dV} = \sum_{I \in \mathcal{Q}_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.18)$$

Ist die Teilchenanzahldichte bekannt, folgt mit der Teilchenmasse  $\mathbf{m}_i$  direkt die partielle Dichte der Spezies

$$\rho_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}_i n_i = \mathbf{m}_i \sum_{I \in \mathcal{Q}_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.19)$$

und die Dichte des Gasgemisches

$$\rho = \sum_{i \in \mathcal{S}} \rho_i. \quad (2.20)$$

### 2.1.3 Momente der Verteilungsfunktion

Als Moment der Verteilungsfunktion wird im Allgemeinen das Integral eines Produktes einer Größe  $\Phi$  mit der Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}_i$  über den Geschwindigkeitsraum  $d\mathbf{c}$  bezeichnet. Für Gasgemische aus Teilchen mit inneren Freiheitsgraden, muss noch über die Spezies und die Quantenenergieniveau summiert werden.

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}, \mathbf{m}_i, u_{iI}) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.21)$$

Dabei ist  $\Phi$  eine Funktion der Teilchengeschwindigkeit  $\mathbf{c}$ , der Teilchenmasse  $\mathbf{m}_i$ , der spezifischen inneren Energie der Teilchen  $u_{i,I}$  im  $I$ -ten Quantenenergieniveau, des Ortes  $x$  und der Zeit  $t$ , wohingegen das Moment nur noch von Ort und Zeit abhängt. Viele dieser Momente lassen sich makroskopischen Größen zuordnen. Beispiele hierfür sind die bereits eingeführte Teilchenanzahldichte  $n$  und die Gasdichte  $\rho$ . Im Folgenden werden die Momente für die fehlenden Zustandsgrößen eines idealen Gases sowie für den Wärmestromvektor und Spannungstensor hergeleitet. Die Energie einer kleinen Menge Gasteilchen  $dN_{iI}$  gleichen Zustands und gleicher Spezies ist gegeben mit

$$dE_{iI} = \mathbf{m}_i \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u_{iI} \right) dN_{iI}. \quad (2.22)$$

Für gegebene Verteilungsfunktionen errechnet sich die Gesamtenergie  $\Delta E$  in einem Volumenelement  $\Delta V$  dann über die Integration über den Orts- und Geschwindigkeitsraum und der Summe über alle Spezies und Quantenenergiezustände:

$$\Delta E = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int dE_{iI} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\Delta V} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u_{iI} \right) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i d\mathbf{x} \quad (2.23)$$

Wird diese Gesamtenergie nun auf das Volumen bezogen, folgt direkt die Energie des Gasgemisches pro Volumen

$$\varrho e = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u_{iI} \right) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta E}{\Delta V} \quad (2.24)$$

welche wiederum identisch mit dem Produkt der Dichte  $\varrho$  und spezifischer Gesamtenergie  $e$  ist. Um in einem nächsten Schritt die thermische Energie der Teilchen von der kinetischen Energie einer möglichen Gasströmung zu unterscheiden, wird die thermische Eigengeschwindigkeit  $\mathbf{c}_T$  der Teilchen eingeführt. Diese ergibt aus der Differenz der Teilchengeschwindigkeit  $\mathbf{c}$  und der makroskopischen bzw. Schwerpunktgeschwindigkeit oder Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - \mathbf{c} \quad (2.25)$$

Die Schwerpunktgeschwindigkeit  $\mathbf{c}$  ist dabei so definiert, dass für einen Phasenraum im Relativsystem der Strömung keine Masse transportiert wird. Für das Moment des thermischen Massentransport muss daher gelten:

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \mathbf{c}_T i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = 0 \quad (2.26)$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung lässt sich die Gesamtenergie weiter umformen und ermöglicht eine Aufteilung in spezifische innere Energie  $u$  und die spezifische kinetische Energie der makroskopischen Strömung

$$\varrho e = \varrho \left( u + \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right), \quad (2.27)$$

dabei ist analog zu (2.26)

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \mathbf{c} \mathbf{c}_T i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \mathbf{c} \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \mathbf{c}_T i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = 0. \quad (2.28)$$

Das Moment der spezifischen inneren Energie  $u$  lautet dann

$$\varrho u = \varrho (u_{tr} + u_{in}) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \left( \frac{\mathbf{c}_T^2}{2} + u_{iI} \right) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i. \quad (2.29)$$

Im nächsten Schritt sollen Flüsse von Teilchen über Oberflächen und die damit transportierte Größe  $\Phi_i$  betrachtet werden. Der Teilchenfluss einer Spezies  $i$  in  $k$ -ter Richtung durch eine Fläche

$dA_k$  ist gegeben mit

$$d\dot{N}_{i,k} = dA_k \sum_{I \in Q_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c}_{ki} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.30)$$

und somit folgt die Flussdichte  $\dot{\bar{\Phi}}$  einer Transportgröße  $\Phi$  eines Gasgemisches

$$\dot{\bar{\Phi}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi \mathbf{c}_i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi \mathbf{c} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i + \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi \mathbf{c}_{\mathbf{T}i} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.31)$$

welche analog zu den oben eingeführten Momenten der Boltzmann-Gleichung über die Definition der thermischen Eigengeschwindigkeit auf einen advektiven und einen thermischen, d.h. diffusiven, Anteil aufgeteilt werden kann. Wird als Transportgröße die Teilchenmasse  $\mathbf{m}_i$  und die Gesamtheit aller Spezies im Gasgemisch betrachtet, folgen mit der Definition der thermischen Eigengeschwindigkeit (2.25) die Momente für die Diffusionsgeschwindigkeit einer Spezies  $\mathbf{C}_i$  und die Schwerpunktschwindigkeit  $\mathbf{c}$ :

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{m}_i \mathbf{c}_i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \mathbf{c} \varrho + \sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{C}_i \quad (2.32)$$

$$\varrho_i \mathbf{C}_i = \sum_{I \in Q_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{m}_i \mathbf{c}_{\mathbf{T}i} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.33)$$

Entsprechend der Definition der Schwerpunktschwindigkeit ((2.25),(2.26)) ist die Summe der diffusiven Massenstromdichten null:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{C}_i = 0 \quad (2.34)$$

Per Definition erfolgt durch Diffusion somit kein Massentransport aber ggf. ein Spezientransport in Gemischen. Zudem erfolgt durch die diffusive Teilchenbewegung ein Transport von Energie und Impuls, zusätzlich zum advektiven Transport über den Massenstrom, welche im Folgenden erläutert werden. Mit dem Teilchenimpuls beschreibt das Flussdichteintegral den Impulsfluss durch eine Fläche, welcher wiederum in einen advektiven und einen diffusiven Anteil aufgeteilt werden kann

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{m}_i (\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \varrho \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + \mathcal{P}. \quad (2.35)$$

Aus dem diffusiven Anteil resultiert der Spannungszustand im Fluid, sodass die kinetische Formulierung des Spannungstensors lautet:

$$\mathcal{P} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{m}_i (\mathbf{c}_{\mathbf{T}i} \otimes \mathbf{c}_{\mathbf{T}i}) \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.36)$$

Der statische Druck wird als der Mittelwert der Spur des Spannungstensors, also der Normalspannungen in dem Fluid, definiert. Dieser berechnet sich demzufolge mit

$$p = \frac{1}{3} \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in Q_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{m}_i \mathbf{c}_{\mathbf{T}i}^2 \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \frac{2}{3} \varrho u_{tr} \quad (2.37)$$

und ist direkt abhängig von der Dichte und dem translatorischen Anteil der inneren Energie des Gasgemisches (2.29). Wird die innere translatorische Energie über die Temperatur (2.7) ausgedrückt, folgt unmittelbar das ideale Gasgesetz (2.9). Der Spannungstensor  $\mathcal{P}$  wird üblicherweise aufteilt in den isotropen Anteil  $p\mathbf{1}$  und den Schubspannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathcal{P} = p\mathbf{1} - \boldsymbol{\tau} \quad (2.38)$$

mit  $\mathbf{1}$  als Einheitsmatrix. In Analogie zum Massen- und Impulstransport folgt abschließend die Betrachtung des Energietransports. Dazu wird als Transportgröße die Gesamtenergie als Summe aus translatorischer und innerer Energie eines Teilchens gewählt. Erneut folgt die Aufteilung in makroskopische und thermische Teilchenbewegung. Unter der Berücksichtigung von (2.26) vereinfacht sich das Integral zu

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \left( \frac{\mathbf{c}_i^2}{2} + u_{iI} \right) \mathbf{c}_i \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i = \rho \left( u + \frac{c^2}{2} \right) \mathbf{c} - \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{P} \cdot \mathbf{c}. \quad (2.39)$$

Zwei Teilintegrale können als die bereits zuvor eingeführten Momente für die Gesamtenergie und den Spannungstensor identifiziert werden. Übrig bleibt ein Integral, das den diffusiven Transport der thermischen Energie im Fluid beschreibt, welcher wiederum der Wärmeleitung entspricht. Die kinetische Formulierung des Wärmestromdichtevektors lautet somit:

$$\dot{\mathbf{q}} = - \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} m_i \left( \frac{\mathbf{c}_{Ti}^2}{2} + u_{iI} \right) \mathbf{c}_{Ti} \mathcal{F}_i d\mathbf{c}_i \quad (2.40)$$

### 2.1.4 Boltzmann-Gleichung und die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie ist die Boltzmann-Gleichung, welche die Änderung der Verteilungsfunktion einer Spezies durch die Teilchenwechselwirkungen beschreibt. Die Boltzmann-Gleichung einer Spezies  $i$  in einem Gasgemisch unter Vernachlässigung von chemischen Reaktionen lautet

$$\frac{D_i}{D_i t} \mathcal{F}_i = S_i(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j), \quad (2.41)$$

wobei  $\frac{D_i}{D_i t}$  das totale Differential

$$\frac{D_i}{D_i t} \mathcal{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_i + \mathbf{c}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{F}_i + \mathbf{g}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_i} \mathcal{F}_i \quad (2.42)$$

beschreibt, mit der externen spezifischen Feldkraft  $\mathbf{g}_i$ , die auf die Teilchen der  $i$ -ten Spezies wirkt. Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass externe Felder keine Änderung der inneren Teilchenenergien hervorrufen. Der Term auf der rechten Seite der Gleichung repräsentiert die Wechselwirkung zwischen den Teilchen und wird auch als Kollisionsintegral bezeichnet. Für binäre Stöße hat dieses

die folgende Form

$$S_i(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{I' \in \mathcal{S} \\ J \in \mathcal{Q}_j \\ J' \in \mathcal{Q}_j}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{4\pi} \left( \mathcal{F}'_i \mathcal{F}'_j \frac{\mathbf{a}_{iI} \mathbf{a}_{jJ}}{\mathbf{a}_{iI'} \mathbf{a}_{jJ'}} - \mathcal{F}_i \mathcal{F}_j \right) \mathfrak{g}_{ij} \sigma_{ij}^{IJJ'} d\Omega d\mathbf{c}_j \quad (2.43)$$

wobei  $I$  und  $J$  die Quantenenergieniveaus der  $i$ -ten bzw.  $j$ -ten Spezies kennzeichnen. Mit  $\mathbf{a}_{iI}$  wird die Entartung des  $I$ -ten Quantenenergieniveaus der  $i$ -ten Spezies bezeichnet, also die Anzahl der möglichen Quantenzustände für das gleiche innere Energieniveau des Teilchens. Größen nach dem Stoß werden mit ' gekennzeichnet. Die Größe  $\mathfrak{g}_{ij} = |\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j|$  bezeichnet den Betrag der Relativgeschwindigkeit der wechselwirkenden Teilchen und  $\sigma_{ij}^{IJJ'}$  den differentiellen Kollisionsquerschnitt.<sup>95</sup>

Die Verteilungsfunktionen  $\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_i^0)_{i \in \mathcal{S}}$  für die das Stoßintegral verschwindet

$$S_i(\mathcal{F}_i^0) = 0 \quad (2.44)$$

sind die verallgemeinerten Maxwell-Boltzmann-Verteilungen der Form

$$\mathcal{F}_i^0 = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{\mathbf{a}_{iI}}{\mathfrak{F}_i} e^{-\frac{m_i}{k_B T} \left[ \frac{(\mathbf{c}_i - \mathbf{c})^2}{2} - u_{iI} \right]}, \quad (2.45)$$

mit der Normierungsfunktion für die innere Energie der Teilchen der  $i$ -ten Spezies

$$\mathfrak{F}_i = \sum_{I \in \mathcal{Q}_i} \mathbf{a}_{iI} e^{-\frac{m_i}{k_B T} u_{iI}}. \quad (2.46)$$

Die wahrscheinlichste Teilchengeschwindigkeit einer Spezies im Gleichgewicht ist dann gegeben mit<sup>95</sup>

$$\mathbf{c}_{wi} = \sqrt{2 \frac{k_B}{m_i} T}. \quad (2.47)$$

### 2.1.5 Lösungsmethoden der Boltzmann-Gleichungen

Wie bereits in [Kapitel 1](#) genannt, kann die Boltzmann-Gleichung auf verschiedene Arten gelöst bzw. modelliert werden. In dieser Arbeit werden Modelle und Referenzsimulationen aus der Literatur verwendet, welche aus der Lösung der Boltzmann-Gleichung resultieren. Eigene Simulationen basierend auf der Boltzmann-Gleichung werden nicht durchgeführt, daher werden hier die Simulationsansätze nur skizziert.

In der Diskrete-Geschwindigkeits-Methode wird die Boltzmann-Gleichung in Raum, Zeit und Geschwindigkeit diskretisiert. Die Rechendomäne wird räumlich vernetzt und der kontinuierliche Geschwindigkeitsraum wird über diskrete Punkte (Knoten) angenähert. Die Integrale in den Momenten der Verteilungsfunktion werden durch die Summe über die Knoten angenähert. Für jeden Geschwindigkeitsknoten wird die Boltzmann-Gleichung gelöst. Das Lösen erfolgt iterativ, zu Beginn werden in jedem Ortspunkt die Teilchenanzahldichte, die Strömungsgeschwindigkeit und die Temperatur angenommen. Der Stoßterm muss aufgrund dessen Komplexität modelliert werden.<sup>7</sup> Ausgangs-

punkt für alle Modelle ist hierbei die Beobachtung, dass Ausgleichsprozesse dazu führen, dass Gase im Nichtgleichgewicht wieder in ihren Ausgangszustand relaxieren.<sup>92</sup> Ein gängiges Modell schlagen Bhatnagar, Gross und Krook<sup>77</sup> (BGK-Modell) vor, der vereinfachte Kollisionsterm lautet hierbei:

$$S_i(\mathcal{F}_i) = \frac{1}{\mathfrak{T}_{ii}} (\mathcal{F}_i^0 - \mathcal{F}_i) \quad (2.48)$$

Die mittlere Kollisionszeit  $\mathfrak{T}_{ii}$  legt die Größenordnung fest, mit der sich die Verteilungsfunktion dem Gleichgewicht nähert. Die Wahl einer geeigneten Kollisionszeit stellt die größte Herausforderung der Modellierung dar. Für leichte Störungen des Gleichgewichts folgt aus der Chapman-Enskog-Entwicklung für kleine Knudsen-Zahlen und Teilchen gleicher Masse und Größe:<sup>92</sup>

$$\mathfrak{T}_{ii} = \frac{\mu}{p} = \mathfrak{T}_\mu \quad (2.49)$$

Ein Nachteil dieses Modells ist die fehlerhafte Abbildung der Prandtl-Zahl. Shakov<sup>78</sup> schlägt eine Korrektur vor, die den lokalen Wärmestromvektor mitberücksichtigt (S-Modell). Für schwache Störungen des Gleichgewichts kann die Boltzmann-Gleichung linearisiert und somit effizienter gelöst werden. Insbesondere für kleine Mach-Zahlen gilt die Methode als unverzichtbar. Nachteilig an dem Verfahren ist die hohe Anforderung an das Rechenetz. Die Diskrete-Geschwindigkeiten-Methode zählt zu den deterministischen Verfahren.<sup>7</sup>

Zu den nicht-deterministischen Verfahren gehören die DSMC-(Direct Simulation Monte Carlo) und die Testpartikelmethode<sup>94,98</sup>, welche die Lösungen der Boltzmann-Gleichung simulieren, ohne diese direkt zu lösen.<sup>92</sup> Es sind Wahrscheinlichkeitsmethoden basierend auf einer numerischen Simulation der Teilchenbewegung, der Wechselwirkung der Teilchen untereinander und mit der Wand. Diese sind stochastische Prozesse und daher werden Zufallszahlgeneratoren in der Simulation eingesetzt. In der DSMC-Methode wird eine Vielzahl von Testteilchen gleichzeitig simuliert. Ein Testteilchen repräsentiert dabei ein extrem großes Ensemble von Teilchen und die über das Ensemble gemittelten Eigenschaften. Mögliche Kollisionspartner müssen sich in derselben Zelle des Rechenetzes befinden und die Auswahl der Kollisionspartner erfolgt stochastisch über Zufallszahlen.<sup>94</sup> Die Testpartikel-Methode berücksichtigt keine Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung (Stöße) und benötigt als solche kein Rechenetz. Der Rechenaufwand ist damit deutlich reduziert, allerdings ist diese Methode nur für die freie molekulare Strömung zulässig.<sup>98</sup>

## 2.2 Makroskopische Erhaltungsgleichungen

Die Boltzmann-Gleichung kann unter Anwendung der zuvor eingeführten Momente auf makroskopische Erhaltungsgleichungen überführt werden. Dazu werden im ersten Schritt die Stoßinvarianten vorgestellt, also die Transportgrößen, welche über den Stoß von Teilchen erhalten bleiben. Dies sind die allgemein aus der Physik bekannten Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie. Auf

molekularer Ebene lauten die Stoßinvarianten demnach:

$$\Phi_i = \mathbf{m}_i \quad (2.50)$$

$$\Phi_i = \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (2.51)$$

$$\Phi_i = \mathbf{m}_i \cdot \left( \frac{\mathbf{c}_i^2}{2} + u_{iI} \right) \quad (2.52)$$

Zusätzlich wird das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ I \in \mathcal{Q}_i}} \int_{\mathbb{R}^3} X_i Y_i d\mathbf{c}_i \quad (2.53)$$

eingeführt, welches mit  $X_i = \Phi_i$  und  $Y_i = \mathcal{F}_i$  der Definition des Moments einer Verteilungsfunktion entspricht. Wird dieses Skalarprodukt mit  $\Phi$  auf die Boltzmann-Gleichung angewendet und dabei berücksichtigt, dass für das Skalarprodukt von Stoßinvariante und Stoßintegral

$$\langle \Phi_i, S_i \rangle = 0 \quad (2.54)$$

gilt, folgen nach algebraischer Umformung die makroskopischen Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik für Masse, Impuls und Energie:<sup>92,93,95</sup>

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_i \mathbf{c}_i) + \nabla \cdot (\varrho_i \mathbf{c}) = 0, i \in \mathcal{S} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{c}) = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho \mathbf{c}) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{g}_i \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varrho \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u \right) \right) + \nabla \cdot \left( \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u + \frac{p}{\varrho} \right) \varrho \mathbf{c} \right) = \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) + \sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{g}_i (\mathbf{c} + \mathbf{c}_i) \quad (2.58)$$

Diese Erhaltungsgleichungen sind allgemein, also auch über den Kontinuumsbereich hinaus gültig, da sie ohne einschränkende Annahmen aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet werden konnten. Erst unter Anwendung der Newton'schen Schubspannungshypothese und den Fourier'schen Wärmeleitungsansatz folgen hieraus die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen der Kontinuumsmechanik.

### 2.2.1 Erhaltungsgleichungen in integraler Form

Werden die allgemeinen Erhaltungsgleichungen in differentieller Form ((2.56) - (2.58)) über ein zeitlich veränderliches Kontrollvolumen  $V_{KV}(t)$  integriert, folgen unter Berücksichtigung des Reynolds-Transport-Theorem als dreidimensionale Verallgemeinerung der Leibniz-Regel und des Gauß'schen Integralsatzes die Erhaltungsgleichungen in integraler Form

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{KV}(t)} \varrho_i dV + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \varrho_i ((\mathbf{c} + \mathbf{c}_i - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) dO = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{KV}(t)} \varrho dV + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \varrho ((\mathbf{c} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) dO = 0 \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{V_{KV}(t)} \varrho \mathbf{c} dV + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \varrho \mathbf{c} ((\mathbf{c} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) dO = \\ & - \iint_{\partial V_{KV}(t)} p \mathbf{n} dO + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dO + \iiint_{V_{KV}(t)} \sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{g}_i dV \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{V_{KV}(t)} \varrho \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u \right) dV + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \varrho \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u \right) ((\mathbf{c} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}) dO = \\ & - \iint_{\partial V_{KV}(t)} p (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dO + \iint_{\partial V_{KV}(t)} \mathbf{c} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO + \iiint_{V_{KV}(t)} \sum_{i \in \mathcal{S}} \varrho_i \mathbf{g}_i (\mathbf{c} + \mathbf{C}_i) dV \end{aligned} \quad (2.62)$$

in denen  $dO(\mathbf{x}, t)$  und  $dV(\mathbf{x}, t)$  Oberflächen- und Volumenelemente an einem Integrationspunkt  $\mathbf{x}$  sind. Die Variablen  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{v}_b(\mathbf{x}, t)$  bezeichnen den nach außen zeigenden Normalenvektor und die Geschwindigkeit des Oberflächenelements. Dieser Satz von Erhaltungsgleichungen bildet die Grundlage für die Finite-Volumen-Methode und die eindimensionalen Erhaltungsgleichungen eines Stromfadens oder einer Stromröhre. Sie werden auch für das Kammermodellverfahren verwendet. Hier sei erneut angemerkt, dass der Gleichungssatz über die Kontinuumsströmungen hinaus seine Gültigkeit behält, sofern keine einschränkende Annahmen für die diffusiven Terme getroffen werden. Dies ist das Gültigkeitsargument einer Kammermodellsimulation verdünnter Gase, also von Vakuum-Verdrängungsmaschinen, wenn geeignete Modelle verwendet werden.

### 2.2.2 Navier-Stokes-Fourier-Gleichung und Transportgrößen

Für Kontinuumsströmungen, d.h. für kleine Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht, können die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen über die Chapman-Enskog-Entwicklung 1. Ordnung hergeleitet werden. Wird dies für ein Gasgemisch durchgeführt, berücksichtigt diese zusätzlich Stoffdiffusion. Die Terme für diffusiven Stoff-, Impuls- und Energietransport lauten dann:

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_{ij} \left( \nabla \left( \frac{n_i}{n} \right) + \left( \frac{n_i}{n} - \frac{\varrho_i}{\varrho} \right) \nabla \ln(p) - \chi_j \nabla \ln(T) - \frac{\varrho_i}{p} \left( \mathbf{g}_i - \frac{\sum_{j \in \mathcal{S}} \varrho_j \mathbf{g}_j}{\varrho} \right) \right) \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \kappa (\nabla \cdot \mathbf{c}) \mathbf{1} + \mu \left( \nabla \otimes \mathbf{c} + (\nabla \otimes \mathbf{c})^\top - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{c}) \mathbf{1} \right) \quad (2.64)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = k \nabla T + p \sum_{i \in \mathcal{S}} \left( \chi_i + \frac{5 + f_i}{2} \frac{n_i}{n} \right) \mathbf{c}_i \quad (2.65)$$

Dabei bezeichnet  $\kappa$  die Volumenviskosität,  $\mu$  die dynamische Viskosität,  $k$  die Wärmeleitfähigkeit und  $\mathcal{D}_{ij}$  die Diffusionskonstante zweier Spezies. Das thermische Diffusionsverhältnis  $\chi_j$  ist in Abhängigkeit des thermischen Diffusionskoeffizienten  $\mathcal{D}_i^T$  als eindeutige Lösung des folgenden

Gleichungssystems definiert:

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{S}} \chi_j \mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_i^T, i \in \mathcal{S} \\ \sum_{j \in \mathcal{S}} \chi_j = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Es ist ein Maß für die Trennung eines Gemisches aufgrund eines Temperaturgradienten und wird auch als Soret-Koeffizient bezeichnet. Insgesamt können vier treibende Effekte für Stoffdiffusion benannt werden. Die Konzentrations-, Druck- und Temperaturdiffusion sowie die Diffusion durch äußere Kräfte.<sup>95</sup>

Aus der Chapman-Enskog-Theorie lassen sich die Transportgrößen von Fluiden auf Teilcheneigenschaften zurückführen. Im einfachsten Fall stellen die Teilchen dabei harte Kugeln gleichen Durchmessers  $\mathfrak{d}$  und gleicher Masse  $\mathfrak{m}$  dar, die elastisch gegeneinanderstoßen. Um die grundlegenden Zusammenhänge zwischen Teilcheneigenschaften und Transportgrößen zu erörtern, werden hier spezieisreine Gase betrachtet. Zusammenhänge für Gasgemische sind deutlich komplexer, legen allerdings dieselbe Modellvorstellung für Teilchen zugrunde. Für tieferegehende Studien wird auf Hirschfelder, Curtiss und Bird<sup>99</sup> und Giovangigli<sup>95</sup> verwiesen. Wenn die Teilchen als harte Kugeln angenommen werden, so ist die mittlere freie Weglänge eines Gases in Ruhe gegeben mit:<sup>7,92</sup>

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathfrak{d}^2n} \quad (2.67)$$

Die Viskosität eines Fluids ist das Ergebnis des molekularen Impulsaustausches. Nach der Chapman-Enskog-Entwicklung folgt für diese folgender Zusammenhang:<sup>96,99</sup>

$$\mu = p\mathfrak{T}_\mu \quad (2.68)$$

Dabei ist  $\mathfrak{T}_\mu$  die Relaxationszeit für die Schubspannung (vgl. (2.49)). Unter der Annahme eines Hartkugelmodells ist diese gegeben mit:<sup>92</sup>

$$\mathfrak{T}_\mu = \frac{5}{16n\mathfrak{d}^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{m}}{\pi k_B T}} \quad (2.69)$$

Somit kann beispielsweise aus einer aus Messungen bekannten Viskosität auf den Kugeldurchmesser für ein Hartkugelmodell geschlossen werden und gemäß (2.67) die mittlere freie Weglänge berechnet werden.

Wird die Chapman-Enskog-Entwicklung für die verallgemeinerte Boltzmann-Gleichung durchgeführt, also auch innere Freiheitsgrade der Teilchen mitberücksichtigt, so verschwindet die Volumenviskosität nicht (Stokes-Hypothese), sondern es folgt eine Relaxationsgleichung in Abhängigkeit der dynamischen Viskosität und der Relaxationszeit  $\mathfrak{T}_\kappa$  für die aus der Volumenviskosität resultierenden Normalspannungen:<sup>96</sup>

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f} + 3} \frac{\mathfrak{T}_\kappa}{\mathfrak{T}_\mu} \mu \quad (2.70)$$

Das Verhältnis der Relaxationszeiten kann nach Pavić<sup>96</sup> aus der Anzahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchen ermittelt werden.

Analog folgt der Zusammenhang für die Wärmeleitfähigkeit  $k$  über den Energieaustausch bei einem Stoß. Da allerdings bei Teilchen mit inneren Freiheitsgraden inelastische Kollisionen auftreten, welche zu einer Änderung der inneren Teilchenenergie führen, müssen auch hier innere Freiheitsgrade in der Formulierung der Wärmeleitfähigkeit mitberücksichtigt werden. Die Relaxationsgleichung für die Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit der Relaxationszeit  $\mathfrak{T}_k$  für die Wärmestromdichte lautet dann:

$$k = c_p \mu \frac{\mathfrak{T}_k}{\mathfrak{T}_\mu} \quad (2.71)$$

Das Verhältnis dieser Relaxationszeiten  $\mathfrak{T}_\mu/\mathfrak{T}_k$  ist besser bekannt als Prandtl-Zahl  $Pr$ . Für das BGK-Modell ist diese eins.<sup>92</sup> Eine gute Näherung für Teilchen mit inneren Freiheitsgraden ist die Korrektur nach Eucken:<sup>92,96,99</sup>

$$Pr = \frac{\mathfrak{T}_\mu}{\mathfrak{T}_k} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \quad (2.72)$$

Demnach ist die Prandtl-Zahl für ein Hartkugelmodell ausschließlich abhängig von der Anzahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchen, also vom Adiabatenkoeffizienten  $\gamma$ .

Ebenfalls ein Resultat der intermolekularen Wechselwirkung sind der Diffusionsstrom bzw. der Diffusionskoeffizient. Um diesen abzuschätzen, wird vereinfachend ein Gemisch zweier Spezies angenommen, deren Masse und Durchmesser ähnlich sind, also nahezu identische bzw. identische Teilchen (Selstdiffusion). Unter dieser Annahme folgt der Diffusionskoeffizient zu:<sup>92</sup>

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{6}{16\mathfrak{d}^2} \frac{1}{nm} \sqrt{\frac{k_B m T}{\pi}} \quad (2.73)$$

Die dimensionslose Kennzahl, welche den diffusiven, d.h. viskosen, Impulstransport mit dem diffusiven Stofftransport in Beziehung setzt, ist die Schmidt-Zahl. Diese ist eine Eigenschaft einer Spezies bzw. eines Gemisches und unter der Annahme eines Hartkugelmodells konstant.

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}} = \frac{5}{6} \quad (2.74)$$

Experimentelle Werte der Schmidt-Zahl liegen zwischen 0,7 und 0,75.

Durch die Annahme harter Kugeln können die makroskopischen Transporteigenschaften von Fluiden weitgehend aus molekularen Zusammenhängen abgeleitet werden. Allerdings wird die Temperaturabhängigkeit unzureichend abgebildet. Für eine genauere Abbildung muss daher ein Interaktionspotenzial angenommen werden, welches anziehende und abstoßende Wechselwirkungen zwischen den Teilchen berücksichtigt<sup>94</sup>. Die in dieser Arbeit verwendeten Zusammenhänge gehen auf Sutherland zurück, der als Interaktionspotenzial starre Kugeln mit leichter Anziehungskraft annimmt.<sup>94,100</sup> Daraus resultiert ein Kugeldurchmesser im Sinne eines Hartkugelmodells, welcher von der Temperatur des Gases abhängt:<sup>7</sup>

$$\mathfrak{d}^2(T) = \mathfrak{d}_\infty^2 \cdot \left(1 + \frac{T_D}{T}\right) \quad (2.75)$$

Dabei ist  $\mathfrak{d}_\infty$  der Durchmesser bei sehr hoher Temperatur und  $T_D$  die Verdoppelungstemperatur, auch Sutherland-Konstante genannt. Aus diesem Zusammenhang folgt mit (2.68) und (2.69) das

Sutherland-Gesetz für die Viskosität

$$\mu(T) = \mu_{\text{Ref}} \left( \frac{T}{T_{\text{Ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{Ref}} + T_{\text{D}}}{T + T_{\text{D}}}, \quad (2.76)$$

dessen Unbekannte durch Messungen empirisch bestimmt werden können.<sup>94,100</sup> Analog zur Viskosität  $\mu$  lassen sich Sutherland-Gleichungen für die Wärmeleitfähigkeit  $k$  und den Diffusionskoeffizienten  $\mathcal{D}_{ij}$  formulieren. In der Regel werden für die Wärmeleitfähigkeit, für den Diffusionskoeffizienten und für die Viskosität unterschiedliche Verdoppelungstemperaturen und Teilchendurchmesser  $\vartheta_{\infty}$  ermittelt, da reale Teilchen sich nur näherungsweise durch das Sutherland-Modell beschreiben lassen. Eine bessere Näherung für die Transportgrößen liefert beispielsweise die Annahme eines Lennard-Jones-Potenzials für die Teilchen-Teilchen-Interaktion, das die schwache Temperaturabhängigkeit der dimensionslosen Stoffgrößen Prandtl-Zahl und Schmidt-Zahl widerspiegelt.<sup>99</sup>

### 2.2.3 Turbulente Strömungen

Bereits kleine Störungen können große Schwankungen in einer Strömung hervorrufen. Während diese Schwankungen in stark reibungsdominierten Strömungen gedämpft werden, können in trägheitsdominierten Strömungen kleine Störungen zu starken Schwankungen bzw. Wirbel heranwachsen. Die Strömung ist dann instabil. Diese fortbestehenden instationären Schwankungen werden als Turbulenz bezeichnet. Mögliche Störungen sind Unstetigkeiten in der Strömungsführung oder auch Oberflächenrauigkeiten. Turbulenzen sind zeitlich und räumlich unregelmäßig, sodass eine starke Durchmischung der Strömung vorliegt. Dabei zerfallen die größeren Wirbel zu kleineren Skalen, was wiederum eine Wandlung von kinetischer Energie in innere Energie darstellt. Stabile Strömungen sind laminar. Hier findet keine bzw. nur wenig Durchmischung statt, sodass nebeneinander laufende Stromlinien identifiziert werden können. Als Kriterium, ob in einer Strömung Turbulenz zu erwarten ist, wird die Reynolds-Zahl verwendet.<sup>26</sup>

Theoretisch bilden die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen die Turbulenz direkt mit ab, sodass keine weitere Modellierung nötig ist. Dazu muss die Strömung allerdings zeitlich und räumlich sehr fein diskretisiert werden. Diese Form der Turbulenzabbildung wird als direkte numerische Simulation (DNS) bezeichnet und findet größtenteils aufgrund des enormen Rechenaufwands in der Erforschung der Entstehung und Struktur von Turbulenz Anwendung. In praktischen Anwendungen wird die Turbulenz teilweise bzw. vollständig modelliert. Die Grobstruktursimulation (engl. large eddy simulation LES) löst die NSF-Gleichungen für große Wirbelstrukturen, während für kleine Strukturen Modellgleichungen gelöst werden. Damit kann eine große Einsparung von Rechenzeit bei weiterhin hoher Genauigkeit erzielt werden. Zur weiteren Reduktion der Rechenzeit werden die Instationaritäten der Turbulenz vollständig gemittelt. In der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (engl. Reynolds-averaged Navier-Stokes RANS) werden die turbulenten Impulsflüsse als zusätzliche Komponenten des Schubspannungstensors modelliert. Bei dieser Methode werden die instationären Größen in einen zeitlich gemittelten Anteil  $\bar{\phi}$  und einen fluktuierenden Anteil  $\phi'$  aufgeteilt.<sup>26</sup>

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t) \quad (2.77)$$

Im Allgemeinen ist für kompressible Strömungen eine dichtegemittelte, auch Favre-Mittelung genannt, Strömungsgröße sinnvoll.<sup>25</sup> Zur vereinfachten Darstellung der Methode werden im Folgenden Dichteschwankungen vernachlässigt. Für tieferegehende Studien wird auf die Fachliteratur verwiesen. In der RANS wird der Schubspannungstensor in (2.57) ersetzt durch die Summe aus dem viskosen Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}^V$  nach (2.64) und dem Reynolds-Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\tau}^R = -\rho \overline{\mathbf{c}' \otimes \mathbf{c}'} \quad (2.78)$$

Analog folgt der Wärmestromvektor in (2.58) als Summe aus Fourier'sche Wärmeleitung und Diffusionswärmestromdichte nach (2.65) und einen turbulenten Wärmefluss der Form

$$\dot{\mathbf{q}}^R = -\rho c_p \overline{\mathbf{c}' \otimes T'}. \quad (2.79)$$

Diese fluktuierenden nichtlinearen gemittelten Anteile sind unbekannt und müssen zum Lösen des Schließungsproblems modelliert werden. Üblicherweise werden hierzu Wirbelviskositätsmodelle verwendet, in denen der turbulente konvektive Impulsaustausch durch eine um  $\mu_t$  erhöhte Viskosität, also einer diffusen Größe, abgebildet wird. Der Reynolds-Spannungstensor ist dann gegeben mit

$$\boldsymbol{\tau}^R = \mu_t \left( \nabla \otimes \mathbf{c} + (\nabla \otimes \mathbf{c})^\top \right) + \frac{2}{3} \rho \mathcal{K} \mathbf{1}, \quad (2.80)$$

mit der turbulenten kinetischen Energie

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left( \overline{c'_x c'_x} + \overline{c'_y c'_y} + \overline{c'_z c'_z} \right). \quad (2.81)$$

Ist die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  bekannt, so kann mittels einer turbulenten Prandtl-Zahl auch eine scheinbare turbulente Wärmeleitfähigkeit ermittelt werden, um damit den turbulenten Wärmestromvektor zu ermitteln. Die turbulente Prandtl-Zahl wird üblicherweise im Bereich  $Pr_t = 0,85 \dots 0,9$  angenommen, kann aber in Wandnähe auch deutlich größere Werte aufweisen<sup>45,101</sup>. Zum Lösen des Schließungsproblems einer isotropen RANS sind also lediglich zwei zusätzliche Transportgleichungen zur Bestimmung der turbulenten kinetischen Energie und der turbulenten Wirbelviskosität erforderlich. Für freie Strömungen mit großem Wandabstand liefert das  $\mathcal{K}$ - $\epsilon$ -Modell gute Ergebnisse. Es bestimmt die Wirbelviskosität in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Energie  $\mathcal{K}$  und der Dissipationsrate  $\epsilon$ , deren Werte wiederum zeitlich und räumlich durch zwei partielle Differentialgleichung mit empirischen Koeffizienten abgebildet werden:<sup>26</sup>

$$\mu_t = 0,09 \rho \frac{\mathcal{K}^2}{\epsilon} \quad (2.82)$$

Bessere Ergebnisse in Wandnähe, aber mit schlechterer Abbildungsgüte in der freien Strömung, liefert das  $\mathcal{K}$ - $\omega$ -Modell nach Wilcox<sup>102</sup>. Die Berechnung der Wirbelviskosität erfolgt hierbei basierend auf der turbulenten kinetischen Energie und der turbulenten Frequenz  $\omega$ , welche ebenfalls durch partielle Differentialgleichungen mit empirischen Koeffizienten bestimmt werden:

$$\mu_t = \rho \frac{\mathcal{K}}{\omega} \quad (2.83)$$

Um die Stärken der beiden Modelle zu vereinen, kombiniert Menter<sup>103</sup> diese Modelle zum  $\mathcal{K}$ - $\omega$ -Shear-Stress-Transport-Modell (kurz: SST-Modell). Dieses Modell wechselt in der von der Wand beeinflussten Grenzschicht auf das  $\mathcal{K}$ - $\omega$ -Modell während in der freien Strömung das  $\mathcal{K}$ - $\epsilon$ -Modell verwendet wird.

Die zuvor skizzierten Modelle setzen sowohl räumlich als auch zeitlich eine voll-turbulente Strömung voraus. Reale Strömungen können allerdings laminar oder turbulent sein. Der Wechsel zwischen diesen Strömungsformen wird als Transition bezeichnet<sup>45</sup>. In Übergangsströmungen wechselt die Strömungsform zeitweise zwischen laminar und turbulent. Der Intermittenzfaktor  $\gamma$  beschreibt den zeitlichen Anteil der Turbulenz. So ist bei  $\gamma = 1$  die Strömung dauerhaft turbulent und bei  $\gamma = 0$  dauerhaft laminar. Soll ein Turbulenzmodell Transition berücksichtigen, muss es den Intermittenzfaktor modellieren. Eine Erweiterung des SST-Modells für Transitionsströmungen ist das  $\gamma$ - $\theta$ -SST-Modell nach Langtry und Menter<sup>104</sup>. Das Modell bestimmt mit der Impulsverlustdicke  $\theta$  eine kritische Reynolds-Zahl, anhand welcher der Aufbau von Turbulenz abgeschätzt wird. Die Impulsverlustdicke  $\theta$  ist das Maß für die Reduktion des Impulsflusses durch Reibung in der Grenzschicht der Strömung.<sup>45</sup> Somit muss für das Modell die Grenzschicht der Strömung aufgelöst werden, was feine Rechenetze voraussetzt. Für den Intermittenzfaktor und den Aufbau der Turbulenz werden zusätzlich zum SST-Modell zwei weitere Gleichungen verwendet.

#### 2.2.4 Schlupfströmungen

Die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen sind auch für moderate Gasverdünnungen ( $Kn < 0,1$ ) gültig, wenn geeignete Randbedingungen an den Wänden vorgesehen werden. In unmittelbarer Wandnähe stellt sich ein Geschwindigkeitsschlupf in Abhängigkeit von der Wandschubspannung und des Temperaturgradienten quer zur Wand ein. Die Berechnungsvorschrift für die Randbedingungen geht auf Maxwell<sup>105</sup> zurück und kann unter Vernachlässigung von Temperaturgradienten höherer Ordnung wie folgt formuliert werden:<sup>105-107</sup>

$$\mathbf{c} - \mathbf{c}_W = \beta_P \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\ell}{\mu} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \beta_T \frac{\mu}{\rho T} \mathbf{S} \cdot \nabla T \quad (2.84)$$

Dabei sind  $\beta_P$  und  $\beta_T$  die Schlupfkoeffizienten des viskosen bzw. des thermischen Schlupfs,  $\mathbf{c}$  die Strömungsgeschwindigkeit in Wandnähe und  $\mathbf{c}_W$  die Wandgeschwindigkeit. Mit  $\mathbf{n}$  wird der Einheitsnormalenvektor der Wand bezeichnet, welcher aus dem Strömungsbereich herauszeigt und  $\mathbf{S} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  ist der Tensor, der Normalkomponenten aus einem Vektorfeld eliminiert. Die Schlupfkoeffizienten sind nach Maxwell gegeben mit

$$\beta_P = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2 - \sigma_t}{\sigma_t} \quad (2.85)$$

und

$$\beta_T = \frac{3}{4}, \quad (2.86)$$

wobei  $\sigma_t$  den tangentialen Akkommodationskoeffizient der Wand bezeichnet. Der Koeffizient gibt den Anteil der Teilchen an, die diffus von der Wand reflektiert werden. Die restlichen Teilchen werden spiegelnd reflektiert. Von Maxwell<sup>105</sup> abweichende Schlupfkoeffizienten gibt Sharipov<sup>108</sup> an.

Dieser berücksichtigt eine komplexere Gas-Wand-Wechselwirkung nach Cercignani und Lampis <sup>109</sup>. Die angepassten Koeffizienten lauten für praktische Rechnungen:

$$\beta_P = \frac{1}{\sigma_t} [1,018 (2 - \sigma_t) - 0,2640 (1 - \sigma_t)] \quad (2.87)$$

$$\beta_T = 1,175 \quad (2.88)$$

Für die Schlupfkoeffizienten von Gasgemischen wird an dieser Stelle auf die Literatur <sup>110,111</sup> verwiesen.

In Analogie zum Geschwindigkeitsschlupf stellt sich in verdünnten Gasen ein Temperatursprung zwischen der Wand und dem wandnahen Fluid ein, der proportional zum Wandwärmestrom bzw. Temperaturgradient senkrecht zur Wand ist. Die Temperaturrandbedingung wurde zuerst von Smoluchowski von Smolan <sup>112</sup> formuliert und kann wie folgt wiedergegeben werden: <sup>106,107</sup>

$$T - T_w = -\zeta_T \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ell \mathbf{n} \cdot \nabla T \quad (2.89)$$

Hierbei ist  $\zeta_T$  der Temperatursprungkoeffizient,  $T_w$  die Wandtemperatur und  $T$  die Temperatur des Fluids nahe der Wand. Beruhend auf den Überlegungen von Smoluchowski ist der Temperatursprungkoeffizient gegeben mit

$$\zeta_T = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2 - \sigma_E}{\sigma_E} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)Pr} \quad (2.90)$$

mit dem Energieakkommodationskoeffizient  $\sigma_E$ . Unter Annahme einer vollständigen Akkommodation wird basierend auf numerischen Lösungen der Boltzmann-Gleichungen ein Temperatursprungkoeffizient von

$$\zeta_T = 1,954 \quad (2.91)$$

empfohlen. Für Gasgemische werden Werte für  $\zeta_T$  in [75] berechnet.

### 2.2.5 Lösungsmethoden der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen

Das System der NSF-Gleichungen wird durch die allgemeinen makroskopischen Erhaltungsgleichungen für Masse (2.56), Impuls (2.57) und Energie (2.58) sowie durch die konstitutiven Gleichungen für den Spannungstensor (2.64), den Wärmestrom (2.65) und die Diffusionsgeschwindigkeiten (2.63) definiert. Zusätzlich sind zur Lösung noch Zustandsgleichungen für die Dichte und die innere Energie des Fluid nötig. In der Regel wird das Gleichungssystem numerisch gelöst, allerdings existieren unter bestimmten vereinfachenden Annahmen auch analytische Lösungen. Eine allgemeine analytische Lösung existiert nicht.

Die numerische Lösung erfolgt üblicherweise mit dem Finite-Volumen-Verfahren. Dazu wird das Strömungsgebiet in kleine Volumen vernetzt. Auf jedem dieser Volumen werden die NSF-Gleichungen in integraler Form ((2.59) - (2.62)) angewendet, womit das Verfahren in der Regel konservativ ist. Zur Bestimmung der Oberflächenintegrale werden die Größen auf den Zelloberflächen benötigt. Im einfachsten Fall entsprechen diese dem Wert des flussaufwärts liegenden Zellmittelpunktes (Up-

wind), was ein sehr stabiles Verfahren ist, aber einen erhöhten numerischen Fehler aufweist. Höhere Genauigkeit erreichen Verfahren zweiter Ordnung, welche die Werte auf den Zelloberflächen aus den anliegenden Zellen berechnen. Zur numerischen Quadratur der Volumenintegrale wird häufig der Wert des Zellmittelpunkts verwendet (Mittelpunktregel). Es resultiert ein Gleichungssystem, das in der Regel zu einem Nullstellenproblem umformuliert und anschließend numerisch gelöst wird. Als Konvergenzkriterien gilt in der Regel das Unterschreiten benutzerdefinierter Residuen.<sup>26</sup>

In Rahmen dieser Arbeit wird die Software Ansys CFX angewendet, in der die Finite-Volumen-Methode in leicht abgewandelter Form implementiert ist. Die Simulationssoftware verwendet die gleichen Netze für Finite-Elemente-Verfahren und für den Solver CFX. Daher liegen die relevanten Größen nicht in den Zellmittelpunkten, sondern in den Netzknoten (Zelleckpunkten) des Rechennetzes vor. Zur Anwendung des Finite-Volumen-Verfahrens wird um jeden Knoten ein Kontrollvolumen konstruiert, wobei das Median-Dual, definiert durch Linien, die die Mittelpunkte der Kanten und Elementmittelpunkte um den Knoten herum verbinden, verwendet wird. Die Integrationspunkte der Oberflächenintegrale liegen in der Mitte der Oberflächen des Kontrollvolumens. Zur Bestimmung der Werte in den Integrationspunkten aus den in den Knoten gespeicherten Werten wird eine Finite-Elemente-Form-Funktion genommen. In Ansys-CFX sind diese linear hinsichtlich der Parametrierung des Netzes. Diese Abbildung stellt ein Zentrales-Differenzen-Verfahren, also ein Verfahren der zweiten Ordnung dar, welches genau, aber ggf. bei Anwendung auf die Flussintegrale instabil ist (s.o.). Für eine bessere Stabilität kann ein Blending zwischen einem Upwind- und dem Zentralen-Differenzen-Verfahren verwendet werden. Das in dieser Arbeit verwendete High-Resolution-Verfahren stellt den lokalen Blendingparameter so ein, dass das Verfahren möglichst nahe dem Zentralen-Differenzen-Verfahren und gleichzeitig noch stabil ist. Es erzielt somit die größtmögliche Genauigkeit, ohne an Stabilität zu verlieren. Neben der örtlichen Diskretisierung müssen die transienten Terme zeitlich diskretisiert werden. Verfahren höherer Ordnung greifen dazu auf mehrere vorherige Zeitschritte zurück, sind dabei aber weiterhin konservativ, implizit und robust. Da in dieser Arbeit keine transienten Rechnungen durchgeführt werden, wird nicht weiter auf die zeitliche Diskretisierung eingegangen. In Ansys CFX werden zunächst die Transportgleichungen für Druck und Geschwindigkeit gekoppelt und im Anschluss die Transportgleichungen für Energie und Turbulenz nacheinander gelöst.<sup>113</sup>

Die Qualität des Rechenergebnisses wird maßgeblich durch die räumliche Diskretisierung, d.h. durch das Rechenetz bzw. -gitter beeinflusst. Eine hohe Netzqualität zeichnet sich dabei durch einen geringen Diskretisierungsfehler aus. Dieser Fehler ist die Differenz zwischen der mathematisch exakten und der numerischen Lösung des Modells unter Voraussetzung von Stabilität und Vernachlässigung von Iterationsfehlern. Diese Fehler sind zum einen durch die räumliche Auflösung, d.h. durch die Feinheit des Netzes und zum anderen durch die Form der Zellen bestimmt. Idealerweise werden die Oberflächen der Kontrollvolumen senkrecht durchströmt und die Verbindungslinien der Zellmittelpunkte verlaufen durch die Mittelpunkte der Seitenflächen, um eine möglichst hohe Genauigkeit der Approximation der konvektiven Flüsse zu erhalten. Für eine gute Abbildung der diffusen Flüsse sollten die Verbindungslinien der Zellmittelpunkte zusätzlich möglichst senkrecht zu den Seitenflächen sein (Orthogonal). Zudem sollten bei der Anwendung der Mittelpunktregel stark gestreckte Zellen vermieden werden. Um die Form der Zellen zu optimieren, ist es gegebenenfalls sinnvoll das

Netz lokal zu verfeinern. Allgemein können strukturierte und unstrukturierte Gitter unterschieden werden. Strukturierte Gitter bestehen aus Sätzen von Gitterlinien. Die Linien eines Satzes schneiden sich nicht untereinander, sondern schneiden jede Linie eines anderen Satzes genau einmal. Im 3D-Fall bedeutet dies, dass die Zellen hexaedrisch sind. Vorteil eines solchen Netzes ist, dass jeder Gitterpunkt durch einen Satz von Indizes beschreibbar ist, was dazu führt, dass die Matrix des Gleichungssystems in der Regel regulär ist und damit ein effizientes Lösen ermöglicht. Allerdings sind strukturierte Gitter nur für einfache Geometrien möglich. Für komplexere Geometrien wird in der Regel auf unstrukturierte Netze zurückgegriffen. Diese bieten den Vorteil, dass die Vernetzung automatisierbar ist und leicht lokale Verfeinerung durchgeführt werden können. Da in dieser Arbeit nur Geometrien mit geringer Komplexität untersucht werden, werden ausschließlich strukturierte bzw. blockstrukturierte Gitter verwendet. Dabei kann in der Regel eine hohe Orthogonalität der Zellen erzielt werden. Eine einfache Methode, um den Diskretisierungsfehler abzuschätzen, ist die Richardson-Extrapolation. Hierzu wird das Gitter systematisch verfeinert. Die zugrundeliegende Idee ist, dass mit steigender Zellenanzahl die numerische Lösung gegen die exakte Lösung der zu lösenden Differentialgleichung konvergiert. Es werden drei Gitter untersucht und die Maschenweite der Gitter üblicherweise halbiert. Aus den Ergebnissen der drei Gitter wird die Ordnung des Verfahrens bestimmt und dann auf die „exakte“ Lösung extrapoliert, um den Fehler abzuschätzen. Als Voraussetzung muss dazu das Modell unabhängig vom Netz sein. Wenn beispielsweise Wandfunktionen in Abhängigkeit der Netzfeinheit genutzt werden, ist die Extrapolation nur eingeschränkt gültig.<sup>26</sup>

Der Iterationsfehler einer numerischen Rechnung ist die Differenz zwischen der iterativen Lösung und der exakten Lösung der diskretisierten Modellgleichung. Um diesen Fehler gering zu halten, müssen die als Konvergenzkriterium gewählten Residuen möglichst klein sein, was wiederum eine höhere Rechenzeit bedeutet.<sup>26</sup>

Die letzte zu nennende Fehlerquelle ist der Modellfehler, der unabhängig von der numerischen Simulation ist. Dieser beinhaltet die zum Teil vereinfachenden Annahmen des Modells<sup>26</sup>. Für die im Rahmen dieser Arbeit gelösten Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen sind dies die Kontinuumsannahme, die vernachlässigte Volumenviskosität (Stokes-Hypothese), die vernachlässigte Stoffdiffusion und die Annahme eines idealen Gases mit Sutherland-Viskosität und konstanter Prandtl-Zahl. Eine starke Modellierung ist zudem die RANS-Turbulenz, aber auch die Schlupfrandbedingungen. Neben den strömungsmechanischen Annahmen sind zusätzlich die vereinfachten Geometrien mit hydraulisch glatten Oberflächen zu nennen.

Alternativ können die Erhaltungsgleichungen in differentieller Form über die Finite-Differenzen oder die Finite-Elemente-Methode gelöst werden. Diese Methoden können jedoch nur eingeschränkt Unstetigkeiten wie Verdichtungsstöße abbilden.

### 2.2.6 Analytische Lösungen für die Schlupfströmung

In diesem Abschnitt werden analytische Lösungen der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen für die Schlupfströmungen vorgestellt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit mehrmals zurückgegriffen wird. Betrachtet wird eine stationäre, inkompressible, hydrodynamisch und thermisch vollständig

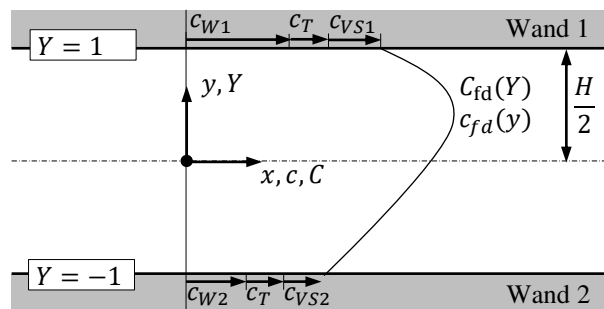
ausgebildete Strömung in einem planparallelen Spalt unendlicher Breite, was ein zweidimensionales Problem darstellt. Die Wände können unterschiedliche Temperaturen aufweisen und sind tangential zur Strömung beweglich. Die obere Wand wird mit Index „1“ gekennzeichnet und die untere Wand mit Index „2“. Der Wandabstand ist mit  $H$  gegeben und der Koordinatenursprung liegt mittig zwischen den Wänden.

Die Koordinate  $y$  beschreibt die Richtung quer zur Hauptströmungsrichtung  $x$ . Es wird von kleinen Reynolds-Zahlen ausgegangen, sodass die Strömung als laminar angenommen werden kann. Stoffdiffusion und Volumenkräfte werden vernachlässigt.

Für die Herleitung des Geschwindigkeitsprofils wird angenommen, dass die dynamische Viskosität  $\mu$  über den Strömungsquerschnitt konstant ist. Außerdem wird davon ausgegangen, dass der Druckgradient quer zur Strömungsrichtung vernachlässigbar ist, da das Strömungsprofil vollständig ausgebildet (fd) ist und somit die Stromlinien parallel verlaufen. Mit diesen Annahmen folgt aus der Impulserhaltung (2.57) mit dem Schubspannungstensor nach (2.64) und der Massenerhaltung (2.56) die Differentialgleichung für das vollständig ausgebildete Geschwindigkeitsprofil

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 c_{fd}(y)}{\partial y^2}, \quad (2.92)$$

dessen Lösung eine Parabelgleichung ist. An den Wänden entspricht die Geschwindigkeit der Summe aus der Wandgeschwindigkeit  $c_W$ , dem thermischen Schlupf  $c_T$  und dem viskosen Schlupf  $c_{VS}$ , wie in Abb. 2.1 dargestellt. Das Geschwindigkeitsprofil wird entdimensioniert, indem es auf den Wert



**Abb. 2.1** Geschwindigkeitsprofil einer vollständig ausgebildeten Schlupfströmung in einem planparallelen Spalt.

der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{c} = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} c(y) dy \quad (2.93)$$

bezogen wird. Zudem wird die dimensionslose Ortskoordinate

$$Y = 2 \frac{y}{H} \quad (2.94)$$

quer zur Hauptströmungsrichtung eingeführt, die auf den Wänden die Werte  $Y = 1$  bzw.  $Y = -1$  annimmt. Die Gleichung des dimensionslosen Geschwindigkeitsprofils lautet dann:

$$C_{\text{fd}}(Y) = \frac{c_{\text{fd}}(Y)}{\bar{c}} = K_1 Y^2 + K_2 Y + K_3 \quad (2.95)$$

Die Koeffizienten folgen aus der Lösung der Differentialgleichung für eine Couette-Poiseuille-Strömung mit der Randbedingung einer Schlupfströmung (2.84) zu:

$$K_1 = \frac{3 \overline{C_W} + C_T - 1}{2 \left(1 + 6 \frac{\beta_P}{\delta}\right)} \quad (2.96)$$

$$K_2 = \frac{\Delta C_W}{2 + 4 \frac{\beta_P}{\delta}} \quad (2.97)$$

$$K_3 = \overline{C_W} + C_T - K_1 \cdot \left(1 + 4 \frac{\beta_P}{\delta}\right) \quad (2.98)$$

Die Wandgeschwindigkeiten werden ebenfalls mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit entdimensioniert:

$$C_W = \frac{c_W}{\bar{c}} \quad (2.99)$$

Demnach ist die Differenz gegeben mit

$$\Delta C_W = C_{W1} - C_{W2} \quad (2.100)$$

und der Mittelwert der Wandgeschwindigkeit mit

$$\overline{C_W} = \frac{1}{2} (C_{W1} + C_{W2}). \quad (2.101)$$

Die Bestimmungsgleichung für den dimensionslosen Temperaturschlupf lautet:

$$C_T = \frac{\mathbf{c}_w \beta_T H}{2\bar{c}} \frac{dT}{T dx} \quad (2.102)$$

Es wird hier vereinfachend davon ausgegangen, dass der Temperaturgradient und somit der Temperaturschlupf an beiden Wänden identisch ist. Die wahrscheinlichste Teilgeschwindigkeit  $\mathbf{c}_w$  ist durch (2.47) gegeben. Außerdem wird der Gasverdünnungsparameter  $\delta$  als charakteristische Größe für die lokale Gasverdünnung eingeführt.<sup>i</sup> Er wird definiert als:

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi} H}{2 \ell} \quad (2.103)$$

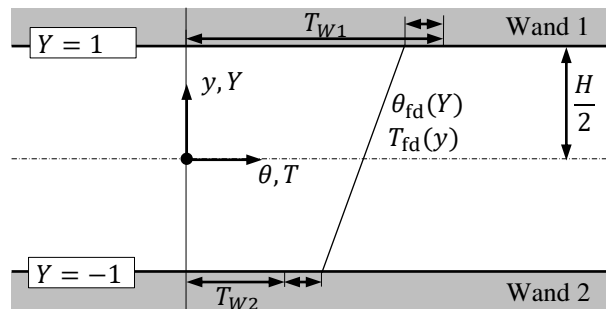
Zur Herleitung des vollständig ausgebildeten Temperaturprofils wird angenommen, dass die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit und somit die Änderung der Wärmeleitfähigkeit  $k$  quer zu Strömungsrichtung vernachlässigt werden kann. Außerdem wird davon ausgegangen, dass die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  quer zu Strömungsrichtung deutlich größer ist, als die Dissipationswärme

<sup>i</sup>Der Gasverdünnungsparameter ist proportional zum Reziprok der Knudsen-Zahl. Er wird als lokaler Parameter verwendet, während die Knudsen-Zahl in dieser Arbeit die gesamte Spaltströmung charakterisiert.

$\Delta \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\tau})$  der Strömung. Unter diesen und den oben bereits eingeführten Annahmen folgt aus der Energieerhaltung (2.58) mit der Wärmestromdichte nach (2.65) die Differentialgleichung für das vollständig ausgebildete Temperaturprofil einer laminaren Strömung

$$k \frac{\partial^2 T_{fd}(y)}{\partial y^2} = 0, \quad (2.104)$$

dessen Lösung eine lineare Funktion ist, wie in **Abb. 2.2** dargestellt.



**Abb. 2.2** Vollständig ausgebildetes Temperaturprofil einer Schlupfströmung in einem planparallelen Spalt.

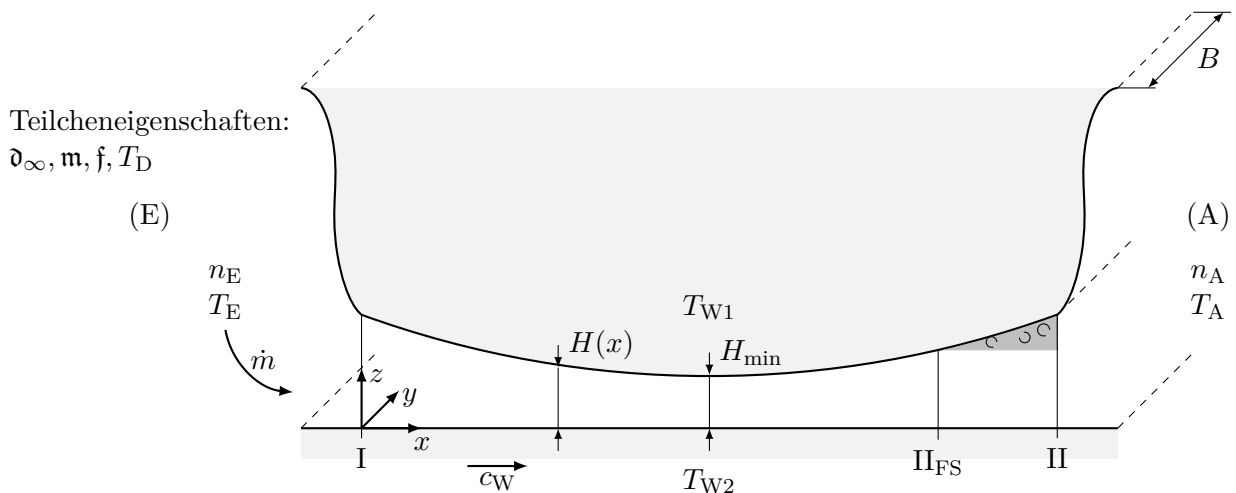
Die Gastemperatur in unmittelbarer Nähe zur Wand entspricht jeweils der Wandtemperatur zu- bzw. abzüglich des Temperatursprungs. Wird diese nach (2.89) berücksichtigt, lautet die Gleichung für das vollständig ausgebildete Temperaturprofil

$$T_{fd}(Y) = \frac{T_{W1} + T_{W2}}{2} + \frac{T_{W1} - T_{W2}}{2} \left( \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta_T}{\delta}} \right) Y \quad (2.105)$$

wobei  $Y$  erneut die dimensionslose Ortskoordinate quer zur Hauptströmungsrichtung ist.

### 3 Beschreibung der Spaltströmung

Das neu zu entwickelnde Modell soll die Strömung durch eine verallgemeinerte Geometrie einer Spaltverbindung beschreiben, wie in **Abb. 3.1** dargestellt. Diese ist in der Regel durch zwei Bauteiloberflächen begrenzt, die einen konvergent-divergenten Strömungskanal variabler Höhe  $H(x)$  bilden. Der minimale Abstand  $H_{\min}$  der Oberflächen liegt im Bereich der Quasi-Berührungslinie der Bauteile. Die Ausdehnung der Berührungslinie senkrecht zur dargestellten Ebene, auch als Spaltbreite  $B$  bezeichnet, ist deutlich größer als der minimale Abstand, sodass die Spaltströmung vereinfacht als zweidimensional angenommen werden kann ( $H_{\min} \ll B$ ). Es wird davon ausgegangen, dass die Spaltgeometrie starr ist, d. h. zeitlich unveränderlich, und somit keine Geschwindigkeit normal zur Oberfläche aufweist. Die Betrachtung der Spaltverbindung in einer Kammermodellsimulation erfolgt üblicherweise im Relativsystem der Arbeitskammern. Hingegen ist eine Bewegung der Wände tangential zur Oberfläche  $c_W$  möglich. Je nach Spaltverbindung können eine oder beide Wände eine Tangentialgeschwindigkeit aufweisen. Die Bauteile können unterschiedliche Wandtemperaturen  $T_W$  aufweisen, wobei aufgrund der guten Wärmeleitfähigkeit der Werkstoffe, wie Aluminium oder Stahl, die Temperatur einer Oberfläche als konstant über den Spalt angenommen werden kann.



**Abb. 3.1** Beispiel für eine Spaltgeometrie mit geometrischen und physikalischen Größen sowie der Einteilung in verschiedene Bereiche.

Als Medium wird im ersten Schritt vereinfacht ein Reinstoff verwendet, dessen Gaseigenschaften vollständig über ein Sutherland-Teilchen ( $\vartheta_\infty, T_D$ ) sowie die Teilchenmasse  $m$  und die inneren Teil-

chenfreiheitsgrade  $f$  beschrieben sind. Das Gas kann am Eintritt (E) und am Austritt (A) unterschiedliche Teilchenanzahldichten ( $n_E, n_A$ ) und unterschiedliche statische Temperaturen aufweisen ( $T_E, T_A$ ). Es wird von einem stationären Zustand ausgegangen. In Abhängigkeit der Randbedingungen stellen sich Massenstrom  $\dot{m}$  sowie die Wandwärmeströme  $\dot{Q}_W$  ein. Durch die Bewegung der Wände wird eine Reibleistung  $P_W$  auf die Strömung übertragen oder der Strömung entzogen.

Zur weiteren Berechnung wird der Spalt in drei Bereiche aufgeteilt und die Modellgleichungen für diese Bereiche abgeleitet. Der erste Bereich ( $E \rightarrow I$ ) ist die Zuströmung. Der zweite Bereich ( $I \rightarrow II$ ) ist der Teil des Spalts, in dem die Strömung als eindimensional betrachtet werden kann. Hier wird eine modifizierte Form der kompressiblen Theorie nach Shapiro<sup>61</sup> verwendet. Der letzte Bereich ( $II \rightarrow A$ ) ist der Austrittsbereich des Spalts. Hier wird der Großteil der kinetischen Energie dissipiert. Innere Fluidreibung kann zudem den Gesamtdruck der Strömung weiter herabsetzen. Insbesondere in divergenten Abschnitten kann die Strömung ablösen, sodass der Bereich der eindimensionalen Strömung vorzeitig endet ( $II_{FS}$ , englisch Flow Separation).

In den folgenden Abschnitten wird die Spaltströmung strömungsmechanisch eingeordnet und anschließend die Modellierungsansätze für die Spaltbereiche vorgestellt.

## 3.1 Einordnung der Spaltströmung

Aufbauend auf der Gaskinetik wird eine Dimensionsanalyse für die Spaltströmung durchgeführt, der die mikroskopischen Eigenschaften der Gasteilchen zugrunde liegen. Die so ermittelten Kennzahlen decken sich mit denen aus den Arbeiten von Huck<sup>23</sup> und Utri<sup>17</sup>, nur dass aus der gaskinetischen Betrachtung eine weitere Kennzahl, der relative Teilchendurchmesser, hervorgeht. Zudem kann aus der Gaskinetik gefolgert werden, dass die Prandtl-Zahl für ideale Gase direkt von den inneren Teilchenfreiheitsgraden, also dem Adiabatenkoeffizienten, abhängt, und somit keine weitere unabhängige Größe darstellt. Zusätzlich werden die Ähnlichkeitsparameter für Gasgemische ergänzt und daraus gefolgert, warum Luft in guter Näherung nicht als Gasgemisch modelliert werden muss, sondern durch fiktive Luftteilchen ersetzt werden kann.

Voraussetzung für eine erfolgreiche Dimensionsanalyse ist eine fundierte Kenntnis über das System, um alle dimensionsbehafteten Einflussgrößen benennen zu können. Sind diese bekannt, ist eine Reduktion der  $N$  dimensionsbehafteten Größen auf  $N - M$  dimensionslose Größen möglich, wobei  $M$  die Anzahl der Grunddimensionen (SI-Basiseinheiten) des Systems ist.

### 3.1.1 $\Pi$ -Theorem

Die dimensionslosen Parameter werden mit dem  $\Pi$ -Theorem nach Buckingham [114] ermittelt. Dimensionsanalysen für einen Spalt werden bereits in [23] und [17] basierend auf den makroskopischen Eigenschaften von Fluiden ermittelt. Hier erfolgt die Dimensionsanalyse basierend auf den mikroskopischen Eigenschaften des Systems, d.h. auf Teilchenebene. Als Gas werden Sutherland-Teilchen angenommen, deren temperaturabhängige Teilchendurchmesser durch (2.75) beschrieben werden und welche die Masse  $m$  sowie die Anzahl der inneren Freiheitsgrade  $f$  haben. Die Spaltströmung wird entsprechend Abb. 3.1 vereinfachend als zweidimensional angenommen, wobei die Breite des

**Tab. 3.1** Mit dem Buckingham-Theorem ermittelte dimensionslose Kennzahlen zur Beschreibung einer Spaltströmung basierend auf einer teilchenorientierten Betrachtung.

Dimensionslose Kennzahl	Symbol
Knudsen-Zahl	$Kn$
Relativer Teilchendurchmesser	$\vartheta_\infty/H_{\min}$
Relative Verdoppelungstemperatur	$T_D/T_E$
Druckverhältnis über den Spalt	$\Pi$
Temperaturverhältnis über den Spalt	$\Theta$
Dimensionslose Wandtemperatur 1	$\Theta_{W1}$
Dimensionslose Wandtemperatur 2	$\Theta_{W2}$
Adiabatenkoeffizient	$\gamma$
Normierte Wandgeschwindigkeit 1	$\mathcal{W}_1$
Normierte Wandgeschwindigkeit 2	$\mathcal{W}_2$
Strömungsbeiwert	$\alpha$

Spalts senkrecht zur Strömung mit  $B$  bezeichnet wird. Grundsätzlich wird für die Übertragung von Kennzahlen auf ein anderes System geometrische Ähnlichkeit vorausgesetzt, wobei eine Änderung der Spaltbreite durch die 2D-Annahme keine Verletzung der Ähnlichkeit darstellt. Als stellvertretende charakteristische Länge wird die minimale Spalthöhe  $H_{\min}$  verwendet. Es wird von einer stationären, kompressiblen, diabaten Spaltströmung ausgegangen. Die Reflexion der Gasteilchen an den Bauteiloberflächen wird als diffus angenommen.

Die wichtigste Größe, die ein Spaltmodell für die Kammermodellsimulation liefern muss, ist der Massenstrom  $\dot{m}$ . Neben dem Spaltmassenstrom können für ein Kammermodell auch Wandwärmeströme  $\dot{Q}_{W1}$  bzw.  $\dot{Q}_{W2}$  und die Reibleistung  $P_{W1}$  bzw.  $P_{W2}$  der bewegten Wände von Bedeutung sein. Weitere Randbedingungen sind neben den Teilcheneigenschaften die unterschiedlichen Temperaturen  $T_E$ ,  $T_A$  und Teilchenanzahldichten  $n_E$ ,  $n_A$  in den Gasvolumina am Eintritt und Austritt des Spalts. Die Spaltwände bewegen sich, bedingt durch die Rotordrehung, mit den Wandgeschwindigkeiten  $c_{W1}$  und  $c_{W2}$ . Gleichermaßen können die Bauteiloberflächen unterschiedliche Temperaturen  $T_{W1}$  bzw.  $T_{W2}$  aufweisen. Da die Temperatur nur ein alternatives Maß für die Energie eines idealen Gases ist, wird zusätzlich die Boltzmann-Konstante  $k_B$  in die Dimensionsanalyse miteinbezogen. Die Dimensionsanalyse nach Buckingham wird für diese Arbeit mit dem Massenstrom als gesuchte Größe durchgeführt. Ein analoges Vorgehen für die Wandwärmeströme oder die Wandreibleistungen führt zu identischen dimensionslosen Randbedingungen, aber zu unterschiedlichen dimensionslosen Ergebnisgrößen. Das System hat fünfzehn Einflussgrößen mit vier Grundeinheiten (kg, s, K, m) und somit elf dimensionslose Kennzahlen, die das System neben der geometrischen Ähnlichkeit physikalisch vollständig beschreiben. Das Ergebnis der Dimensionsanalyse ist in [Tab. 3.1](#) zusammengefasst.

Die bereits in Kapitel 1 eingeführte Knudsen-Zahl  $Kn$  gilt als Maß für die Gasverdünnung und wird in Abhängigkeit der Spalteintrittsgrößen und der minimalen Spalthöhe  $H_{\min}$  ermittelt

$$Kn = \frac{\ell_E}{H_{\min}} = \frac{1}{H_{\min} \sqrt{2\pi} \vartheta_E^2 n_E} = \frac{16}{5\pi} \frac{\mu_E}{H_{\min} p_E} \sqrt{\frac{\pi k_B}{2 m} T_E} \approx \frac{\mu_E}{H_{\min} p_E} \sqrt{\frac{\pi k_B}{2 m} T_E}. \quad (3.1)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Teilchendurchmesser und Viskosität (2.68) folgt alternativ die Formulierung der Knudsen-Zahl über die Viskosität am Eintritt, wobei üblicherweise die gerundete Variante mit  $\frac{16}{5\pi} \approx 1$  zur Definition der Knudsen-Zahl verwendet wird.<sup>7</sup>

Eine weitere Größe, die sich formal aus der Dimensionsanalyse auf Teilchenebene ergibt, ist der relative Teilchendurchmesser  $\frac{d_{\infty}}{h_{\min}}$ . Diese Kennzahl kann aus der Betrachtung rein makroskopischer Größen nicht abgeleitet werden. Sie ist für Spaltströmungen in Vakuumpumpen sehr klein ( $\sim 10^{-6}$ ) und daher für diese Arbeit nicht von Bedeutung. Bei Flüssigkeiten gilt diese als Kriterium für die Gültigkeit der Annahme eines Kontinuums. Aus Experimenten geht hervor, dass bei Filmdicken unter zehn Teilchenlagen die Kontinuumsannahme ungültig ist [115, 116]. Die nächste teilchenbeschreibende Kennzahl ist die relative Verdoppelungstemperatur  $T_D/T_E$ . Diese spielt nur dann eine Rolle, wenn in der Spaltströmung starke Temperaturänderungen zu erwarten sind. Einen entscheidenden Einfluss auf den Spaltmassenstrom hat das Druckverhältnis über den Spalt

$$\Pi = \frac{p_A}{p_E} = \frac{n_A T_A}{n_E T_E}. \quad (3.2)$$

Es ist das Produkt aus dem Verhältnis der Teilchenanzahldichten über dem Spalt und dem Temperaturverhältnis  $\Theta = T_A/T_E$ . Letzteres stellt ebenfalls einen unabhängigen dimensionslosen Parameter dar, ist aber nur selten relevant. Das Temperaturverhältnis kann bei kurzen Spalten mit verdünnter Strömung relevant sein, z.B. bei einer molekularen Blendenströmung. Ein Wärmeaustausch zwischen Fluid und Bauteilen kann einen Einfluss auf den Spaltmassenstrom haben, wie beispielsweise die Rayleigh-Strömung zeigt. Zusätzlich ist es für den Wärmehaushalt einer Schraubenmaschine relevant, die im Spalt übertragene Wärme zu identifizieren. Insofern müssen für eine ähnliche Spaltphysik die dimensionslosen Wandtemperaturverläufe identischen sein. Zur Entdimensionierung wird die Eintrittstemperatur verwendet

$$\Theta_W = \frac{T_W}{T_E}. \quad (3.3)$$

Damit die Temperaturänderungen im Strömungsfeld ähnlich sind, muss neben ähnlichen Temperaturrandbedingungen die Anzahl der inneren Teilchenfreiheitsgrade  $f$  identisch sein. Dies ist bereits ein dimensionsloser Parameter, allerdings ist es in diesem Fall sinnvoll, diesen durch den gebräuchlicheren Adiabatenkoeffizienten  $\gamma$  (2.13) zu ersetzen, welcher direkt von den inneren Freiheitsgraden abhängt. Durch die Schleppwirkung der bewegten Bauteile wird eine Strömung im Spalt induziert. Die Entdimensionierung der Wandgeschwindigkeit erfolgt mit der wahrscheinlichsten Teilchengeschwindigkeit auf der Eintrittsseite

$$\mathcal{W} = \frac{c_W}{\sqrt{2 \frac{k_B}{m} T_E}}. \quad (3.4)$$

Diese dimensionslose Wandgeschwindigkeitsrandbedingung ist nicht zu verwechseln mit der in (2.99) eingeführten dimensionslosen Wandgeschwindigkeit, welche auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bezogen ist. Die letzte, und in der Regel bei der Spaltberechnung gesuchte, Größe ist der entdimensionierte Massenstrom in Form eines Strömungsbeiwertes

$$\alpha = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\text{th}}}. \quad (3.5)$$

Der theoretische Massenstrom ist dabei eine Bezugsgröße, die aus den am Spalt anliegenden Größen berechnet wird. Je nach Anwendungen sind unterschiedliche theoretische Massenströme geläufig. Im Bereich der Schraubenkompressoren ist der theoretischen Blendenmassenstrom nach Saint-Venant und Wantzel<sup>55</sup>

$$\dot{m}_{\text{SVW}} = \varrho_{\text{E}} H_{\text{min}} B \sqrt{\gamma \frac{k_{\text{B}}}{\text{m}} T_{\text{E}}} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left( (\Pi_*)^{\frac{2}{\gamma}} - (\Pi_*)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)} \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \Pi_* = \Pi \text{ für } \Pi > \Pi_{\text{krit}} \text{ und } \Pi_* = \Pi_{\text{krit}} \text{ für } \Pi \leq \Pi_{\text{krit}}$$

eine übliche Bezugsgröße. Dieser theoretische Massenstrom wird unter der Annahme berechnet, dass im engsten Querschnitt der Spaltkontur der Austrittsdruck vorliegt und die Zustandsänderung bis zu diesem Punkt isentrop erfolgt. Basierend auf dieser Annahme ergibt sich das theoretische, kritische Druckverhältnis  $\Pi_{\text{krit}}$ , bei dem die Strömung eines idealen Gases im engsten Querschnitt verblockt ist, wie folgt:

$$\Pi_{\text{krit}} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)} \quad (3.7)$$

Der Vorteil dieser Normierung ist, dass bei Kontinuumsströmungen der Strömungsbeiwert nahezu unabhängig vom Druckverhältnis  $\Pi$  ist.<sup>17</sup> Für verdünnte Strömungen hat sich eine Reduktion durch den Effusionsmassenstrom einer molekular durchströmten Blende

$$\dot{m}_{\text{eff}} = \frac{H_{\text{min}} B \varrho_{\text{E}}}{4} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k_{\text{B}}}{\text{m}} T_{\text{E}}} \quad (3.8)$$

etabliert.<sup>23</sup>

Neben den dargestellten Parametern gibt es noch eine Vielzahl von Parametern, die allerdings keine zusätzlichen unabhängigen Größen sind, da der Strömungsbeiwert  $\alpha$  durch zehn dimensionslose Randbedingungen eindeutig festgelegt ist. Alle weiteren dimensionslosen Größen sind ebenfalls Ergebnisse dieser Randbedingung. Neben dem Spaltmassenstrom können für ein Kammermodell auch Wandwärmeströme  $\dot{Q}_{\text{W}}$  und die Reibleistung  $P_{\text{W}}$  der bewegten Wände von Bedeutung sein. Der dimensionslose Wärmestrom einer Wand hat die Form einer Nusselt-Zahl und ist wie folgt definiert

$$Nu_{\text{W}} = \frac{\dot{Q}_{\text{W}}}{A_{\text{W}} k_{\text{E}} T_{\text{E}}}, \quad (3.9)$$

wobei  $A_{\text{W}}$  die Wandfläche ist und die Wärmeleitfähigkeit  $k_{\text{E}}$  des Fluids am Eintritt mit (2.71) aus den Teilcheneigenschaften folgt.

Eine Entdimensionierung der Reibleistung einer Wand kann basierend auf der theoretischen Reibleistung einer Couette-Strömung erfolgen:

$$\Psi_W = \frac{P_W}{\mu_E \frac{c_W}{H_{\min}} A_W} \quad (3.10)$$

Basierend auf den dargestellten Kennzahlen können weitere Kennzahlen abgeleitet werden, indem diese miteinander verrechnet werden. Die so ermittelten Kennzahlen stellen keine zusätzlichen Unabhängigen dar, können aber zur Interpretation bestimmter Phänomene ggf. sinnvoller sein. So ist beispielsweise die bereits eingeführte Prandtl-Zahl  $Pr$  für das gewählte Teilchenmodell ausschließlich und auch bei anderen Modellen vorwiegend vom Adiabatenkoeffizient  $\gamma$  abhängig. Eine unabhängige Variation dieser beiden Parameter ist für Gase daher nicht sinnvoll. Ähnliches gilt für die Schmidt-Zahl  $Sc$ , wobei diese für ein Hartkugel-Modell sogar stoffunabhängig ist.

### 3.1.2 Lokale strömungscharakterisierende Kennzahlen

Sind die dimensionslosen Randbedingungen gesetzt, so liegen gleichermaßen die dimensionslosen Druck-, Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder im Inneren des Spalts fest. Wichtige Größen, die die Strömung im Inneren des Spalts ortsabhängig charakterisieren, sind die Reynolds-Zahl  $Re$ , der lokale Gasverdünnungsparameter  $\delta$  und die Mach-Zahl  $M$ . Alle diese ortsabhängigen Größen werden im Folgenden mit Zustands- und Transportgrößen gebildet, welche zuvor über den Strömungsquerschnitt gemittelt werden. Eine genauere Betrachtung der querschnittsgemittelten Größen erfolgt in Abschnitt 3.2. Die Reynolds-Zahl setzt die stationäre Trägheit des Fluids in Bezug zu den Reibkräften in der Spaltströmung. Sie ist im zweidimensionalen Fall mit

$$Re(x) = \frac{2 H(x) \varrho(x) c(x)}{\mu(x)} = \frac{2 \dot{m}}{B \mu(x)} \quad (3.11)$$

gegeben und nur aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Viskosität ortabhängig.

Mit dem lokalen Gasverdünnungsparameter  $\delta(x)$  soll im Rahmen dieser Arbeit die Gasverdünnung ortsabhängig in der Strömung beschrieben werden. Er kann als eine Art reziproke Knudsen-Zahl verstanden werden und ist wie folgt definiert:

$$\delta(x) = \frac{H(x) \varrho(x) \sqrt{2 \frac{k_B}{m} T(x)}}{2 \mu(x)} \quad (3.12)$$

Die letzte für diese Arbeit relevante Kennzahl ist die Mach-Zahl. Sie setzt die lokale Strömungsgeschwindigkeit  $c(x)$  in Bezug zur lokalen isentropen Schallgeschwindigkeit (2.14):

$$M(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{\gamma \frac{k_B}{m} T(x)}} \quad (3.13)$$

Der Gasverdünnungsparameter, die Reynolds-Zahl und die Mach-Zahl sind direkt über folgenden Zusammenhang miteinander verknüpft:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{8\gamma}} \frac{Re(x)}{M(x)} \quad (3.14)$$

### 3.1.3 Ergänzung zu Gasgemischen

Jede Spezies eines Gasgemisches besitzt eine individuelle Teilchenmasse  $\mathbf{m}_i$  sowie ein spezifisches Interaktionspotenzial, welches über  $\mathfrak{d}_{\infty i}$  und  $T_{Di}$  vollständig beschrieben wird, und eine eigene Anzahl an inneren Teilchenfreiheitsgraden  $f_i$ . Zudem können individuell unterschiedliche Teilchenanzahldichten pro Spezies am Eintritt  $n_{Ei}$  und Austritt  $n_{Ai}$  vorliegen. Der Massenanteil der Spezies  $i$  am Gesamtgemisch  $j \in \mathcal{S}$  ist mit

$$\mathfrak{M}_{i,(E,A)} = \frac{\mathbf{m}_i n_{i,(E,A)}}{\sum_{j \in \mathcal{S}} \mathbf{m}_j n_{j,(E,A)}} \quad (3.15)$$

sowohl am Spalteintritt E als auch am Spaltaustritt A gegeben. Dabei ist zu beachten, dass es einen unabhängigen Massenanteil weniger als Spezies im Gasgemisch gibt, da zusätzlich gilt:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathfrak{M}_{i,(E,A)} = 1 \quad (3.16)$$

Zuletzt sind für Gasgemische die Verhältnisse der Teilcheneigenschaften von Bedeutung:

$$\frac{\mathfrak{d}_i}{\mathfrak{d}_j}, \frac{\mathbf{m}_i}{\mathbf{m}_j}, \frac{T_{Di}}{T_{Dj}}, \frac{\gamma_i}{\gamma_j} \text{ mit } i \neq j \quad (3.17)$$

In Gasgemischen kann es durch lokale Konzentrationsunterschiede zu Diffusionsprozessen kommen. Umgekehrt kann es bei zunächst homogen durchmischten Gasen bei großer Gasverdünnung zu einer Entmischung kommen. Um beurteilen zu können, ob Diffusion in der Modellierung der Spaltströmung berücksichtigt werden muss, ist es sinnvoll zu überprüfen, inwiefern sich ein Konzentrationsunterschied einstellt, welcher durch eine Diffusion ausgeglichen würde. Der erste zu nennende Effekt wäre die Entmischung bedingt durch thermisches Kriechen, welches von Huck<sup>23</sup> bereits als zu vernachlässigen eingestuft wurde. Der zweite Effekt sind unterschiedliche Teilchenmassen und die daraus resultierenden unterschiedlichen Teilchengeschwindigkeiten bei identischen Temperaturen. Im molekularen Bereich resultiert dies in unterschiedlichen Teilchenströmen der jeweiligen Spezies.<sup>7</sup> Für die in dieser Arbeit betrachtete Luft liegt das Massenverhältnis der relevanten Moleküle Sauerstoff und Stickstoff allerdings nahe 1, sodass dieser Entmischungsmechanismus vernachlässigt werden kann. Zusätzlich zu den ähnlichen Teilchenmassen weisen Stickstoff und Sauerstoff ähnliche Teilchendurchmesser und eine identische Anzahl an inneren Freiheitsgraden auf, sodass diese durch ein fiktives Luftteilchen ersetzt werden können.

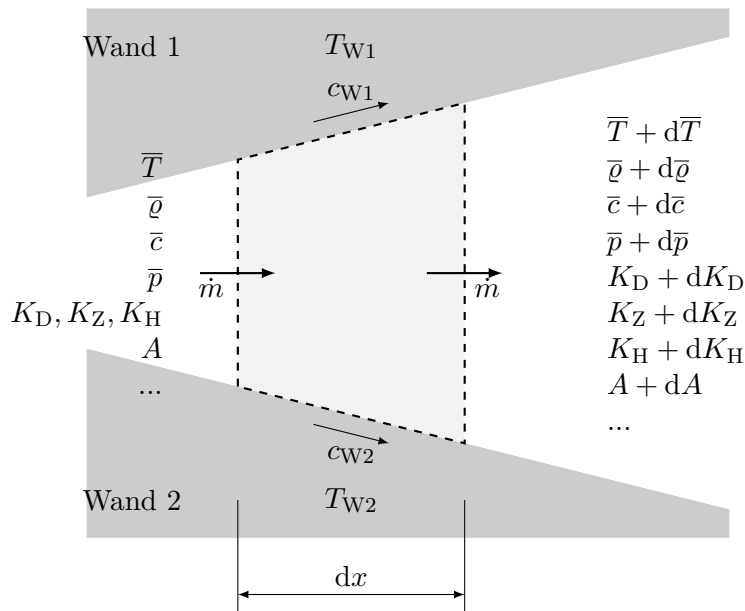
## 3.2 Modellierung des eindimensionalen Strömungsbereichs

Um die Gleichungen für eine eindimensionale kompressible Strömung herzuleiten, wird der Ansatz von Shapiro<sup>61</sup> verfolgt, jedoch unter der Berücksichtigung der gemittelten Strömungsvariablen

nach Müller<sup>13</sup>. Zusätzlich werden anisotrope Anteile der Normalspannung berücksichtigt, wie es in Ref. [2] vorgestellt wird. Zur weiteren Verallgemeinerung soll berücksichtigt werden, dass die Gaszusammensetzung durch Stoffdiffusion entlang des Spalts veränderlich ist, wenn Konzentrationsunterschiede über dem Spalt vorhanden sind (vgl. Abschnitt 3.1.3). Shapiro<sup>61</sup> berücksichtigt bereits eine Änderung der Gaszusammensetzung, allerdings aufgrund von Verdampfung eines Flüssigkeitsfilms an der Wand oder einer Injektion von Gas oder Flüssigkeit in die Gasphase. Die folgenden Betrachtungen sind einfacher, da sie keinen veränderlichen Gesamtgasmassenstrom oder chemische Reaktionen mitberücksichtigen.

### 3.2.1 Stationäre Erhaltungsgleichungen

Zur Überführung der Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik auf eine eindimensionale, stationäre Form wird ein infinitesimales, nicht deformierbares Kontrollvolumen eines Kanals zwischen zwei endlichen Querschnitten mit dem Abstand  $dx$  betrachtet, wie es in Abb. 3.2 dargestellt ist. Das Kontrollvolumen wird in Hauptströmungsrichtung  $x$  von links nach rechts von einem konstanten Massenstrom  $\dot{m}$  durchströmt. Der Flächeninhalt des Strömungsquerschnitts senkrecht zur Hauptströmungsrichtung ist mit  $A$  gegeben. Ober- und unterhalb wird das Kontrollvolumen durch undurchlässige Wände begrenzt, die jeweils eine Temperatur  $T_W$  und eine Tangentialgeschwindigkeit  $c_W$  aufweisen. Die Wandreibung und -bewegung, der Wärmeübergang zwischen Wand und Strömung sowie die Änderung des Strömungsquerschnitts  $A$  bewirken eine Änderung der mittleren Zustandsgrößen  $\bar{p}, \bar{T}, \bar{\varrho}$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{c}$ , sowie der später genauer erläuterten Formfaktoren  $K_D, K_Z, K_H$  der Strömung.



**Abb. 3.2** Kontrolloberfläche mit veränderlichen Größen für einen infinitesimalen Abschnitts im Spalt.

Zur Herleitung der eindimensionalen Erhaltungsgleichung ist es zweckmäßig, flächengemittelte Zustandsgrößen für Druck

$$\bar{p} := \frac{1}{A} \iint_A p \, dO, \quad (3.18)$$

Dichte

$$\bar{\varrho} := \frac{1}{A} \iint_A \varrho \, dO, \quad (3.19)$$

und Temperatur

$$\bar{T} := \frac{1}{A} \iint_A T \, dO \quad (3.20)$$

in den Oberflächen  $A$  senkrecht zur Strömungsrichtung zu definieren. Zudem wird die scheinbare spezifische Gaskonstante

$$\tilde{R} := K_Z \frac{k_B}{m} \quad (3.21)$$

eingeführt, sodass zwischen den mittleren Zustandsgrößen die ideale Gasgleichung in der Form

$$\bar{p} = \bar{\varrho} \tilde{R} \bar{T} \quad (3.22)$$

gilt. Die scheinbare Gaskonstante  $\tilde{R}$  ändert sich in Strömungsrichtung  $x$ , wenn sich die stoffliche Zusammensetzung des Gases entlang des Spalts ändert, oder wenn eine andere Profilierung von Druck und Temperatur quer zur Hauptströmungsrichtung vorliegt. Sie ist nicht zwangsläufig mit der spezifischen Gaskonstante des Gasgemisches gleichzusetzen. Die Profilierung von Druck und Temperatur wird über den Zustandsformfaktor  $K_Z$  beschrieben. Dieser hat die Form eines Realgasfaktors. Die differentiellen Formen der Zustandsgleichung und der Definition der scheinbaren spezifischen Gaskonstanten lauten:

$$\frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} = \frac{dK_Z}{K_Z} - \frac{dm}{m} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \frac{d\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} - \frac{d\bar{T}}{\bar{T}} = \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} \quad (3.24)$$

Weiter werden geeignete Mittlungen für die advektiven Flüsse über den Strömungsquerschnitt  $A$  eingeführt. Beginnend mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{c} := \frac{\dot{m}}{\varrho A}, \quad (3.25)$$

die so definiert wird, dass zusammen mit der mittleren Dichte  $\bar{\varrho}$  und dem Strömungsquerschnitt  $A$  die Massenerhaltung erfüllt ist. Der Massenstrom

$$\dot{m} = \iint_A \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) \, dO = \text{konstant} \quad (3.26)$$

durch das Kontrollvolumen folgt aus dem Integral der Massenstromdichte über den Strömungsquerschnitt  $A$ . Dieser ist für stationäre Strömungen ortsunabhängig und somit keine Funktion der Hauptströmungsrichtung  $x$ . Für die eindimensionale Impuls- und Energieerhaltung, werden Korrekturfaktoren eingeführt, die eine Profilierung der Strömungsgrößen quer zur Hauptströmungsrichtung

berücksichtigen. Für die Impulserhaltung ist dies der Impulsflussformfaktor

$$K_D := \frac{1}{\bar{m}\bar{c}} \iint_A \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^2 dO, \quad (3.27)$$

der analog zu der Definition nach Müller<sup>13</sup> ist, aber im Unterschied zu Shah und London<sup>117</sup> die Dichte berücksichtigt. Analog wird für die Energieerhaltung der Totalenthalpieflussformfaktor

$$K_H = \frac{1}{\bar{m}\bar{h}_t} \iint_A \left( u + \frac{p}{\varrho} + \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO = \frac{1}{\bar{m}\bar{h}_t} \iint_A \left( c_p T + \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO \quad (3.28)$$

eingeführt. Dieser ist das Verhältnis der gesamten advektiv transportierten Energiemenge der Strömung zum Fluss der mittleren spezifischen Totalenthalpie  $\bar{m}\bar{h}_t$ .

Die mittlere spezifische Totalenthalpie wird als

$$\bar{h}_t := \tilde{c}_p \bar{T} + \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (3.29)$$

definiert. Hierbei bezeichnet

$$\tilde{c}_p := \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tilde{R} \quad (3.30)$$

die scheinbare isobare Wärmekapazität der Strömung.

Auf das Kontrollvolumen werden die integralen Erhaltungsgleichungen in stationärer Form für Masse

$$\iint_{\partial V_{KV}} \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO = 0, \quad (3.31)$$

Impuls

$$\iint_{\partial V_{KV}} \varrho \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO + \iint_{\partial V_{KV}} p \mathbf{n} dO = \iint_{\partial V_{KV}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dO, \quad (3.32)$$

und Energie

$$\iint_{\partial V_{KV}} \varrho \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} + u + \frac{p}{\varrho} \right) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO = \iint_{\partial V_{KV}} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dO + \iint_{\partial V_{KV}} \mathbf{c} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO \quad (3.33)$$

angewendet. Äußere Felder, wie beispielsweise Gravitation, werden vernachlässigt.

Unter Berücksichtigung der Definition der mittleren Strömungsgeschwindigkeit (3.25) lautet die Lösung des Oberflächenintegrals der **Massenerhaltung**:

$$\iint_{\partial V_{KV}} \varrho (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO = (\bar{c} + d\bar{c}) \cdot (\bar{\varrho} + d\bar{\varrho}) \cdot (A + dA) - \bar{c} \cdot \bar{\varrho} \cdot A \quad (3.34)$$

Durch Ausklammern und anschließendes Dividieren mit dem Massenstrom

$$\dot{m} = \bar{\varrho} \cdot \bar{c} \cdot A \neq 0, \quad (3.35)$$

und der Berücksichtigung der Kettenregel  $d\bar{c}^2 = 2\bar{c}d\bar{c}$  folgt die eindimensionale, differentielle Massenerhaltung:

$$\frac{d\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{d\bar{c}^2}{\bar{c}^2} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.36)$$

Dabei sind die Produkte infinitesimaler Größen, d.h.  $d\bar{c} \cdot dA$ ,  $d\bar{\rho} \cdot dA$ ,  $d\bar{c} \cdot dA$  und  $d\bar{\rho} \cdot d\bar{c} \cdot \rho A$ , unendlich viel kleiner als der Rest und somit vernachlässigbar. Die Produkte von infinitesimalen Größen werden im Folgenden konsequent vernachlässigt, ohne dass erneut darauf hingewiesen wird. Dies entspricht der gängigen Argumentationsweise in der Infinitesimalrechnung.

Für die **Impulserhaltung** wird ausschließlich die Hauptströmungsrichtung  $x$  betrachtet. Dazu wird die Gleichung mit den Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{e}_x$  multipliziert, um eine skalare Gleichung zu erhalten. Bei der Auswertung des Oberflächenintegrals des Drucks wird vereinfachend die Druckkraft an den Wänden mit  $\left(\bar{p} + \frac{d\bar{p}}{2}\right) dA$  angenommen. Mit der Definition des flächengemittelten Drucks (3.18) vereinfacht sich das Oberflächenintegral des Drucks zu:

$$\mathbf{e}_x \cdot \iint_{\partial V_{KV}} p \mathbf{n} dO = (\bar{p} + d\bar{p}) \cdot (A + dA) - \left(\bar{p} + \frac{d\bar{p}}{2}\right) dA - \bar{p} \cdot A = A \cdot d\bar{p} \quad (3.37)$$

Mit dem eingeführten Impulsflussformfaktor (3.27) lautet die Lösung für das Oberflächenintegral des Impulsflusses:

$$\mathbf{e}_x \cdot \iint_{\partial V_{KV}} \rho \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dO = \dot{m} \cdot ((\bar{c} + d\bar{c}) \cdot (K_D + dK_D) - \bar{c} \cdot K_D) = \bar{c}^2 \cdot \bar{\rho} \cdot A \cdot K_D \cdot \left(\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} + \frac{dK_D}{K_D}\right) \quad (3.38)$$

Für eine detaillierte Analyse wird das Oberflächenintegral des Spannungstensors in zwei Teile zerlegt: Den Anteil der tangentialen Kräfte, die parallel zur Oberfläche wirken

$$F_{R,x} := -\mathbf{e}_x \cdot \iint_{\partial V_{KV}} \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO \quad (3.39)$$

und den Anteil der normalen Kräfte, die senkrecht zur Oberfläche wirken

$$F_{\tau,nn,x} := \mathbf{e}_x \cdot \iint_{\partial V_{KV}} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO. \quad (3.40)$$

Der tangentielle Anteil entspricht der Wandreibung. Die Mantelfläche, auf die die Reibkraft wirkt, wird näherungsweise mit

$$\left(U + \frac{1}{2}dU\right) \cdot dx = U \cdot dx \quad (3.41)$$

angenommen. Hierbei entspricht  $U$  dem Umfang des Strömungsquerschnitts  $A$ . Die mittlere Wandschubspannung im Inkrement  $dx$  ist damit durch

$$\bar{\tau}_W = \frac{F_{R,x}}{U \cdot dx} \quad (3.42)$$

gegeben. Für die eindimensionale Impulserhaltung ist es naheliegend, die Wandschubspannung durch den dimensionslosen Reibbeiwert nach Darcy auszudrücken, um die Reibungsverluste der

Strömung zu beschreiben. Er ist definiert als das Vierfache der mittleren Wandschubspannung, bezogen auf den dynamischen Druck einer inkompressiblen Strömung:

$$f := 8 \frac{\bar{\tau}_W}{\bar{\rho} \cdot \bar{c}^2} \quad (3.43)$$

Für die Summe der normal auf die Oberfläche wirkenden Kräfte  $F_{\tau,nn,x}$  wird ebenfalls ein dimensionsloser Parameter eingeführt

$$\varphi_x := \frac{F_{\tau,nn,x}}{\bar{p}A}, \quad (3.44)$$

der durch die auf den Strömungsquerschnitt  $A$  wirkende Druckkraft entdimensionalisiert ist.

Durch Einsetzen der Lösungen der Oberflächenintegrale und der eingeführten dimensionslosen Parameter ergibt sich die eindimensionale Impulserhaltung in Hauptströmungsrichtung zu:

$$\bar{\rho} \cdot \bar{c}^2 \cdot K_D \cdot \left( \frac{d\bar{c}}{\bar{c}} + \frac{dK_D}{K_D} \right) \cdot A + d\bar{p} \cdot A + f \cdot \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{c}^2}{8} \cdot U \cdot dx = \bar{p} \cdot \varphi_x \cdot A \quad (3.45)$$

Der Impulsverlust, welcher durch die Änderung des Impulsflussformfaktors  $dK_D$  entsteht, wird als scheinbar vergrößerte Wandreibung

$$f_{\text{app}} := f + 2D_h \frac{dK_D}{dx} \quad (3.46)$$

modelliert.<sup>117</sup> Außerdem wird hydraulische Durchmesser verwendet, um die Impulserhaltung unabhängig von der Strömungsquerschnittsfläche  $A$  zu formulieren. Er ist definiert als

$$D_h := 4 \frac{A}{U} \quad (3.47)$$

und entspricht dem Durchmesser einer Rohrleitung mit einem vergleichbaren Verhältnis von Strömungsquerschnittsfläche zu benetzter Mantelfläche. Somit ergibt sich die finale Form der Impulserhaltung, die für die eindimensionale Modellierung der Strömung verwendet wird:

$$K_D \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{c} \cdot d\bar{c} + d\bar{p} + f_{\text{app}} \cdot \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{c}^2}{2} \cdot \frac{dx}{D_h} = \bar{p} \cdot \varphi_x \quad (3.48)$$

Abschließend wird die integrale **Energieerhaltung** auf die eindimensionale, differentielle Form überführt. Hierzu wird zunächst das Oberflächenintegral der advektiv transportierten Energie unter Berücksichtigung des Totalenthalpieflussformfaktors (3.28) aufgelöst:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V_{KV}} \rho \left( \frac{c^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) \, dO &= \dot{m} \left( (\bar{h}_t + d\bar{h}_t) \cdot (K_H + dK_H) - \bar{h}_t \cdot K_H \right) \\ &= \dot{m} \cdot \bar{h}_t \cdot K_H \cdot \left( \frac{d\bar{h}_t}{\bar{h}_t} + \frac{dK_H}{K_H} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Außerdem werden die Integrale von Arbeit und Wärmeübertragung in der Energieerhaltung ersetzt. Die aus den tangentialen Komponenten des Spannungstensors resultierende Reibleistung kann in

den Anteil der Wandreibung  $dP_{R,W}$  und den Anteil der Reibleistung in den Stirnflächen  $dP_{R,A}$  aufgeteilt werden.

$$\iint_{\partial V_{KV}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO = dP_{R,W} + dP_{R,A} \quad (3.50)$$

Die Reibleistung  $dP_{R,A}$  an den Stirnflächen eines Stromfadens wird üblicherweise vernachlässigt, da in einer Strömung, die sich näherungsweise eindimensional beschreiben lässt, die Schergeschwindigkeiten sowie die Schubspannung senkrecht zur Hauptströmungsrichtung äußerst gering ausfallen. Der isotrope Anteil der Verschiebeleistung am Kontrollvolumen wird in der Enthalpie über den Druck berücksichtigt. Wenn im Schubspannungstensor Elemente auf der Diagonalen besetzt sind, so resultiert aus diesen formal ein weiterer Anteil von Verschiebeleistung am offenen System

$$\iint_{\partial V_{KV}} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dO = dP_x. \quad (3.51)$$

Die Wandtemperaturen  $T_W$  können von der Fluidtemperatur abweichen und führen daher zu Wandwärmeströmen  $d\dot{Q}_W$ . Temperaturgradienten in Strömungsrichtung führen zu einer Wärmeleitung, deren Änderung durch  $d\dot{Q}_x$  dargestellt wird:

$$\iint_{\partial V_{KV}} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dO = d\dot{Q}_W + d\dot{Q}_x \quad (3.52)$$

Zufassend lautet die eindimensionale, differentielle Form der Energieerhaltung unter Berücksichtigung der vorangegangenen Überlegungen und Definitionen:

$$\frac{d\bar{h}_t}{\bar{h}_t} = \frac{dP_{R,W} + dP_{R,A} + dP_x + d\dot{Q}_W + d\dot{Q}_x}{\dot{m}K_H\bar{h}_t} - \frac{dK_H}{K_H} \quad (3.53)$$

### 3.2.2 Differentialgleichung der Mach-Zahl

Um das Gleichungssystem für den Stromfaden leichter lösen zu können, wird in Anlehnung an Shapiro<sup>61</sup> die Differentialgleichung für die Mach-Zahl der Strömung aufgestellt. Hierzu wird zunächst die mittlere Mach-Zahl

$$\bar{M}^2 = \frac{\bar{c}^2}{\gamma \bar{R} \bar{T}} \quad (3.54)$$

eingeführt. Zusätzlich ist es zur einfacheren Schreibweise zweckmäßig, die mittlere Totaltemperatur der Strömung einzuführen

$$\bar{T}_t = \frac{\bar{h}_t}{\bar{c}_p}, \quad (3.55)$$

sodass mit (3.29) der aus der Gasdynamik bekannte Zusammenhang

$$\bar{T}_t = \bar{T} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}^2 \right) \quad (3.56)$$

gilt. Die mittlere Mach-Zahl wird verwendet, um die Impulserhaltung (3.48) zu vereinfachen. Hierzu wird berücksichtigt, dass  $\varrho \bar{c}^2 = \bar{p} \gamma \bar{M}^2$  gilt. Nach dem Dividieren mit  $\bar{p}$  ergibt sich:

$$\left( K_D \frac{\gamma \bar{M}^2}{2} \right) \frac{d\bar{c}^2}{\bar{c}^2} + \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} = \left( \varphi_x - f_{\text{app}} \frac{\gamma \bar{M}^2}{2} \frac{dx}{D_h} \right) \quad (3.57)$$

Zur Umformung wurde die Kettenregel  $d\bar{c}^2 = 2\bar{c}d\bar{c}$  verwendet. Zur Herleitung der Differentialgleichung der Mach-Zahl werden zusätzlich das Stoffgesetz

$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \frac{d\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} - \frac{d\bar{T}}{\bar{T}} = \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} \quad (3.24 \text{ wiederholt})$$

die Erhaltungsgleichung für die Masse

$$\frac{d\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} + \left( \frac{1}{2} \right) \frac{d\bar{c}^2}{\bar{c}^2} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.36 \text{ wiederholt})$$

sowie die Definition der Mach-Zahl

$$\frac{d\bar{M}^2}{\bar{M}^2} - \frac{d\bar{c}^2}{\bar{c}^2} + \frac{d\bar{T}}{\bar{T}} = -\frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} - \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (3.58)$$

und der Totaltemperatur

$$\left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}^2 \right) \frac{d\bar{T}_t}{\bar{T}_t} = \left( \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}^2 \right) \frac{d\bar{M}^2}{\bar{M}^2} + \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}^2 \right) \frac{dT}{T} + \left( \frac{\gamma \bar{M}^2}{2} \right) \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (3.59)$$

in differentieller Form benötigt

Diese Grundgleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $d\bar{p}/\bar{p}$ ,  $d\bar{\varrho}/\bar{\varrho}$ ,  $d\bar{T}/\bar{T}$ ,  $d\bar{c}^2/\bar{c}^2$  und  $d\bar{M}^2/\bar{M}^2$ . Die Lösung für die Unbekannte  $d\bar{M}^2/\bar{M}^2$  lautet

$$\frac{d\bar{M}^2}{\bar{M}^2} = \frac{G}{1 - \frac{\bar{M}^2}{\bar{M}_{\text{krit}}^2}} \quad (3.60)$$

mit  $G$  als

$$G = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}^2 \right) \left( \gamma \bar{M}^2 f_{\text{app}} \frac{dx}{D_H} + \left( 1 + K_D \gamma \bar{M}^2 \right) \left( \frac{d\bar{T}_t}{\bar{T}_t} + \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} \right) - 2 \frac{dA}{A} - 2\varphi_x \right) - \frac{1}{2} \left( \bar{M}^2 \left( \gamma \left( K_D \left( \bar{M}^2 - 2 \right) + 2 \right) - 1 \right) + 2 \right) \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (3.61)$$

und der kritischen Mach-Zahl

$$\bar{M}_{\text{krit}}^2 = \frac{1}{(1 + \gamma(K_D - 1))}. \quad (3.62)$$

Unter Berücksichtigung der Energieerhaltung (3.53) kann die Änderung der Totaltemperatur mit

$$\frac{d\bar{T}_t}{\bar{T}_t} = \frac{d\bar{h}_t}{\bar{h}_t} - \frac{d\tilde{c}_p}{\tilde{c}_p} = \frac{d\bar{h}_t}{\bar{h}_t} - \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (3.63)$$

bestimmt werden. Die Änderung der scheinbaren Gaskonstante  $\tilde{R}$  ist gegeben gemäß (3.23) in Abhängigkeit der Änderung der mittleren Teilchenmasse  $\mathbf{m}$  und des Zustandsformfaktors  $K_Z$ .

Dieser Satz an Differentialgleichungen beschreibt ein Anfangswertproblem, das durch Integration gelöst werden kann. Um das Problem lösen zu können, müssen neben den eingeführten Formfaktoren und dem scheinbaren Reibbeiwert  $f_{\text{app}}$ , die zugeführten Energien in Form von Arbeit und Wärme, die anisotropen Normalspannungen  $\varphi_x$  sowie die Änderung der stofflichen Zusammensetzung modelliert werden. Die Änderung des Adiabatenkoeffizienten  $\gamma$  kann ein Resultat der veränderten stofflichen Zusammensetzung oder der Anregung zusätzlicher innerer Freiheitsgrade sein.

### 3.2.3 Ergänzungen zu Gasgemischen

Die Veränderung der stofflichen Zusammensetzung der Gasphase kann entweder Resultat eines Phasenwechsels oder das Ergebnis von Diffusionsprozessen sein. Da in dieser Arbeit ausschließlich trockene Luft betrachtet wird, wird hier nur auf Letzteres kurz eingegangen. Ein entsprechender Modellierungsansatz sieht wie folgt aus. Zunächst wird analog zu den anderen Zustandsgrößen eine mittlere Partialdichte

$$\bar{\varrho}_i = \frac{1}{A} \iint_A \varrho_i dO. \quad (3.64)$$

und eine mittlere Diffusionsgeschwindigkeit

$$\bar{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{\bar{\varrho}_i A} \iint_A \varrho_i ((\mathbf{c}_i + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}) dO - \mathbf{c}. \quad (3.65)$$

für die Spezies eingeführt. Somit folgt die differentielle Massenerhaltung für eine Spezies in folgender Form:

$$\frac{d\bar{\varrho}_i}{\bar{\varrho}_i} + \frac{d(\bar{c} + \bar{\mathbf{c}}_i)}{\bar{c} + \bar{\mathbf{c}}_i} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.66)$$

Wenn nun ein Modellierungsansatz für die Diffusionsgeschwindigkeit gewählt wird, ist es prinzipiell möglich, die zusätzlichen Differentialgleichungen als Teil des Anfangswertproblems mitzulösen. Im Bereich der Gasverdünnungen, in dem die Navier-Stokes-Gleichungen Gültigkeit besitzen, erfordert die Lösung die Modellierung der Diffusionskonstanten (2.63). Für den Übergangsbereich und den molekularen Strömungsbereich sind ggf. andere Modellansätze erforderlich.

Da trockene Luft weitestgehend aus den zweiatomigen Molekülen Stickstoff und Sauerstoff mit ähnlicher Masse besteht, werden diese im Weiteren als fiktive Luftteilchen betrachtet und Stoffdiffusion wird vernachlässigt. Wenn in zukünftigen Arbeit die Hypothese einer Entmischung von Gasen innerhalb einer Schraubenvakuumpumpe untersucht wird, kann auf diesen Modellierungsansatz zurückgegriffen werden.

### 3.2.4 Diskussion der Formfaktoren

Im Bereich der turbulenten Strömungen ist bekannt, dass die turbulente Diffusion im Bereich der Kernströmung die Wärmeleitfähigkeit und Scherviskosität scheinbar erhöhen. Geschwindigkeitsprofil und Temperaturprofil fallen „rechteckiger“ aus als beispielsweise in einer laminaren Strömung.

Wenn nun zusätzlich davon ausgegangen wird, dass keine starke Krümmung der Stromlinien vorliegt, entfällt eine Druckänderung quer zur Strömungsrichtung. Somit kann davon ausgegangen werden, dass bei turbulenten Strömungen die Zustandsgrößen quer zur Strömungsrichtung näherungsweise konstant sind. Gleiches gilt für die Strömungsgeschwindigkeit. Die Formfaktoren können somit durch

$$K_Z = K_H = K_D \approx 1, \text{ für } Re > 8000 \quad (3.67)$$

abgeschätzt werden. Gleichermaßen kann deren Änderung vernachlässigt werden:

$$\frac{dK_Z}{K_Z} = \frac{dK_H}{K_H} = \frac{dK_D}{K_D} \approx 0, \text{ für } Re > 8000 \quad (3.68)$$

Für den Bereich der laminaren Strömungen wird ebenfalls der Zustandsformfaktor zu ( $K_Z = 1$ ) gesetzt. Im nächsten Schritt wird abgeschätzt, welcher Fehler dadurch maximal zu erwarten ist. Hinsichtlich der Druckänderung quer zur Hauptströmung wird erneut davon ausgegangen, dass diese vernachlässigbar ist, d.h.  $p = \bar{p}$  gilt. Außerdem wird von einer konstanten stofflichen Zusammensetzung quer zur Hauptströmungsrichtung ausgegangen. Aus dem Gleichsetzen der idealen Gasgleichung (2.1) und der Zustandsgleichung für die mittleren Zustandsgrößen (3.22) folgt, dass zwischen den mittleren und lokalen Werten von Dichte und Temperatur

$$K_Z \bar{\rho} \bar{T} = \rho T \quad (3.69)$$

gilt. Nach Dividieren mit  $\bar{\rho} \bar{T}$  und anschließendem Integrieren über den Strömungsquerschnitt  $A$  folgt

$$K_Z \iint_A \frac{\bar{T}}{\bar{T}} dO = \iint_A \frac{\rho}{\bar{\rho}} dO, \quad (3.70)$$

wobei nach der Definition der flächengemittelten Dichte (3.19)

$$\iint_A \frac{\rho}{\bar{\rho}} dO = A \quad (3.71)$$

gilt. Der Zustandsformfaktor ist dann gegeben mit

$$K_Z = A \left( \iint_A \frac{\bar{T}}{\bar{T}} dO \right)^{-1} \quad (3.72)$$

und somit ausschließlich eine Funktion des Temperaturprofils.

Die Temperaturverteilung wird durch die angrenzenden Bauteiltemperaturen beeinflusst. Es kann von der stärksten Profilierung der Temperatur ausgegangen werden, wenn das Temperaturprofil vollständig ausgebildet ist. Für laminare Strömung in einem planparallelen Spalt ist dieses mit (2.105) gegeben. Wird der Temperatursprung<sup>i</sup> nicht berücksichtigt, lautet der Zusammenhang für

---

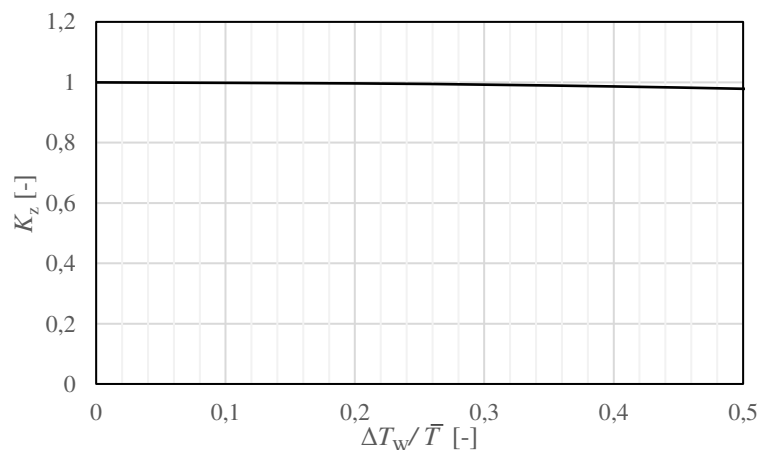
<sup>i</sup>Gasverdünnungseffekte führen dazu, dass das Temperaturprofil zunehmend „rechteckiger“ wird. Die viskose Strömung ist daher der ungünstigste Fall.

den Zustandsformfaktor eines vollständig ausgebildeten laminaren Temperaturprofils

$$K_Z = \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{\Delta T_W}{2\bar{T}} Y \right)^{-1} dY \right)^{-1} = \frac{\Delta T_W}{2\bar{T}} \left( \tanh^{-1} \left( \frac{\Delta T_W}{2\bar{T}} \right) \right)^{-1}, \quad (3.73)$$

wobei  $\Delta T_W$  die Temperaturdifferenz zwischen den Wänden bezeichnet. Im vollständig ausgebildeten Temperaturprofil ist die mittlere Strömungstemperatur mit  $\bar{T} = \frac{T_{W1} + T_{W2}}{2}$  gegeben.

Der Zusammenhang für den Formfaktor ist in **Abb. 3.3** dargestellt. Die stärksten Temperaturgradienten sind im Gehäusespalt zwischen Rotor und Gehäuse zu erwarten. Als obere Abschätzung wird von 200°C Rotor- und 20°C Gehäusetemperatur ausgegangen. Das Verhältnis von Temperaturdifferenz zur mittleren Strömungstemperatur beträgt dann  $\frac{\Delta T_W}{\bar{T}} \approx 0,47$ . Auch für diese obere Abschätzung liegt der Wert für  $K_Z$  nahe eins. Dies kann dadurch erklärt werden, dass, gemessen am absoluten Nullpunkt, die Temperaturvariation quer zur Strömungsrichtung vernachlässigbar ist. So kann weiter argumentiert werden, dass auch in kompressiblen Strömungen eine Abkühlung der Kernströmung durch die Strömungsbeschleunigung ebenfalls keinen starken Einfluss auf den Formfaktor für die Zustandsgleichung haben wird und dieser in guter Näherung zu  $K_Z = 1$  gesetzt werden kann.



**Abb. 3.3** Zustandsformfaktor  $K_Z$  für ein vollständig ausgebildetes Temperaturprofil in einer laminaren Strömung zwischen zwei planparallelen Wänden, aufgetragen über dem Verhältnis der Wandtemperaturdifferenz  $\Delta T_W$  zur mittleren Strömungstemperatur  $\bar{T} = \frac{T_{W1} + T_{W2}}{2}$ .

Da die Profilierung der Temperatur, des Drucks und damit auch die der Dichte vernachlässigbar ist, wird untersucht, welchen Einfluss das Geschwindigkeitsprofil auf die Strömung hat. Es wird hierbei vereinfachend von einem vollständig ausgebildeten Geschwindigkeitsprofil einer inkompressiblen, laminaren Strömung ausgegangen. Wie im späteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, beeinflussen Beschleunigungen oder Verzögerungen das Strömungsprofil. Für eine erste Abschätzung soll die bekannte analytische Lösung für das Geschwindigkeitsprofil einer schleichenden Schluftpströmung in einem planparallelen Spalt unendlicher Breite genügen. Dieses hat eine parabolische Form und ist gegeben mit (2.95). Damit ist der Impulsflussformfaktor der vollständig ausgebildeten Schluftp-

strömung gegeben mit:

$$K_{D,fd} = \int_{-1}^1 C^2 dY = \frac{K_1^2}{5} + \frac{2K_1K_3}{3} + \frac{K_2^2}{3} + K_3^2 \quad (3.74)$$

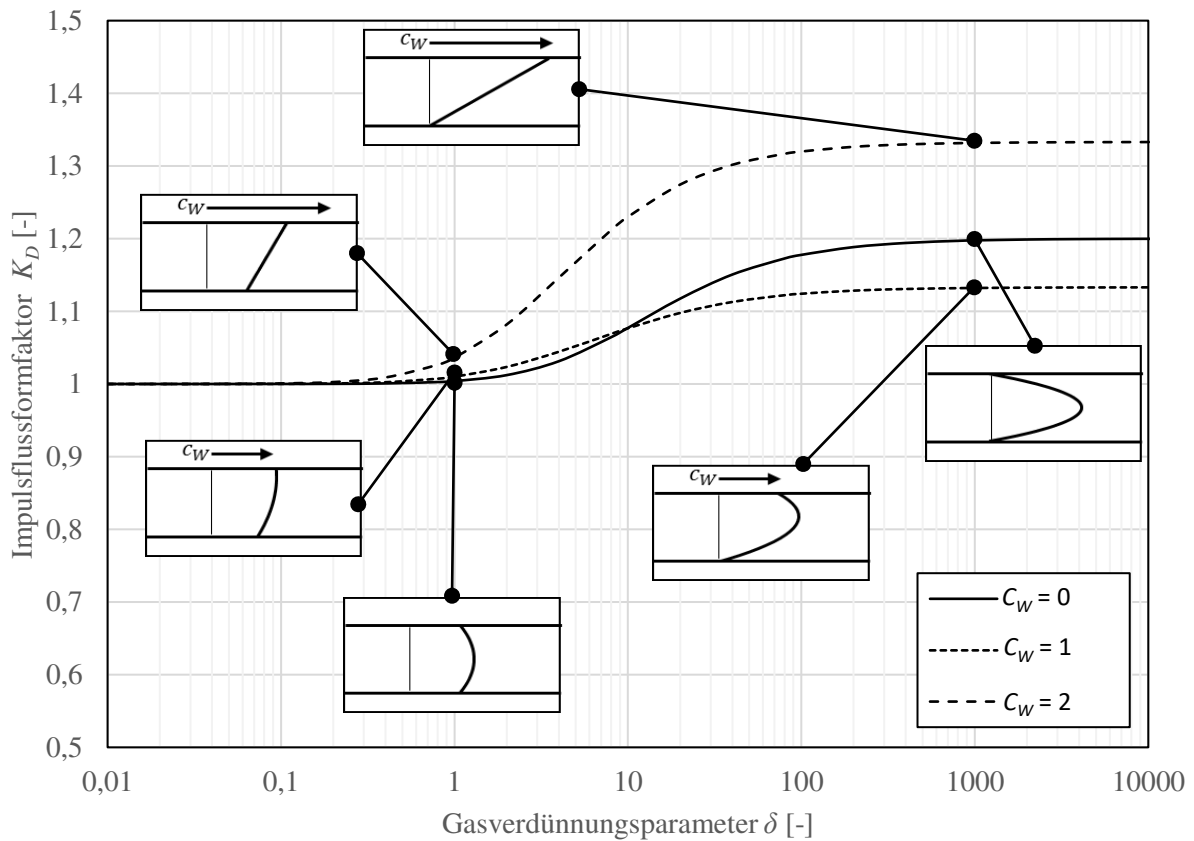
In [Abb. 3.4](#) ist der Impulsflussfaktor  $K_D$  in Abhängigkeit des Gasverdünnungsparameters  $\delta$  für verschiedene dimensionslose Geschwindigkeiten  $C_W = C_{W1}$  der oberen Wand dargestellt. Ein thermischer Schlupf wird nicht berücksichtigt. Die untere Wand ruht,  $C_{W2} = 0$ , damit für die Untersuchung die größtmögliche Deformation des Geschwindigkeitsprofils einer Couette-Strömung vorliegt. Es ist deutlich erkennbar, wie mit fallenden Gasverdünnungsparameter der Wert für den Impulsflussformfaktor gegen eins tendiert, da das Geschwindigkeitsprofil durch den Schlupf zunehmend „rechteckiger“ wird. Obwohl die Schlupflösung nur für Gasverdünnungsparameter größer zehn gültig ist, stellt diese auch für kleinere Parameter eine sinnvolle Näherung dar, da bekannt ist, dass in einer voll molekularen Lösung das Geschwindigkeitsprofil rechteckig ist.<sup>7</sup> Den größten Impulsflussformfaktor der Kontinuumsströmung hat das reine Couette-Profil mit einem Wert von  $K_D = \frac{4}{3}$ . Der Wert für eine reine Poiseuille-Strömung liegt bei  $K_D = 1,2$ . Es ist zudem ersichtlich, dass Couette-Poiseuille-Strömungen einen Formfaktor aufweisen können, der unterhalb des einer Poiseuille-Strömung liegen kann. Insgesamt wird deutlich, dass der Impulsflussfaktor für eine laminare Strömung Werte deutlich unterschiedlich von eins annimmt und damit die Form des Geschwindigkeitsprofils in der Impulserhaltung zu berücksichtigen ist.

Als Nächstes wird der Einfluss des Geschwindigkeitsprofils auf den Energiefluss überprüft. Dazu wird zunächst ein Formfaktor für den Fluss der kinetischen Energie der Strömung eingeführt. Im Gegensatz zum Impulsfluss geht das Strömungsprofil in der dritten Potenz ein. Für ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil mit Schlupf lautet der Zusammenhang für den Formfaktor:

$$K_{KE,fd} = \int_{-1}^1 C^3 dY = \frac{K_1^3}{7} + \frac{3K_1^2K_3}{5} + \frac{3K_1K_2^2}{5} + K_1K_3^2 + K_2^2K_3 + K_3^3 \quad (3.75)$$

In [Abb. 3.5](#) ist der Wert für den Formfaktor der kinetischen Energie in Analogie zu [Abb. 3.4](#) für verschiedene Wandgeschwindigkeiten über dem Gasverdünnungsparameter aufgetragen. Das Bild ist grundsätzlich vergleichbar mit dem Impulsflussformfaktor, aber aufgrund der dritten Potenz mit größeren Werten für  $\delta \rightarrow \infty$ . Er kann somit nicht vereinfachend als eins angenommen werden und muss weiter betrachtet werden.

Der Formfaktor für den Fluss der kinetischen Energie ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn die kinetische Energie ein wesentlichen Anteil der insgesamt transportierten Energiemenge der Strömung ist, d.h. groß gegenüber der spezifischen statischen Enthalpie der Strömung ist. Dies wird deutlich, wenn der Totalenthalpieflussformfaktor  $K_H$  untersucht wird. Aus den Betrachtungen des Temperaturprofils ist bekannt, dass dieses vereinfachend als homogen angenommen werden kann. Da der Zustandsformfaktor nahe  $K_Z = 1$  ist und somit die scheinbare Wärmekapazität  $\tilde{c}_p$



**Abb. 3.4** Impulsflussformfaktor  $K_D$  schleichender Strömungen in einem planparallelen Spalt für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten  $C_W$  aufgetragen über dem Gasverdünnungsparameter  $\delta$ .  $C_W = 0$  entspricht einer reinen Poiseuille-Strömung,  $C_W = 2$  einer reinen Couette-Strömung und  $C_W = 1$  einer Couette-Poiseuille-Strömung mit 50% Couette-Anteil.

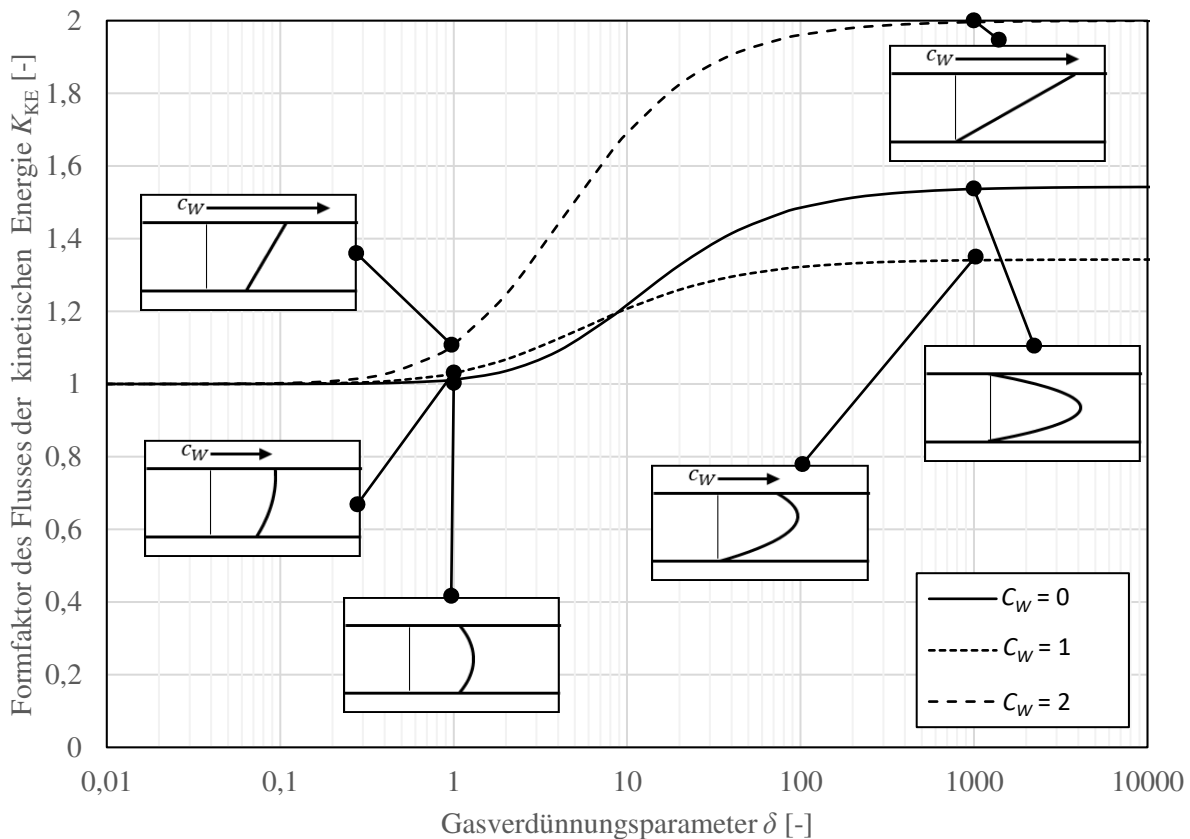
der tatsächlichen Gaseigenschaft entspricht, kann der Totalenthalpieflussformfaktor zu

$$K_H = \frac{\dot{m}c_p\bar{T} + K_{KE}\dot{m}\frac{\bar{c}^2}{2}}{\dot{m}\left(c_p\bar{T} + \frac{\bar{c}^2}{2}\right)} \quad (3.76)$$

vereinfacht werden. Durch Ausklammern und Kürzen der statischen Temperatur kann gezeigt werden, dass dieser nur noch vom Adiabatenkoeffizienten, der Mach-Zahl und dem Formfaktor der kinetischen Energie abhängt.

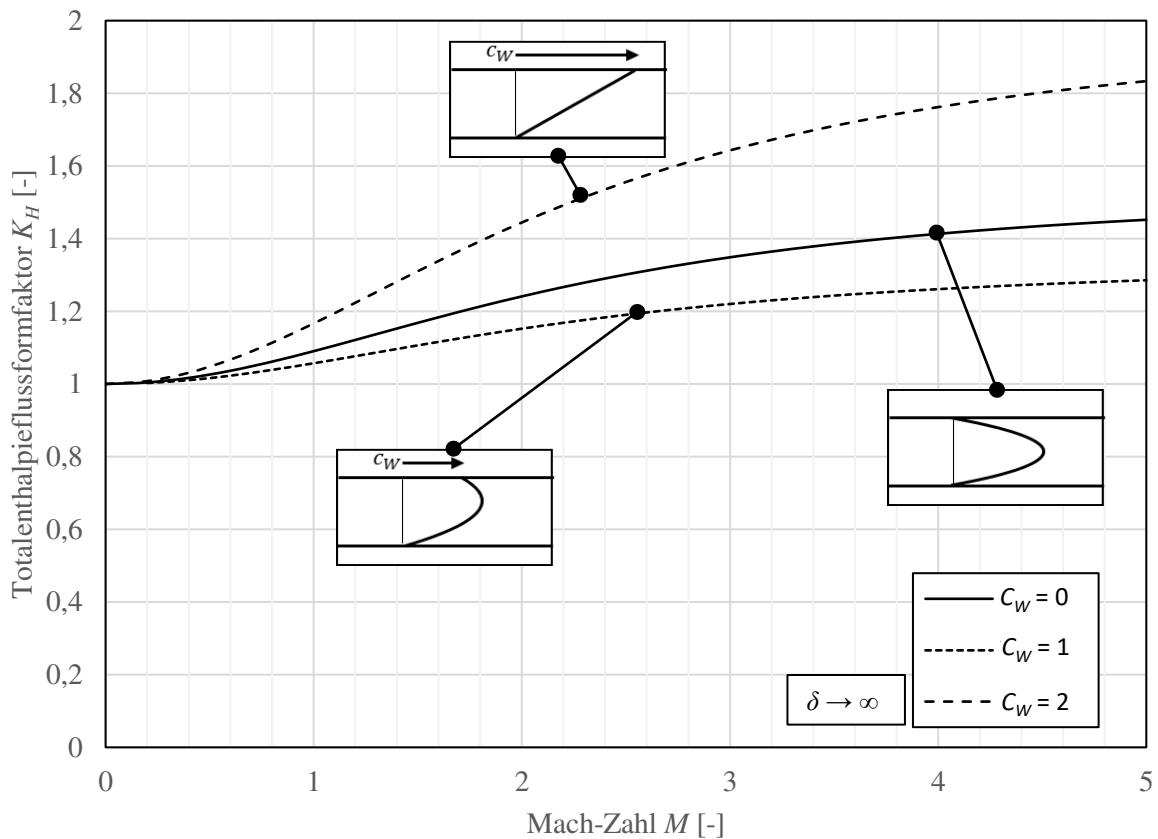
$$K_H = 1 + \frac{(K_{KE} - 1) \cdot \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2} \quad (3.77)$$

In **Abb. 3.6** ist der Einfluss der Mach-Zahl  $M$  auf den Totalenthalpieflussformfaktor  $K_H$  für verschiedene Geschwindigkeitsprofile dargestellt. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass mit steigender Mach-Zahl der Formfaktor der Totalenthalpie ansteigt. Dies ist damit begründet, dass eine größere Mach-Zahl einem größeren Verhältnis von kinetischer Energie zur statischen Enthalpie entspricht und somit das Geschwindigkeitsprofil einen zunehmenden Einfluss auf die insgesamt mit Strömung transportierte Energiemenge hat.



**Abb. 3.5** Formfaktor des Flusses der kinetischen Energie  $K_{KE}$  schleicher Strömungen in einem ebenen Spalt für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten  $C_W$  aufgetragen über den Gasverdünnungsparameter  $\delta$ .  $C_W = 0$  entspricht einer reinen Poiseuille-Strömung,  $C_W = 2$  einer reinen Couette-Strömung und  $C_W = 1$  einer Couette-Strömung mit 50% Couette-Anteil.

Den größten Anstieg zeigt das reine Couette-Profil. Da in Schraubenmaschinen Mach-Zahlen größer  $M = 0,4$  für reine Couette-Strömungen eher die Ausnahme sind, wird der Einfluss im Weiteren vernachlässigt. Anders ist dies beim reinen Poiseuille-Profil. Hier sind auch Mach-Zahlen nahe eins und darüber hinaus zu erwarten. Wenn ausschließlich der Spaltmassenstrom bestimmt werden soll, sind vor allem Mach-Zahlen bis zu  $M = 1$  relevant, da dann die Strömung verblockt (für laminare Strömung sogar noch etwas darunter). Für  $M = 1$  liegt der Wert bei  $K_H = 1,09$ . Es ist allerdings davon auszugehen, dass die Mach-Zahl über einen weiten Bereich des Spalts deutlich unterhalb von eins liegt und somit wird der Wert des Totalenthalpieflussformfaktors für die Bestimmung des Massenstroms mit  $K_H = 1$  angenommen. Wenn der Überschallbereich der Strömung untersucht wird, beispielsweise um den Wärmeübergang nach dem kritischen Punkt zu modellieren, sollte der Formfaktor mit  $K_H \neq 1$  berücksichtigt werden. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn die Modelle für die Wandwärmeströme ebenfalls entsprechende Detailtiefe haben.



**Abb. 3.6** Totalenthalpieflussformfaktor  $K_H$  einer laminaren Strömung in einem planparallelen Spalt für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten  $C_W$  aufgetragen über der Mach-Zahl  $M$ .  $C_W = 0$  entspricht einer reinen Poiseuille-Strömung,  $C_W = 2$  einer reinen Couette-Strömung und  $C_W = 1$  einer Couette-Strömung mit 50% Couette-Anteil.

### 3.3 Zu- und Abströmung

Ein Modell der Zuströmung muss den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen weit vor dem Spalt (E) und denen am Eintritt der 1D-Domäne (I) in Abhängigkeit des Spaltdurchflusses abbilden. Insbesondere für Gasgemische im verdünnten Strömungsbereich stellt dies eine Herausforderung dar, da die Stoffdiffusion modelliert werden muss. Im Rahmen dieser Arbeit konnte hierzu kein geeignetes Modell gefunden werden. Für Gase mit nur einer Spezies oder bei vernachlässigbarer Stoffdiffusion schlägt Müller<sup>13</sup> ein Modell vor, dass zunächst den erwarteten Totaldruckverlust in der Zuströmung ermittelt und anschließend die Temperaturänderung über einer polytropen Zustandsänderung berechnet. Dieses berücksichtigt aber keine Gasverdünnung. Die Stoffdiffusion außer Acht gelassen, hat die Zuströmrandbedingung die Form:

$$\left[ Re_I, \frac{\bar{p}_I}{p_E}, \frac{\bar{T}_I}{T_E} \right] = \text{Funktion}(M_I, Kn) \quad (3.78)$$

Diese berechnet also die Reynolds-Zahl am Eintritt in die 1D-Domäne, sowie die Verhältnisse der statischen Drücke und der Totaltemperaturen, die sich aus der polytropen Entspannung des Gases in der Zuströmung ergeben.

Die Abströmrandbedingung bildet den ggf. zusätzlich auftretenden statischen Druckverlust nach der 1D-Domäne ab. Für die Kontinuumsströmung kann dieser auf eine vollständige Dissipation der kinetischen Energie reduziert werden. Für verdünnte Gase zeigt Sharipov<sup>107</sup>, dass insbesondere bei kurzen Spalten ein statischer Druckverlust berücksichtigt werden sollte. Der Abströmdruckverlust ist somit abhängig von dem Gasverdünnungsparameter am Ende der 1D-Domäne und damit von der Mach-Zahl und der Reynolds-Zahl. Er wird über das Druckverhältnis der Abströmung ausgedrückt:

$$\frac{p_A}{\bar{p}_{II}} = \text{Funktion}(M_{II}, Re_{II}) \quad (3.79)$$

Allgemein stellt sich die Frage, an welcher Stelle (I) beginnt die 1D-Domäne und wo hört diese wieder auf (II). Für Spaltkonturen deren Strömungsquerschnitt sich kontinuierlich von einem großen Wert auf einen, im Verhältnis dazu, sehr kleinen Wert ändert oder analog am Austritt kontinuierlich wieder auf einen großen Wert ansteigt, spielt die Modellierung der Zu- und Abströmung keine Rolle. Hier ist nur darauf zu achten, dass die Strömungsgeschwindigkeiten bzw. Mach-Zahlen an den Grenzen der 1D-Domäne vernachlässigbar klein sind. Für eine Spaltgeometrie mit einem plötzlichen Querschnittssprung am Eintritt, wie beispielsweise im Gehäusespalt einer Schraubenspindelvakuumpumpe, ist eine Modellierung notwendig, um die Expansion des Gases in den Eintritt der 1D-Domäne abzubilden. Die Lage des Endes der 1D-Domäne kann anhand eines Ablösekriteriums für die Strömung festgelegt werden (siehe unten). Am Punkt der Ablösung (II<sub>FS</sub>), aber spätestens bei der Position II, wird die Austrittsrandbedingung angewendet.

### 3.4 Stoßbetrachtung

In Überschallströmungen können innerhalb des Spalts senkrechte Verdichtungsstöße auftreten. Für diesen Fall muss die Differentialgleichung der Mach-Zahl (3.60) zunächst bis zu diesem Punkt gelöst werden. Dann erfolgt eine Stoßbetrachtung und anschließend muss die Differentialgleichung bis zum Ende der 1D-Domäne weiter gelöst werden. Die Lage des Verdichtungsstoßes wird dabei iterativ geändert, bis die Austrittsbedingungen am Ende der 1D-Domäne, den Vorgaben entsprechen.

Der Verdichtungsstoß ist eine unstetige Änderung der Zustandsgrößen, sodass die Erhaltungsgleichungen in differentieller Form nicht mehr gültig sind. Es müssen somit die Erhaltungsgleichungen in integraler Form angewendet werden. Aufgrund der geringen räumlichen Ausdehnung in x-Richtung können Wandreibung und Wärmeübergang an der Wand vernachlässigt werden. Die Totaltemperatur bleibt demzufolge über den Stoß konstant. Unter Berücksichtigung der Definition der Mach-Zahl folgt aus den integralen Erhaltungssätzen für Impuls und Masse die Hugoniot-Beziehung für einen senkrechten Stoß:<sup>61</sup>

$$\bar{M}_2^2 = \left( \bar{M}_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \bar{M}_1^2 - 1 \right)^{-1} \quad (3.80)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit nach einem senkrechten Verdichtungsstoß liegt demnach immer im Unterschall. Die Hugoniot-Beziehung wird um die Berücksichtigung des Geschwindigkeitsprofils erweitert. Diese lautet dann in Abhängigkeit des Impulsflussformfaktors  $K_D$ :

$$\frac{\overline{M}_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \overline{M}_1^2\right)}{\left(1 + \gamma K_{D,1} \overline{M}_1^2\right)^2} = \frac{\overline{M}_2^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \overline{M}_2^2\right)}{\left(1 + \gamma K_{D,2} \overline{M}_2^2\right)^2} \quad (3.81)$$

Unbeantwortet bleibt hierbei zunächst, inwiefern in der Nähe des Verdichtungsstoßes eine nennenswerte Profilierung der Strömungsgeschwindigkeit vorliegt. Vor dem Verdichtungsstoß ist die Strömung in der Regel beschleunigt, was, wie später in der Arbeit gezeigt wird, den Wert des Impulsflussformfaktors gegen eins streben lässt.

Zudem können starke Verdichtungsstöße zum Ablösen der Strömung führen.<sup>61</sup> Im Rahmen der Recherche zu dieser Arbeit konnte kein geeignetes Kriterium gefunden werden, anhand dessen über eine Ablösung nach dem Stoß entschieden werden könnte. Zur Vereinfachung wird daher angenommen, dass alle laminaren Strömungen durch einen Stoß ablösen. Turbulente Strömungen sind weniger ablösegefährdet. Aus diesem Grund wird angenommen, dass diese nach dem senkrechten Verdichtungsstoß nicht ablösen. Allerdings folgt aus dem später in der Arbeit eingeführte Ablösekriterium, dass verzögerte Strömungen mit großen Reynolds-Zahlen in divergenten Kanälen mit oder ohne stromaufliegendem Verdichtungsstoß ablösegefährdet sind.

### 3.5 Lösungsverfahren für den Spaltmassenstrom

Die Gleichung (3.60) stellt ein Anfangswertproblem dar, das numerisch gelöst werden kann, beispielsweise mit der Euler-Methode oder einem Runge-Kutta-Verfahren. Zusätzlich muss die Änderung der Gesamttemperatur und der Reynolds-Zahl über die eindimensionale Domäne integriert werden. Insgesamt wird die Strömung durch den gesamten Spalt, einschließlich der Zu- und Abströmung, wie in Abbildung [Abb. 3.1](#) dargestellt, berechnet. Der Algorithmus zur Lösung des Problems wird in [Abb. 3.7](#) veranschaulicht. Um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten und da insbesondere der Spaltmassenstrom von Bedeutung ist, wird die Iteration der Position eines möglicherweise auftretenden Verdichtungsstoßes nicht dargestellt. Gasmische werden ebenfalls nicht berücksichtigt. Entsprechend der Argumentation in Abschnitt [3.2.4](#) werden der Zustandsformfaktor und der Totalenthalpieflussformfaktor zu eins angenommen.

Zunächst legt der Anwender die Geometrie und die dimensionslosen Randbedingungen (vgl. [Tab. 3.1](#) außer  $\alpha$ ) fest, für die die Spaltströmung gelöst werden soll. Der Algorithmus ist für eine feste Diskretisierungsschrittweite  $\Delta x$  konzipiert, die jedoch je nach gewähltem Verfahren auch adaptiv angepasst werden kann. Mittels eines Bisektionsverfahrens wird die Eintritt-Machzahl bestimmt, bei der das Druckverhältnis  $\Pi_{\text{ist}}$  über dem Spalt der vorgegebenen Randbedingung  $\Pi$  entspricht. Es wird angenommen, dass die Spaltströmung am Eintritt in die eindimensionale Domäne unterkritisch ist, d.h. die Eintritt-Mach-Zahl liegt zwischen  $M_{I,\text{min}} = 0$  und  $M_{I,\text{max}} = 1$ . Im Bisektionsverfahren werden die obere und untere Grenze so lange angepasst, bis sie konvergieren und somit eine Lösung gefunden wird. Die Eintritt-Machzahl  $M_I$  für das Anfangswertproblem ist der Mittelwert aus der

oberen und unteren Grenze. Mit dieser Mach-Zahl und der vorgegebenen Knudsen-Zahl  $Kn$  wird das Modell für die Zuströmung aufgerufen, um die Werte der Reynolds-Zahl  $Re_I$  und der Totaltemperatur am Spalteintritt  $\frac{T_{tI}}{T_E}$  sowie das Verhältnis der statischen Drücke  $\frac{\bar{p}_I}{p_E}$  über der Zuströmung zu ermitteln. Diese Werte werden als Anfangswerte für die Integration an der Stelle  $x = 0$  gesetzt. An der jeweiligen Stelle  $x$  werden passende Modelle für die Reibung  $f_{app}$ , den Impulsflussformfaktor  $K_D$  sowie für die Änderung der Totaltemperatur  $dT_t$  und der Reynolds-Zahl  $dRe$  aufgerufen.<sup>ii</sup> Zudem wird überprüft, ob die Strömung ablöst (FS) oder ob die Integration fortgesetzt werden muss. Die Reibung, der Impulsflussformfaktor und die Änderung der Totaltemperatur fließen in den Wert  $G$  ein, der nun berechnet wird. Anschließend erfolgt die Berechnung des Nenners  $\left(1 - \frac{\bar{M}^2}{M_{\text{Krit}}^2}\right)$  der Differentialgleichung (3.60). Das Verhalten der Differentialgleichungen wird undefiniert, wenn der Nenner Null wird. Ein Ausnahmefall ist die Bedingung, bei der  $G$  und der Nenner gleichzeitig Null werden. In diesem Fall kann die Ableitung mit der l'Hôpitalschen Regel<sup>61</sup> berechnet werden. Es wird während der Integration anhand von Vorzeichenwechseln in  $G$  und im Nenner geprüft, ob ein definiertes Verhalten vorliegt. Wechselt das Vorzeichen im Nenner, so muss dies auch beim Zähler  $G$  der Fall sein. Wird nicht die Euler-Methode, sondern beispielsweise ein Verfahren verwendet, bei dem die Werte des letzten Integrationsschritts nicht bekannt sind, so ist es zweckmäßig zu überprüfen, ob der Betrag des Mach-Zahl-Gradienten sehr groß ist und gleichzeitig der Betrag des Nenners nahe Null liegt. Ein stabiles Kriterium, das sich bewährt hat, um undefiniertes Verhalten zu identifizieren, ist:

$$\left| \frac{G}{1 - \frac{\bar{M}^2}{M_{\text{Krit}}^2}} \right| > 10 \quad \wedge \quad \left| 1 - \frac{\bar{M}^2}{M_{\text{Krit}}^2} \right| < 10^{-3}, \quad (3.82)$$

Sollte kein definiertes Verhalten vorliegen, wird die Integration abgebrochen und die Eintritts-Mach-Zahl  $M_I$  nach unten korrigiert. Andernfalls wird die Änderung der Mach-Zahl bestimmt. Der Ort und alle veränderlichen Größen werden um ihr Inkrement erhöht und die Integration am nächsten Ortspunkt fortgesetzt, bis das Ende des Spalts (II) erreicht ist oder die Strömung ablöst (II<sub>FS</sub>). Sobald der Verlauf der Mach-Zahl und der Totaltemperatur bekannt ist, kann das Verhältnis der statischen Drücke  $\frac{\bar{p}_{II}}{\bar{p}_I}$  über der eindimensionalen Domäne mit (3.84) berechnet werden. Anschließend wird mithilfe eines Modells das abströmseitige Verhältnis der statischen Drücke ermittelt. Das Gesamtdruckverhältnis des Spaltes ergibt sich aus der Multiplikation der Verhältnisse der statischen Drücke von Zuströmung, eindimensionaler Domäne und Abströmung:

$$\Pi_{\text{ist}} = \frac{\bar{p}_I}{p_E} \cdot \frac{\bar{p}_{II}}{\bar{p}_I} \cdot \frac{p_A}{\bar{p}_{II}} \quad (3.83)$$

Wenn dieser Wert über dem durch die Randbedingung II geforderten Wert liegt, muss die Eintritts-Mach-Zahl  $M_I$  erhöht werden. Andernfalls wird sie verringert.

Das Druckverhältnis über der eindimensionalen Domäne wird wie folgt berechnet:

$$\frac{\bar{p}_{II}}{\bar{p}_I} = \frac{A_I}{A_{II}} \frac{\bar{M}_I}{\bar{M}_{II}} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_I^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_{II}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{tII}}{T_{tI}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

<sup>ii</sup>Die Reynolds-Zahl ändert sich nur bei einer Änderung der dynamischen Viskosität oder der Kanalbreite und kann daher oft in guter Näherung gegenüber dem Wert der Reynolds-Zahl vernachlässigt werden.

Zur Herleitung dieses Zusammenhangs wird berücksichtigt, dass gemäß der Zustandsgleichung (3.22), der Massenerhaltung (3.26) sowie den Definitionen für die mittlere Mach-Zahl (3.54) und die mittlere Totaltemperatur (3.56) folgende Beziehungen zwischen den Größen am Eintritt (I) und am Ende (II) der eindimensionalen Domäne gelten:<sup>61</sup>

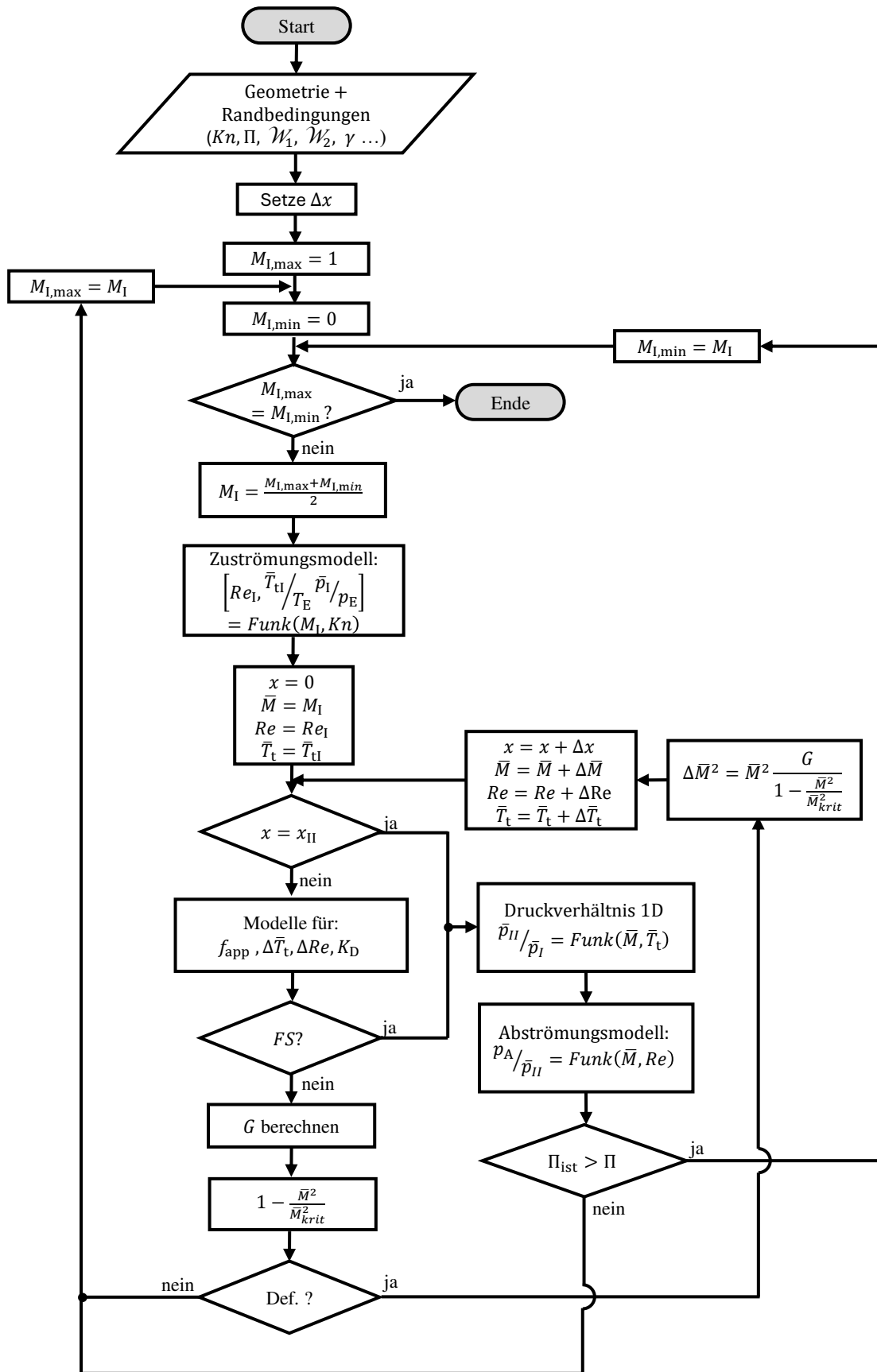
$$\frac{\bar{p}_{\text{II}}}{\bar{p}_{\text{I}}} = \frac{\bar{\varrho}_{\text{II}} \bar{T}_{\text{II}}}{\bar{\varrho}_{\text{I}} \bar{T}_{\text{I}}} \quad (3.85)$$

$$\frac{\bar{\varrho}_{\text{II}}}{\bar{\varrho}_{\text{I}}} = \frac{A_{\text{I}} \bar{c}_{\text{I}}}{A_{\text{II}} \bar{c}_{\text{II}}} \quad (3.86)$$

$$\frac{\bar{c}_{\text{I}}}{\bar{c}_{\text{II}}} = \frac{\bar{M}_{\text{I}}}{\bar{M}_{\text{II}}} \left( \frac{\bar{T}_{\text{I}}}{\bar{T}_{\text{II}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

$$\left( \frac{\bar{T}_{\text{II}}}{\bar{T}_{\text{I}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\bar{T}_{\text{tII}}}{\bar{T}_{\text{tI}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_{\text{I}}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_{\text{II}}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.88)$$

Sobald die Eintritts-Mach-Zahl  $M_{\text{I}}$  konvergiert ist, ergibt sich aus dem Modell für die Zuströmung die Reynolds-Zahl  $Re_{\text{I}}$  am Eintritt der eindimensionalen Domäne. Die Reynolds-Zahl beinhaltet gemäß (3.11) die Information des Massenstroms und kann daher in einen gewünschten Strömungsbeiwert  $\alpha$  umgerechnet werden.



**Abb. 3.7** Algorithmus zur Lösung des eindimensionalen Spaltströmungsmodells ohne Iteration der Position eines möglichen senkrechten Verdichtungsstoßes.

# 4 Spaltströmung mit ausgebildetem Geschwindigkeitsprofil und konstanter Totaltemperatur

In diesem Kapitel liegt der Fokus auf der Modellierung der Spaltströmung unter Berücksichtigung der Dissipation im Spalt, variablen Strömungsquerschnitten und bewegten Wänden. Da der Einfluss eines Wärmeübergangs bereits ausführlich in der Dissertation von Müller<sup>13</sup> behandelt wird und zu bewegten Spaltwänden und variablen Strömungsquerschnitten ausschließlich Messwerte bei Raumtemperatur vorliegen, wird hier zunächst von einer konstanten Totaltemperatur ausgegangen. Einen Ausblick, wie der Wärmeübergang unter Berücksichtigung eines Couette-Anteils modelliert werden kann, um die Modelle nach Müller<sup>13</sup> zu ergänzen, wird gegen Abschnitt 5.1 gegeben.

Als Referenzen zur Verifizierung des präsentierten 1D-Strömungsmodells wird auf die Arbeiten von Huck<sup>23</sup> und Utri<sup>17</sup> zugegriffen. Die Messungen von Huck<sup>23</sup> dienen der Verifizierung des Modells für die Simulation von Spaltverbindungen in Schraubenvakuumpumpen. Die Messungen von Utri<sup>17</sup> werden herangezogen, um zu demonstrieren, dass das Modell ebenfalls auf Spaltverbindungen in Schraubenkompressoren angewendet werden kann. Zusätzlich erfolgt ein Vergleich des Modells mit dem bislang in der Simulationssoftware *Kasim* implementierten Modellierungsansatz.

*Für dieses Kapitel werden folgende Annahmen getroffen:*

1. Es wird von einer konstanten Totaltemperatur ausgegangen. Der Wärmeübergang und etwaige technische Arbeiten infolge bewegter Wände werden vernachlässigt. Demnach reduziert sich die Problemlösung auf die Bestimmung des Spaltmassenstroms.
2. Da nur der Massenstrom gesucht wird, muss die Spaltströmung nur für den subsonischen Fall berechnet werden.  $M \leq 1$
3. Alle eingeführten Formfaktoren, bis auf den Impulsflussformfaktor  $K_D$ , werden, basierend auf Abschnitt 3.2.4, zu eins gesetzt.
4. Das untersuchte Medium ist Luft, die bestehend aus fiktiven Luftteilchen betrachtet wird, sodass die spezifische Gaskonstante unveränderlich ist. Jedes fiktive Luftteilchen hat zwei innere Freiheitsgrade  $f$ , sodass der Adiabatenkoeffizient nach (2.13) mit  $\gamma = 1,4$  gegeben ist.

5. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität (2.76) wird vernachlässigt<sup>i</sup>, sodass die Verdoppelungstemperatur  $T_D$  keinen Einflussparameter mehr darstellt.  $\mu = \mu_E = \text{konst.}$
6. Die Reibung im Spalt wird basierend auf Lösungen einer vollständig ausgebildeten Strömung abgeschätzt.  $f_{\text{app}} = f_{\text{fd}}$ <sup>ii</sup>
7. Das thermische Kriechen und die Reibung an den Stirnflächen werden vernachlässigt.  $\varphi_x = 0$
8. Es wird ein Spalt konstanter unendlicher Breite  $B$  betrachtet, sodass der hydraulische Durchmesser (3.47) der zweifachen Spalthöhe

$$D_h = \lim_{B \rightarrow \infty} = 2 \frac{H B}{H + B} = 2H$$

entspricht, welche über die Lauflänge  $x$  veränderlich ist.

Somit reduziert sich der Satz der dimensionslosen Kennzahlen auf den Strömungsbeiwert  $\alpha$  (3.5), das Druckverhältnis  $\Pi$  (3.2), die dimensionslose Wandgeschwindigkeit  $\mathcal{W}$  (3.4), die Knudsen-Zahl  $Kn$  (3.1) und die dimensionslosen Parameter, die die Spaltgeometrie beschreiben. Die Differentialgleichung der Mach-Zahl (3.60) reduziert sich zu

$$\frac{d\bar{M}^2}{\bar{M}^2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2\right) \left(\gamma\bar{M}^2 f_{\text{fd}} \frac{dx}{2H} - 2\frac{dH}{H}\right)}{1 - (1 + \gamma(K_D - 1))\bar{M}^2} \quad (4.1)$$

und das Druckverhältnis über die 1D-Domäne (3.84) zu

$$\frac{\bar{p}_{\text{II}}}{\bar{p}_{\text{I}}} = \frac{H_{\text{I}}}{H_{\text{II}}} \frac{\bar{M}_{\text{I}}}{\bar{M}_{\text{II}}} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}_{\text{I}}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}_{\text{II}}^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Zur vollständigen Schließung des Problems ist es noch erforderlich, die Dissipation im Spalt und in der Zu- und Abströmung zu modellieren.

#### 4.1 Modellierung der Reibung und der Strömungsprofile im Spalt

Ein geeigneter Modellierungsansatz für den Reibbeiwert  $f_{\text{fd}}$  und den Impulsflussformfaktor  $K_D$  muss sowohl die bewegten Wände, die variablen Strömungsquerschnitte, als auch kompressible Strömungen und Gasverdünnungseffekte berücksichtigen. Der gewählte Ansatz für den Reibbeiwert lautet:

$$f_{\text{fd}} = \frac{Po}{Re} \left( 1 - \frac{C_{W1,x} + C_{W2,x}}{2} \right) \quad (4.3)$$

Wie in Abschnitt 4.1.1 gezeigt wird, entspricht dies der exakten Lösung für den Reibbeiwert einer inkompressiblen, vollständig ausgebildeten Schlupfströmung, bei der die Superposition von Couette- und Poiseuille-Strömung gültig ist. Die Poiseuille-Zahl charakterisiert dabei die Reibung einer voll-

<sup>i</sup>Über die konstante Totaltemperatur und die Annahme subsonischer Strömungen kann für  $M = 1$  die maximal zu erwartende Abnahme der dynamischen Viskosität mit 14% beziffert werden.

<sup>ii</sup>fd steht für Englisch „fully developed“

ständig ausgebildeten Poiseuille-Strömung. Sie ist definiert als

$$Po = f_{fd,P} \cdot Re, \quad (4.4)$$

wobei  $f_{fd,P}$  der Reibbeiwert der vollständig ausgebildeten Poiseuille-Strömung ist. Für laminare, inkompressible Strömungen zwischen zwei planparallelen Wänden ist die Poiseuille-Zahl konstant und beträgt  $Po = 96$ , sie ist keine Funktion der Reynolds-Zahl. In einer Couette-Poiseuille-Strömung erzeugt der Couette-Anteil keinen Druckverlust, und somit wird der Reibbeiwert um den Anteil

$$\frac{Po}{Re} \cdot \frac{C_{W1,x} + C_{W2,x}}{2}$$

reduziert.  $C_W$  beschreibt hierbei gemäß (2.99) die Wandgeschwindigkeit bezogen auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit. Ist die bewegte Wand nicht planar, sondern kann beispielsweise durch einen rotierenden Zylinder beschrieben werden, so wird nur der Anteil der Wandgeschwindigkeit berücksichtigt, der in Hauptströmungsrichtung zeigt. Es gilt:

$$C_{W,x} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{C}_W \quad (4.5)$$

Es wird davon ausgegangen, dass der Superpositionsansatz auch für andere Strömungsformen in hinreichender Näherung angenommen werden kann. Hierzu muss die Modellierung der Poiseuille-Zahl die Gasverdünnung, eine mögliche Strömungsbeschleunigung oder -verzögerung sowie Turbulenz berücksichtigen. Außerdem muss die Modellierung des Impulsflussformfaktors diese Strömungsformen ebenfalls berücksichtigen. In den nachfolgenden Abschnitten wird präsentiert, wie die Poiseuille-Zahl und der Impulsflussformfaktor in Abhängigkeit der Strömungsformen modelliert werden.

Es werden folgende Strömungsformen genauer betrachtet:

- Strömungen mit Geschwindigkeitsschlupf in einem planparallelen Spalt für  $Re < 3000$  und  $\delta > 10$
- Laminare, inkompressible Düsen- und Diffusor-Strömungen für  $Re < 3000$  und  $\delta \rightarrow \infty$
- Laminare, kompressible Strömungen für  $Re < 3000$  und  $\delta \rightarrow \infty$
- Schleichende, verdünnte Strömungen  $Re \rightarrow 0$
- Turbulente Strömungen in einem planparallelen Spalt  $Re > 8000$

Zunächst wird auf die laminare Strömung eingegangen. Die analytische, inkompressible Lösung einer Couette-Poiseuille-Strömung mit Geschwindigkeitsschlupf in einem planparallelen Spalt bildet die Grundlage für den Superpositionsansatz. Anschließend wird die Lösung für laminare Düsen- und Diffusorströmungen genutzt, um die Reibung und den Impulsflussformfaktor in beschleunigten und verzögerten Strömungen abzubilden. Basierend auf diesem Ansatz wird die Reibung in kompressiblen Strömungen durch eine inkompressible Ersatzströmung modelliert. Die Ergebnisse der Ersatzströmung werden mit CFD-Simulationen verglichen. Daraufaufgehend wird der Modellierungsansatz für schleichende, verdünnte Gase vorgestellt. Dann folgt kurz die Beschreibung der

Näherung für turbulente Strömungen. Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse zu einem Modell zusammengefasst, das die Poiseuille-Zahl und den Impulsflussformfaktor für den gesamten Bereich der Reynolds-Zahl und der Gasverdünnung abbildet.

#### 4.1.1 Laminare Couette-Poiseuille-Strömung inklusive des viskosen Geschwindigkeitsschlupfs

Die analytische Lösung des Geschwindigkeitsprofils einer ebenen Couette-Poiseuille-Strömung wurde bereits in Abschnitt 2.2.6 vorgestellt. Für eine zweidimensionale Strömung vereinfacht sich die Definition des Reibbeiwerts nach Darcy (3.43) zu

$$f_{fd} = \frac{4}{\bar{\rho} \bar{c}^2} (\tau_{W1} + \tau_{W2}), \quad (4.6)$$

also zur mittleren Wandschubspannung normiert auf den dynamischen Druck der Strömung. Gemäß der Newton'schen Schubspannungshypothese folgt die Wandschubspannung aus dem Geschwindigkeitsgradient der Strömung direkt an der Wand und der dynamischen Viskosität

$$\tau_{W1} = -2 \cdot \mu \cdot \bar{c} \cdot \frac{1}{H} \cdot \left. \frac{dC(Y)}{dY} \right|_{Y=1} \quad (4.7)$$

$$\tau_{W2} = 2 \cdot \mu \cdot \bar{c} \cdot \frac{1}{H} \cdot \left. \frac{dC(Y)}{dY} \right|_{Y=-1}. \quad (4.8)$$

Durch Ausklammern der dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten folgt der Zusammenhang zwischen dem Reibbeiwert, der Reynolds-Zahl  $Re$  (3.11) und dem Koeffizient  $K_1$  des parabolischen, dimensionslosen Strömungsprofils (2.96):

$$f_{fd} = \frac{16\mu}{\bar{\rho} \cdot \bar{c} \cdot 2H} \left( \left. \frac{dC(Y)}{dY} \right|_{Y=-1} - \left. \frac{dC(Y)}{dY} \right|_{Y=1} \right) = -\frac{64}{Re} K_1 \quad (4.9)$$

Nach dem Einsetzen von  $K_1$  und bei Vernachlässigung des thermischen Kriechens folgt

$$f_{fd} = \frac{Po}{Re} \left( 1 - \frac{C_{W1} + C_{W2}}{2} \right) \quad (4.10)$$

mit der Poiseuille-Zahl

$$Po = 16 \frac{\delta}{\left( \frac{\delta}{6} + \beta_P \right)}. \quad (4.11)$$

Die Poiseuille-Zahl strebt für große Gasverdünnungsparameter gegen den für laminare Strömungen bekannten Wert

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} Po = 96. \quad (4.12)$$

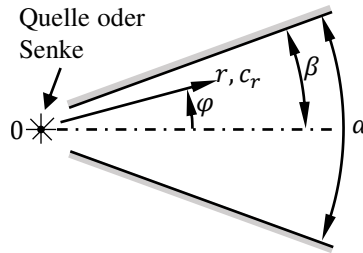
Der Impulsflussformfaktor  $K_D$  wurde für die Schlupfströmung bereits in Abschnitt 3.2.4 diskutiert und wird nach (3.74) berechnet.

#### 4.1.2 Laminare Düsen- und Diffusor-Strömung

Wird eine laminare Strömung verzögert oder beschleunigt, wirkt sich dies auf die Form des Strömungsprofils und somit auf die Reibung und den Impulstransport aus. Für eine laminare, vollstän-

dig ausgebildete, inkompressible Strömung in einem Diffusor oder einer Düse ist die Lösung des Strömungsprofils als *Jeffery-Hamel-Strömung* bekannt. Das Strömungsprofil ist dabei abhängig von dem Öffnungswinkel  $\alpha$  sowie der Reynolds-Zahl. Für kleine Öffnungswinkel  $\alpha \rightarrow 0$  und gleichzeitig endliches Produkt von Reynolds-Zahl und Öffnungswinkel  $\alpha \cdot Re = O(1)$  reduziert sich die Lösung auf die für Schlangkanäle, welche im Folgenden betrachtet wird. Die zugrundeliegende Differentialgleichung ist z.B. in [45] gegeben und kann beispielsweise mit einem Runge-Kutta-Verfahren integriert werden. Außerdem liefert die Lösung gleichzeitig ein Kriterium für die Strömungsablösung in einem Diffusor. Das in [45, 118] beschriebene Vorgehen wird im Weiteren reproduziert, um die Wandreibung sowie den Impulsflussformfaktor der Strömung zu bestimmen.

Wie in **Abb. 4.1** dargestellt, wird eine inkompressible Strömung in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  betrachtet, die durch eine Quelle oder Senke am Ursprung und feste Wände erzeugt wird. Außerdem wird angenommen, dass die Strömung rein radial und vollständig ausgebildet ist, ohne Schlupf an der Wand ( $c(\varphi = \beta) = 0$ ). Da die Strömung symmetrisch ist, wird angenommen, dass diese in der Mitte ein lokales Maximum aufweist ( $c(\varphi = 0) = c_{\max}$ ).



**Abb. 4.1** Geometrie der Jeffery-Hamel-Strömung.

Es werden die folgenden dimensionslosen Größen definiert:

$$\eta = \frac{\varphi}{\beta}, t(\eta) = \frac{c_r}{c_{\max}}, Re_{\text{JH}} = \frac{c_{\max} \varrho r \beta}{\mu}, J = \left( \frac{dt}{d\eta} \Big|_{\eta=1} \right)^2 \quad (4.13)$$

Unter Berücksichtigung der Massen- und Impulserhaltung folgt die Bestimmungsgleichung für das dimensionslose Strömungsprofil

$$\eta(t, Re_{\text{JH}}, \beta, J) = \int_t^1 \left( (1-t) \left( \frac{3}{2} \beta Re_{\text{JH}} (t^2 + t) + 4\beta^2 t + J \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (4.14)$$

wobei die Randbedingung

$$\eta(t=0, Re_{\text{JH}}, \beta, J) = 1 \quad (4.15)$$

die Konstante  $J$  definiert.<sup>46</sup>

Die Definition der Reynolds-Zahl  $Re_{\text{JH}}$  für die Jeffery-Hamel-Strömung unterscheidet sich von der üblichen Definition dieser Arbeit (3.11), weil der Massendurchsatz, bzw. die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, erst nach der Lösung des Problems bekannt ist. Um die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen, muss  $\eta(t)$  in die Form  $t(\eta)$  transformiert werden. Die mittlere Strö-

mungsgeschwindigkeit ist dann gegeben durch

$$\frac{\bar{c}}{c_{\max}} = \int_0^1 t(\eta, \beta, Re_{\text{JH}}) d\eta. \quad (4.16)$$

Die Reynolds-Zahl  $Re_{\text{JH}}$  der Jeffery-Hamel-Strömung kann mit

$$Re = 4 \frac{\bar{c} \rho r \beta}{\mu} = 4 \frac{\bar{c}}{c_{\max}} \cdot Re_{\text{JH}} \quad (4.17)$$

in die Definition der Reynolds-Zahl  $Re$  dieser Arbeit umgerechnet werden.

Wenn das Strömungsprofil bekannt ist, kann der Impulsflussformflussfaktor berechnet werden:

$$K_{\text{D,JH}} = \left( \frac{c_{\max}}{\bar{c}} \right)^2 \int_0^1 t^2(\eta, \beta, Re_{\text{JH}}) d\eta \quad (4.18)$$

Zusätzlich wird die Poiseuille-Zahl  $Po$  der Jeffery-Hamel-Strömung nach (4.4) ermittelt. Hierzu wird zur Ermittlung des Reibbeiwerts  $f_{\text{fd}}$  nach (3.43) zunächst die Wandschubspannung aus dem Geschwindigkeitsgradienten an der Wand berechnet:

$$\tau_{\text{W}} = \mu \frac{c_{\max}}{r\beta} \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{c_{\max}}{r\beta} J^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

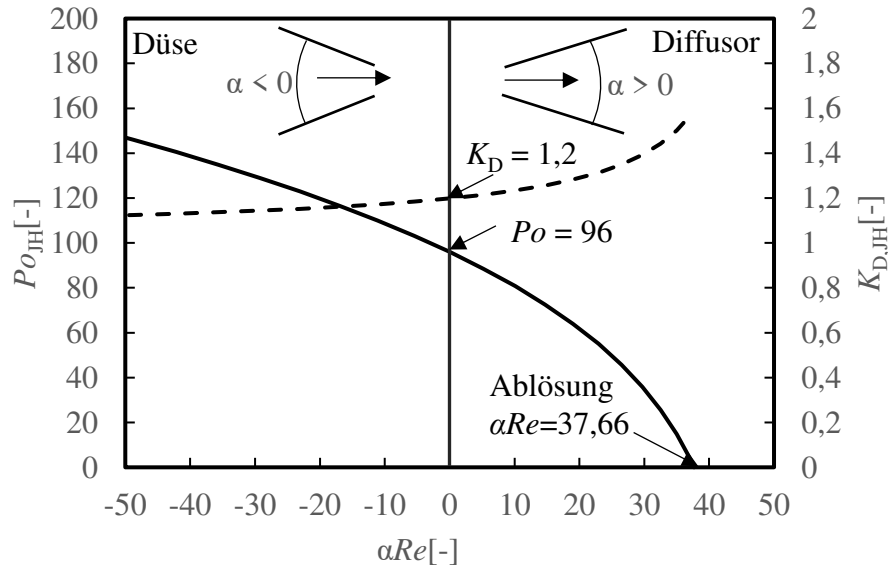
Die Poiseuille-Zahl der Jeffery-Hamel-Strömung lautet damit:

$$Po_{\text{JH}} = 32 \cdot \frac{\bar{c}}{c_{\max}} J^{\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

Die Jeffery-Hamel-Strömung wird für den Fall  $\beta \ll \beta Re_{\text{JH}}$  gelöst. In **Abb. 4.2** und **Tab. A.1** sind die Ergebnisse für den Impulsflussformfaktor  $K_{\text{D}}$  und die Poiseuille-Zahl  $Po$  dargestellt. Ein negativer Öffnungswinkel  $\alpha$  steht für eine beschleunigte Strömung in einer Düse und ein positiver Öffnungswinkel für die verzögerte Strömung in einem Diffusor. Für  $\alpha Re = 0$  sind die Ergebnisse identisch mit der Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Kanal. Die Poiseuille-Zahl  $Po$  nimmt mit zunehmendem Öffnungswinkel ab und wird bei  $\alpha Re = 37,66$ , dem Punkt der Strömungsablösung, null. Der Impulsflussformfaktor  $K_{\text{D}}$  nimmt mit zunehmender Strömungsbeschleunigung ab, nähert sich aber nur langsam einem Wert von eins. Es wird deutlich, wie eine Beschleunigung und eine Verzögerung das Strömungsprofil beeinflussen.

Eine exakte Lösung für die Couette-Poiseuille-Strömung in einem divergenten oder konvergenten Kanal, analog zur Jeffery-Hamel-Lösung, ist nicht bekannt. Stattdessen wird eine Näherung für Strömungen mit beweglicher Wand auf der Grundlage der Jeffery-Hamel-Lösung angegeben. Zur Bestimmung des Reibbeiwerts wird angenommen, dass dieser analog zu der Lösung für planparallele Kanäle (4.3) bestimmt werden kann, aber mit der Poiseuille-Zahl der Jeffery-Hamel-Strömung.

Für den Impulsflussformfaktor eine Couette-Poiseuille-Strömung wird angenommen, dass er in gleicher Weise wie die Jeffery-Hamel-Strömung vom Öffnungswinkel  $\alpha$  abhängt. Die Abhängigkeit vom Öffnungswinkel wird modelliert, indem die Jeffery-Hamel-Lösung auf den Wert für einen Öffnungs-



**Abb. 4.2** Poiseuille-Zahl  $Po$  und Impulsflussformfaktor  $K_D$  basierend auf der Jeffery-Hamel-Lösung für einen Schlankkanal. Poiseuille-Zahl: durchgezogene Linie. Impulsflussfaktor: gestrichelte Linie.

winkel  $\alpha = 0$  bezogen und dann mit dem Wert einer Couette-Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Kanal (3.74) multipliziert wird.

$$K_{D,CP}(\alpha Re) = \frac{K_{D,JH}(\alpha Re)}{K_{D,JH}(\alpha Re = 0)} K_{D,CP}(\alpha = 0) \quad (4.21)$$

#### 4.1.3 Laminare kompressible Strömungen (inkompressible Ersatzströmung)

In einer kompressiblen Strömung kann eine Änderung der Strömungsgeschwindigkeit durch eine Änderung der Dichte verursacht werden. Nach der Literatur hängt die Reibung in einer kompressiblen Strömung von der Mach-Zahl<sup>66</sup> oder von der Strömungsbeschleunigung<sup>13</sup> ab. Beide Arbeiten behandeln jedoch nur die Reibung in einem planparallelen Kanal mit allgemein abnehmender Dichte. Außerdem wird kein Modell zur Anpassung des Impulsflussformfaktors vorgestellt. Im Weiteren wird daher basierend auf der Jeffery-Hamel-Strömung eine Korrektur für die Reibung in laminaren, kompressiblen Strömungen vorgestellt. Dazu wird der Öffnungswinkel der Jeffery-Hamel-Strömung in eine Strömungsbeschleunigung umgerechnet, indem ein enger Kanal mit kleinem Öffnungswinkel angenommen wird, sodass dieser dem Gradienten der Kanalhöhe entspricht.

$$\alpha \approx \frac{dH}{dx}. \quad (4.22)$$

Wird die inkompressible Massenerhaltung betrachtet

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} + \frac{dH}{H} = 0, \quad (4.23)$$

so folgt eine Beziehung zwischen Strömungsbeschleunigung und Öffnungswinkel

$$\alpha = -\frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{dx}. \quad (4.24)$$

Für die Anwendung der Jeffery-Hamel-Lösung für kompressible Strömungen werden (3.58) und (3.59) verwendet, um die lokale Strömungsbeschleunigung aus der Mach-Zahl, dem lokalen Mach-Zahl-Gradienten und der Änderung der Totaltemperatur zu berechnen

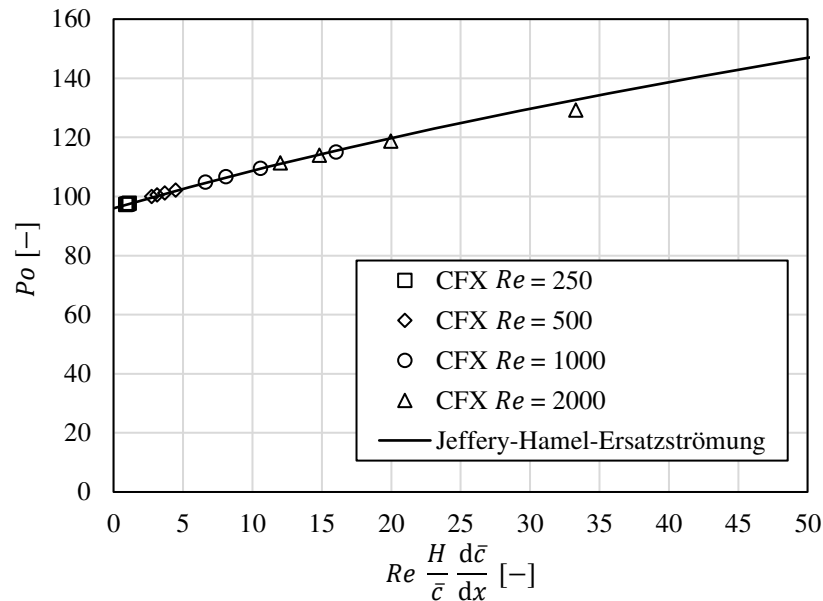
$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{M}^2}{\bar{M}^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2} \right) + \frac{d\bar{T}_t}{\bar{T}_t} \right). \quad (4.25)$$

Diese Strömungsbeschleunigung wird zur Bestimmung eines äquivalenten Öffnungswinkels nach (4.24) verwendet, um anschließend auf die Poiseuille-Zahl und den Impulsflussformfaktor der inkompressiblen, laminaren Jeffery-Hamel-Strömung aus Tab. A.1 zuzugreifen.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass bei diesem Ansatz der Mach-Zahl-Gradient mit (4.1) von sich selbst abhängt und daher über eine Nullstellensuche, z.B. mit einem Bisektionsverfahren, gelöst werden muss. Eine Berechnung der Dissipation mit diesem kompressiblen Ansatz ist daher mit einem wesentlich höheren Rechenaufwand verbunden als mit den inkompressiblen Werten.

Um den Ansatz der inkompressiblen Ersatzströmung einer Plausibilitätsprüfung zu unterziehen, werden CFD-Simulationen einer laminaren, kompressiblen Gasströmung in einem planparallelen Spalt unendlicher Breite durchgeführt. Als Medium wird trockene Luft verwendet. Der simulierte Spalt hat eine Höhe von  $H = 0,1\text{mm}$ . Die Wandgeschwindigkeit wird zu null angenommen, sodass eine x-achsensymmetrische Strömung entsteht. Der simulierte Kanal hat eine Länge von 10 mm. Es wird ein strukturiertes, orthogonales Netz mit zweihundert Zellen in Spalthöhe und tausend Zellen in Spatlänge verwendet. Alle Zellen haben die identische Größe, d.h. es gibt keine Netzverfeinerung an der Wand. Am Eintritt des Kanals wird der Massenstrom in Form eines rechteckigen Strömungsprofils als Randbedingungen vorgegeben. Am Austritt wird eine statische Druckrandbedingung  $p = 3 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  gesetzt. Die Wände sind adiabat. Die Wandschubspannung, die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, der Gradient der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und der Impulsflussformfaktor werden in vier Schnitten ausgewertet ( $x = 6 \text{ mm}$ ,  $x = 7 \text{ mm}$ ,  $x = 8 \text{ mm}$ ,  $x = 9 \text{ mm}$ ). Nach der in [47] angegebenen Näherung, kann für eine Reynolds-Zahl von  $Re = 2000$  die Strömung ab einer Länge von  $x = 4,4 \text{ mm}$  als eingelaufen angenommen werden. Je größer die x-Koordinate, desto größer der erwartete Gradient der Geschwindigkeit (vgl. Fanno-Strömung<sup>61</sup>). Es werden insgesamt vier Reynolds-Zahlen analysiert. Die Berechnungen werden mit Ansys-CFX durchgeführt.

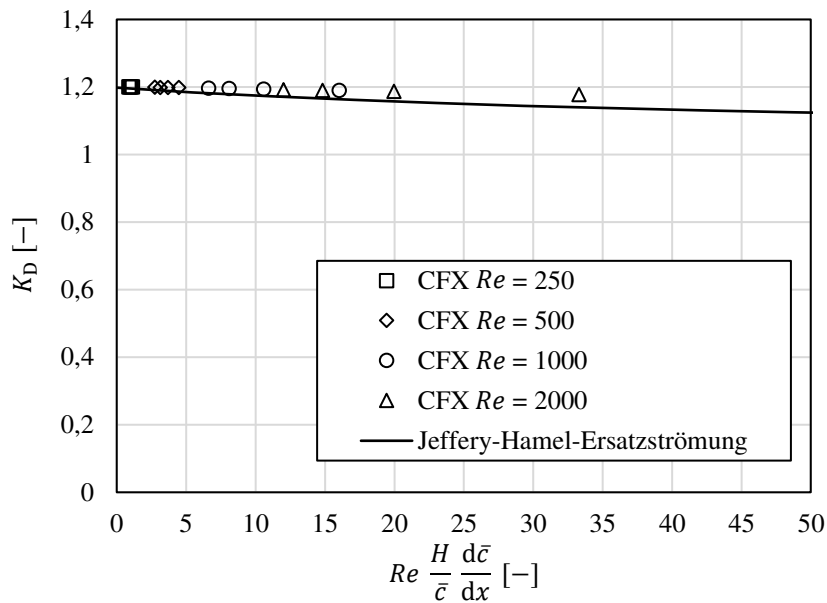
**Abb. 4.3** zeigt die Ergebnisse für die Poiseuille-Zahl. Die Ergebnisse der inkompressiblen Ersatzströmung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den aus CFX ermittelten Werten. Sie spiegeln die vergrößerte Reibung wider, die aus der Beschleunigung resultiert, wenn die Dichte des Gases abnimmt. Erst bei großen Reynolds-Zahlen können für starke Strömungsbeschleunigungen Abweichungen festgestellt werden, bei allerdings weiterhin guter Näherung.



**Abb. 4.3** Lokale Poiseuille-Zahl einer kompressiblen Gasströmung in einem planparallelen Spalt. Vergleich der CFX-Lösung mit der Jeffery-Hamel-Ersatzströmung.

Die Ergebnisse für den Impulsflussformfaktor sind in [Abb. 4.4](#) dargestellt. Auch hier spiegelt die Näherungslösung die Tendenz der CFX-Ergebnisse gut wider. Allerdings sind im Verhältnis zur Poiseuille-Zahl die Abweichungen größer. Die inkompressible Ersatzströmung überschätzt den Einfluss der Beschleunigung auf den Impulsflussformfaktor bei dennoch guter Tendenz.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass basierend auf der Jeffery-Hamel-Strömung eine gute Näherung für die Reibung in einer laminaren, kompressiblen Strömung gefunden werden konnte. Der Einfluss einer bewegten Wand wurde nicht untersucht, da ein Couette-Anteil an der Strömung den Druckverlust reduziert hätte und somit die Strömungsbeschleunigung geringer ausgefallen wäre. Weiterhin wird gefolgert, dass die Berücksichtigung der Wandbewegung in der Modellierung der Poiseuille-Zahl keinen starken Mehrwert für die Reibungsberechnung bringt. Dies liegt daran, dass in Strömungen mit einem nennenswerten Couette-Anteil die Reibung deutlich reduziert ist. Daher ist die genaue Modellierung der Poiseuille-Zahl weniger entscheidend für die Strömung. Es wird somit auch für beschleunigte Strömungen davon ausgegangen, dass die Gleichung für die laminare Reibung (4.3) mit einer von der Wandbewegung unabhängigen Poiseuille-Zahl den Reibungskoeffizienten hinreichend genau abbildet. Die Näherung des Impulsflussformfaktors nach (4.21) für die durch Reibung verursachte Beschleunigung in kompressiblen Strömungen wird als ausreichend angesehen, insbesondere da der Einfluss der Strömungsbeschleunigung auf den Impulsflussformfaktor noch schwächer ist als auf die Poiseuille-Zahl.



**Abb. 4.4** Lokaler Impulsflussformfaktor einer kompressiblen Gasströmung in einem planparallelen Spalt. Vergleich der CFX-Lösung mit der Jeffery-Hamel-Ersatzströmung.

#### 4.1.4 Schleichende, verdünnte Strömungen

Zur Bestimmung der Poiseuille-Zahl wird in verdünnten Strömungen auf bekannte Lösungen für schleichende Kanalströmung zurückgegriffen, in der Reibungseinflüsse dominieren und der Einfluss der stationären Trägheit vernachlässigt werden kann. Mit Bezug auf die Referenzen [79, 82] kann der Massenstrom durch den Kanal über die Superposition von einer Poiseuille- und einer Couette-Strömung sowie vom thermischen Kriechen bestimmt werden.

$$\dot{m} = \dot{m}_P + \dot{m}_C + \dot{m}_T \quad (4.26)$$

Der Ansatz ist gültig unter der Annahme, dass der lokale dimensionslose Druckgradient

$$\xi_P = \frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{p}}{dx} \ll 1 \quad (4.27)$$

und der dimensionslose Temperaturgradient

$$\xi_T = \frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{T}}{dx} \ll 1 \quad (4.28)$$

in der Strömung sehr klein sind, sodass ein linearer Zusammenhang zwischen Gradienten und Massenstrom angenommen werden kann. Die Couette-Strömung ist linear abhängig von dem Anteil der mittleren dimensionslosen Wandgeschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung

$$\xi_C = 2 \frac{c_{W1,x} + c_{W2,x}}{\hat{c}} \quad (4.29)$$

Damit kann die Superposition des Massenstroms (4.26) in folgende Form überführt werden:

$$\dot{m} = \frac{A\bar{p}}{\hat{c}} (\mathcal{G}_C \xi_C - \mathcal{G}_P \xi_P + \mathcal{G}_T \xi_T) \quad (4.30)$$

Die Proportionalitätsfaktoren  $\mathcal{G}$  werden als reduzierte Flussraten bezeichnet. Wird die Gleichung nach dem Druckabfall umgestellt

$$d\bar{p} = - \underbrace{\frac{4 \left(\frac{D_h}{H}\right)^2 \delta}{\mathcal{G}_p Re} (1 - \mathcal{G}_C (C_{W1,x} + C_{W2,x}))}_{f_{fd}} \frac{\bar{\rho} c^2}{2} \frac{dx}{D_h} + \bar{p} \underbrace{\frac{\mathcal{G}_T d\bar{T}}{\mathcal{G}_p \bar{T}}}_{\varphi_x} \quad (4.31)$$

und anschließend mit der Impulserhaltung (3.48) für den Fall einer schleichenden Strömung ( $\rho cdc = 0$ ) verglichen, können der Reibbeiwert  $f_{fd}$  und die dimensionslose thermische Normalspannung  $\varphi_x$  bestimmt werden.<sup>iii</sup> Das Vorgehen ist analog zu dem von Müller<sup>13</sup>, nur dass in diesem Ansatz die Couette-Strömung und das thermische Kriechen berücksichtigt werden. Für einen Spalt unendlicher Breite gilt  $\mathcal{G}_C = 0,5$  und  $D_h = 2H$ , sodass für den Reibbeiwert erneut (4.3) gilt, allerdings mit der Poiseuille-Zahl für schleichende, verdünnte Strömungen:

$$Po_{Re \rightarrow 0} = 16 \frac{\delta}{\mathcal{G}_p}, Re \rightarrow 0 \quad (4.32)$$

Der Wert für  $\mathcal{G}_P$  folgt für eine Schlupfströmung direkt aus der analytischen Lösung der Couette-Poiseuille-Strömung (4.11):

$$\mathcal{G}_P = \frac{\delta}{6} + \beta_P \quad (4.33)$$

Für den Übergangsbereich bis in den molekularen Strömungsbereich wird auf deterministische Lösungen zurückgegriffen, die mit der Methode der diskreten Geschwindigkeiten ermittelt werden. Details zu dieser Methode sowie Wertetabellen für  $\mathcal{G}_P$  und  $\mathcal{G}_T$  sind in [107] gegeben.

Der Impulsflussformfaktor  $K_D$  spielt für schleichende Strömungen keine Rolle, da er bei Trägheitskräften, die gegenüber den Reibkräften vernachlässigbar sind, keinen Einfluss auf die Strömung ausübt. Bei vollständig molekularer Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil rechteckig und der Impulsflussformfaktor beträgt eins. Für einen kontinuierlichen Übergang von Kontinuumströmungen zu molekularen Strömungen wird der Impulsflussformfaktor vereinfachend für den gesamten Bereich der Gasverdünnung und für Reynolds-Zahlen  $Re < 3000$  mit der für Schlupfströmungen geltenden Beziehung (3.74) berechnet. Dieser strebt ebenfalls für kleine Gasverdünnungsparameter gegen eins.

<sup>iii</sup>Basierend auf den Ergebnissen von Huck<sup>23</sup> ist thermischen Kriechen für eine Vakuumpumpe nicht relevant und wird daher im Weiteren vernachlässigt.

#### 4.1.5 Turbulente Strömungen

Um die Reibung in einer turbulenten Strömung mit Couette-Anteil zu berücksichtigen, wird vereinfachend angenommen, dass das Superpositionsprinzip (4.3) weiterhin näherungsweise Gültigkeit besitzt. Für die Bestimmung der Poiseuille-Zahl wird der empirische Ansatz nach Blasius<sup>119</sup> verwendet

$$Po = 0,316Re^{0,75}, Re > 8000. \quad (4.34)$$

Der Einfluss einer Strömungsbeschleunigung oder -verzögerung auf den Reibungskoeffizienten einer turbulenten Strömung ist nach Shapiro<sup>61</sup> vernachlässigbar.

Der Impulsflussformfaktor einer turbulenten Strömung liegt bekanntlich nahe bei eins, da das Strömungsprofil nahezu rechteckig ist. Müller<sup>13</sup> ermittelte den Wert für eine Poiseuille-Strömung zu

$$K_D = 1,07 \quad (4.35)$$

Es wird angenommen, dass dieser Wert auch bei einer Couette-Poiseuille-Strömung gültig ist.

#### 4.1.6 Zusammenführung der Modellierungsansätze

Die vorangegangenen Abschnitte zeigen, dass der Reibbeiwert  $f_{fd}$  für eingelaufene Strömungen mit Reynolds-Zahlen  $Re < 3000$  mit der Gleichung (4.3) beschrieben werden kann. Dabei ist die Poiseuille-Zahl  $Po_{Re \rightarrow 0}$  für den gesamten Bereich der Gasverdünnung durch die Gleichung (4.32) gegeben, wenn die stationäre Trägheit keinen Einfluss auf die Strömung hat. Dies trifft zu für inkompressible, vollständig ausgebildete Strömungen zwischen zwei parallelen Wänden oder für schleichende Strömungen. In diesen Fällen ist die Poiseuille-Zahl unabhängig von der Reynolds-Zahl und ausschließlich eine Funktion des Gasverdünnungsparameters  $\delta$ . Die Poiseuille-Zahl nimmt für Kontinuumsströmung den Wert  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} Po_{Re \rightarrow 0} = 96$  an.

Für größere Reynolds-Zahlen beeinflussen Beschleunigung oder Verzögerung der Strömung das Strömungsprofil und somit die Poiseuille-Zahl sowie den Impulsflussformfaktor. Es konnte gezeigt werden, dass es für Schlankkanäle dabei unerheblich ist, ob die Beschleunigung oder Verzögerung das Resultat einer Veränderung des Strömungsquerschnitts oder einer Veränderung der Gasdichte ist. Ein Modell, das auf der Jeffery-Hamel-Strömung basiert, bildet diesen Zusammenhang hervorragend ab. Große Reynolds-Zahlen bei gleichzeitig niedrigen Gasverdünnungsparametern schließen sich aus, sodass die Poiseuille-Zahl und der Impulsflussformfaktor der Jeffery-Hamel-Strömung ausschließlich von dem Produkt der Reynolds-Zahl  $Re$  und der dimensionslosen Strömungsbeschleunigung  $\frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{dx}$  abhängen, aber keine Funktion des Gasverdünnungsparameters  $\delta$  sind. Für kleine Reynolds-Zahlen strebt die Poiseuille-Zahl der Jeffery-Hamel-Strömung ebenfalls gegen  $\lim_{Re \rightarrow 0} Po_{JH} = 96$ , also den Wert einer schleichenden Kontinuumsströmung.

Um sowohl die Trägheit als auch die Gasverdünnung in der Poiseuille-Zahl zu berücksichtigen, werden beide Modellansätze kombiniert. Die kombinierte Poiseuille-Zahl hat die Form:

$$Po \left( \delta, Re \frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{dx} \right) = \frac{Po_{Re \rightarrow 0}(\delta)}{96} \cdot Po_{JH} \left( Re \frac{H}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{dx} \right), \text{ für } Re < 3000 \quad (4.36)$$

Für große Gasverdünnungsparameter und damit in der Regel auch große Reynolds-Zahlen nimmt sie den Wert der Jeffery-Hamel-Strömung an. Für kleine Reynolds-Zahlen hat diese den Wert einer schleichenden Strömung und berücksichtigt die Gasverdünnung.

Der Impulsflussformfaktor  $K_D$  wird für Reynolds-Zahlen  $Re < 3000$  nach Gleichung (4.21) berechnet. Allerdings wird anstelle des Öffnungswinkels  $\alpha$  die dimensionslose Strömungsbeschleunigung  $\frac{H}{c} \frac{d\bar{c}}{dx}$  eingesetzt.

Für voll turbulente Strömungen ( $Re > 8000$ ) wird die Modellierung des Reibbeiwerts und des Impulsflussformfaktors gemäß Abschnitt 4.1.5 durchgeführt. Hierbei wird vereinfachend weiterhin der Superpositionsansatz von Couette- und Poiseuille-Strömung nach Gleichung (4.3) angenommen. Im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung werden der Reibbeiwert und der Impulsflussformfaktor linear interpoliert.

## 4.2 Modellierung der Zu- und Abströmung

Der Ansatz zur Modellierung der Zuströmung geht von einer konstanten Totaltemperatur aus. Diese entspricht der Ruhetemperatur  $T_E$  weit vor dem Spalt.

$$\bar{T}_t = T_E = \text{konst.} \quad (4.37)$$

Die statische Temperatur am Eintritt der 1D-Domäne folgt anschließend aus der Definition der Totaltemperatur:

$$\bar{T}_I = \bar{T}_t \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_I^2\right)^{-1} \quad (4.38)$$

Aus dem Temperaturverhältnis folgt das eintrittsseitige Druckverhältnis über den Ansatz einer polytropen Zustandsänderung:<sup>iv</sup>

$$\frac{\bar{p}_I}{p_E} = \left(\frac{\bar{T}_I}{T_E}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (4.39)$$

Nach den Untersuchungen von Müller<sup>13</sup> ist das Verhältnis des Polytropenexponenten  $n$  zum Adiabatenkoeffizienten  $\gamma$  unabhängig von der Reynolds-Zahl gegeben mit

$$\frac{n}{\gamma} = 0,88. \quad (4.40)$$

Als austrittseitiges Druckverhältnis wird

$$\frac{p_A}{\bar{p}_{II}} = 1 \quad (4.41)$$

angenommen, also eine vollständige Dissipation der kinetischen Energie und keine weiteren Verluste des statischen Drucks.

<sup>iv</sup>Dieses Modell weicht von dem nach Müller<sup>13</sup> ab, da es die Totaltemperatur konstant hält und den eintrittsseitigen Druckverlust nicht in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl abbildet. Da in diesem Kapitel die Totaltemperatur konstant gehalten wird, ist die gewählte Form der Modellierung allerdings konsistenter. Der Ansatz berücksichtigt zudem keine Gasverdünnung, was sich wiederum auf die Modellierung kurzer Spalte auswirken kann.

Als dimensionslose Kennzahl des Eintrittsdrucks wird die Knudsen-Zahl (3.1) verwendet. Die Reynolds-Zahl der Spaltströmung ist für das polytrope Modell der Zuströmung in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl gegeben mit:

$$Re = (2\kappa\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{H_I}{H_{\min}} \frac{\overline{M}_I}{Kn} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \overline{M}_I^2\right)^{\frac{n+1}{2-2n}} \quad (4.42)$$

Diese dient als Grundlage für die beschriebenen Reibbeiwertmodelle. Da eine Änderung der Viskosität hier vernachlässigt wird, ist die Reynolds-Zahl über den Spalt konstant. Sobald das Modell der Spaltströmung gemäß Abschnitt 3.5 gelöst ist und die Eintritts-Mach-Zahl und somit die Reynolds-Zahl der Strömung feststehen, kann der Strömungsbeiwert wie folgt bestimmt werden:

$$\alpha_{\text{eff}} = Kn \cdot Re \quad (4.43)$$

### 4.3 Ergebnisse für Spalte in Vakuumpumpen

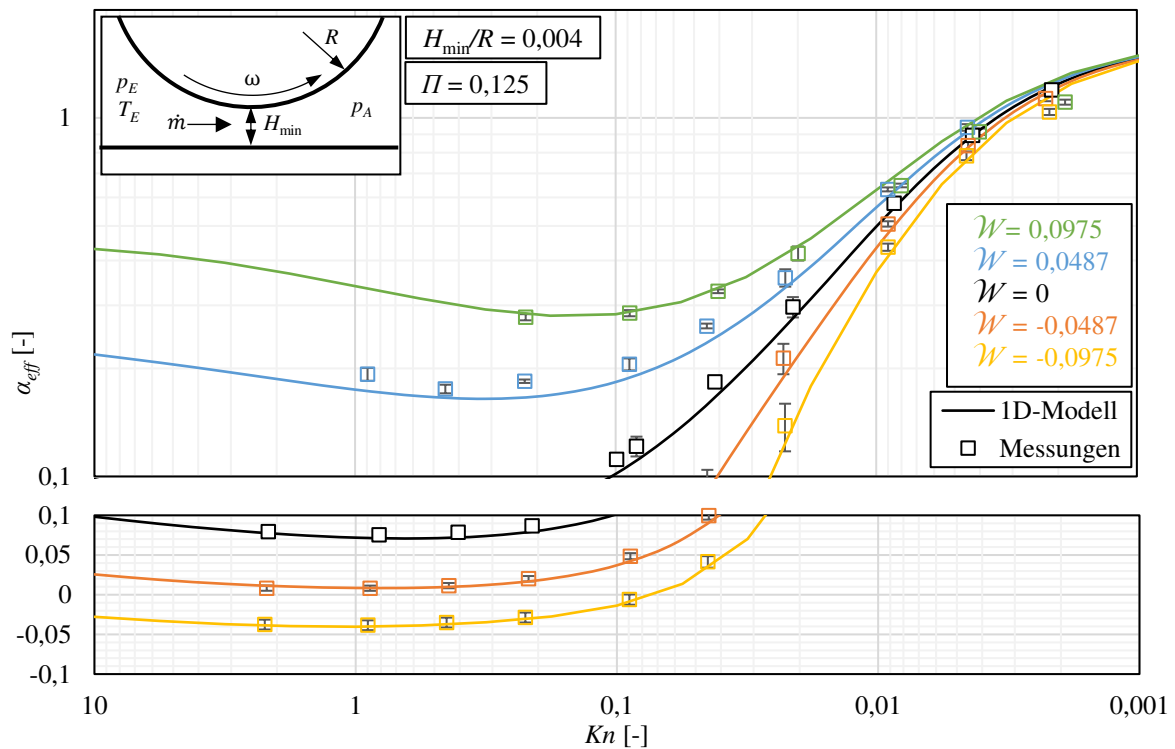
Um die vorgestellte Theorie für Spalte in Vakuumpumpen zu verifizieren, wird auf Messungen von Huck<sup>23</sup> zugegriffen. Dieser stellt Messergebnisse für einen planparallelen Spalt und für einen Spalt mit einseitiger Radiuskontur vor. Die Radiuskontur wird mit einem rotierenden Zylinder realisiert, sodass es möglich ist, Strömungsmodelle zu verifizieren, die einen Couette-Anteil berücksichtigen. Ergänzt werden die Messwerte von Huck um Ergebnisse von Wenderott<sup>21</sup>, der neben verschiedener anderer Spaltkonturen, ebenfalls einen planparallelen Spalt untersucht. Die Ergebnisse für die Vakuumpalte werden in Form des dimensionslosen Strömungsbeiwerts  $\alpha_{\text{eff}}$  dargestellt, der auf den Effusionsmassenstrom bezogen ist. Nach der Verifizierung des Spaltmodells wird überprüft, welche Ergebnisse sich mit diesem im Rahmen einer Kammermodellsimulation erzielen lassen.

#### 4.3.1 Spalt mit Radiuskontur

Zunächst wird der Spalt mit Radiuskontur untersucht. Huck<sup>23</sup> präsentiert ein Experiment mit einem Spalt, der durch einen rotierenden Zylinder mit einem Radius von  $R = 75 \text{ mm}$  auf der einen Seite und einer planaren Kontur auf der anderen Seite gebildet wird. Die Spalthöhe zwischen der planaren Kontur und der Welle ist auf  $H_{\min} = 0,3 \text{ mm}$  eingestellt. Der Eintritts- und Austrittsdruck des Spalts sowie die Umfangsgeschwindigkeit der Welle werden variiert, um den Einfluss auf den Spaltmassenstrom zu bestimmen. Für Details des Versuchsaufbaus und der Messmethoden sowie die Diskussion der Messergebnisse siehe [23]. Der Vergleich von Simulation und Experiment erfolgt für eine Variation der dimensionslosen Wandgeschwindigkeit  $\mathcal{W}$  bei einem konstanten Druckverhältnis  $\Pi = p_A/p_E$ . Im zweiten Schritt wird das Druckverhältnis  $\Pi$  bei einer konstanten Wandgeschwindigkeit variiert.

**Abb. 4.5** zeigt die Ergebnisse für den Strömungsbeiwert  $\alpha_{\text{eff}}$  aufgetragen über der Knudsen-Zahl  $Kn$  für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten. Die dimensionslose Wandgeschwindigkeit  $\mathcal{W}$  wird im Bereich von  $-0,0975$  bis  $0,0975$  für ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,125$  variiert. Die Knudsen-Zahlen, und somit die mittleren freien Weglängen, nehmen nach rechts ab, d.h. die Gasdichten steigen. Die Markierungen mit Fehlerbalken stellen die Messungen dar. Die Simulationsergebnisse sind als Linien aufgetragen. Für den stehenden Zylinder ( $\mathcal{W} = 0$ ) zeigen sowohl

Messung als auch Simulation die typischen Merkmale des Strömungsbeiwerts als Funktion der Knudsen-Zahl. Im Kontinuumsbereich ( $Kn < 0,01$ ) konvergiert die Strömungsgeschwindigkeit gegen einen konstanten Wert, was durch eine Verblockung der Strömung erklärt wird. Mit steigender Knudsen-Zahl nimmt die Reibbeiwert zunächst zu und damit der Strömungsbeiwert ab. Dieses Verhalten ist durch die ebenfalls fallende Reynolds-Zahlen zu erklären. Im Bereich zwischen  $Kn = 0,1$  und  $Kn = 1$  erreicht der Strömungsbeiwert das Knudsen-Minimum. Mit größeren Knudsen-Zahlen nimmt der Strömungsbeiwert wieder zu, da Gasverdünnungseffekte die Reibung verringern. Eine



**Abb. 4.5** Strömungsbeiwert für einen Spalts mit Radiuskontur aufgetragen über der Knudsen-Zahl  $Kn$ . Variation der dimensionslosen Wandgeschwindigkeit  $\mathcal{W}$  für ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,125$  und ein Verhältnis von Spalthöhe zu Radius von  $H_{min}/R = 4 \cdot 10^{-3}$ . Gegenüberstellung von Messergebnissen<sup>23</sup> mit dem 1D-Modell dieser Arbeit.

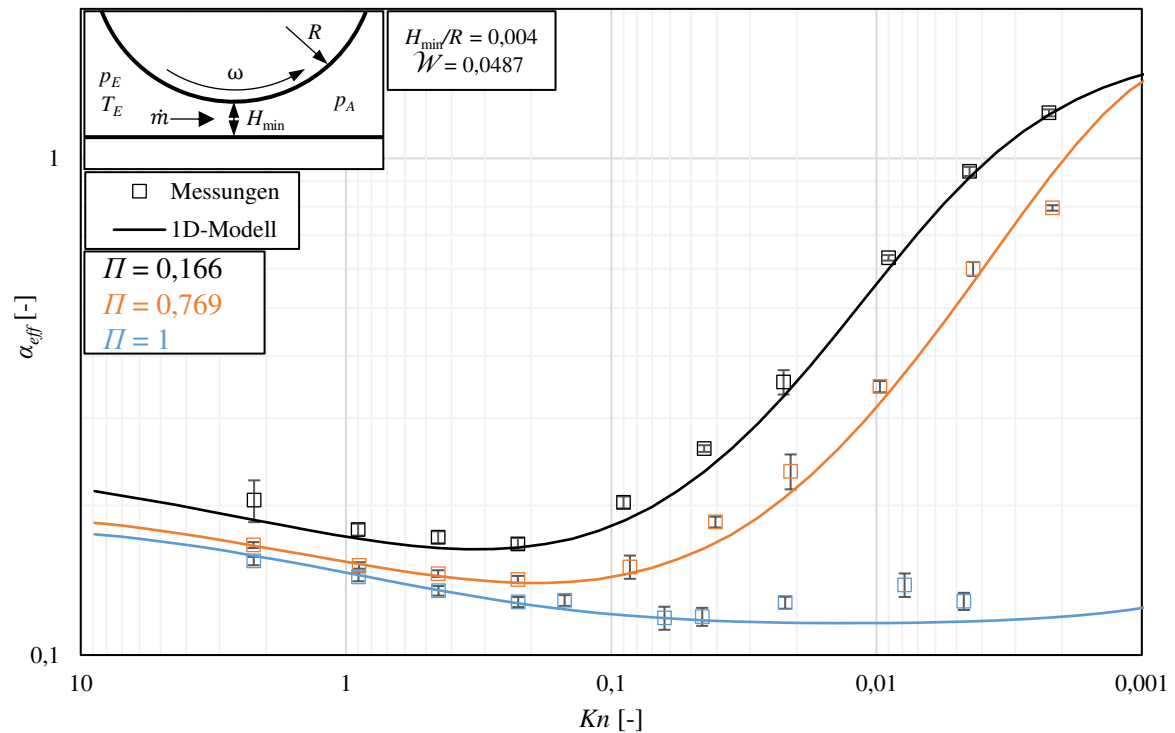
positive Wandgeschwindigkeit, d.h. eine Bewegung von (E) nach (A), erhöht den Strömungsbeiwert insbesondere im Übergangs- und Molekularströmungsbereich ( $Kn > 0,1$ ). Der Effekt nimmt mit sinkender Knudsen-Zahl ab. Gleichzeitig verschiebt sich das Knudsen-Minimum nach rechts zu niedrigeren Knudsen-Zahlen hin. Eine negative Wandgeschwindigkeit vermindert den Strömungsbeiwert. Auch dieser Effekt ist bei einer verdünnten Gasströmung stärker ausgeprägt.

Die experimentellen und simulierten Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung über den gesamten Bereich der Knudsen-Zahl. Geringe Abweichungen gibt es im Bereich der Übergangsströmung ( $0,1 \leq Kn < 10$ ) für  $\mathcal{W} = 0$  und  $\mathcal{W} = 0,0487$ . Die Abweichungen in diesem Strömungsbereich ähneln denen, die Huck<sup>23</sup> im Vergleich zu seiner Simulation auf Basis der Stokes-Gleichung beobachtet hat. Wie bereits erwähnt, konvergieren sowohl Simulation als auch Experiment für die Kontinuumsströmung zu einem konstanten Wert. Im Gegensatz zum Stokes-Gleichungsansatz in

[23] berücksichtigt der Modellansatz dieser Arbeit Trägheitskräfte, die für kompressible Medien eine Verblockung der Strömung bewirken können. Eine kleine Abweichung besteht dennoch, da nicht alle Verlustmechanismen im Modell berücksichtigt sind. So wird die Strömung als vollständig eingelaufen angenommen. Außerdem fehlen im Modell die Druckverluste zwischen den Druckmessstellen und dem Ein- und Austritt in die Spaltkontur.

Als nächstes wird eine Variation des Druckverhältnisses  $\Pi$  untersucht. Das Druckverhältnis wird in einem Bereich von  $\Pi = 0,166$  bis  $\Pi = 1$  für eine konstante dimensionslose Umfangsgeschwindigkeit  $\mathcal{W} = 0,0487$  variiert. **Abb. 4.6** zeigt die experimentellen Ergebnisse von Huck<sup>23</sup> und die des Simulationsansatzes dieser Arbeit. Auch hier sind die Experimente als Markierungen zusammen mit Fehlerbalken dargestellt. Die Simulationen des Modells dieser Arbeit sind als Linien dargestellt. Für das niedrigste Druckverhältnis  $\Pi = 0,166$  werden ähnliche Ergebnisse wie bei der Variation der Wandgeschwindigkeit beobachtet. Mit steigendem Druckverhältnis nimmt der Strömungsbeiwert ab. Bei der Simulation für  $\Pi = 0,769$  ist zu beobachten, dass bei einer Knudsen-Zahl von  $Kn = 0,001$  die Ergebnisse einen ähnlichen Wert erreichen, wie bei der Simulation für  $\Pi = 0,166$ . Dies lässt sich dadurch erklären, dass beide Strömungen bei dieser Knudsen-Zahl verblocken. Die konvergente und divergente Form des Spalts führt zu einem hohen kritischen Druckverhältnis. Bei identischem Eingangs- und Ausgangsdruck ( $\Pi = 1$ ) ist der Strömungsbeiwert am geringsten und wird nur geringfügig durch die Knudsen-Zahl beeinflusst. Die Simulationsergebnisse zeigen ein Minimum bei  $Kn \approx 0,015$ . Ab diesem Punkt steigt der Strömungsbeiwert mit fallender Knudsen-Zahl erneut geringfügig an. Mit steigender Knudsen-Zahl steigt der Durchflussbeiwert deutlicher an.

Auch hier zeigen die Simulationsergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den Messungen für den gesamten Bereich der Knudsen-Zahl. Auch für den Kontinuumsbereich ist eine gute Genauigkeit des vorgestellten theoretischen Ansatzes gegeben. Größere Abweichungen im Schlupf- und Kontinuumsbereich ( $Kn < 0,1$ ) treten für  $\Pi = 1$  auf. Diese Abweichungen werden bereits von Huck<sup>23</sup> beobachtet, der diese darauf zurückführt, dass ein stationärer Zustand der Strömung unter diesen Bedingungen im Experiment schwierig einzustellen ist.



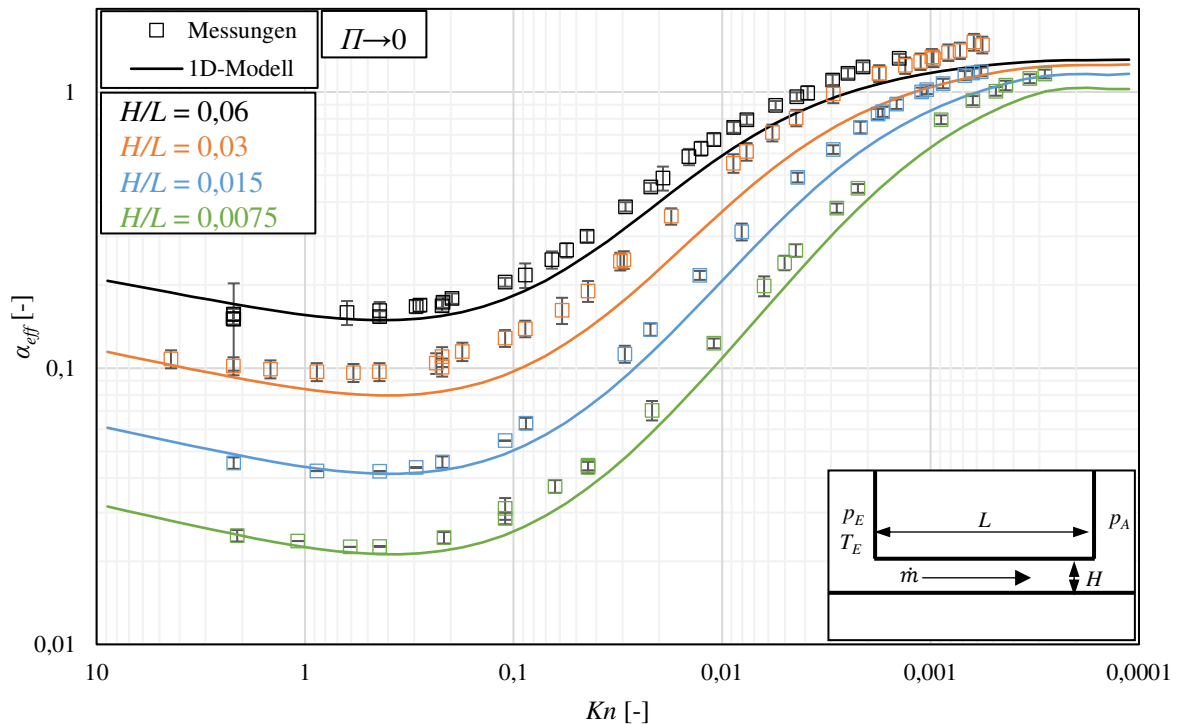
**Abb. 4.6** Strömungsbeiwert für einen Spalts mit Radiuskontur aufgetragen über der Knudsen-Zahl  $Kn$ . Variation des Druckverhältnisses  $\Pi$  für eine dimensionslose Wandgeschwindigkeit von  $\mathcal{W} = 0,0487$  und ein Verhältnis von Spalthöhe zu Radius von  $H_{\min}/R = 4 \cdot 10^{-3}$ . Gegenüberstellung von Messergebnissen<sup>23</sup> mit dem 1D-Modell dieser Arbeit.

### 4.3.2 Spalt mit planarer Kontur

In diesem Abschnitt wird überprüft, wie gut das präsentierte Modell den Strömungsbeiwert für planparallele Spalte abbilden kann. Es wird erneut auf Messwerte von Huck<sup>23</sup> zurückgegriffen. Da es für planparallele Spalte deutlich schwieriger ist, experimentelle Werte für bewegte Spaltkonturen zu ermitteln, liegen ausschließlich Werte für statische Konturen vor.

**Abb. 4.7** zeigt die Gegenüberstellung zwischen experimentell und simulativ ermittelten Strömungsbeiwerten für eine Variation des Verhältnisses von Spalthöhe zu Spaltlänge  $H/L$ , aufgetragen über der Knudsen-Zahl. Das 1D-Modell nimmt einen Spalt unendlicher Breite an, für alle Messwerte liegt das Verhältnis von Spaltbreite zu Spalthöhe bei  $B/H > 333$ . Für das Modell wird ein sehr kleines Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow 0$  angenommen. Im Experiment lagen die Druckverhältnisse bei  $\Pi < 0,05$ .

Experimente und Simulation zeigen, dass der Strömungsbeiwert stark vom Verhältnis  $H/L$  abhängt. Je geringer das Verhältnis ist, desto stärker dominiert die Reibung und desto geringer ist der Strömungsbeiwert. Das Modell spiegelt gut den qualitativen Verlauf über alle Bereiche der Knudsen-Zahl wider, allerdings im Vergleich zum Spalt mit Radiuskontur mit größeren Abweichungen zu den Messwerten. Eine Abweichung der Messwerte zum Modell wird bereits von Huck<sup>23</sup> festgestellt. Er argumentiert, dass die Montage der Spaltkontur eines planparallelen Spalts eine besondere Herausforderung darstellt und dass eine leichte Verkippung der Spaltkontur zu einer Düsen-

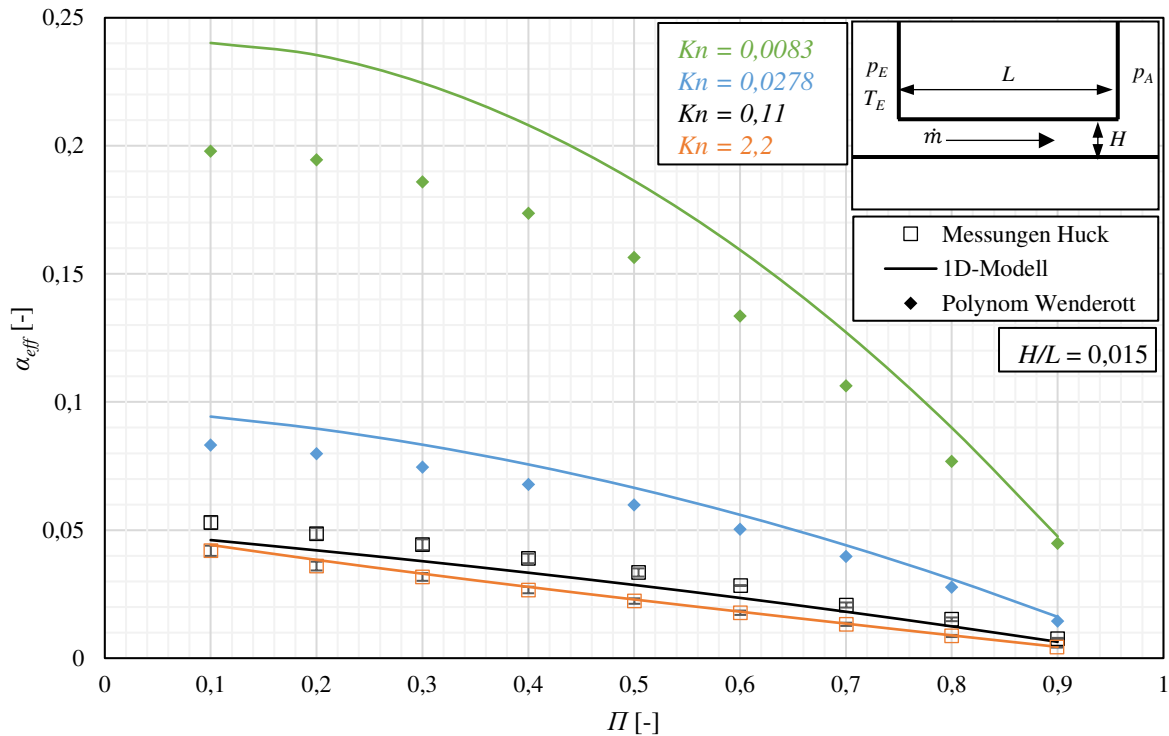


**Abb. 4.7** Strömungsbeiwert für einen planparallelen Spalt aufgetragen über der Knudsen-Zahl  $Kn$ . Einfluss des Verhältnisses von Spalthöhe zu Spalllänge  $H/L$ . Vergleich der Messwerte von Huck<sup>23</sup> mit dem 1D-Modell dieser Arbeit.

oder Diffusorkontur führt. Gasverdünnungseffekte werden durch das Modell dieser Arbeit gut wiedergegeben. Die Abbildungsgüte entspricht dem von Huck präsentierten Modell. Mit steigender Knudsen-Zahl fällt die Reynolds-Zahl der Spaltströmung. Der Reibbeiwert nimmt entsprechend zu und der Strömungsbeiwert sinkt. Parallel reduzieren Gasverdünnungseffekte die Reibung, sodass sich zwischen  $Kn = 0,1$  und  $Kn = 1$  das Knudsen-Minimum einstellt. Bei großen Knudsen-Zahlen ist der Einfluss der Gasverdünnung so ausgeprägt, dass die Reibung in der Strömung wieder sinkt. Die obere Grenze ist die Reibung in der freien molekularen Strömung (hier nicht dargestellt). Im Vergleich zum von Huck<sup>23</sup> präsentierten Modell, welches ausschließlich schleichende Strömungen berücksichtigt, kann der Modellansatz dieser Arbeit die Verblockung der Strömung abbilden, sodass die berechneten Strömungsbeiwerte analog zu den Messwerten für sehr kleine Knudsen-Zahlen gegen einen Grenzwert streben. Gasverdünnungseffekte sowie das Knudsen-Minimum werden ebenfalls gut abgebildet.

An [Abb. 4.8](#) wird diskutiert, wie gut das 1D-Modell den Einfluss des Druckverhältnisses auf den Strömungsbeiwert abbildet. Dargestellt sind Ergebnisse für vier Knudsen-Zahlen im Bereich der verdünnten Strömungen und einer exemplarischen Spalthöhe. Der Strömungsbeiwert ist über dem Druckverhältnis aufgetragen. Die Referenzwerte stammen erneut von Huck<sup>23</sup>, aber auch von Wenderott<sup>21</sup>, der Ausgleichspolynome für die durch Messungen ermittelte Werte angibt.

Der Strömungsbeiwert nimmt mit fallendem Druckverhältnis zu. Für die Knudsen-Zahlen  $Kn = 2,2$ ,  $Kn = 0,11$  und  $Kn = 0,0278$  ist die Strömung schleichend, sodass eine Verblockung nicht festzu-



**Abb. 4.8** Strömungsbeiwert für einen planparallelen Spalt aufgetragen über dem Druckverhältnis II. Variation der Knudsen-Zahl  $Kn$  für ein Verhältnis von Spalthöhe zu Länge von  $H/L = 0,015$ . Vergleich der Messwerte von Huck<sup>23</sup> und Wenderott<sup>21</sup> mit dem 1D-Modell dieser Arbeit.

stellen ist. Die Strömungsgeschwindigkeit im Spalt und dementsprechend die Mach-Zahlen sind sehr klein. Für die Knudsen-Zahl  $Kn = 0,0083$  zeigen sowohl das Modell als auch die Werte von Wenderott die Tendenz zu einer Verblockung, d.h. der Strömungsbeiwert läuft für kleine Druckverhältnisse gegen einen Grenzwert. Mit fallender Knudsen-Zahl steigt der Strömungsbeiwert. Das Modell spiegelt dieses Verhalten gut wider. Für große Knudsen-Zahlen stimmen die Messungen und das Modell gut überein, jedoch sind mit sinkender Knudsen-Zahl stärkere Abweichungen feststellbar, die mit abnehmendem Druckverhältnis zunehmen. Während das Modell die Messungen von Huck unterschätzt, werden die von Wenderott ermittelten Messwerte überschätzt. Dies kann gegebenenfalls auf die bereits diskutierte schwierige Justierung der planparallelen Spaltkontur im Experiment zurückgeführt werden. Allerdings ist die Überschätzung der Messwerte für kleine Knudsen-Zahlen plausibel, da das Modell die vergrößerte Reibung im Einlauf der Strömung vernachlässigt. Hier besteht somit die Möglichkeit der Modellverbesserung.

### 4.3.3 Anwendung auf eine Vakuumpumpe

Nun, da nachgewiesen ist, dass das präsentierte Modell den Strömungsbeiwert für verschiedene Spaltgeometrien inklusive des Einflusses bewegter Wände abbilden kann, wird im Weiteren überprüft, inwiefern damit die Abbildungsgüte einer Kammermodellsimulation verbessert werden kann. Es werden zwei Kammermodellsimulationen zur Bestimmung der Saugvermögenskurve einer zweigängigen, isochoren Schraubenspindelvakuumpumpe (SSVP) mit Zykloidenprofil durchgeführt. Die-

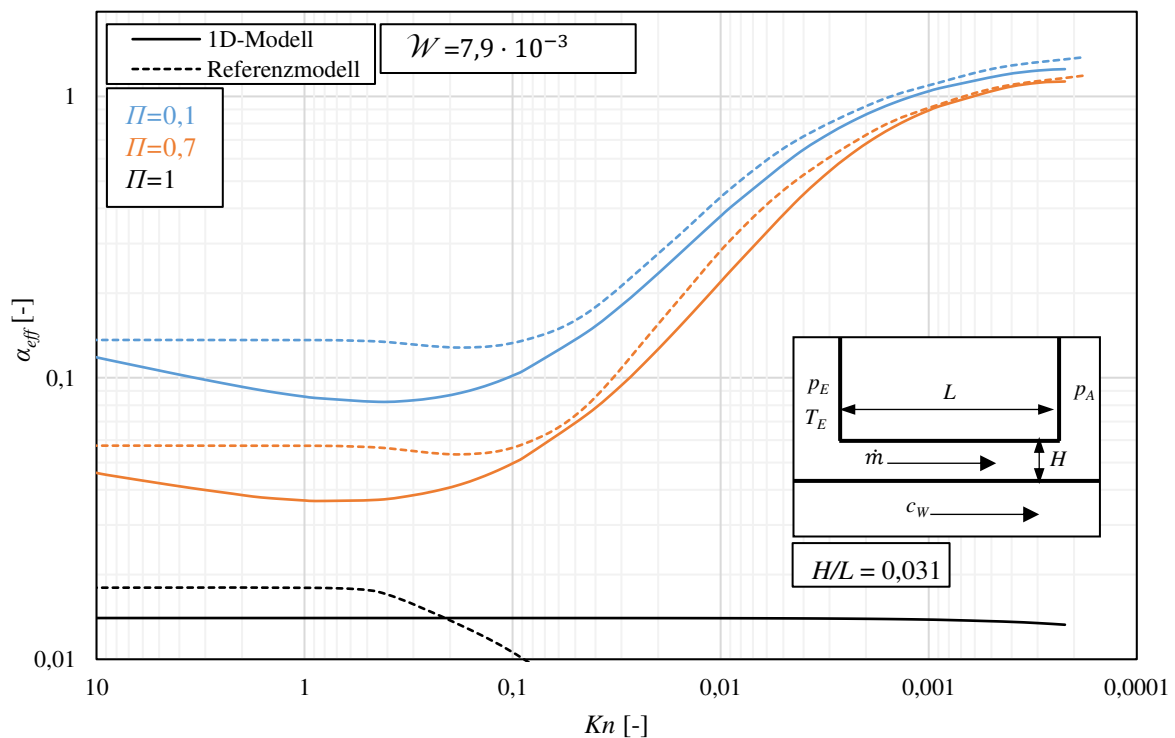
se entspricht der von Rohe<sup>19</sup> untersuchten Maschine. Die Messwerte für die Saugvermögenskurve hat Rohe im Kontext seiner Dissertation aufgenommen, allerdings wurden die hier verwendeten Werte nicht von ihm veröffentlicht. In beiden Simulationen sind die Geometrie und die Betriebsparameter der SSVP identisch, allerdings werden die Spaltströmungen unterschiedlich modelliert. Einmal mit dem Modell dieser Arbeit und einmal mit der bisher gängigen Modellierung am Fachgebiet Fluidtechnik der TU Dortmund.

Die geometrische Abstraktion für das Kammermodell entspricht im Wesentlichen den Beschreibungen von Stratmann<sup>20</sup>. Die Arbeitskammern werden im Kammermodell als isotherm ( $T=293\text{ K}$ ) angenommen und das Medium ist trockene Luft ( $\gamma = 1,4$ ). Das Blasloch entspricht einer trapezförmigen Blende, die mit dem präsentierten 1D-Modell nur unzureichend modelliert werden kann. Daher wird für diese Verbindung die Messung von Wenderott<sup>21</sup> verwendet. Die Verbindungen im Profileingriff sind noch nicht im Detail untersucht worden, daher wird die s-förmige Profileingriffslinie (vgl. Kap.1) zur Identifikation der Spaltverbindungen verwendet. In Anlehnung an Stratmann<sup>20</sup> wird deren Kontur vereinfacht als langer, planparalleler Spalt abstrahiert, an dessen Wänden die Wälzpunktgeschwindigkeit angenommen wird. Der Gehäusespalt wird als planparalleler Spalt angenommen, bei dem sich die Gehäusewand im Relativsystem der Arbeitskammer bewegt. Die angenommene Spallänge entspricht dem kürzesten Weg, also senkrecht zur Helix der Rotorsteigung. Es wird nur der Anteil der Gehäusewandbewegung berücksichtigt, der in dieser gedachten Strömungsrichtung liegt. Der Radialspalt befindet sich zwischen dem Außen- und Innendurchmesser der beiden Rotoren und bildet eine konvergent-divergente Kanalform.

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden in dem Kammermodell die Strömungsbeiwerte für den Radial- und den Gehäusespalt mit einer Datenbank ersetzt, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Spaltmodell erzeugt wird. Für alle anderen Verbindungen wird nach wie vor das Referenzspaltmodell verwendet. Das Referenzspaltmodell für die Spaltströmung entspricht der bisherigen Implementierung der Spaltmassenstrombestimmung im Simulationswerkzeug KaSim des Fachgebiet Fluidtechnik der TU Dortmund.<sup>11</sup> Dieses basiert für statische Spaltkonturen auf den Messungen von Wenderott<sup>21</sup> und für Spalte mit bewegter Spaltberandung auf dem Ansatz von Stratmann<sup>20</sup>. Stratmann interpoliert zwischen Simulationsdaten der freien molekularen Strömung in Spalten mit bewegten Wänden und den Messwerten für statische Konturen nach Wenderott. Dieses Verfahren wird in neueren Arbeiten in Frage gestellt, da bei Strömungen im Übergangs- und Schlupfbereich ( $0,01 < Kn < 10$ ), die von der Couette-Strömung dominiert werden, große Abweichungen auftreten können.<sup>23</sup>

**Abb. 4.9** zeigt den Strömungsbeiwert des Gehäusespalts der Versuchsmaschine als Funktion der Knudsen-Zahl für verschiedene Druckverhältnisse. Es sind Ergebnisse für das 1D-Modell und das Referenzmodell dargestellt. Im Relativsystem der Arbeitskammern bewegt sich die Gehäusewand in Strömungsrichtung mit  $c_W$ . Aufgrund der kleinen Rotorsteigung der untersuchten SSVP, ist der Wert der Gehäusewandgeschwindigkeit sehr klein. Gleiches gilt für die Spallänge. Das Referenzmodell zeigt grundsätzlich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des 1D-Modells. Größere Abweichungen treten bei einem Druckverhältnis von  $\Pi = 1$  auf, bei dem das Referenzmodell den Einfluss der Couette-Strömung für  $Kn < 0,01$  vernachlässigt. Außerdem wird im Referenzmodell

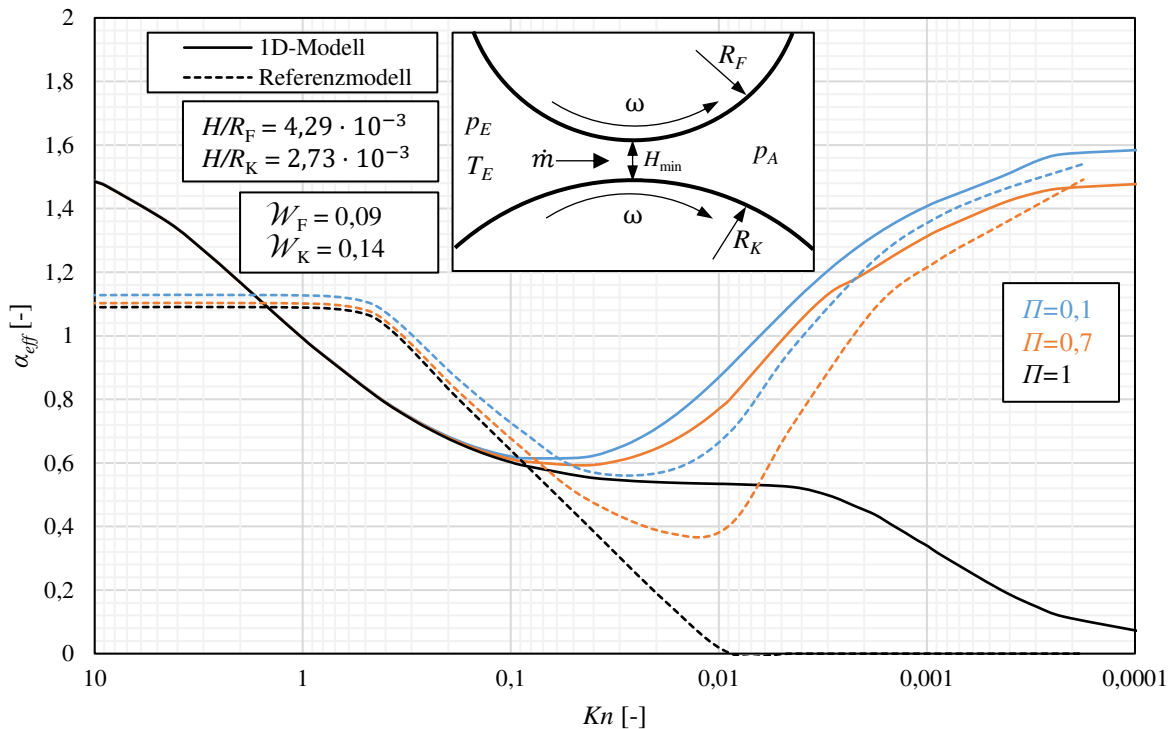
das Knudsen-Minimum nicht abgebildet, da ein konstanter Wert ab  $Kn \geq 0,5$  angenommen wird. Durch das Interpolationsverfahren wird ein insgesamt etwas höherer Massenstrom berechnet.



**Abb. 4.9** Strömungsbeiwerte für den Gehäusespalt der Versuchsmaschine für verschiedene Druckverhältnisse aufgetragen über der Knudsen-Zahl. Vergleich zwischen dem 1D-Modell dieser Arbeit und dem Referenzmodell nach Wenderott<sup>21</sup> und Stratmann<sup>20</sup>.

In **Abb. 4.10** ist der Strömungsbeiwert des Radialspalts dargestellt. In diesem Fall wird eine halb-logarithmische Darstellung verwendet, da bei dieser Darstellung die Auswirkungen besser zu erkennen sind als in einem doppelt-logarithmischen Diagramm. An dieser Stelle ist es wichtig zu benennen, dass das Referenzmodell nur Konturen berücksichtigt, die eine planare Gegenkontur haben. Daher wird im Referenzmodell der Ansatz von Nadler<sup>11</sup> verwendet, der einen Ersatzradius über eine Parallelschaltung der Radien  $\frac{1}{R_{\text{Ersatz}}} = \frac{1}{R_K} + \frac{1}{R_F}$  bestimmt. Da das Referenzmodell die Couette-Strömung für Knudsen-Zahlen  $Kn \leq 0,01$  vollständig vernachlässigt und zwischen  $Kn = 0,01$  und  $Kn = 0,5$  ein Interpolationsansatz verwendet wird, wird der Strömungsbeiwert für weite Bereiche der Knudsen-Zahl unterschätzt. Besonders deutlich wird dies erneut für ein Druckverhältnis von  $\Pi = 1$ . Das Referenzmodell nimmt für die freie molekulare Strömung einen geringeren Wert an, als aus dem 1D-Modell resultiert, da allerdings die frei-molekulare Strömung bereits bei  $Kn = 0,5$  angenommen wird, überschätzt die Referenz im Bereich von  $0,1 \leq Kn \leq 1$  den Strömungsbeiwert.

Die weiter oben aufgeführte Verifizierung des präsentierten 1D-Modells für Vakuumpalte lässt den Schluss zu, dass hier im Vergleich zum Referenzmodell eine Verbesserung der Spaltabbildung erzielt werden konnte. Lediglich für sehr kleine Knudsen-Zahlen ist die Abbildungsgüte eingeschränkt, da keine Einlaufverluste berücksichtigt werden. Im Weiteren wird geprüft, wie sich dies auf die Abbildungsgüte des Kammermodells für die Referenzmaschine auswirkt. **Abb. 4.11** zeigt den Liefergrad,

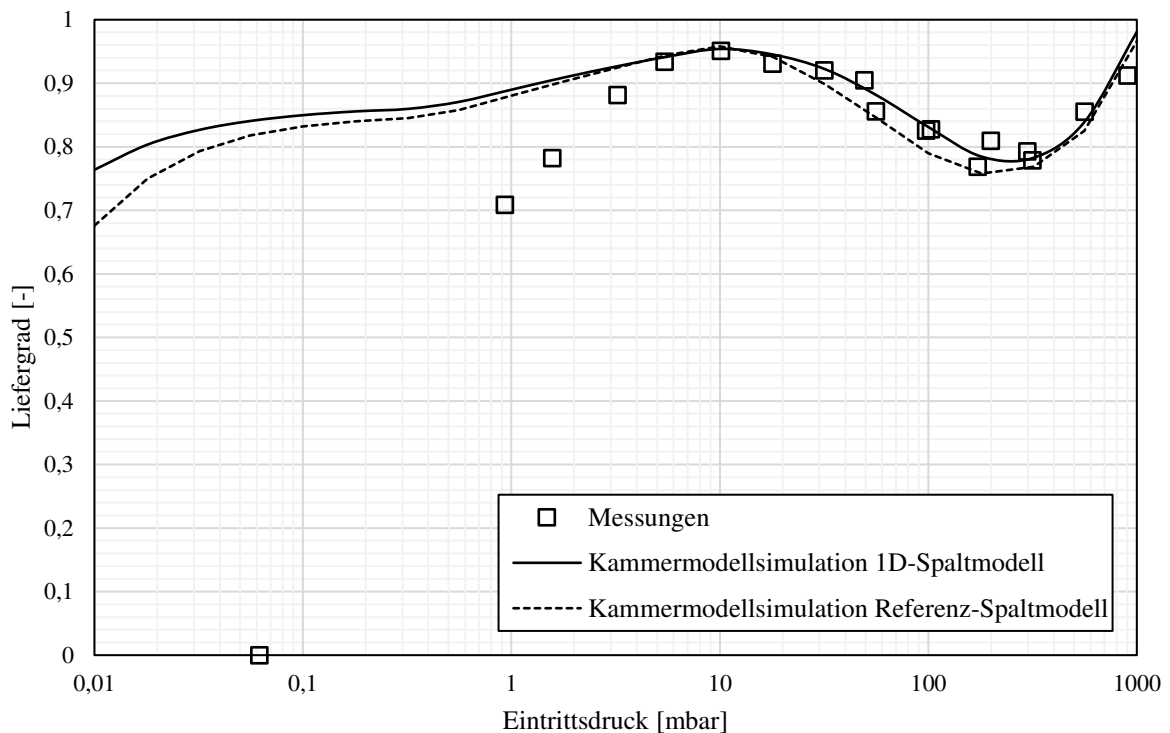


**Abb. 4.10** Strömungsbeiwerte für den Radialspalt der Versuchsmaschine für verschiedene Druckverhältnisse aufgetragen über der Knudsen-Zahl. Vergleich zwischen dem 1D-Modell dieser Arbeit und dem Referenzmodell nach Wenderott<sup>21</sup> und Stratmann<sup>20</sup>. Ersatzradius  $\frac{1}{R_{\text{Ersatz}}} = \frac{1}{R_K} + \frac{1}{R_F}$  des Referenzmodells nach Nadler<sup>11</sup>.

also das Saugvermögen normiert auf das theoretische Saugvermögen einer idealen Maschine, aufgetragen über dem Eintrittsdruck der Maschine. Die gestrichelte Linie stellt die Kammermodellsimulation mit der Datenbasis von Wenderott und Stratmann zur Berechnung der Spaltmassenströme dar. Die durchgezogene Linie stellt das Ergebnis der Kammermodellsimulation dar, bei der die Spaltmassenströme für den Gehäusespalt und den Radialspalt basierend auf dem 1D-Modell dieser Arbeit berechnet wurden.

Die Spaltmassenströme nach dem 1D-Modell dieser Arbeit führen zu einem etwas höheren Saugvermögen. Für Drücke größer als 300 mbar ist dies auf die Vernachlässigung der Einlaufverluste im Spaltmodell dieser Arbeit zurückzuführen. Insbesondere beim Gehäusespalt ist dies relevant, da dieser anteilig die größte Spaltfläche und zudem einen relativ starken Querschnittsprung am Spalteintritt aufweist. Im Bereich des Maximums der Saugvermögenskurve hat das Spaltmodell nur einen geringen Einfluss. Obwohl die Abbildungsgüte im Bereich der verdünnten Strömungen durch das neue Spaltmodell verbessert wird, weicht die neue Saugvermögenskurve stärker von den Messungen ab. Dies ist nachvollziehbar, da das neue Modell insgesamt geringere Spaltmassenströme vorher sagt. Die Abbildungsgüte des Kammermodells kann somit im Bereich des Enddrucks durch eine Verbesserung des verwendeten Spaltmodells nicht verbessert werden. Für eine bessere Abbildungsgüte muss vielmehr der Ansatz einer homogenen Druckverteilung in den Arbeitskammern durch bessere Modelle ersetzt werden, wie dies in [28] geschehen ist. Insgesamt bildet die Kammermodell-

Simulation mit homogener Kammerdruckverteilung Vakuumpumpen für Drücke  $> 10$  mbar gut ab. Die präsentierten Ergebnisse sind vermutlich jedoch nicht auf alle Schraubenspindelvakuumpumpen übertragbar, da hier nur eine isochore Maschine betrachtet wird, die zudem gut als isotherm angenommen werden kann.<sup>19,20</sup> Es ist allerdings davon auszugehen, dass in Maschinen mit innerer Verdichtung andere Druck- und Temperaturverteilungen vorliegen, die die Saugvermögenskurve beeinflussen. Insgesamt deuten die Ergebnisse aber darauf hin, dass durch eine genauere Abbildung der Strömungsbeiwerte keine nennenswerte Verbesserung der Abbildungsgüte der Saugvermögenskurve mehr erzielt werden kann. Entscheidender ist mit Blick auf die Abbildungsgüte der Kammermodellsimulation vielmehr die Weiterentwicklung der Modelle für den Wärmeübergang und für die Druckverteilung in den Arbeitskammern.



**Abb. 4.11** Liefergrad einer isochoren Schraubenspindelvakuumpumpe aufgetragen über dem Eintrittsdruck. Vergleich zwischen Messwerten und Kammermodellsimulationen mit einem Referenzspaltmodell nach Wenderott<sup>21</sup> und Stratmann<sup>20</sup> und dem 1D-Spaltmodell dieser Arbeit.

#### 4.4 Ergebnisse für Spalte von Schraubenkompressoren

Im Weiteren wird untersucht, welche Abbildungsgüte mit dem entwickelten 1D-Modell für Spaltverbindungen in Schraubenkompressoren erzielt werden können. Die Knudsen-Zahl ist in diesen Anwendungen in der Regel sehr gering, sodass Gasverdünnungseffekte keine Bedeutung haben. Entscheidender für diese Anwendung ist die Unterteilung in laminare und turbulente Strömungen. Die Ergebnisse in diesem Abschnitt werden daher über der Reynolds-Zahl aufgetragen. Als Referenzen dienen Messungen und CFD Simulationen der Gehäuse- und Stirnspalte eines Schraubenkompressors aus [17].

Die Ergebnisse der verschiedenen Ansätze werden für verschiedene Reynolds-Zahlen und unterschiedliche Spaltformen für ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,7$  verglichen. In einem zweiten Schritt wird der Einfluss der bewegten Wand am Beispiel des Stirnspalts untersucht. Da hierfür keine Messungen vorliegen, wird der Vergleich ausschließlich mit CFD-Ergebnissen durchgeführt. Alle dargestellten CFD-Simulationen wurden mit dem Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell durchgeführt.<sup>17</sup>

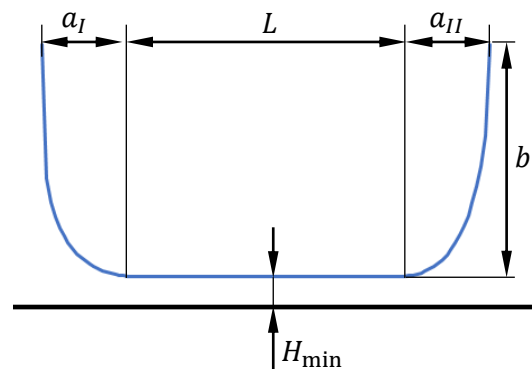
Im Gegensatz zu den Vakuumspalten wird der Strömungsbeiwert, wie für Schraubenmaschinen üblich, auf den theoretischen Massenstrom nach Saint-Venant & Wantzel bezogen.

#### 4.4.1 Beschreibung der Spaltgeometrie

Zur Annäherung der Form der Spaltkonturen wird der Ansatz von Utri<sup>17</sup> verwendet. Nach diesem Ansatz können viele Spaltkonturen durch zwei Superellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1, \quad (4.44)$$

eine auf der Einlassseite und eine auf der Auslassseite, und einen dazwischen liegenden Abschnitt mit konstanter Höhe  $H_{\min}$  beschrieben werden, wie in **Abb. 4.12** dargestellt.



**Abb. 4.12** Generalisierte Spaltgeometrie eines Schraubenkompressors. Annäherung nach Utri<sup>17</sup> durch zwei Superellipsen und einem Bereich konstanter Spalthöhe.

Es werden drei verschiedene Konturen diskutiert, die jeweils ein Beispiel für einen Hauptrotorgehäusespalt, für einen Nebenrotorgehäusespalt und für einen Stirnspalt darstellen. Für jede Kontur wird die Höhe variiert, während die anderen Parameter konstant gehalten werden. Der Stirnspalt hat scharfe Kanten und muss daher nicht durch Superellipsen beschrieben werden. Die Parameter für die anderen Geometrien sind in **Tab. 4.1** angegeben. Der dimensionslose, geometriebeschreibende Parameter für jede Kontur ist das Verhältnis zwischen der Rotorsteigung  $s$  und dem Kopfkreisdurchmesser  $D_K$ .

**Tab. 4.1** Superellipsen-Parameter für die diskutierten Spaltgeometrien.<sup>17</sup>

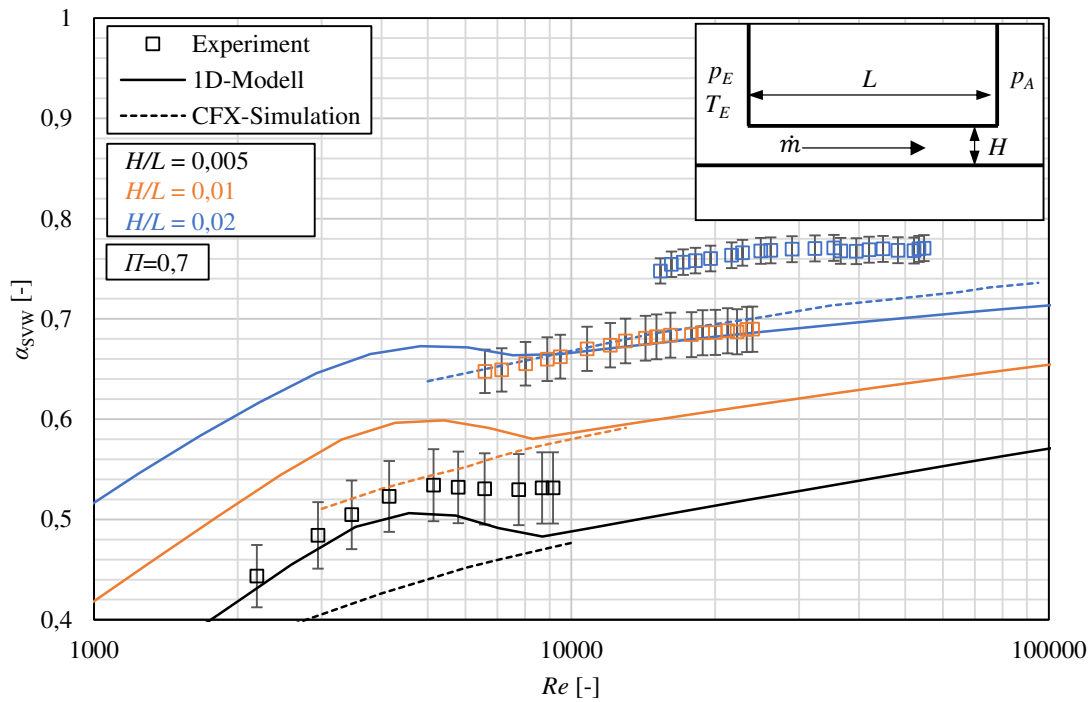
	Hauptrotorgehäusespalt					Nebenrotorgehäusespalt					
	$s/D_K$	$a/D_K \cdot 72$	$b/D_K \cdot 72$	$m$	$n$	$s/D_K$	$a/D_K \cdot 72$	$b/D_K \cdot 72$	$m$	$n$	$L/D_K \cdot 72$
I	1.67	13.5	10	1.8	1	7.5	2.3	5	2.5	4.1	5.8
II		6.9		1	1		2.3		2.8	2.3	

#### 4.4.2 Statische Spaltgeometrien

Zunächst werden die Ergebnisse für den Stirnspalt diskutiert. [Abb. 4.13](#) zeigt die Auswirkung der Reynolds-Zahl auf den Strömungsbeiwert für verschiedene Verhältnisse von Spalthöhe zu Spaltlänge  $H/L$ . Die Markierungen stehen für die Messungen, die gestrichelten Linien für die CFD-Simulationen und die durchgezogenen Linien für das 1D-Modell dieser Arbeit. Sowohl die 1D- als auch die CFD-Simulationen unterschätzen die Messwerte. Allerdings zeigen die CFD- und 1D-Simulationen im vollturbulenten Bereich eine gute Übereinstimmung. Im laminaren Bereich gibt es eine gute Übereinstimmung zwischen Messungen und 1D-Simulationen, was für das kleinste Verhältnis  $H/L = 0,005$  zu sehen ist. Die starken Abweichungen der CFD-Simulationen in diesem Bereich lassen sich dadurch erklären, dass das verwendete Turbulenzmodell keine Relaminarisierung darstellen kann. Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung wird in den 1D-Simulationen durch den Einbruch des Strömungsbeiwerts deutlich. Dieser zeigt sich in den Messungen nicht. Der Vergleich mit den Messungen bei größeren Verhältnissen  $H/L$  legt nahe, dass die Annahme einer laminaren Strömung auch bei größeren Reynolds-Zahlen zu einer besseren Übereinstimmung führen würde. In Anbetracht der Tatsache, dass große Verhältnisse  $H/L$  relativ kurze Spalte darstellen, kann der Schluss gezogen werden, dass der Strömungseinlauf über eine große Distanz laminar dominiert ist, bevor dieser bei hohen Reynolds-Zahlen in eine turbulente Strömung übergeht.

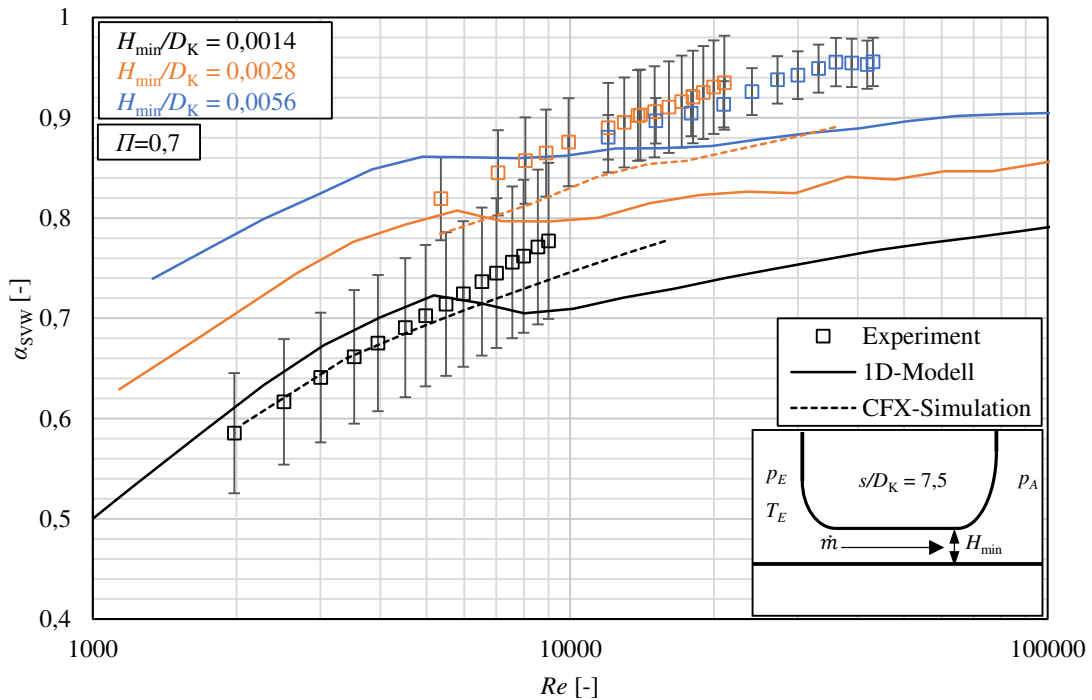
Eine ähnliche Argumentation lässt sich für die in [Abb. 4.14](#) dargestellten Ergebnisse des Nebenrotorgehäusespalts anführen. Es handelt sich im Wesentlichen ebenfalls um einen langen Spalt, jedoch mit abgerundeten Ein- und Auslasskanten. Dadurch ist die Einlaufströmung glatter und somit weniger turbulent und mit geringerem Druckverlust. Für die kleinste Spalthöhe und kleine Reynolds-Zahlen zeigt das Modell dieser Arbeit eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten, wie dies bereits für den Stirnspalt festgestellt werden konnte. Der vom 1D-Modell prognostizierte Strömungsbeiwert bricht bei höheren Reynolds-Zahlen jedoch deutlicher ein, als es die Messungen zeigen. Die CFD-Simulation stimmt besser mit den Messungen überein als im vorherigen Beispiel des Stirnspalts, da aufgrund der gleichmäßigeren Strömungsführung am Einlass des Spalts weniger Turbulenzen erzeugt werden. Somit wird die Annahme untermauert, dass das 1D-Modell durch die Implementierung eines Modells für nicht vollständig ausgebildete Strömungen vermutlich erheblich verbessert werden könnte.

Die letzte untersuchte Kontur ist der in [Abb. 4.15](#) dargestellte Hauptrotorgehäusespalt. Im Vergleich zu den oben untersuchten Konturen ist dieser kurz und wird daher mehr von Trägheit als von Reibung dominiert. Aus diesem Grund ist die Modellierung des Impulsflussformfaktors sehr wichtig. Es zeigt sich, dass das 1D-Modell den Strömungsbeiwert bei niedrigen Reynolds-Zahlen überschätzt, während es diesen im hohen Reynolds-Zahlbereich leicht unterschätzt. Die Qualität

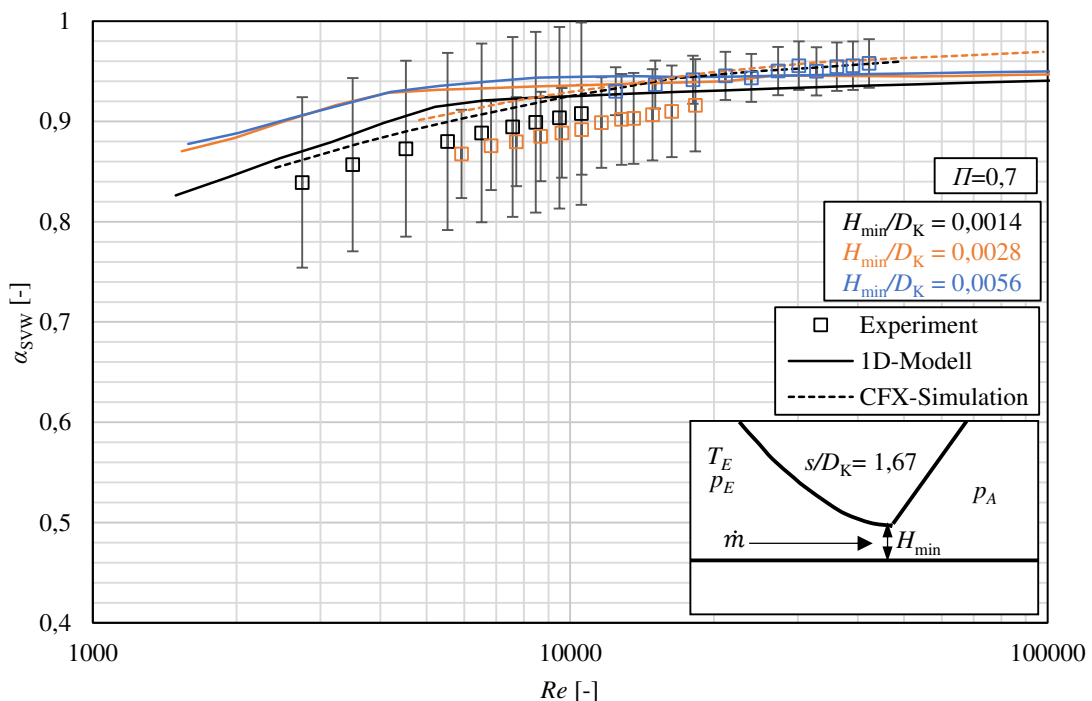


**Abb. 4.13** Strömungsbeiwerte  $\alpha_{SVW}$  eines Stirnspalts aufgetragen über der Reynolds-Zahl  $Re$ . Vergleich des 1D-Modells dieser Arbeit mit Messungen und CFD-Simulationen von Utri<sup>17</sup>. Ergebnisse für trockene Luft und ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,7$ .

der Abbildung liegt innerhalb der Messgenauigkeit. Eine Verbesserung des Modells kann möglicherweise erreicht werden, wenn zusätzlich die Dissipation in der nicht eingelaufenen Strömung berücksichtigt wird. In laminaren Strömungen ist der Reibungsbeiwert im Einlaufbereich höher als in der vollständig eingelaufenen Strömung. Eine Berücksichtigung dieses größeren Reibbeiwertes würde zu einer Verringerung des Strömungsbeiwerts bei kleinen Reynolds-Zahlen führen und damit die Abbildungsgüte des 1D-Modells weiter verbessern.



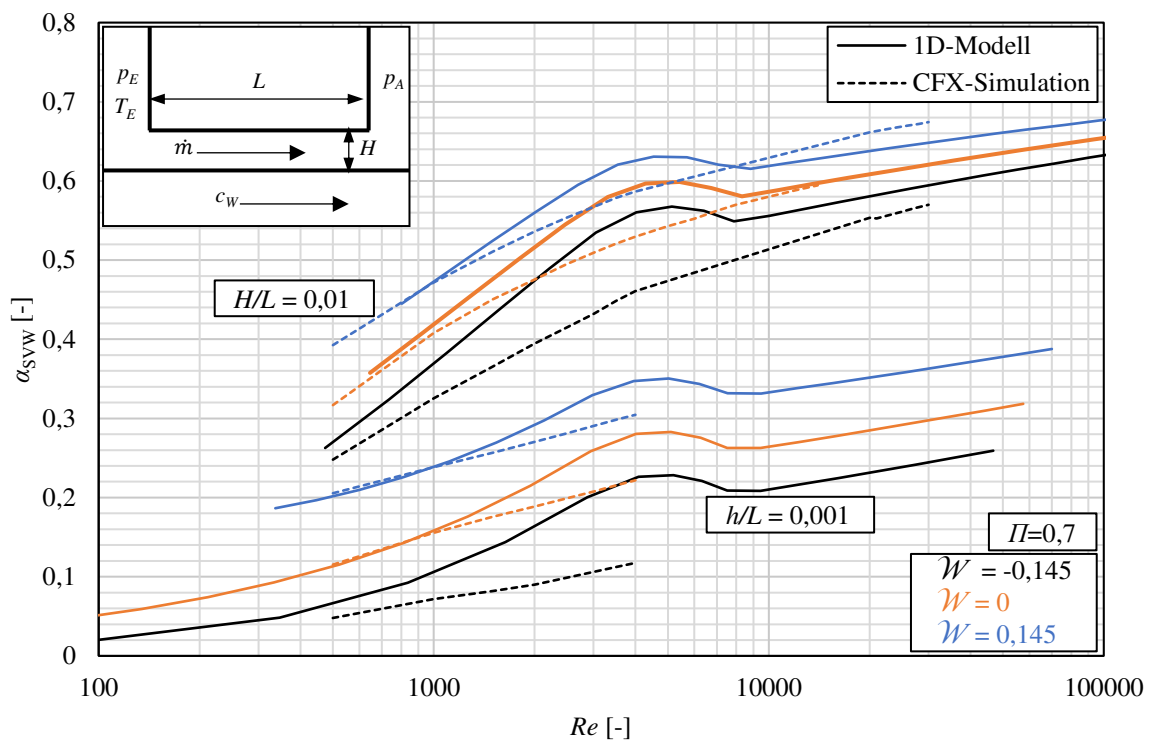
**Abb. 4.14** Strömungsbeiwerte  $\alpha_{SVW}$  eines Nebenrotorgehäusespalts aufgetragen über der Reynoldszahl  $Re$ . Vergleich des 1D-Modells dieser Arbeit mit Messungen und CFD-Simulationen von Utri<sup>17</sup>. Ergebnisse für trockene Luft und ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,7$ .



**Abb. 4.15** Strömungsbeiwerte  $\alpha_{SVW}$  eines Hauptrotorgehäusespalts aufgetragen über der Reynoldszahl  $Re$ . Vergleich des 1D-Modells dieser Arbeit mit Messungen und CFD-Simulationen von Utri<sup>17</sup>. Ergebnisse für trockene Luft und ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,7$ .

#### 4.4.3 Einfluss der bewegten Wand

Abschließend wird die Qualität des 1D-Modells für bewegte Wände im Bereich der Kontinuumsströmungen untersucht. Hier stehen keine Messwerte zur Verfügung. Stattdessen wird ein qualitativer Vergleich mit CFD-Simulationen des Stirnspalts durchgeführt, der in [Abb. 4.16](#) dargestellt ist. Abgebildet sind der Fall einer statischen Wand sowie die Fälle einer positiv, d.h. in Strömungsrichtung, und einer negativ bewegten Wand. Die Wandgeschwindigkeiten sind dimensionslos angegeben. Es werden die Ergebnisse für zwei verschiedene Spalthöhen gezeigt. Das 1D-Modell gibt den Einfluss der bewegten Wand in ähnlicher Weise wieder, wie die CFD-Simulation. Im mittleren Reynolds-Zahlenbereich gibt es größere Abweichungen zwischen beiden Ansätzen, die auf die unterschiedliche Modellierung der Reibung im Übergangsbereich von der laminaren zu turbulenten Strömung zurückgeführt werden können.



**Abb. 4.16** Strömungsbeiwerte  $\alpha_{SVW}$  eines Stirnspalts mit bewegter Gehäusewand. Vergleich des 1D-Modells dieser Arbeit mit Messungen und CFD-Simulationen von Utri<sup>17</sup>. Ergebnisse für trockene Luft und ein Druckverhältnis von  $\Pi = 0,7$ .

#### 4.5 Diskussion der lokalen Strömungsgrößen

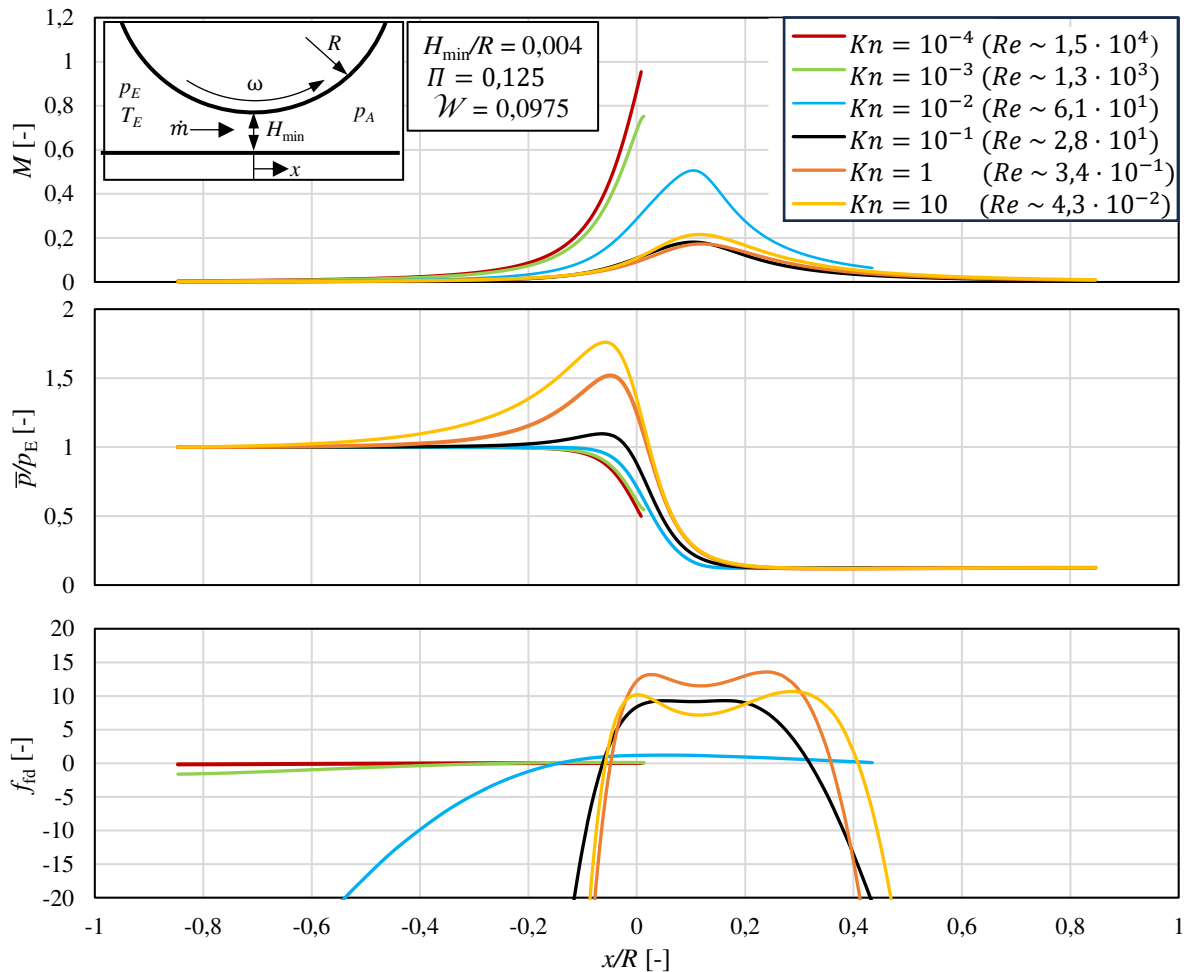
Die vorherigen Abschnitte belegen eine gute Abbildungsgüte des eindimensionalen Modells für verschiedene Spaltkonturen in Rotationsverdrängermaschinen. Im nächsten Schritt wird analysiert, welche Verläufe das Modell für einige charakteristische Strömungsgrößen ermittelt. Es werden die Verläufe der Mach-Zahl, des statischen Drucks und des Reibbeiwerts untersucht. Diese Parameter ermöglichen eine eingehende Diskussion darüber, ob eine Verblockung der Strömung auftritt oder ob die Strömung ablöst. Zudem wird beleuchtet, wie Faktoren wie Gasverdünnung, Wand-

bewegung und Beschleunigung oder Verzögerung der Strömung die Reibung beeinflussen. Für die weitere Analyse werden erneut der Spalt mit Radiuskontur und der Spalt mit einer planaren Kontur betrachtet.

In **Abb. 4.17** werden die Verläufe für den Spalt mit Radiuskontur dargestellt. Das Verhältnis der minimalen Spalthöhe zum Radius der Kontur beträgt  $H_{\min}/R = 0,004$ . Die Radiuskontur rotiert, was zu einer dimensionslosen Wandgeschwindigkeit von  $\mathcal{W} = 0,0975$  führt. Das Druckverhältnis über den Spalt beträgt  $\Pi = 0,125$ . Es werden Verläufe für verschiedene Knudsen-Zahlen  $Kn$  dargestellt, die den gesamten Bereich der Gasverdünnung abdecken. Für jede Knudsen-Zahl resultiert ein anderer Massenstrom, der die Reynolds-Zahl  $Re$  der Strömung bestimmt, die in Klammern angegeben ist, um eine bessere Interpretation der Ergebnisse zu ermöglichen. Zur besseren Orientierung wurde der Koordinatenursprung in den engsten Querschnitt gelegt und die Ortskoordinate  $x$  auf den Radius bezogen. Für die Fälle, in denen die Strömung verblockt ist, werden die Verläufe nicht für  $\Pi = 0,125$ , sondern für das jeweilige kritische Druckverhältnis dargestellt.

Das obere der drei Diagramme zeigt die Mach-Zahl-Verläufe. Diese ähneln für den Spalt mit Radiuskontour einer Glockenkurve. Die Reibung in der Strömung führt dazu, dass das Maximum rechts von dem engsten Querschnitt liegt. Je kleiner die Reynolds-Zahl, desto dominanter ist die Reibung und desto kleiner sind die Werte der Mach-Zahl. Ebenso führt eine vergrößerte Reibung dazu, dass das Maximum stärker nach rechts verschoben wird. Im Gegensatz dazu sorgt eine steigende Knudsen-Zahl durch die Gasverdünnung für eine Reduktion der Reibung, sodass der Mach-Zahl-Verlauf für die Knudsen-Zahl  $Kn = 10$  wieder größere Werte aufweist. Die Mach-Zahl-Verläufe für die Knudsen-Zahlen  $Kn \leq 10^{-2}$  enden vorzeitig, da die Strömungen ablösen. Für die beiden größten Knudsen-Zahlen erreicht die Strömung im Punkt der Ablösung einen Wert sehr nahe der kritischen Mach-Zahl. Die Strömungen sind verblockt. Da für eine Reynolds-Zahl von  $Re \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$  die Strömung laminar ist, ist der Impulsflussformfaktor  $K_D$  größer als der der Turbulenten-Strömung mit  $Re \approx 1,5 \cdot 10^4$  und der kritischen Mach-Zahl fällt somit geringer aus. Dieser Effekt wird zusätzlich dadurch verstärkt, dass in einer laminaren, verzögerten Strömung der Impulsflussformfaktor vergrößert ist.

Das mittlere Diagramm zeigt den Verlauf des über den Strömungsquerschnitt gemittelten statischen Drucks  $\bar{p}$  bezogen auf den Eintrittsdruck  $p_E$ . Der Wert ist für alle Knudsen-Zahlen zunächst nahezu eins, da aufgrund des großen Strömungsquerschnitts an der Spalteintrittsseite und der daraus folgenden niedrigen Strömungsgeschwindigkeit, der Druckabfall in der Zuströmung vernachlässigbar ist. Für die Reynolds-Zahlen  $Re \leq 2,8$  entsteht durch die bewegte Spaltwand ein Druckaufbau. In Analogie zu Gleitlagern entsteht eine Tragfähigkeit des Fluidfilms. Für die größeren Reynolds-Zahlen sorgt die stationäre Trägheit bei beschleunigten Strömungen für einen Druckabfall, der dem Aufbau eines Druckpolsters entgegenwirkt. Die Strömung mit der Knudsen-Zahl  $Kn = 10^{-2}$  löst ab, ist allerdings nicht verblockt. Für die Knudsen-Zahlen  $Kn = 10^{-3}$  und  $Kn = 10^{-4}$  liegt das kritische Druckverhältnis des Spaltes oberhalb  $\Pi = 0,125$ . Dargestellt sind jeweiligen subsonischen Lösungen für das kritische Druckverhältnis. Die Strömung lösen bedingt durch die hohen Reynolds-Zahlen kurz hinter dem engsten Querschnitt ab. Die kritischen Druckverhältnisse liegen in der Nähe von  $\Pi = 0,5$ . Die Modellierung der Ablösung bewirkt ein Herabsenken des kritischen



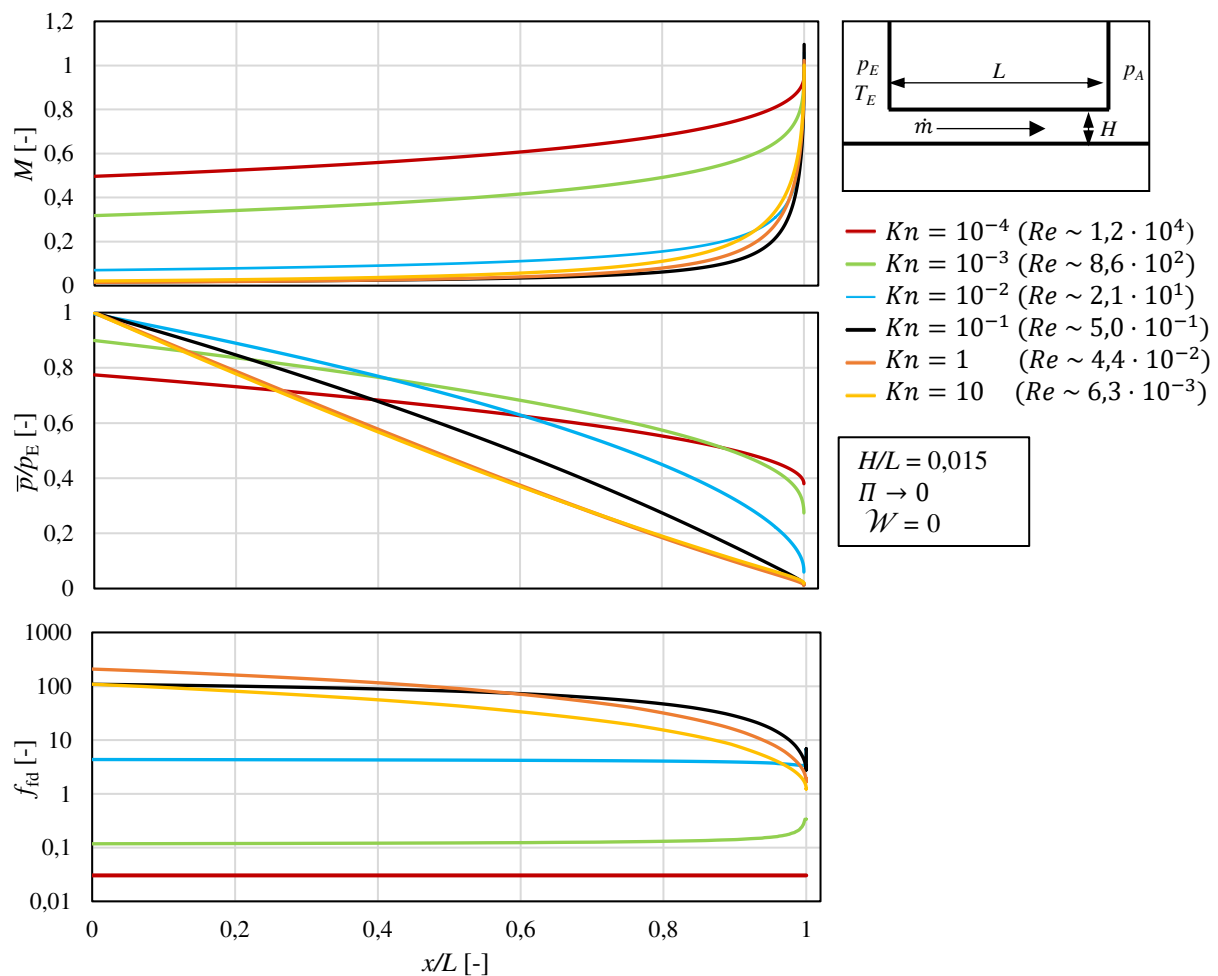
**Abb. 4.17** Verläufe der Mach-Zahl  $M$ , des statischen Drucks normiert auf den Spalteintrittsdruck  $\bar{p}/p_E$  und des Reibbeiwertes  $f_{fd}$  bei einem Spalt mit Radiuskontur und bewegter Berandung. Koordinatenursprung im engsten Querschnitt. Verläufe für verschiedene Knudsen-Zahlen bei einem Druckverhältnis von  $\Pi = 0,125$ , einer dimensionslosen Wandgeschwindigkeit von  $\mathcal{W} = 0,0975$  und einem Verhältnis von minimaler Spalthöhe zum Radius von  $H_{\min}/R = 0,004$ .

Druckverhältnisses im Vergleich zu einem Modell ohne Ablösung, wo im divergenten Teil der Druck für Strömungen mit großen Reynolds-Zahlen wieder ansteigen würde.

Das untere Diagramm zeigt den Verlauf des Reibbeiwertes  $f_{fd}$ . Dessen Betrag steigt mit fallender Reynolds-Zahl. Für die Knudsen-Zahl  $Kn = 10$  sorgen die reibungsmindernden Effekte einer verdünnten Strömung dafür, dass der Betrag des Reibbeiwertes trotz kleinerer Reynolds-Zahl geringer ausfällt, als für die nächstkleinere Knudsen-Zahl  $Kn = 1$ . Die lokalen Minima der Reibbeiwerte für  $Kn \geq 10^{-1}$  im Bereich von  $x/R \approx 0,4$  sind analog mit einem lokalen Minimum des Gasverdünungsparameters  $\delta$  zu erklären. In den Bereichen in denen die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kleiner ist als die mittlere Wandgeschwindigkeit, wird der Reibbeiwert negativ. In diesem Fall läuft die Strömung gegen einen Druckgradienten an, der einen Poiseuille-Anteil entgegengesetzt der Strömungsrichtung verursacht. Die Summe aus Poiseuille- und Couette-Massenstrom muss insgesamt positiv sein, sodass der Couette-Massenstrom in diesen Bereichen größer als der Ge-

samtmassenstrom ist. Während der Gesamtmassenstrom aufgrund der Massenerhaltung in jedem Strömungsquerschnitt  $A(x)$  identisch ist, steigt der Coeutte-Massenstrom mit dem Strömungsquerschnitt. Für große Knudsen-Zahlen sorgt dies dafür, dass der Reibbeiwert entfernt vom engsten Querschnitt stark negative Werte annimmt.

In **Abb. 4.18** werden die Verläufe der Mach-Zahl, des querschnittsgemittelten statischen Drucks und des Reibbeiwerts für einen planparallelen Spalt dargestellt. Es werden Ergebnisse für eine statische Kontur, d.h. ohne bewegte Wand, dargestellt. Das Verhältnis von Spalthöhe zur Spalllänge beträgt  $H/L = 0,015$ . Die Verläufe sind dargestellt für über die dimensionslose Laufkoordinate  $x/L$ . Ein Wert von  $x/L = 0$  entspricht dem Eintritt und ein Wert von  $x/L = 1$  entspricht dem Ende der eindimensionalen Domäne. Es werden Verläufe für unterschiedliche Knudsen-Zahlen der Spaltströmungen gezeigt. Für unterschiedliche Knudsen-Zahlen resultieren unterschiedliche Spaltmassenströme und somit unterschiedliche Reynolds-Zahlen. Die Reynolds-Zahl der jeweiligen Spaltströmung ist zur besseren Einordnung in Klammern angegeben.



**Abb. 4.18** Verläufe der Mach-Zahl  $M$ , des statischen Drucks normiert auf den Spalteintrittsdruck  $\bar{p}/p_E$  und des Reibbeiwertes  $f_{fd}$  bei einem Spalt mit statischer planarer Kontur. Koordinatenursprung im Eintritt der 1D-Domäne. Verläufe für verschiedene Knudsen-Zahlen bei einem Druckverhältnis von  $\Pi \rightarrow 0$ , und einem Verhältnis von Spalthöhe zum zur Spalllänge von  $H/L = 0,015$ .

Das obere Diagramm zeigt den Verlauf der Mach-Zahl. Für eine Knudsen-Zahl von  $Kn = 10^{-1}$  hat der Verlauf der Mach-Zahl die niedrigsten Werte. Sowohl für größere als auch für niedrigere Knudsen-Zahlen haben die Mach-Zahl-Verläufe größere Werte. Der Verlauf des zugehörigen Strömungsbeiwerts in [Abb. 4.7](#) zeigt, dass das Knudsen-Minimum im Bereich von  $Kn \approx 5 \cdot 10^{-1}$  liegt. Somit spiegelt sich das Knudsen-Minimum ebenfalls in den Verläufen der Mach-Zahl wider. Insbesondere bei den Strömungen mit großen Reynolds-Zahlen ist die Mach-Zahl am Spalteintritt erhöht. Im Gegensatz zum Spalt mit Radiuskontur, liegt direkt zum Beginn der 1D-Domäne die minimale Spalthöhe vor, sodass größere Strömungsgeschwindigkeiten auftreten. In diesen Fällen ist die Modellierung der Zuströmung von größerer Bedeutung. Da ein Druckverhältnis von  $\Pi \rightarrow 0$  für die Betrachtung gewählt wurde, verblocken Strömung für alle Knudsen-Zahlen und die Mach-Zahlen nehmen somit am Spaltaustritt den Wert der kritischen Mach-Zahl an. Durch den verwendeten Ansatz der Jeffery-Hamel-Strömung zur Modellierung des Einflusses der Strömungsbeschleunigung auf den Impulsflussformfaktor  $K_D$  kann die kritische Mach-Zahl größer als  $M_{\text{krit}} = 1$  ausfallen. Durch die starker Strömungsbeschleunigung am Ende der 1D-Domäne liegt der modellierte Impulsflussformfaktor teilweise unter  $K_D = 1$ . Besonders deutlich wird dies für die Strömung mit der Knudsen-Zahl  $Kn = 10^{-1}$ .

Das mittlere Diagramm zeigt den Verlauf des über den Strömungsquerschnitt gemittelten statischen Drucks  $\bar{p}$  bezogen auf den Eintrittsdruck  $p_E$ . Durch die Entspannung des Gases aus den Ruhezustand  $p_E$  in die 1D-Domäne wird der Druck abgesenkt. Dies wird besonders für die Knudsen-Zahlen  $Kn = 10^{-3}$  und  $Kn = 10^{-4}$  deutlich, bei denen sich die Eintritts-Mach-Zahl deutlich von  $M(x=0) = 0$  unterscheidet. Durch Reibung und Strömungsberuhigung fällt der Druck über die Spaltlänge. Der Wert, den der reduzierte Druck  $p/p_E$  am Ende der 1D-Domäne annimmt, entspricht dem kritischen Druckverhältnis für die Knudsen-Zahl. Dieses sinkt mit steigender Knudsen-Zahl bis zum Knudsen-Minimum. Nach dem Knudsen-Minimum steigt des kritische Druckverhältnis leicht an. Für die Knudsen-Zahlen  $Kn = 1$  und  $Kn = 10$  fällt der Druck nahezu linear. Bei genauerer Betrachtung kann festgestellt werden, dass der Gradient des Druckabfalls leicht zunimmt. Anders ist dies bei den niedrigeren Knudsen-Zahlen, bei denen der Gradient des Druckabfalls über die Lauflänge  $x/L$  zunimmt.

Das untere Diagramm zeigt den Verlauf des Reibbeiwertes  $f_{\text{fd}}$ . Die Ordinatenachse logarithmisch geteilt. Den geringsten Reibbeiwert hat die Strömung mit der Knudsen-Zahl  $Kn = 10^{-4}$ . Da diese Strömung turbulent ist, werden Gasverdünnung und der Einfluss der Strömungsbeschleunigung nicht berücksichtigt. Der Reibbeiwert ist über die gesamte Lauflänge konstant. Für die nächstgrößere Knudsen-Zahl  $Kn = 10^{-3}$  sind Gasverdünnungseffekte ebenfalls noch nicht von Bedeutung. Allerdings ist die Strömung laminar, sodass gemäß der Jeffery-Hamel-Ersatzströmung die Beschleunigung am Spaltaustritt zu einer Vergrößerung des Reibbeiwertes führt. Mit weiter steigenden Knudsen-Zahlen fallen die Reynolds-Zahlen und damit der Einfluss der Strömungsbeschleunigung auf den Reibbeiwert. Lediglich bei den extremen Geschwindigkeitsgradienten am Spaltaustritt tritt durch die Jeffery-Hamel-Ersatzströmung eine Spitze im Reibbeiwert auf. Mit steigenden Knudsen-Zahlen nehmen Gasverdünnungseffekte zu. Durch den Druckabfall von Spalteintritt zum Spaltaustritt fällt der Wert des Gasverdünnungsparameters. Die steigende Gasverdünnung bewirkt einen Abfall des Reibbeiwertes über die Lauflänge. Die Verläufe für die Knudsen-Zahlen

$Kn = 10^{-1}$  und  $Kn = 1$ , welche das Knudsen-Minimum umklammern, schneiden sich. Aufgrund der niedrigen Reynolds-Zahl liegt der Reibungskoeffizient für  $Kn = 1$  zunächst oberhalb von dem für  $Kn = 10^{-1}$ . Die über die Spallänge ansteigende Gasverdünnung bewirkt jedoch, dass dieser unter dessen Wert fällt. Für eine Knudsen-Zahl von  $Kn = 10$  liegt der Reibbeiwert bereits nahezu vollständig unter dem für  $Kn = 10^{-1}$ .

## 4.6 Zwischenfazit

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass das entwickelte 1D-Modell in der Lage ist, Strömungsbeiwerte für verschiedene Spaltkonturen mit ausreichender Abbildungsgüte zu ermitteln. Gasverdünnungseffekte, der Einfluss einer bewegten Wand sowie eine potenzielle Verblockung der Strömung werden in zufriedenstellender Weise abgebildet. Über den Ansatz einer inkompressiblen Ersatzströmung ist es zudem möglich, die Reibung für kompressible, laminare Kanalströmungen zu korrigieren. Für kleine Reynolds-Zahlen ist es ausreichend von vollständig ausgebildeten Strömungen auszugehen. Für größere Reynolds-Zahlen besteht hingegen ein Verbesserungspotenzial, wenn zusätzlich Einlaufeffekte und der Umschlag von laminar auf turbulent modelliert werden, wie dies in [13] bereits für planparallele Spalte erfolgt ist. Ebenfalls ist das Modell noch nicht in der Lage, Spalte kurzer Länge unter Berücksichtigung der Gasverdünnung zu modellieren. Hier sind noch Modelle für die Zu- und Abströmung zu entwickeln, die beispielsweise für einen Schlitz gegen die analytische Lösung einer molekularen Blende streben. Der Einfluss des Wärmeübergangs wird im entwickelten Modell zunächst nicht berücksichtigt. Für einen planparallelen Spalt wird dieser Einfluss in [13] diskutiert. Allerdings fehlt noch ein Wärmeübergangsmodell, welches bewegte Wände berücksichtigt. Zudem ist es wünschenswert, dass das Wärmeübergangsmodell die Gasverdünnung im Einlauf des Temperaturprofils abbildet. Das nachfolgende Kapitel stellt einige Modellierungsansätze vor, die zukünftig herangezogen werden können, um die Abbildungsgüte der Reibung und des Wärmeübergangs für das 1D-Modell zu verbessern. Hierbei liegt der Fokus auf laminaren Strömungen, da turbulente Strömungen für Vakuumpumpen eine untergeordnete Bedeutung haben.



# 5 Ergänzende Modellierungsansätze

Dieses Kapitel stellt ergänzende Modelle vor, die im Rahmen der Arbeit entwickelt, aber nicht mehr in die Software für das 1D-Modell implementiert wurden. Der Anspruch an die Modelle ist dabei, dass diese gut in den 1D-Ansatz implementiert werden können und auf größere Datenbanken verzichtet wird, um die Implementierung zu erleichtern. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Entwicklung eines Wärmeübergangsmodells, welches neben einer Poiseuille-Strömung ebenfalls Gasverdünnung und Couette-Anteile berücksichtigt. Das Verfahren, wie die präsentierte Form der Wärmestrom-Modellierung in ein 1D-Modell zu implementieren ist, wird von Müller<sup>13</sup> erläutert. Das hier vorgestellte Modell stellt eine Ergänzung dazu dar. Zusätzlich wird ein Modell vorgestellt, das die Einlaufverluste einer laminaren Strömung abbildet. Hier sind in der Literatur bereits einige Modelle vorhanden.<sup>47</sup> Das unten vorgestellte Modell basiert auf wenigen Gleichungen und ist damit einfach in ein 1D-Modell implementierbar. Abschließend wird ein Verfahren vorgestellt, wie der Geschwindigkeitsschlupf und der Temperatursprung in der kommerziellen CFD-Software Ansys CFX berücksichtigt werden können. Eine derartige Implementierung ist sinnvoll, da basierend darauf weitere Modelle für die eindimensionale Theorie ausgearbeitet werden können. Zudem ist es schwierig, alle Aspekte der eindimensionalen Theorie im Experiment zu überprüfen. Beispielsweise ist es schwierig, eine bewegte, planare Kontur im Experiment zu realisieren. CFD-Simulationen bieten hier zumindest die Option einer Plausibilitätsprüfung. Auch Versuche, die den lokalen Wärmeübergang erfassen sollen, sind aufwendig. Hier können Simulationen unterstützen, um ein tieferes Verständnis aufzubauen. CFD-Simulationen können zudem unterstützen, um Modelle zu entwickeln, die genauere Abbildung der Arbeitskammern ermöglichen. Beispielsweise kann die homogene Annahme für die Druckverteilung in den Arbeitskammern aufgelöst werden, wie dies in [5, 28] erfolgt ist.

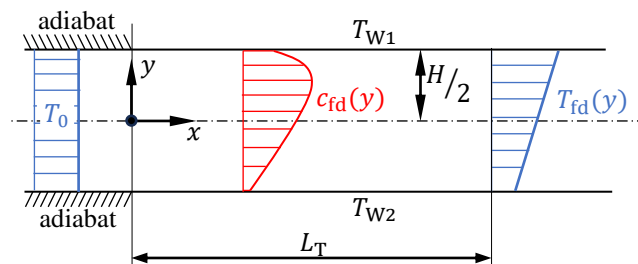
## 5.1 Thermischer Einlauf in einer verdünnten Couette-Poiseuille-Strömung

In diesem Abschnitt wird ein Wärmeübergangsmodell für hydrodynamisch vollständig ausgebildete, aber thermisch nicht ausgebildete Strömungen hergeleitet. Grundlage dazu bilden die Arbeiten [49–54], die das Graetz-Problem für verschiedene Strömungsprofile lösen. In den nachfolgenden Abschnitten werden diese Lösungen um Lösungen für Couette-Poiseuille-Strömungen in einem planaren Kanal unendlicher Breite ergänzt sowie Lösungen für Schlupfströmungen vorgestellt. Hierzu wird zunächst das allgemeine Problem und der Lösungsansatz vorgestellt. Anschließend wird die Lösung für eine laminare Poiseuille-Strömung bestimmt, um die Literaturwerte zu reproduzieren

und somit den eigenen Lösungsalgorithmus zu validieren. Im nachfolgenden Schritt wird die Lösung für eine reine Couette-Strömung bestimmt. Darauf aufbauend wird ein Superpositionsansatz für die Couette-Poiseuille-Strömung formuliert und überprüft. Abschließend wird ein Ansatz vorgestellt, mit dem der lokale Wärmeübergang für eine Schlupfströmung bestimmt werden kann.

### 5.1.1 Allgemeine Problemschreibung und Lösungsansatz

Zur Bestimmung des lokalen Wärmeübergangs wird eine inkompressible, eingelaufene, laminare (Schlupf-)Strömung zwischen zwei unendlich langen Platten betrachtet. Das als Graetz-Problem bekannte Problem ist in [Abb. 5.1](#) dargestellt. Links vom Koordinatenursprung liegt schraffiert dargestellt ein adiabater Einlaufbereich ausreichender Länge, sodass sich das Geschwindigkeits- und das Temperaturprofil vollständig ausbilden können. Am Ende des Einlaufbereich ist die Temperatur konstant über den Strömungsquerschnitt,  $T(y) = T_0$ . Ab dem Koordinatenursprung sind die Wände nicht mehr adiabatisch. Stattdessen werden die Temperaturen  $T_{W1}$  und  $T_{W2}$  für die Wände vorgegeben, sodass sich das Temperaturprofil der Strömung neu ausbilden muss. Das Geschwindigkeitsprofil ist für alle  $x > 0$  weiterhin vollständig ausgebildet,  $c(y) = c_{fd}$ . Ab der thermischen Einlaufänge  $x > L_T$  ist das Temperaturprofil erneut vollständig ausgebildet,  $T(y) = T_{fd}(y)$ . Für laminare Strömungen hat es die Form einer linearen Funktion.



**Abb. 5.1** Visualisierung des Graetz-Problems. Eine Strömung zwischen zwei Platten mit Abstand  $H$  tritt nach einem adiabatischen Einlaufbereich mit einer Temperatur von  $T_0$  und einem vollständig ausgebildeten Strömungsprofil  $c_{fd}$  in einen neuen Abschnitt ein. Dort trifft sie auf konstante Wandtemperaturen  $T_{W1}$  und  $T_{W2}$ , die von  $T_0$  verschieden sein können. Beim Erreichen der thermischen Einlaufänge  $L_T$  hat sich ein lineares Temperaturprofil  $T_{fd}$  vollständig ausgebildet.

Zur Herleitung werden die Dissipationswärme sowie die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt. Gemäß dem Vorgehen in [\[49\]](#) werden für ein gegebenes Geschwindigkeitsprofil ausgewählte Sonderfälle von Temperaturrandbedingungen betrachtet, die durch spätere Überlagerung jede Konstellation von konstanten Wandtemperaturrandbedingungen abbilden können. Dazu wird die dimensionslose Temperatur  $\theta$  als die Änderung der Fluidtemperatur bezogen auf eine Referenztemperaturdifferenz definiert:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{Ref}} - T_0} \quad (5.1)$$

Die vereinfachte dimensionslose Differentialrechnung für das Temperaturfeld der Strömung lautet dann:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X^*} = \frac{16}{C(Y)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet  $X^* = \frac{x}{2H Pr Re}$  die thermische Laufkoordinate,  $Y = 2\frac{y}{H}$  die dimensionslose Koordinate quer zur Strömungsrichtung und  $C(Y) = \frac{c_{fd}(Y)}{c}$  das dimensionslose, vollständig ausgebildete Strömungsprofil bezogen auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit. Die Reynolds-Zahl  $Re$  wird nach (3.11) bestimmt.

Nun werden zwei Typen von Temperaturrandbedingungen betrachtet:

- (1) Die Temperatur der unteren Wand wird zur Ausgangstemperatur  $T_{W2} = T_0$  und die Temperatur der oberen Wand wird zu einer von  $T_0$  abweichenden Temperatur  $T_{W1} \neq T_0$  gewählt. Als Referenztemperatur wird die der oberen Wand  $T_{Ref} = T_{W1}$  verwendet. Die dimensionslosen Randbedingungen lauten also:

- Eintritt  $\theta_0^{(1)} = 0$
- Obere Wand  $\theta_{W1}^{(1)} = 1$
- Untere Wand  $\theta_{W2}^{(1)} = 0$

- (2) Die Temperatur der oberen Wand wird zur Ausgangstemperatur  $T_{W1} = T_0$  und die Temperatur der unteren Wand wird zu einer von  $T_0$  abweichenden Temperatur  $T_{W2} \neq T_0$  gewählt. Als Referenztemperatur wird die der unteren Wand  $T_{Ref} = T_{W2}$  verwendet. Die dimensionslosen Randbedingungen lauten also:

- Eintritt  $\theta_0^{(2)} = 0$
- Obere Wand  $\theta_{W1}^{(2)} = 0$
- Untere Wand  $\theta_{W2}^{(2)} = 1$

Nach dem Superpositionsprinzip ist das lokale Temperaturprofil der Strömung  $T(x, y)$  für jede Konstellation von konstanten Wandtemperaturen dann gegeben mit:

$$T(x, y) = \theta^{(1)} (T_{W1} - T_0) + \theta^{(2)} (T_{W2} - T_0) + T_0 \quad (5.3)$$

Die Wandwärmestromdichten  $\dot{q}$  sind proportional zum Temperaturgradienten an der Wand. Aus den zwei betrachteten Fällen folgen vier normierte Wandwärmestromdichten, welche wie folgt definiert werden

$$\Phi_{W1}^{(i)} := 4 \left. \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad \Phi_{W2}^{(i)} := -4 \left. \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=-1} \quad (5.4)$$

wobei  $i$  die Wand angibt, an der die Randbedingung  $\theta = 1$  appliziert ist.

Nach dem Superpositionsprinzip sind Wandwärmestromdichten dann wie folgt gegeben:

$$\dot{q}_{W1}(X^*) = \frac{k}{2H} \left[ \Phi_{W1}^{(1)}(X^*)(T_{W1} - T_0) + \Phi_{W1}^{(2)}(X^*)(T_{W2} - T_0) \right] \quad (5.5)$$

$$\dot{q}_{W2}(X^*) = \frac{k}{2H} \left[ \Phi_{W2}^{(1)}(X^*)(T_{W1} - T_0) + \Phi_{W2}^{(2)}(X^*)(T_{W2} - T_0) \right] \quad (5.6)$$

Um die Differentialgleichung (5.2) leichter lösen zu können, werden die Dirichlet-Randbedingungen auf den Wänden homogenisiert, indem die voll eingelaufene Lösung  $\theta_{fd}$  subtrahiert wird. Die Lösung der Differentialgleichung (5.2) folgt über einen Produktansatz mit Trennung der Veränderlichen zu

$$\theta = \theta_{fd} + \sum_{n=0}^{\infty} \Xi_n \psi_n(Y) e^{-\lambda_n X^*} \quad (5.7)$$

mit den Eigenfunktionen  $\psi_n(Y)$ , die das Sturm-Liouville-Problem

$$\frac{\partial^2 \psi_n(Y)}{\partial Y^2} + \lambda_n \frac{C(Y)}{16} \psi_n(Y) = 0 \quad (5.8)$$

$$\psi_n(Y = -1) = \psi_n(Y = 1) = 0 \quad (5.9)$$

erfüllen. Hierbei entspricht  $\lambda_n$  einem unendlichen Satz an Eigenwerten, die die Randbedingungen an den Wänden erfüllen. Die Eigenkoeffizienten der Reihe sind gegeben mit

$$\Xi_n = \frac{-\int_{-1}^1 \psi_n \frac{C(Y)}{16} \theta_{fd} dY}{\int_{-1}^1 \psi_n^2 \frac{C(Y)}{16} dY}. \quad (5.10)$$

Die normierten Wandwärmestromdichten können nach dem Lösen des Sturm-Liouville-Problems wie folgt bestimmt werden:

$$\Phi_{W1}^{(i)} = 4 \left. \frac{\partial \theta_{fd}^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \Xi_n \left. \frac{\partial \psi_n^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=1} e^{-\lambda_n X^*} \quad (5.11)$$

$$\Phi_{W2}^{(i)} = - \left( 4 \left. \frac{\partial \theta_{fd}^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \Xi_n \left. \frac{\partial \psi_n^{(i)}}{\partial Y} \right|_{Y=-1} e^{-\lambda_n X^*} \right) \quad (5.12)$$

Das Problem wurde bereits in der Vergangenheit für eine Poiseuille-Strömung mit identischen<sup>50</sup> und unterschiedlichen Wandtemperaturen<sup>54</sup> gelöst und wird nun um einen Couette-Anteil und die Schlupfströmung erweitert. Das Sturm-Liouville-Problem (5.8) wird dazu mit dem iterativen Verfahren nach Berry und De Prima<sup>120</sup> gelöst. Dieses ist wie folgt zusammengefasst: Wenn  $(\lambda_n)_k$  die  $k$ -te Näherung des Eigenwertes  $\lambda_n$  und  $[\psi_n(Y)]_k$  eine Lösung der Differentialgleichung (5.8) ist, die die Randbedingung  $[\psi_n(-1)]_k = 0$  erfüllt, und wenn weiter gilt

$$\int_{-1}^1 (\psi_n)_k^2 \frac{C(Y)}{16} dY = 1, \quad (5.13)$$

dann ist die nächste Näherung des Eigenwertes gegeben durch

$$(\lambda_n)_{k+1} = (\lambda_n)_k - [\psi_n(1)]_k \cdot [\psi_n'(1)]_k. \quad (5.14)$$

Die Näherung konvergiert monoton gegen den Eigenwert  $\lambda_n$ , der die Randbedingung  $[\psi_n(1)]_k = 0$  erfüllt. Eine Startnäherung des  $n$ -ten Eigenwerts kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\lambda_n = \pi^2 \left( \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{C(Y)}{16}} dY \right)^{-2} (n+1)^2 + O(n) \quad (5.15)$$

Zur numerischen Integration der Differentialgleichung (5.8) wird ein Runge-Kutta-Verfahren mit der adaptiver Schrittweitenanpassung nach Dormand und Prince<sup>121</sup> verwendet. Hier ist die Ableitung der Eigenfunktion an der unteren Wand  $[\psi'_n(-1)]_k$  zunächst frei wählbar und wird mit einem Bisektionsverfahren so angepasst, dass (5.13) erfüllt ist. Der Eigenkoeffizient  $\Xi_n$  folgt durch numerische Integration des Zählers in (5.10), der Nenner ist gemäß (5.13) eins.

### 5.1.2 Poiseuille-Strömung

Für eine laminare, vollständig ausgebildete Poiseuille-Strömung ist das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil eine Parabel der Form:

$$C^{(P)}(Y) = \frac{3}{2} (1 - Y^2) \quad (5.16)$$

Im Unendlichen ist das Temperaturfeld vollständig ausgebildet und unabhängig von  $X^*$ . Aus diesem linearen Temperaturverlauf nach (2.105) und der Definition der dimensionslosen Temperatur (5.1) folgt für die beiden betrachteten Fälle und einen Gasverdünnungsparameter  $\delta \rightarrow \infty$  die Form

$$\theta_{fd}^{(1/2)} = \pm 0,5Y + 0,5, \quad (5.17)$$

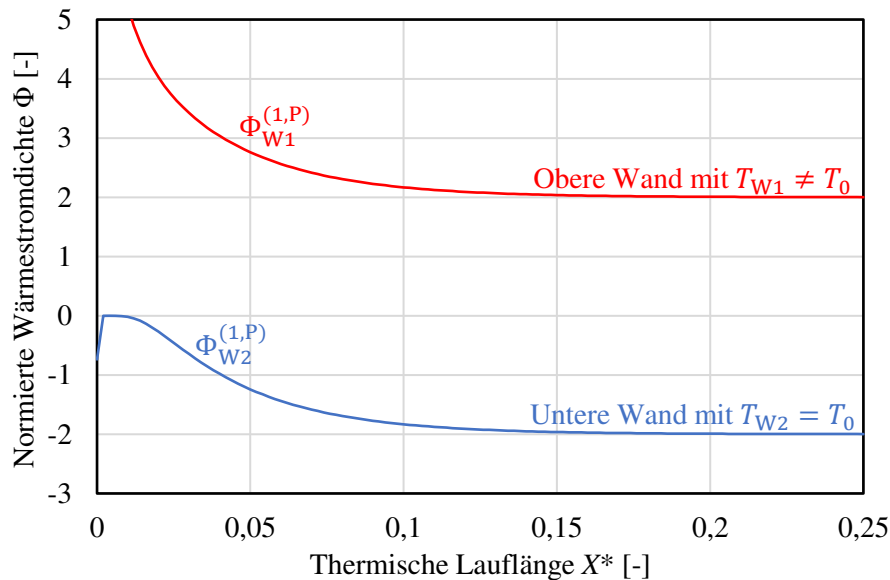
mit positiver(+) Steigung für den Temperaturreandbedingungstyp (1) und negativer(-) Steigung für den Typ (2). Aufgrund der Symmetrie des Geschwindigkeitsprofils gilt für die normierten Wärmestromdichten

$$\Phi_{W1}^{(1,P)} = \Phi_{W2}^{(2,P)} \quad (5.18)$$

$$\Phi_{W2}^{(1,P)} = \Phi_{W1}^{(2,P)} \quad (5.19)$$

sodass die Betrachtung des Falls (1,P) ausreichend ist. Dieser beschreibt eine vollständig ausgebildete Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung  $T_{W1} \neq T_0$  und die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung  $T_{W2} = T_0$  aufweist. Dieser Fall wird bereits in [54] untersucht. Die Ergebnisse werden für diese Arbeit reproduziert und sind in **Tab. B.1** für die ersten zehn Eigenwerte zusammengefasst. Die reproduzierten Werte stimmen bis zur sechsten Stelle mit den in der Literatur angegebenen Werten überein.

In der **Abb. 5.2** sind die normierten Wärmestromdichten  $\Phi$  für den Fall (1,P) in Abhängigkeit von der thermischen Laufkoordinate  $X^*$  dargestellt. Die normierten Wärmestromdichten streben für  $X^* \rightarrow \infty$  gegen  $\Phi_{W2}^{(P,1)} = -2$  für die untere Wand und gegen  $\Phi_{W1}^{(P,1)} = 2$  für die obere Wand. Für  $X^* \rightarrow 0$  strebt der Wert der normierten Wandwärmestromdichte der oberen Wand gegen unendlich,



**Abb. 5.2** Normierte Wandwärmestromdichten für den Fall (1,P) aufgetragen gegen die thermische Lauflänge  $X^*$ : Eine vollständig ausgebildete Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ )

während der Wert für die untere Wand gegen null strebt. Das Einknicken des Wertes der unteren Wand für  $X^* = 0$  ist auf das Abbrechen der unendlichen Reihe in (5.7) zurückzuführen.

### 5.1.3 Couette-Strömung

Für die Couette-Strömung werden zwei weitere Geschwindigkeitsprofile betrachtet. Im ersten Fall C1 wird die obere Wand bewegt und die untere Wand steht, sodass sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil mit positiver (+) Steigung einstellt. Im zweiten Fall C2 wird die untere Wand bewegt und die obere Wand steht, sodass die Steigung negativ (-) ist. Es gilt:

$$C(Y)^{(C1/C2)} = 1 \pm Y \quad (5.20)$$

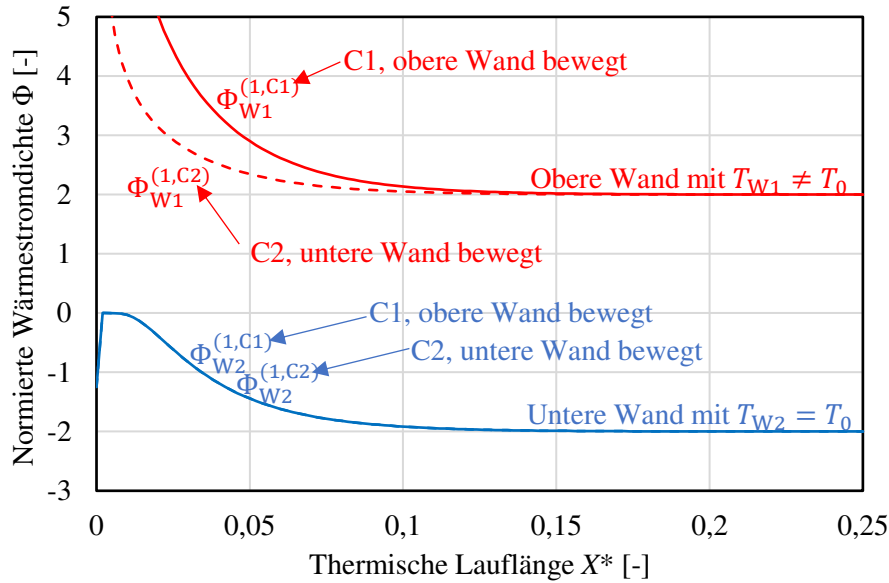
Das vollständig ausgebildete, dimensionslose Temperaturprofil ist identisch zu dem der Poiseuille-Strömung (5.17). Durch das Ausnutzen der Punktsymmetrie der Couette-Profile kann die Anzahl der zu ermittelnden normierten Wärmestromdichten erneut reduziert werden, sodass es genügt, die Fälle (1,C1) und (1,C2) zu betrachten.

$$\Phi_{W1}^{(1,C1)} = \Phi_{W2}^{(2,C2)} \quad (5.21)$$

$$\Phi_{W2}^{(1,C1)} = \Phi_{W1}^{(2,C2)} \quad (5.22)$$

$$\Phi_{W1}^{(1,C2)} = \Phi_{W2}^{(2,C1)} \quad (5.23)$$

$$\Phi_{W2}^{(1,C2)} = \Phi_{W1}^{(2,C1)} \quad (5.24)$$



**Abb. 5.3** Normierte Wandwärmestromdichten für die Fälle (1,C1) und (1,C2) aufgetragen gegen die thermische Lauflänge  $X^*$ : Eine vollständig ausgebildete Couette-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). In Fall C1 bewegt sich die obere Wand, während die untere Wand ruht. In Fall C2 bewegt sich die untere Wand, während die obere Wand ruht.

Das Graetz-Problem wurde für die Fälle (1,C1) und (1,C2) nach dem oben beschriebenen Vorgehen gelöst. Die Lösungen des Sturm-Liouville-Problems sind für die ersten zehn Eigenwerte in **Tab. B.6** und in **Tab. B.11** angegeben und die daraus resultierenden normierten Wärmestromdichten sind in **Abb. 5.3** dargestellt. Im Vergleich zur Poiseuille-Strömung ist die Einlaufänge der normierten Wärmestromdichte der oberen Wand im C1-Fall vergrößert, wohingegen diese für den C2-Fall reduziert ist. Dies entspricht den Erwartungen, dass eine Wandbewegung den advektiven Energietransport nahe der Wand erhöht. Bemerkenswert ist, dass die Verläufe der normierten Wärmestromdichten beider Couette-Fälle an der unteren Wand, also der Wand mit  $T_W = T_0$ , identisch sind.

#### 5.1.4 Couette-Poiseuille-Strömung

Eine direkte Superposition der Temperaturfelder der Poiseuille- und Couette-Strömungen ist nicht möglich. Allerdings kann in hinreichend guter Näherung angenommen werden, dass für die normierten Wärmestromdichten

$$\Phi_j^{(i)}(X^*) \approx \left(1 - \frac{c_{W1} + c_{W2}}{2\bar{c}}\right) \Phi_j^{(i,P)}(X^*) + \frac{c_{W1}}{2\bar{c}} \Phi_j^{(i,C1)}(X^*) + \frac{c_{W2}}{2\bar{c}} \Phi_j^{(i,C2)}(X^*) \quad (5.25)$$

gilt. Die Näherung wird exemplarisch an den folgenden drei Fällen untersucht:

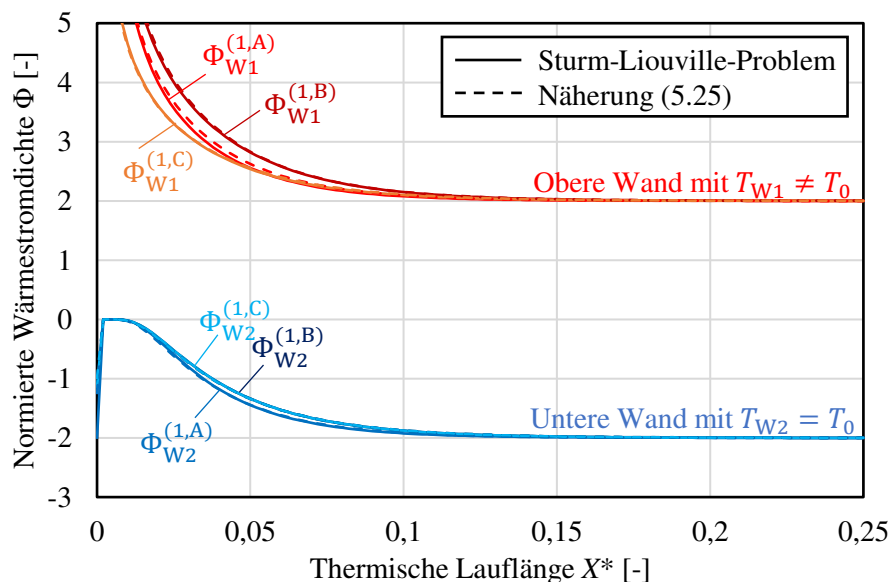
1,A Rechteckiges Strömungsprofil:  $C(Y) = 1$

1,B Couette-Poiseuille-Strömung, wobei die obere Wand mit mittlerer Strömungsgeschwindigkeit bewegt wird:  $C(Y) = -\frac{3}{4}Y^2 + 0,5Y + \frac{5}{4}$

1,C Couette-Poiseuille-Strömung, wobei die unterer Wand mit mittlerer Strömungsgeschwindigkeit bewegt wird:  $C(Y) = -\frac{3}{4}Y^2 - 0,5Y + \frac{5}{4}$

Für alle drei Fälle wird davon ausgegangen, dass die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ), also erneut eine Temperaturrandbedingung gemäß Typ 1 vorliegt.

Zur Untersuchung der Näherung wird das Graetz-Problem für diese drei Fälle gemäß dem oben beschriebenen Vorgehen gelöst, indem das Sturm-Liouville-Problem behandelt wird. Die daraus resultierenden Verläufe der normierten Wandwärmestromdichten werden in [Abb. 5.4](#) mit der Näherung nach (5.25) gegenübergestellt. Die normierten Wärmestromdichten an der unteren Wand werden mit sehr guter Genauigkeit durch die Näherung wiedergegeben. An der oberen Wand gibt es geringe Abweichungen, jedoch lässt sich die Näherung weiterhin als gut bewerten. Die größten Abweichungen treten beim rechteckigen Geschwindigkeitsprofil (A) auf. Aufgrund der insgesamt guten Übereinstimmung wird davon ausgegangen, dass die vorgestellte Näherung ausreichend für die Modellierung der Wandwärmeströme im Kontext einer Spaltströmung ist.



**Abb. 5.4** Gegenüberstellung der Näherung für die normierten Wärmestromdichten nach (5.25) mit den aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems resultierenden Werten. Vergleich für drei unterschiedliche, vollständig ausgebildete Geschwindigkeitsprofile A (rechteckiges Profil), B (Couette-Poiseuille obere Wand bewegt) und C (Couette-Poiseuille untere Wand bewegt). Die obere Wand hat eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ).

### 5.1.5 Schlupfströmungen

Abschließend werden die normierten Wärmestromdichten unter Berücksichtigung des viskosen Geschwindigkeitsschlupfs und des Temperatursprungs ermittelt. Durch den Temperatursprung entspricht die Gastemperatur direkt an der Wand in diesem Fall jedoch nicht mehr der Wandtemperatur, sodass die Dirichlet-Randbedingungen schwerer zu harmonisieren sind. Aus diesem Grund wird in der Modellvorstellung angenommen, dass die Gastemperatur an der Wand weiterhin der Wandtemperatur entspricht, aber dann unmittelbar der Temperatursprung auftritt. Für die Temperaturrandbedingung vom Typ (1) lautet das dimensionslose, vollständig ausgebildete Temperaturprofil dann:

$$Y = -1 \quad : \quad \theta_{\text{fd}} = 0 \quad (5.26)$$

$$-1 < Y < 1 \quad : \quad \theta_{\text{fd}} = 0,5 + 0,5 \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + 0,5 \frac{\delta}{\zeta_T}} \right) Y \quad (5.27)$$

$$Y = 1 \quad : \quad \theta_{\text{fd}} = 1 \quad (5.28)$$

Die Integration der Differentialgleichung der Eigenfunktion startet formal mathematisch nicht bei  $Y = -1$ , sondern bei  $Y \rightarrow -1$ , also sehr nahe der unteren Wand. Der Startwert der Integration ist nicht null sondern wird gemäß des Temperatursprungs aus dem angenommenen Gradienten der Eigenfunktion nahe der Wand bestimmt. Es wird bis zur oberen Wand integriert und dann der Temperatursprung auf die Eigenfunktion angewendet.<sup>i</sup> Die Formulierungen der Sprünge der Eigenfunktion an den Wänden lauten:

$$\psi_n(Y \rightarrow -1) = 2 \frac{\zeta_T}{\delta} \left. \frac{d\psi_n}{dY} \right|_{Y \rightarrow -1} \quad (5.29)$$

$$\psi_n(Y = 1) = \psi_n(Y \rightarrow 1) + 2 \frac{\zeta_T}{\delta} \left. \frac{d\psi_n}{dY} \right|_{Y \rightarrow 1} \quad (5.30)$$

Damit ist eine lösbare Formulierung gefunden, welche nach dem oben beschriebenen Verfahren gelöst werden kann. Da der Temperaturgradient nur in der Nähe der Wand und nicht unmittelbar an der Wand definiert ist, muss die Definition der normierten Wärmestromdichten formal angepasst werden:

$$\Phi_1^{(i)} = 4 \left. \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow 1} \quad \Phi_2^{(i)} = -4 \left. \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow -1} \quad (5.31)$$

Die Symmetriebeziehungen, die für die Poiseuille- und Couette-Strömung gefunden wurden, sind weiterhin auch für verdünnte Gase gültig. Das vollständig ausgebildete, dimensionslose Strömungsprofil, unter Berücksichtigung der Gasverdünnung, ist mit (2.95) gegeben. Für die nachfolgenden Betrachtungen wird der Temperaturschlupf nicht berücksichtigt.<sup>ii</sup> Es werden zunächst erneut Lösungen für die Poiseuille-Strömung (P) und die beiden eingeführten Couette-Fälle (C1) und (C2)

<sup>i</sup>Innerhalb der Implementierung sind die Integrationsgrenzen echt zu  $Y = 1$  bzw.  $Y = -1$  gewählt.

<sup>ii</sup>Wenn dieser berücksichtigt wird, kann nicht mehr von einer vollständig ausgebildeten Strömung ausgegangen werden.

bei verschiedenen Gasverdünnungsparametern bestimmt. Anschließend wird die Gültigkeit des Superpositionsansatzes für verdünnte Strömungen überprüft.

Das Problem wird für verschiedene Gasverdünnungsparameter im Bereich der Schlupfströmung gelöst. Die Lösungen des Sturm-Liouville-Problems der verdünnten Poiseuille-Strömungen sind für die ersten zehn Eigenwerte **Tab. B.2 – Tab. B.5** zu entnehmen. Die daraus resultierenden normierten Wandwärmestromdichten sind in **Abb. 5.5** dargestellt. Für große Gasverdünnungsparameter  $\delta$  strebt die Lösung gegen die bereits bekannte Kontinuumslösung. Mit sinkendem Gasverdünnungsparameter  $\delta$  verringert sich der Wärmeübergang und die thermische Einlaufänge ist leicht vergrößert.

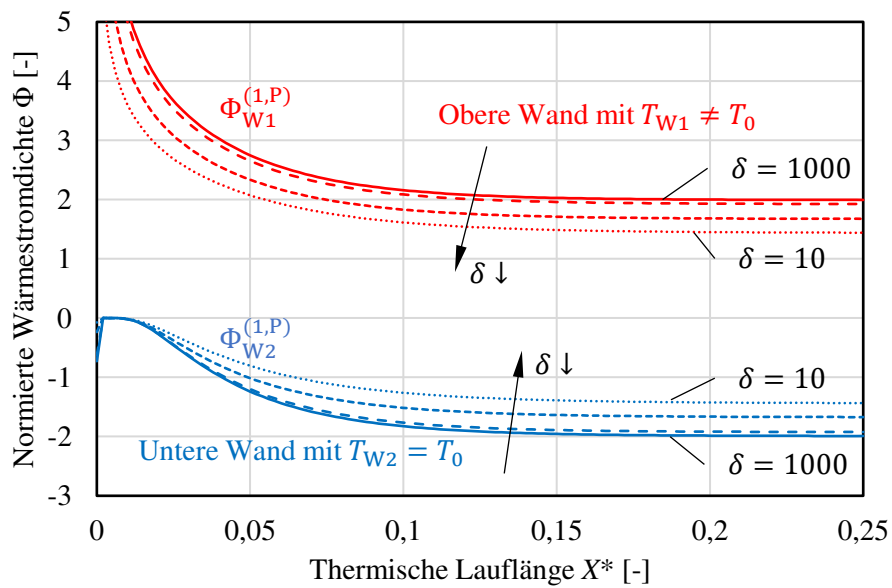
Die Lösungen des Sturm-Liouville-Problems der zwei betrachteten verdünnten Couette-Strömungen sind für die ersten zehn Eigenwerte **Tab. B.7 – Tab. B.10** sowie **Tab. B.12 – Tab. B.15** zu entnehmen. Die daraus resultierenden normierten Wandwärmestromdichten sind in **Abb. 5.6** sowie **Abb. 5.7** dargestellt. Erneut sind verschiedene Gasverdünnungsparameter im Bereich der Schlupfströmungen dargestellt. Wie bei der Poiseuille-Strömung verringert sich der Betrag der normierten Wärmestromdichten mit sinkendem Gasverdünnungsparameter  $\delta$ . Die Werte für das vollständig ausgebildete Temperaturprofil sind für alle betrachteten Geschwindigkeitsprofile identisch. Für die Couette-Strömungen ist der Einfluss der Gasverdünnung auf die thermische Einlaufänge an der oberen Wand größer als bei der Poiseuille-Strömung. Demgegenüber ist der Einfluss an der unteren Wand geringer.

Abschließend wird überprüft, ob der eingeführte Superpositionsansatz (5.25) weiterhin für die verdünnten Strömungen greift. Hierzu werden erneut die eingeführten Fälle A, B und C für das Geschwindigkeitsprofil herangezogen, allerdings diesmal unter Berücksichtigung der Gasverdünnung gemäß (2.95).<sup>iii</sup> Das Ergebnis ist für den Gasverdünnungsparameter  $\delta = 10$ , also der unteren Grenze der Schlupfströmung, in **Abb. 5.8** dargestellt.<sup>iv</sup> Die Abbildungsgüte des Superpositionsansatzes ist unabhängig vom Gasverdünnungsparameter gewährleistet und somit können auch die Schlupfströmungen superponiert werden.

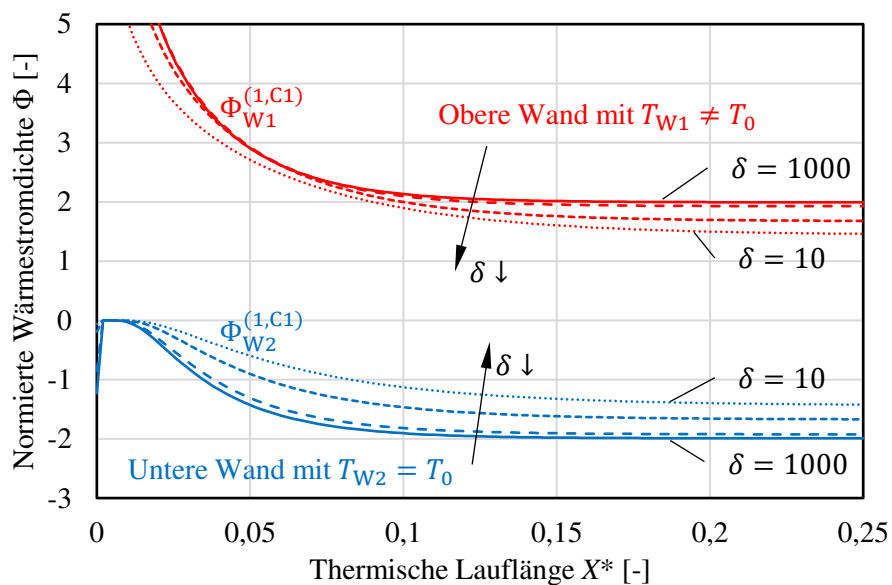
---

<sup>iii</sup>Temperaturschlupf erneut nicht berücksichtigt.

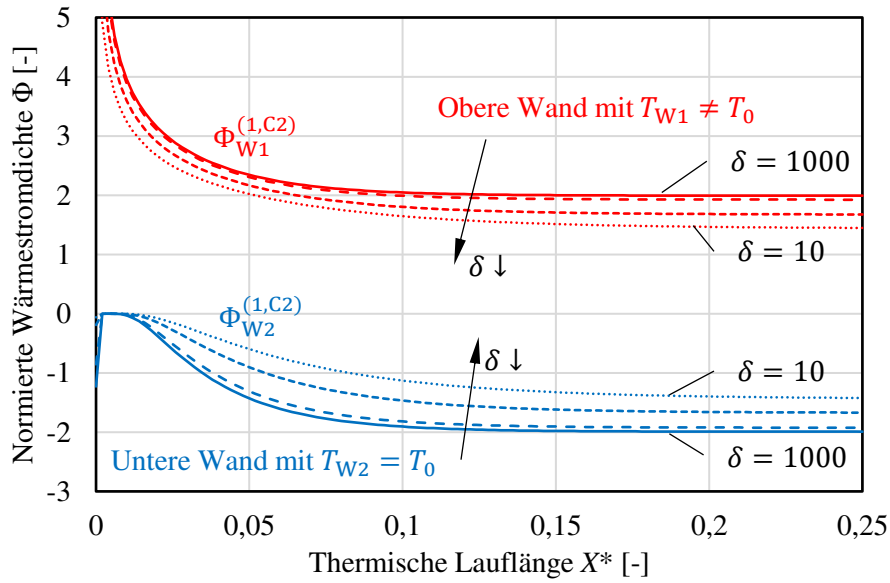
<sup>iv</sup>Größere Gasverdünnungsparameter wurden ebenfalls überprüft, sind aber hier nicht dargestellt.



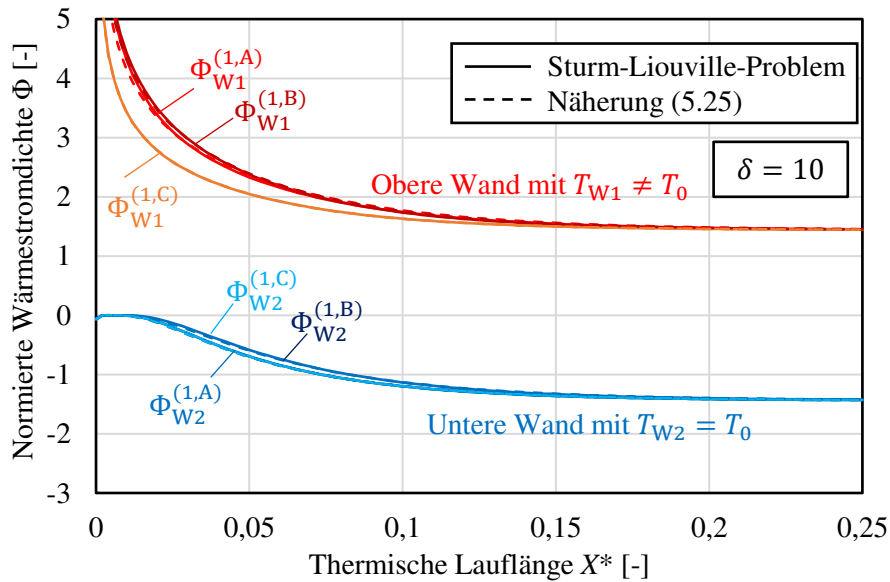
**Abb. 5.5** Normierte Wandwärmestromdichten für den Fall (1,P) aufgetragen gegen die thermische Lauflänge  $X^*$ : Eine vollständig ausgebildete Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Ergebnisse für verschiedene Gasverdünnungsparameter  $\delta$  im Schlupfströmungsbereich.



**Abb. 5.6** Normierte Wandwärmestromdichten für den Fall (1,C1) aufgetragen gegen die thermische Lauflänge  $X^*$ : Eine vollständig ausgebildete Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Ergebnisse für verschiedene Gasverdünnungsparameter im Schlupfströmungsbereich.



**Abb. 5.7** Normierte Wandwärmestromdichten für den Fall (1,C2) aufgetragen gegen die thermische Lauflänge  $X^*$ : Eine vollständig ausgebildete Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Ergebnisse für verschiedene Gasverdünnungsparameter im Schlupfströmungsbereich.



**Abb. 5.8** Gegenüberstellung der Näherung für die normierten Wärmestromdichten nach (5.25) mit den aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems resultierenden Werten. Vergleich für drei unterschiedliche, vollständig ausgebildete Geschwindigkeitsprofile A (rechteckiges Profil), B (Couette-Poiseuille obere Wand bewegt) und C (Couette-Poiseuille untere Wand bewegt). Die obere Wand hat eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Ergebnisse für einen Gasverdünnungsparameter von  $\delta = 10$ .

### 5.1.6 Zwischenfazit

Um künftig den Wärmeübergang in Spalten von Schraubenspindelvakuumumpen besser abbilden zu können, wurde ein Modell entwickelt, das diesen für Couette-Poiseuille-Strömungen im Schlupfbereich beschreibt. Es basiert auf der Lösung des Graetz-Problems, das in anderen Arbeiten bereits für Poiseuille-Strömungen gelöst wurde. Das Graetz-Problem kann auf ein Eigenwertproblem der Analysis, das sogenannte Sturm-Liouville-Problem, überführt werden, welches numerisch zu lösen ist. Zur Überprüfung des eigenen Algorithmus wurden zunächst die Lösungen für die Poiseuille-Strömung mit sehr hoher Genauigkeit reproduziert. Anschließend wurde der Algorithmus verwendet, um das Problem für eine Couette-Strömung zu lösen. Zudem wurden Lösungen für Couette- und Poiseuille-Strömungen für verschiedene Gasverdünnungsparameter ermittelt. Es wird gezeigt, dass diese Lösungen in guter Näherung superponiert werden können, um den Wärmeübergang für eine Couette-Poiseuille-Strömung abzubilden. Somit konnte insgesamt ein Wärmeübergangsmodell entwickelt werden, das mit wenigen Gleichungen und Tabellen in die Modellierung von Spaltströmungen einfließen kann.

## 5.2 Druckverlust im Einlauf einer laminaren Poiseuille-Strömung

In einer nicht vollständig ausgebildeten Strömung entsteht durch die Änderung des Strömungsprofils ein Impulsverlust. Zudem ist im Bereich der Einlaufströmung die Wandschubspannung größer als im Vergleich zur vollständig ausgebildeten Strömung. Beide Effekte sind insbesondere bei kurzen Spalten von Bedeutung. Dieser zusätzliche Druckverlust wird als Überdruckverlust (engl. „excess pressure drop“)  $K$  bezeichnet.<sup>47</sup> Für einen planparallelen Spalt unendlicher Breite mit konstanter Höhe  $H$  und inkompressibler Strömung ist dieser wie folgt definiert:

$$K(x) = \frac{\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} p(0, y) - p(x, y) dy}{\rho \bar{c}_2^2} - f_{\text{fd}} \frac{x}{D_h} \quad (5.32)$$

Der hydraulische Durchmesser ist für diesen Spalt mit der doppelten Spalthöhe  $D_h = 2H$  gegeben, und die Reynolds-Zahl der Strömung lautet demnach

$$Re = \frac{\rho \bar{c} 2H}{\mu}.$$

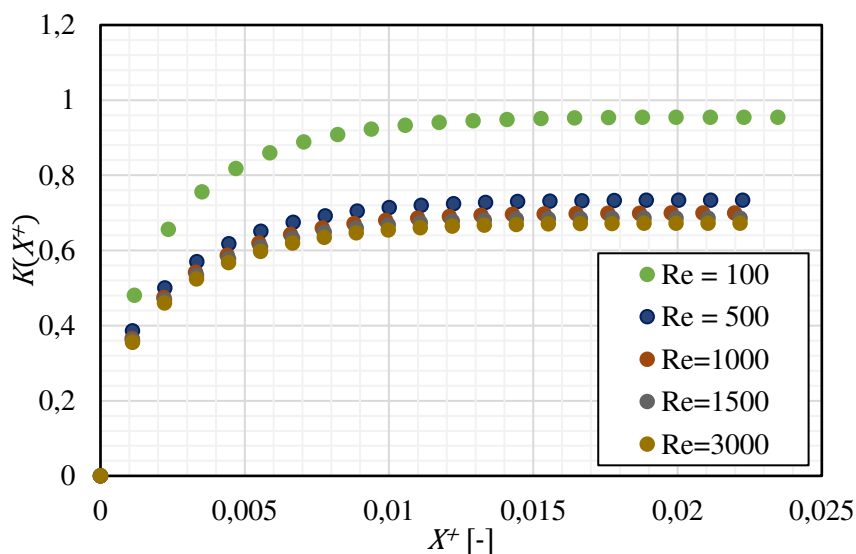
Es wird von einer konstanten Viskosität  $\mu$  ausgegangen. Der Wert von  $K$  nähert sich mit steigendem  $x$  asymptotisch einem konstanten Wert  $K_\infty$ . Chen<sup>47</sup> wählt als Kriterium für die Einlauflänge  $L_h$ , dass der Wert der maximalen Strömungsgeschwindigkeit, also der Wert in der Mitte zwischen den parallelen Wänden, 99% des Wertes der vollständig ausgebildeten Strömung haben muss. Für eine laminare Poiseuille-Strömung entspricht dieser dem 1,5-fachen der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Für die untersuchten laminaren Strömungen ( $Re > 100$ ) gibt Chen<sup>47</sup> Näherungsgleichungen für die Einlauflänge  $L_h$  und den Gesamtüberdruckverlust  $K_\infty$  der Strömungen an:

$$K_\infty = 0,64 + \frac{38}{Re} \quad (5.33)$$

$$\frac{L_h}{D_h} = 0,0265 Re + \frac{0,79}{0,02 Re + 1} \quad (5.34)$$

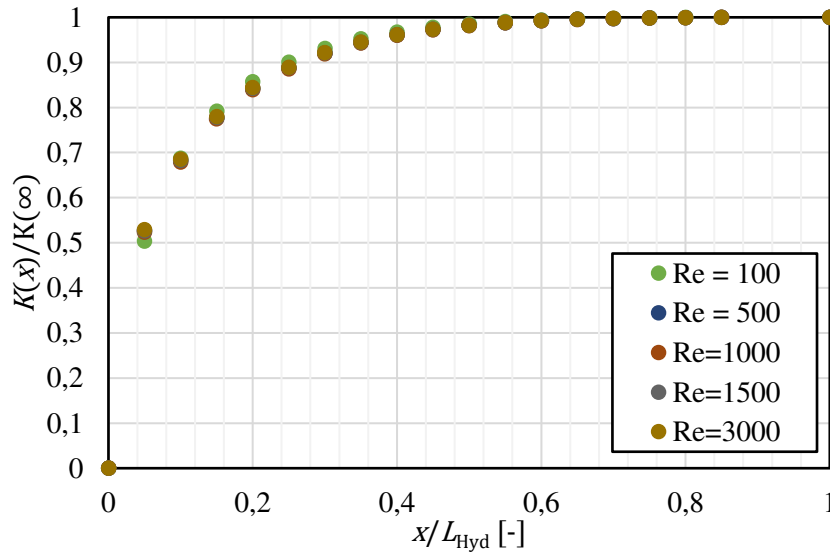
Eine Näherungslösung für den Verlauf, die direkt den Wert von  $K$  am Ort  $x$  bestimmt, wird nicht angegeben. Dies ist allerdings für die einfache Implementierung in die eindimensionale Theorie wünschenswert.

Um eine Näherungslösung für den Überdruckverlust zu ermitteln, werden laminare, inkompressible CFD-Simulationen für einen planparallelen Spalt unendlicher Breite mit  $H = 2\text{ mm}$  Höhe durchgeführt. Am Spalteintritt wird ein rechteckiges Geschwindigkeitsprofil vorgegeben und am Spaltaustritt ein statischer Druck. Die Fluidomäne wird äquidistant, orthogonal vernetzt mit einer Zellgröße  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,05\text{ mm}$ . Die Strömung gilt als ausgebildet, wenn der Wert der maximalen Strömungsgeschwindigkeit 99,9% des Wertes der vollständig ausgebildeten Strömung entspricht. Die geforderte Abweichung ist also geringer als die bei Chen<sup>47</sup>. Es wurde ein strengeres Kriterium gewählt, da im Rahmen der Untersuchungen festgestellt wurde, dass sonst noch eine signifikante Änderung des Überdruckverlusts festzustellen ist. Die Ergebnisse der Variationsrechnung sind in [Abb. 5.9](#) dargestellt. Aufgetragen ist der Überdruckverlust  $K$  gegen die hydrodynamische Lauflänge  $X^+ = \frac{x}{D_h Re}$  für verschiedene Reynolds-Zahlen.



**Abb. 5.9** Überdruckverlust einer laminaren Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Spalt für verschiedene Reynolds-Zahlen aufgetragen gegen die hydrodynamische Lauflänge  $X^+ = \frac{x}{D_h Re}$ .

Es ist deutlich ersichtlich, dass insbesondere für niedrige Reynolds-Zahlen der Überdruckverlust sehr groß wird. Um den Einfluss der Reynolds-Zahl zu eliminieren wird eine neue Darstellung gewählt. Dazu wird der Überdruckverlust  $K(x)$  auf den im Rahmen der Simulation ermittelten Gesamtüberdruckverlust  $K_\infty$  bezogen und die Laufkoordinate  $x$  auf die Einlauflänge  $L_h$  normiert. Das Resultat ist in [Abb. 5.10](#) dargestellt. Mit der gewählten Normierung fallen die Ergebnisse auf eine Kurve zusammen. Kleinere Abweichungen zeigen sich lediglich für  $Re = 100$ .



**Abb. 5.10** Normierter Überdruckverlust einer laminaren Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Spalt für verschiedene Reynolds-Zahlen aufgetragen gegen die normierte hydrodynamische Lauflänge  $x/L_h$ .

Aufgrund des exponentiellen Verlaufs wird die normierte Lösung durch eine Summe von Exponentialfunktionen approximiert, sodass sich folgende Näherungsfunktion ergibt:

$$\frac{K\left(\frac{x}{L_h}\right)}{K(\infty)} = 1 - 0,63e^{-7\frac{x}{L_h}} - 0,37e^{-53\frac{x}{L_h}} \quad (5.35)$$

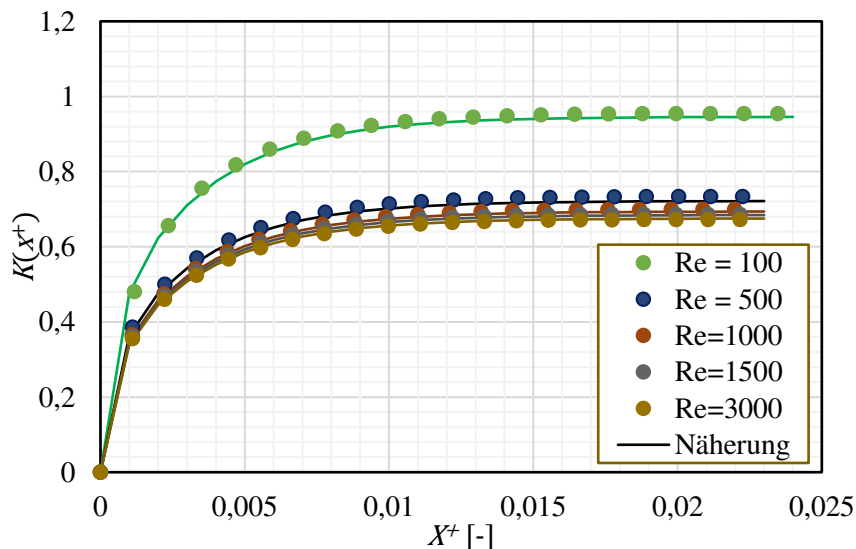
Aus den Ergebnissen der CFD-Simulationen wurden über eine Regressionsanalyse Näherungsgleichungen für die Einlauflänge und den eingelaufenen Überdruckverlust in analoger Form zu Chen<sup>47</sup> ermittelt. Diese lauten:

$$K_\infty = 0,666 + \frac{28}{Re} \quad (5.36)$$

$$\frac{L_h}{D_h} = 0,0225 Re + \frac{0,3}{0,018 Re + 1} \quad (5.37)$$

Die Koeffizienten für den Überdruckverlust sind ähnlich zu denen, die Chen<sup>47</sup> angibt. Für die Einlauflänge ist die Abweichung größer. Obwohl ein strengeres Kriterium für die vollständig ausgebildete Strömung verwendet wurde, ist die aus den CFD-Simulationen ermittelte Einlauflänge kleiner als die von Chen angegebene. Mit den eingeführten Näherungen kann der Verlauf des Überdruckverlustes  $K$  über die hydrodynamische Lauflänge  $X^+$  berechnet werden. Der Vergleich der Näherungslösung mit den Ergebnissen der CFD-Simulation ist in [Abb. 5.11](#) dargestellt. Die Näherung ist in guter Übereinstimmung mit den CFD-Daten.

Der Überdruckverlust berücksichtigt sowohl die vergrößerte Wandreibung der Einlaufströmung als auch die Veränderung des Geschwindigkeitsprofils. Er steht somit im Zusammenhang mit dem scheinbaren Reibbeiwert (3.46) der Strömung. Für eine inkompressible Strömung zwischen zwei



**Abb. 5.11** Vergleich der Näherungslösung (5.35) für den Überdruckverlust einer laminaren Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Spalt mit CFD-Ergebnissen als Funktion der hydrodynamischen Lauflänge  $X^+ = \frac{x}{D_h Re}$  für verschiedene Reynolds-Zahlen  $Re$ .

parallelen Wänden lautet der Zusammenhang:<sup>13</sup>

$$f_{\text{app}} = f_{\text{fd}} + \frac{dK(x)}{dx} \cdot D_h \quad (5.38)$$

Dieser kann als Näherung im Rahmen des 1D-Modell (3.60) verwendet werden, um den zusätzlichen Druckverlust einer nicht vollständig ausgebildeten Strömung zu berücksichtigen.

### 5.2.1 Zwischenfazit

Um die Abbildungsgüte des 1D-Modells für kurze Spalten zu verbessern, wurde ein Modell entwickelt, das den zusätzlichen Druckverlust einer nicht vollständig ausgebildeten Strömung ermittelt. Es wurde ein Modell entwickelt, das diesen für eine laminare, inkompressible Poiseuille-Strömung in einem planparallelen Spalt abbildet. Durch eine geschickte Normierung kann der zusätzliche Druckverlust (Überdruckverlust) mittels drei Gleichungen angenähert werden. Diese Näherungslösung setzt ein rechteckiges Geschwindigkeitsprofil voraus, das sich über die Lauflänge zu dem charakteristischen parabolischen Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Poiseuille-Strömung ausbildet. Dementsprechend werden ein Ablösen der Strömung am Spalteintritt oder ein möglicherweise vorausgebildetes Profil nicht berücksichtigt. Ebenfalls nicht berücksichtigt sind bisher der Einfluss der Gasverdünnung, die turbulente Strömung oder der Einfluss einer bewegten Wand.

## 5.3 Nicht-Gleichgewichtsrandbedingung für Ansys-CFX

Die mehrdimensionale numerische Strömungssimulation ist ein gängiger, aber nicht trivialer Ansatz zur Simulation des Betriebsverhaltens von Schraubenmaschinen. Aktuelle Herausforderungen bei der numerischen Strömungssimulation (CFD) von Schraubenmaschinen liegen insbesondere in

der Turbulenzmodellierung und der Vernetzung.<sup>39,40,42</sup> Eine Anpassung von CFD-Simulationen an Schraubenvakuumpumpen ist schwierig, da die Navier-Stokes-Gleichungen für niedrige Druckbereiche nur begrenzt gültig sind. Der Anwendungsbereich kann jedoch durch die Verwendung von Geschwindigkeitsschlupf- und Temperatursprung-Randbedingungen an den Festkörperoberflächen auf höhere Knudsen-Zahlen (z. B. niedrigere Druckbereiche) erweitert werden. Auch wenn die vollständige Simulation von Schraubenvakuumpumpen immer noch eine Herausforderung darstellt, können diese Randbedingungen verwendet werden, um isolierte Effekte wie Spaltströmungen oder inhomogene Druckverteilungen in Arbeitskammern zu untersuchen. Ein gängiger kommerzieller CFD-Solver ist ANSYS CFX, der auch erfolgreich auf Schraubenmaschinen angewendet wird.<sup>35</sup> Er bietet jedoch keine Maxwell-Geschwindigkeitsschlupf- und Smoluchowski-Temperatursprung-Randbedingung.<sup>122</sup> In diesem Abschnitt werden diese Randbedingungen daher in Ansys CFX durch benutzerdefinierte Funktionen („user defined functions“) in ähnlicher Weise implementiert, wie dies im rhoCentralFOAM-Solver der Open-Source-Toolbox OpenFOAM der Fall ist. Die Randbedingungen werden durch Vergleich mit stationären OpenFOAM-Ergebnissen, DSMC-Ergebnissen und Messungen für eine Überschallplattenströmung validiert. Darüber hinaus werden die Randbedingungen durch einen Vergleich mit DSMC-Simulationen und Experimenten einer Gasströmung in einem Spalt zwischen einer rotierenden Welle und einer ebenen Gegenplatte verifiziert. Das untersuchte Fluid ist trockene Luft. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität wird in den nachfolgenden Simulationen mit dem Sutherland-Modell angenähert.

### 5.3.1 Implementierung in CFX

Der viskose Schlupf (engl. „Maxwell Velocity Slip“) hängt von der Wandschubspannung ab und kann daher mit der Randbedingung *finite slip* berechnet werden, die nativ von ANSYS CFX<sup>122</sup> bereitgestellt wird. Die Randbedingung ist nur für laminare Strömungen verfügbar. Diese Randbedingung bewirkt, dass das Fluid an der Wand gleitet, wenn die Wandschubspannung größer als eine vorgegebene kritische Spannung  $\tau_{\text{krit}}$  ist. Für den MVS wird die kritische Spannung mit  $\tau_{\text{krit}} = 0$  vorgegeben, da dieser direkt, also auch bei kleinsten Schubspannungen, auftritt. ANSYS CFX simuliert den Schlupf mit Hilfe einer beweglichen Wand, wobei die Wandgeschwindigkeit wie folgt berechnet wird:

$$\mathbf{c}_{\text{FiniteSlip}} = c_S \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_W}{|\boldsymbol{\tau}_W|} \left( \frac{|\boldsymbol{\tau}_W| - \tau_{\text{krit}}}{\tau_n} \right)^m e^{-\frac{Bp}{\tau_n}} \quad (5.39)$$

wobei  $c_S$  die reduzierte Schlupfgeschwindigkeit,  $\tau_n = 1\text{Pa}$  eine normierende Spannung,  $m$  ein positiver Exponent,  $B$  ein Druckkoeffizient und  $p$  der statische Druck ist. Wie gezeigt wird, hat der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{c}_{\text{FiniteSlip}}$  die gleiche Richtung wie der Wandschubspannungsvektor  $\boldsymbol{\tau}_W$ . Nach (2.84) ist der viskose Schlupf gegeben mit

$$\mathbf{c}_{MVS} = \beta_P \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\ell}{\mu} \boldsymbol{\tau}_W, \quad (5.40)$$

wobei das Tensorprodukt  $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})$  den Wandschubspannungsvektor  $\boldsymbol{\tau}_W$  ergibt. Daher kann (5.40) durch (5.39) dargestellt werden, wenn  $\tau_{\text{krit}} = 0$ ,  $m = 1$  und  $B = 0$  gesetzt werden. Es folgt:

$$\mathbf{c}_{\text{FiniteSlip}} = c_S \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_W}{\tau_n} \quad (5.41)$$

Die reduzierte Schlupfgeschwindigkeit ist gegeben mit

$$c_S = \beta_P \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\ell}{\mu} \cdot \tau_n. \quad (5.42)$$

Der **thermische Schlupf** (engl. **Maxwell Thermal Slip**) wird durch eine zusätzliche Wandgeschwindigkeit modelliert, die zur realen Wandgeschwindigkeit addiert wird, wobei der thermische Geschwindigkeitsschlupf nach Maxwell unter Berücksichtigung des lokalen Gradienten der statischen Temperatur  $T$  wie folgt berechnet wird:

$$\mathbf{c}_{\text{MTS}} = \beta_T \frac{\mu}{\rho T} \mathbf{S} \cdot \nabla T \quad (5.43)$$

Da der thermische Schlupf nur ein Modell für die Strömungsgeschwindigkeit in der wandnahen Knudsen-Schicht ist und die reale Strömungsgeschwindigkeit an der Wand immer noch gleich der Wandgeschwindigkeit ist, führt dieser Modellierungsansatz zu Ungenauigkeiten bei der Energieerhaltung (2.58). Wie die Energiegleichung zeigt, führt die zusätzliche modellierte Wandgeschwindigkeit zu einer zusätzlichen Reibungsarbeit aufgrund von Wandschubspannungen, die kompensiert werden muss, um den Energieerhaltungssatz zu erfüllen. Die Kompensation erfolgt durch eine zusätzliche Wärmestromdichte an der Wand, die aus der Wandschubspannung und der thermischen Gleitgeschwindigkeit wie folgt berechnet wird:

$$q_{\text{MTS}} = \mathbf{c}_{\text{MTS}} \cdot \boldsymbol{\tau}_w = \mathbf{c}_{\text{MTS}} \cdot \frac{\mathbf{c}_{\text{FiniteSlip}}}{c_S} \cdot \tau_n \quad (5.44)$$

Wenn das Finite-Slip-Modell verwendet wird, wird die Wandschubspannungsvariable *wall shear* in CFX nicht berechnet und kann nicht in den benutzerdefinierten Funktionen verwendet werden, weshalb eine Abhilfe erforderlich ist, die die Wandschubspannung  $\boldsymbol{\tau}_w$  aus der Finite-Slip-Lösung (5.41) berechnet.

In [123] wird die zusätzliche viskose Wärmeerzeugung mit einer modifizierten Wandtemperatur modelliert. Für ANSYS CFX funktioniert dieser Ansatz nicht, da die dynamische Viskosität und Wärmeleitfähigkeit an der Wand von der Wandtemperatur abhängt, sodass die Wandtemperatur aufgrund des Smoluchowski-Temperatursprungs und der viskosen Wärme-Randbedingung von sich selbst abhängen würde. Aus diesem Grund unterscheidet sich auch der Modellierungsansatz des Smoluchowski-Temperatursprungs von Le, Vu und Loc<sup>123</sup>.

Um den **Temperatursprung** zu simulieren, wird die Option *defined heat exchange parameter* von ANSYS CFX verwendet. Diese Option modelliert einen Wärmeübergang von einer Umgebungstemperatur auf den Rand der Fluidomäne mit einem vorgegebenen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$ . Die Temperatur auf dem Rand der Fluidomäne  $T_{\text{Fluid}}$  ist damit ein Simulationsergebnis. Zur Modellierung des Temperatursprungs wird die Umgebungstemperatur auf die Wandtemperatur  $T_W$  gesetzt und der Wärmeübergangskoeffizient so berechnet, dass der Smoluchowski-Temperatursprung auftritt. Die Randbedingungsgleichung für die Wandwärmestromdichte  $q_W$  lautet

$$q_W = \alpha \cdot (T_{\text{Fluid}} - T_W), \quad (5.45)$$

wobei  $\alpha$  der Wärmeübergangskoeffizient ist, der nach (2.89) durch

$$\alpha = \frac{k}{\zeta_T \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ell} \quad (5.46)$$

gegeben ist, wenn der Temperaturgradient senkrecht zur Wand durch die negierte Wandwärmestromdichte dividiert durch die Wärmeleitfähigkeit ersetzt wird:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla T = -\frac{q_W}{k} \quad (5.47)$$

Es kann sinnvoll sein,  $\alpha$  für  $\ell \rightarrow 0$  zu begrenzen, um die numerische Stabilität zu verbessern, da  $\alpha$  ansonsten gegen unendlich strebt. Allerdings war dies in dieser Arbeit nicht notwendig.

### 5.3.2 Überschallplattenströmung

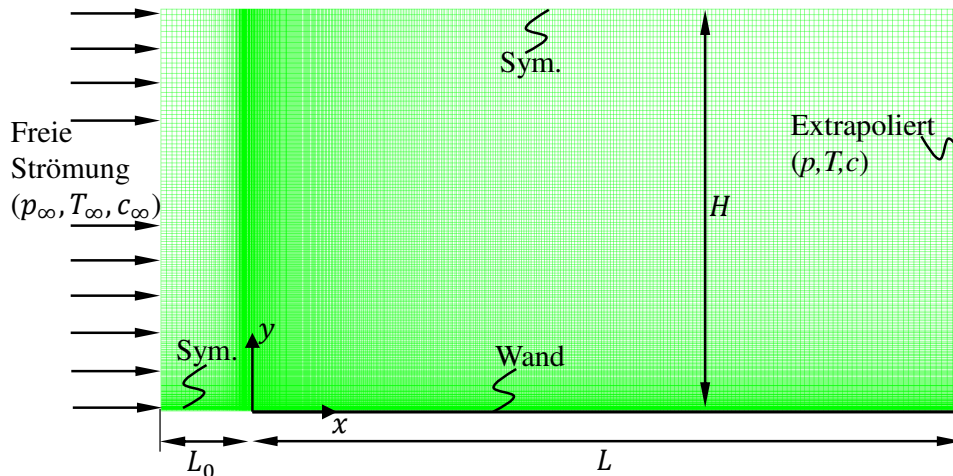
Das Netz und die Randbedingungen für den Fall einer Überschallplattenströmung sind in [Abb. 5.12](#) dargestellt. Die dimensionslosen Randbedingungen und die Abmessungen der Fluiddomäne sind in [Tab. 5.1](#) aufgeführt. Die Randbedingungen, wie z.B. die Mach-Zahl der freien Strömung  $M_\infty$ , die Wandtemperatur  $T_W$  und die Fluideigenschaften, sind gleich denen des Experiments in [\[124\]](#) gesetzt. Das verwendete Gas ist Stickstoff. Die Ergebnisse werden über der reziproken Knudsen-Zahl  $Kn_x^{-1} = x/\ell_\infty$  dargestellt, wobei  $x$  der Abstand von der Vorderkante und  $\ell_\infty$  die mittlere freie Weglänge der freien Strömung ist. Der Anstellwinkel der freien Strömung ist Null. Das Netz hat  $8 \cdot 10^4$  Zellen mit einer Verfeinerung zur Vorderkante und zur Plattenoberfläche, was zu einer minimalen Zellabmessung von  $\Delta x/\ell_\infty = \Delta y/\ell_\infty = 7,14$  führt. Die Ergebnisse von ANSYS CFX einschließlich der Randbedingungen werden mit Experimenten von Metcalf, Lillicrap und Berry [\[124\]](#) und mit Ergebnissen von dsmcFOAM+[\[125\]](#) und rhoCentralFoam[\[126\]](#) verglichen. Dazu wurden die in [\[106\]](#) gezeigten Ergebnisse einschließlich der in [\[123\]](#) dargestellten, viskosen Erwärmung reproduziert. <sup>v</sup> CFX- und rhoCentralFoam-Simulationen werden für das gleiche Netz durchgeführt. Für die DSMC-Simulation wird keine Netzverfeinerung verwendet. Die Größe der Kollisionzellen beträgt in der gesamten Domäne  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5\ell_\infty$ .

Die Ergebnisse für den statischen Druck  $p(y = 0)$  an der Plattenoberfläche sind in [Abb. 5.13](#) dargestellt. Der Druck ist normiert auf den Druck  $p_\infty$  der freien Strömung. Es sind keine deutlichen

<sup>v</sup>Dabei wurde festgestellt, dass das Vorzeichen des thermischen Kriechens in [\[106, 123\]](#) und in OpenFOAM<sup>[\[126\]](#)</sup> falsch dargestellt wird. Das thermische Kriechen muss mit einem Temperaturgradienten mit positivem Vorzeichen berechnet werden, da es einen Fluss von den kalten zu den warmen Regionen im Fluid darstellt. Für diese Veröffentlichung wird das Vorzeichen jedoch in einem lokalen Fork des OpenFOAM-Repositories korrigiert, in dem auch die viskose Erwärmung implementiert wird. Die Änderung des Vorzeichens wirkt sich nur geringfügig auf die dargestellten Ergebnisse aus, da diese weniger durch thermisches Kriechen beeinflusst werden.

**Tab. 5.1** Dimensionslose Geometrie- und Simulationsrandbedingungen für die untersuchte Überschallplattenströmung dargestellt in [Abb. 5.12](#). Randbedingung gemäß dem Experiment von Metcalf, Lillicrap und Berry [\[124\]](#).

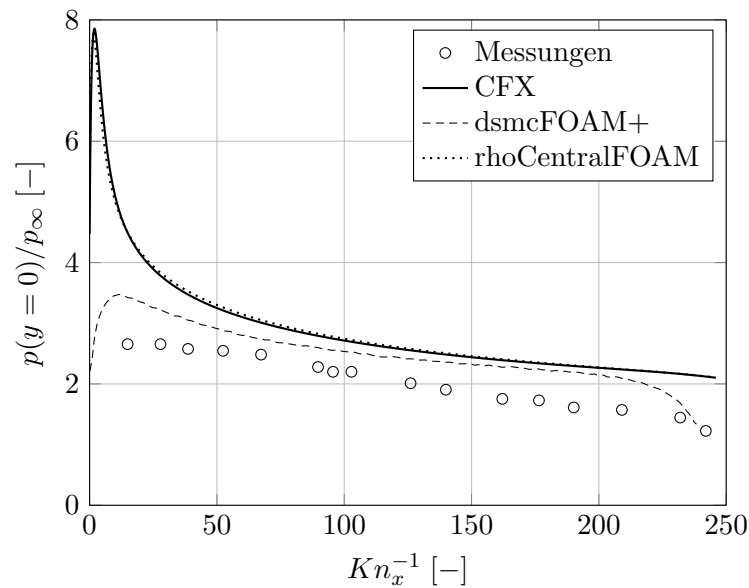
$Kn_x^{-1} = \frac{x}{\ell_\infty}$	$M_\infty$	$\frac{T_W}{T_\infty}$	$\frac{T_D}{T_\infty}$	$\gamma$	$Pr$	$\sigma_t$	$\sigma_E$	$\frac{L_0}{L}$	$\frac{H}{L}$
0...250	6,1	3,575	1,331	1,4	0,71	1	1	0,1	0,5



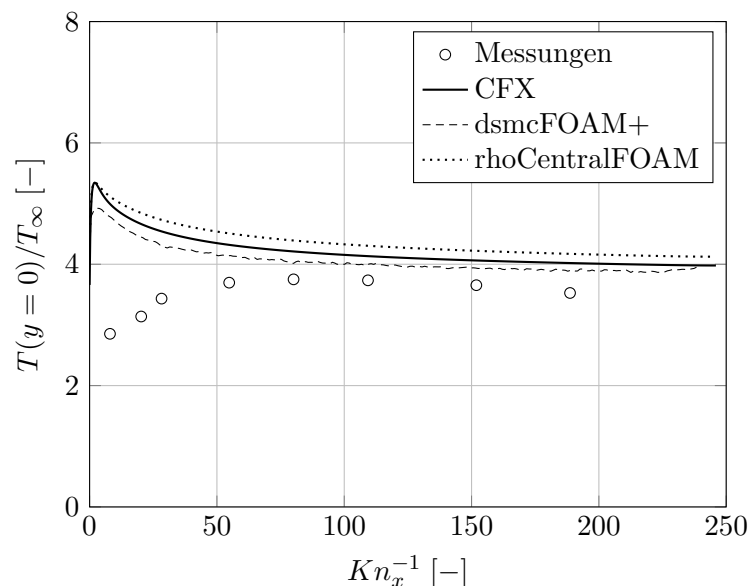
**Abb. 5.12** 2D-Rechnetz der Höhe  $H$  für eine horizontal angeströmte Platte der Länge  $L$ . Die Randbedingungen der freien Strömung werden im Abstand  $L_0$  von der Vorderkante gesetzt. Am hinteren Ende der Platte werden die Werte extrapoliert. Die Randbedingung der Platte ist eine Wand mit Geschwindigkeitsschlupf und Temperatursprung. Alle weiteren Randbedingungen sind Symmetrierandbedingungen.

Unterschiede zwischen CFX und rhoCentralFoam zu erkennen. Allerdings ist die Abweichung zu den DSMC-Ergebnissen deutlich höher, wobei die DSMC-Ergebnisse näher an den Messungen liegen, was auch in [106] beobachtet wird.

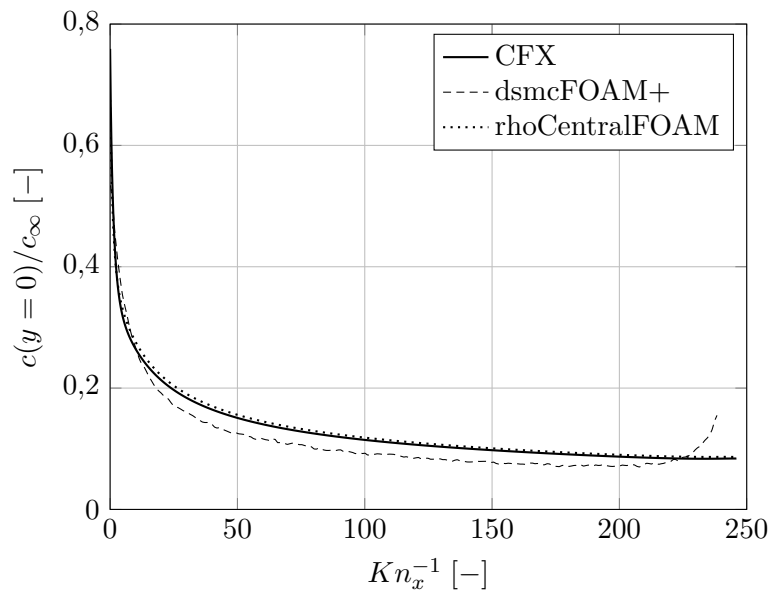
In Abb. 5.14 ist die wandnahe Temperaturverteilung dargestellt. Die Temperatur ist auf die Temperatur der freien Strömung normiert. Auch hier werden die Ergebnisse aus CFX mit DSMC, rhoCentralFOAM und Messergebnissen verglichen. Im Vergleich mit der Wandtemperatur (Tab. 5.1) lässt sich ein Temperatursprung erkennen. Im Gegensatz zur Druckverteilung tritt eine Abweichung zwischen CFX und rhoCentralFoam auf, die möglicherweise auf die unterschiedliche Implementierung des viskosen Wärmetransports zurückzuführen ist. Allerdings sind die CFX-Ergebnisse näher an denen von der DSMC-Methode. Generell liefern alle Simulationen, auch die DSMC-Methode, keine gute Übereinstimmung mit den Messungen, was auch in [106] beobachtet wird. Bei der Schlupfgeschwindigkeit, die in Abb. 5.15 dargestellt ist, gibt es nur geringe Unterschiede zwischen CFX und rhoCentralFOAM, wobei CFX etwas näher an der DSMC-Methode liegt. Messungen für den Geschwindigkeitsschlupf sind in [124] nicht enthalten.



**Abb. 5.13** Normierte statische Druckverteilung auf der Oberfläche einer horizontal mit Überschall angeströmten Platte in Abhängigkeit von der reziproken Knudsen-Zahl  $Kn_x^{-1} = x/\ell_\infty$ . Vergleich der CFX-Ergebnisse mit dsmcFOAM+, rhoCentralFOAM und experimentellen Daten von Metcalf, Lillicrap und Berry <sup>124</sup>.



**Abb. 5.14** Normierte statische Temperaturverteilung sehr nahe der Oberfläche einer horizontal mit Überschall angeströmten Platte in Abhängigkeit von der reziproken Knudsen-Zahl  $Kn_x^{-1} = x/\ell_\infty$ . Vergleich der CFX-Ergebnisse mit dsmcFOAM+, rhoCentralFOAM und experimentellen Daten von Metcalf, Lillicrap und Berry <sup>124</sup>.



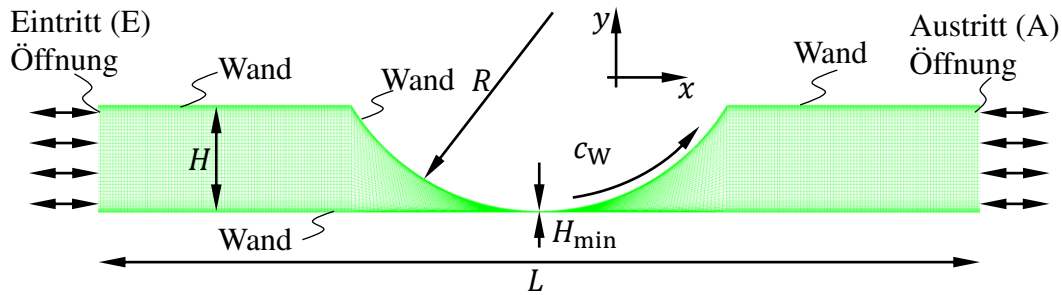
**Abb. 5.15** Normierte Geschwindigkeitsverteilung sehr nahe der Oberfläche einer horizontal mit Überschall angeströmten Platte in Abhängigkeit von der reziproken Knudsen-Zahl  $Kn_x^{-1} = x/\ell_\infty$ . Vergleich der CFX-Ergebnisse mit dsmcFOAM+, rhoCentralFOAM und experimentellen Daten von Metcalf, Lillicrap und Berry <sup>124</sup>.

### 5.3.3 Radiuspalt mit bewegter Wand

Um die in CFX implementierten neuen Randbedingungen für Spaltströmungen in Schraubenvakuumumpfen zu verifizieren, werden die CFD-Simulationen mit Messungen und DSMC-Simulationen von Huck <sup>23</sup> verglichen. Die betrachtete Spaltgeometrie sowie Randbedingungen entsprechen denen, die bereits zur Verifizierung der 1D-Theorie für eine Radiuskontur herangezogen wurde. (Vgl. Abschnitt 4.3.1)

Das Netz und die angewandten Randbedingungen für CFX sind in **Abb. 5.16** dargestellt. Es wird eine Netzverfeinerung senkrecht zu den Wänden und in Richtung des minimalen Strömungsquerschnitt angewendet, was zu einer minimalen Zellengröße von  $\Delta x/H_{\min} = 0,02$ ,  $\Delta y/H_{\min} = 0,00277$  und 32830 Zellen führt. Vor und hinter dem rotierenden Zylinder wird ein Kanal der Höhe  $H$  modelliert. Die Gesamtlänge der Fluiddomäne wird mit  $L$  angegeben. Die Breite der Quasi-2D-Fluiddomäne wird mit  $\Delta z = 1\text{mm}$  angegeben. Es wird eine Zelle in  $z$ -Richtung verwendet. An der Oberfläche des Zylinders wird eine Wandgeschwindigkeit  $c_W$  angesetzt. Um einen Massenfluss in beide Richtungen zu ermöglichen, wird sowohl am Einlass als auch am Auslass eine Öffnungsrandbedingung angewendet.

Die dimensionslosen Randbedingungen sowie die Geometrieparameter sind in **Tab. 5.2** angegeben. Das untersuchte Fluid ist trockene Luft. Es wurden CFD-Simulationen für Knudsen-Zahlen im Bereich von  $0,001 \leq Kn \leq 1$  durchgeführt. Die Wandtemperatur wird mit der Eintrittstemperatur gleichgesetzt, da alle Messungen bei Umgebungstemperatur durchgeführt wurden. Im Falle einer Rückströmung wird die Austrittstemperatur ebenfalls auf diesen Wert gesetzt.



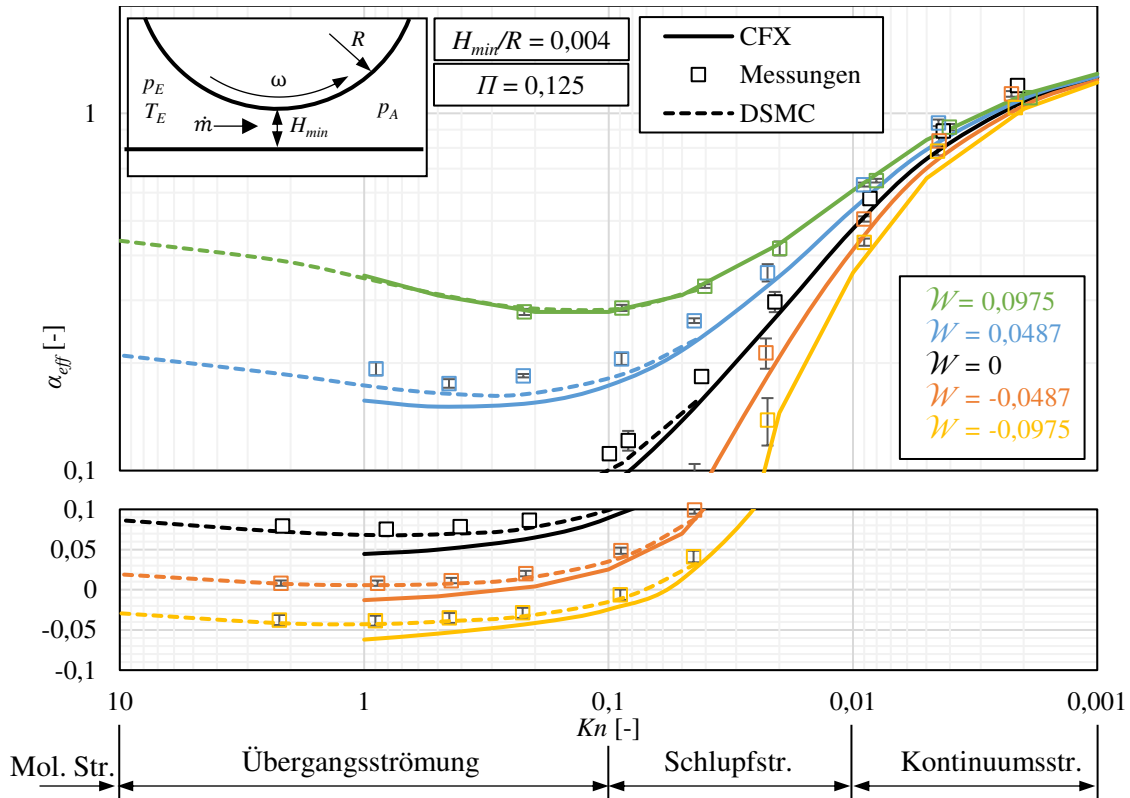
**Abb. 5.16** 2D-Rechnetz und Randbedingungen für den von Huck<sup>23</sup> untersuchten Spalt: Der Spalt hat einen Radius  $R$  und eine minimale Spalthöhe  $H_{\min}$ . Die Simulationsdomäne ist  $L$  lang und hat eine maximale Höhe  $H$ . An den Wänden gilt die viskose Schlupfrandbedingung und im Bereich des Radius wird eine Umfangsgeschwindigkeit  $c_W$  vorgegeben. Am Eintritt (E) und Austritt (A) sind Druck und Temperatur festgelegt, wobei Durchströmung in beide Richtungen möglich ist.

**Tab. 5.2** Dimensionslose Geometrie- und Simulationsrandbedingungen für die untersuchte Strömung durch einen Spalt mit Radiuskontur dargestellt in Abb. 5.16. Auswahl von Randbedingung gemäß der Untersuchungen von Huck<sup>23</sup>.

$\frac{H_{\min}}{R}$	$\frac{L}{H_{\min}}$	$\frac{H}{H_{\min}}$	$Kn$	$\Pi$	$\mathcal{W}$	$\frac{T_A}{T_E}, \frac{T_W}{T_E}$	$\frac{T_S}{T_E}$	$\gamma$	$Pr$	$\sigma_t$	$\sigma_E$
$4 \cdot 10^{-3}$	$10^3$	120	$10^{-3} \dots 1$	0,125	$-9,75 \cdot 10^{-2} \dots 9,75 \cdot 10^{-2}$	1	0,379	1,4	0,71	1	1

In Abb. 5.17 dargestellt ist der auf den Effusionsmassenstrom bezogenen Strömungsbeiwert  $\alpha_{\text{eff}}$  aufgetragen über der Knudsen-Zahl  $Kn$  für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten  $\mathcal{W}$ . Das Druckverhältnis  $\Pi$  und die dimensionslose minimale Spalthöhe  $H_{\min}/R$  sind für diese Abbildung konstant. Gegenübergestellt werden die unter Verwendung der präsentierten Schlupfrandbedingungen erzeugten CFX-Ergebnisse mit den Messwerten und DSMC-Simulationen von Huck.

Die CFX-Ergebnisse ergeben eine gute Übereinstimmung mit den Messungen im Bereich der Schlupf- und Kontinuumsströmungen für Knudsen-Zahlen kleiner  $3 \cdot 10^{-2}$ . Für größere Knudsen-Zahlen treten stärkere Abweichungen auf, obwohl die Knudsen-Zahl noch im Bereich der Schlupfströmungen liegt. Dies ist auf die höhere Gasverdünnung stromabwärts des Spaltes zurückzuführen, wo die Schlupf-Randbedingung nicht mehr gültig ist. Der Effekt verringert sich jedoch bei höheren Wandgeschwindigkeiten, sodass es zu einer guten Übereinstimmung der CFX-Ergebnisse mit den DSMC-Simulationen und Messungen über den gesamten dargestellten Bereich der Knudsen-Zahl kommt. Werden die DSMC-Ergebnisse betrachtet, so kann festgestellt, dass diese im Schlupfbereich mit fallender Knudsen-Zahl gut in die CFX-Ergebnisse übergehen, was ebenfalls die Qualität der Randbedingung in CFX bestätigt.



**Abb. 5.17** Vergleich der CFX-Simulation mit Schlupfrandbedingung für den Spalt mit Radius  $R$  mit Messwerten sowie DSMC-Simulationen von Huck<sup>23</sup>. Auf den Effusionsmassenstrom bezogener Strömungsbeiwert  $\alpha_{\text{eff}}$  aufgetragen über der Knudsen-Zahl. Ergebnisse für verschiedene dimensionslose Wandgeschwindigkeiten  $\mathcal{W}$  nach (3.4) bei gegebenem Druckverhältnis  $\Pi$  und bei konstanter minimaler Spalthöhe  $H_{\text{min}}$ .

### 5.3.4 Zwischenfazit

In diesem Abschnitt wurde ein Ansatz zur Implementierung einer Maxwell-Geschwindigkeitsschlupf- und Smoluchowski-Temperatursprung-Randbedingung in ANSYS CFX vorgestellt. Der Ansatz wird mit Simulationen des rhoCentralFoam-Solver der Open-Source-CFD-Software OpenFOAM validiert und mit DSMC-Simulationen und Messungen von zwei Testfällen verifiziert. Der erste Testfall verifiziert die Randbedingungen für Überschallplattenströmungen, bei denen das thermische Kriechen und der Temperaturprung nicht vernachlässigt werden können. In diesem Fall liefern beide NSF-Solver ähnliche Ergebnisse mit geringfügigen Abweichungen beim Temperaturprung aufgrund der unterschiedlichen Modellierung der viskosen Wärmeentwicklung. Der zweite Fall verifiziert die Randbedingungen für den Einsatz in Schraubenvakuumpumpen insbesondere für moderate Knudsen-Zahlen und hohe positive Wandgeschwindigkeiten. Da die Umfangsgeschwindigkeit von Schraubenvakuumpumpen typischerweise hoch ist, könnte ein Einsatz von ANSYS CFX für solche Maschinen möglich sein, sofern die gezeigten Randbedingungen verwendet werden. Insbesondere in der Arbeitskammer sind im Vergleich zu den Spaltströmungen geringere Unsicherheiten zu erwarten, da die Knudsen-Zahl in den Arbeitskammern kleiner ist. Allerdings ist die Wandgeschwindigkeit in den Spalten höher, sodass die Randbedingungen für einen weiten Bereich von Ansaugdrücken funktionieren sollten. Losgelöst von der Simulation einer kompletten Schraubenva-

kuumpumpe kann die Randbedingung in CFX verwendet werden, um neue oder verfeinerte Modelle für die Strömungen in Spalten und Arbeitskammern zu entwickeln.



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Betriebsverhalten von Rotationsverdrängermaschinen wird maßgeblich durch deren innere Leckage beeinflusst, die durch die betriebsbedingten Spalte unvermeidlich ist. Die wichtigsten treibenden Kräfte für die Spaltströmung sind die in den angrenzenden Arbeitskammern vorliegenden unterschiedlichen Drücke sowie die Schleppwirkung der bewegten Rotoren. Die aus der Druckdifferenz hervorgerufene Strömung wird als Poiseuille-Strömung bezeichnet und die aus der Schleppwirkung hervorgerufene als Couette-Strömung. In der Regel liegt eine Überlagerung dieser Strömungsformen vor. Neben der auftretenden Leckage beeinflusst der Wärmeübergang in den Spalten zusätzlich das Betriebsverhalten. Insbesondere dem Gehäusespalt wird diesbezüglich eine große Bedeutung zugesprochen, da über diesen ein nicht unwesentlicher Teil der Rotorwärme an das Gehäuse übertragen wird. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Modellierung der Spaltströmungen in Vakuumpumpen. Hierbei führt die Verdünnung der Gase dazu, dass die Annahmen der Kontinuumsmechanik die Gültigkeit verlieren und zusätzliche Modelle herangezogen werden müssen, um die Spaltströmungen hinreichend abzubilden. Es wird ein neues, eindimensionales Modell vorgestellt, das alle relevanten Strömungsformen in den Spalten einer trockenlaufenden Vakuumpumpe berücksichtigt.

Die zu Grunde liegende Theorie muss ohne die einschränkenden Annahmen der Kontinuumsströmung gültig und dennoch einfach implementierbar sein. Sie muss mit geringer Rechenkapazität auskommen, sodass sie im Kontext von Kammermodell-Simulationen sinnvoll einzusetzen ist. Hierzu wird in dieser Arbeit dargelegt, dass basierend auf der kinetischen Gastheorie eindimensionale Modellgleichungen abgeleitet werden können, die somit für den gesamten Bereich der Gasverdünnung gültig sind. Die hergeleiteten Grundgleichungen berücksichtigen sowohl Gasgemische als auch eine Profilierung der Zustands- und Transportgrößen quer zur Hauptströmungsrichtung. Es wird gezeigt, dass vor allem die Form des Geschwindigkeitsprofil in der Impulserhaltung nicht vernachlässigbar ist. Zudem wird im Rahmen einer Dimensionsanalyse gezeigt, dass aus der kinetischen Gastheorie dieselben dimensionslosen Kennzahlen für die Spaltverbindungen in Rotationsverdrängermaschinen resultieren, die in anderen Arbeiten aus einer Kontinuumssichtweise abgeleitet wurden. Es wird deutlich, dass die Prandtl-Zahl für Strömungen perfekter Gase kein zusätzlicher freier Parameter ist und das basierend auf der kinetischen Gastheorie eine weitere Kennzahl, der relative Teilchendurchmesser, gefunden werden kann. Der Einfluss dieser Kennzahl auf die Spaltströmungen in Vakuumpumpen kann allerdings vernachlässigt werden.

Das präsentierte Modell wird unter der Annahme einer vollständig ausgebildeten Strömung mit konstanter Totaltemperatur gelöst. Für die Reibung im Spalt werden Modelle abgeleitet, die verdünnte, laminare und turbulente Strömungen berücksichtigen. Es wird gezeigt, dass die vergrößerte Reibung in einer beschleunigten Strömung in guter Näherung über die Jeffery-Hamel-Lösung eines Schlankkanals mit Düsenkontur approximiert werden kann. Die Lösung eignet sich ebenfalls als Näherung der Reibung einer laminaren, kompressiblen Strömung. Die Lösung für einen Diffusor zeigt eine reduzierte Reibung und bietet zudem ein Ablösekriterium für das Spaltmodell. Das vorgestellte Modell wird mit verschiedenen Messwerten aus der Literatur validiert. Es werden ergänzend Spalte eines Schraubenkompressors als Referenz herangezogen. Es zeigt sich, dass mit dem Modell eine gute Übereinstimmung mit Messwerten erreicht und sowohl der Einfluss der bewegten Bauteilwände als auch der Gasverdünnung zufriedenstellend abgebildet wird. Zudem beschreibt das Modell zutreffend das Entstehen einer Verblockung der Strömung. Schwächen hat das Modell bei großen Reynolds-Zahlen und kurzen Spalten. Der Spaltmassenstrom wird in diesen Fällen durch die Annahme einer vollständig ausgebildeten Strömung überschätzt. Eine Verbesserung könnte hier erzielt werden, indem die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils und des Umschlags zwischen einer laminaren und einer turbulenten Strömung ergänzt wird, wie dies teilweise bereits in anderen Arbeiten geschehen ist. Eine allgemeine Formulierung der Einlaufverluste, die geometrieunabhängig ist und zudem noch eine Bewegung der Spaltwände berücksichtigt, ist allerdings schwierig. Es kann jedoch vermutet werden, dass sich bereits durch ein generisches Modell die Abbildung verbessern würde, auch wenn das Modell nicht gleich alle Phänomene mit abdeckt. Für eine pragmatistische Lösung könnte z.B. dem Anwender des Modells überlassen werden, ob dieser anhand der Geometrie an einer Stelle eine Ablöseblase erwartet. Diese würde dann bei größeren Reynolds-Zahlen von einem Modell angenähert. Für kurze Spalte und verdünnte Gase kann z.B. auf die Endkorrektur von Sharipov zurückgegriffen werden, um die Abbildung der Reibung in der Zu- und Abströmung der Spalte zu verbessern.

Obwohl die Einlaufverluste bei Spaltströmungen im Modell vernachlässigt werden, reicht die Abbildungsgüte aus, um im Rahmen einer Kammermodellsimulation eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen einer gemessenen und einer simulierten Saugvermögenskurve zu erreichen. Es wird gezeigt, dass das vorgestellte Modell plausiblere Spaltmassenströme vorhersagt, als das bislang verwendete Modell. Dennoch konnte keine signifikante Verbesserung in der Abbildung der Saugvermögenskurve erreicht werden. Dies lässt die Vermutung zu, dass eine weitere Verbesserung der Modelle für den Spaltdurchfluss keine deutliche Verbesserung der Abbildung der Saugvermögenskurve bewirken wird. Vielversprechender scheinen hingegen Modelle zu sein, die die Druckverteilung in den Arbeitskammern abbilden oder die Abbildung des Wärmeübergangs von dem Fluid auf die Struktur verbessern.

Die Arbeit schließt mit einigen Modellen ab, die im Kontext dieser Arbeit entwickelt wurden und zukünftig in die Modellierung von Vakuumpumpen mit einfließen können. Es wird eine Lösung des Graetz-Problems präsentiert, das die Entwicklung des Wärmeübergangs in einer Couette-Strömung beschreibt. Zudem werden Werte für die Poiseuille-Strömung aus der Literatur reproduziert. Anhand von Beispielen wird belegt, dass eine Überlagerung der Lösungen für die Wärmeübergänge einer Poiseuille- und einer Couette-Strömung in guter Näherung möglich ist. Anschließend wird

---

das Problem für verschiedene Gasverdünnungen im Bereich der Schlupfströmungen gelöst. Die Lösungen sind Reihenentwicklungen, deren Eigenwerte, -koeffizienten und -funktionen tabellarisch bis zum zehnten Wert angegeben werden.

Als Vorschlag zur Verbesserung der Einlaufverluste in einem Spalt wird zudem ein Modell für laminare, inkompressibel Strömungen vorgestellt, das durch wenige Gleichungen in eine Spaltmodellierung implementiert werden kann. Dabei wird der Überdruckverlust und die Lauflänge einer Spaltströmung im Spalteintrittsbereich auf deren vollständig ausgebildeten Wert bezogen. Auf diese Weise lässt sich der Verlauf für alle Reynolds-Zahlen durch eine Summe von Exponentialfunktionen annähern.

Abschließend wird ein Verfahren vorgestellt, wie die Randbedingungen für den Geschwindigkeits-schlupf und Temperatursprung in schwach verdünnten Strömungen in Ansys CFX implementiert werden können. Die Implementierung wird mit Referenzmessungen und Simulationen validiert. Es wird somit eine Möglichkeit vorgestellt, einen kommerziellen Strömungssolver, der bereits im Kontext von Schraubenmaschinen verwendet wird, auch zur Simulation von Vakuumpumpen anzuwenden. Das Vorgehen bietet zudem die Möglichkeit zur Entwicklung von neuen Modellen für Spaltverbindungen oder um Referenzsimulationen durchzuführen, sofern eine messtechnische Verifizierung konstruktiv nicht umsetzbar oder zu aufwendig ist.



# Literatur

- <sup>1</sup>T. Jünemann und A. Brümmer, *Optimisation of screw spindle vacuum pumps with variable rotor pitch regarding load-lock operation*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 425, 012028 \(2018\)](#).
- <sup>2</sup>T. Jünemann und A. Brümmer, *One-dimensional simulation of Couette-Poiseuille flow with variable cross section for the full range of gas rarefaction*, [J Vac Sci Technol B 38, 044201 \(2020\)](#).
- <sup>3</sup>T. Jünemann, H. Pleskun und A. Brümmer, *Maxwell velocity slip and Smoluchowski temperature jump boundary condition for ANSYS CFX*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1180, 012037 \(2021\)](#).
- <sup>4</sup>T. Jünemann und A. Brümmer, *One-dimensional calculation approach for gaseous clearance flows*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1267, 012004 \(2022\)](#).
- <sup>5</sup>H. Pleskun, T. Jünemann und A. Brümmer, *Validation of inhomogeneous chamber states in rotary positive displacement vacuum pumps*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1267, 012010 \(2022\)](#).
- <sup>6</sup>Deutsches Institut für Normung, *Vakuumtechnik; Benennung und Definitionen; Allgemeine Benennungen*, DIN28400-1, 1983.
- <sup>7</sup>K. Jousten, *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*, Bd. 12 (Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2018).
- <sup>8</sup>T. Dreifert und R. Müller, *Screw vacuum pumps - The state of the art*, International Conference on Screw Machines 2014: VDI-Berichte **2228**, S. 29–42 (VDI-Verlag, 2014).
- <sup>9</sup>P. Radgen und E. Blaustein, *Compressed air systems in the european union. Energy, emissions, savings potential and policy actions* (LOGUS X Verlag, Stuttgart, 2001).
- <sup>10</sup>L. Rinder, *Schraubenverdichter* (Springer-Verlag, Wien, 1979).
- <sup>11</sup>K. Nadler, *Modellierung und Analyse von Schraubenvakuumpumpen in Blowerbetrieb*, Diss. (Technische Universität Dortmund, 2017).
- <sup>12</sup>C. Huck und A. Brümmer, *Thermodynamical operation behaviour of screw vacuum pumps with cycloid- and qumiby-toothed rotors*, International Conference on Screw Machines 2014: VDI-Berichte **2228**, S. 331–346 (VDI-Verlag, 2014).
- <sup>13</sup>R. Müller, *Spaltströmung mit Wärmeübertragung in Vakuumpumpen*, Diss. (Universität Kaiserslautern, 2013).
- <sup>14</sup>D. Wenderott und K. Kauder, „Gasspaltströmungen in Schraubenspindel-Vakuumpumpen“, *Schraubenmaschinen – Forschungsberichte des FG Fluidenergiemaschinen*, hrsg. von K. Kauder, 6 (Universität Dortmund, 1997), S. 5–19.

- <sup>15</sup>H. Kösters und J. Eickhoff, *Trockene Schraubenvakuumpumpe mit hoher innerer Verdichtung*, Schraubenmaschinen 2006: VDI-Berichte **1932**, S. 423–428 (VDI-Verlag, 2006).
- <sup>16</sup>D. Pfaller et al., *Options for internal compression in screw-type vacuum pumps and their influence on operational behaviour*, International Conference on Compressors and their Systems, S. 241–254 (Chandos Publishing, 2007).
- <sup>17</sup>M. Utri, *Potenzial von nicht-konstanter Rotorsteigung für Schraubenkompressoren*, Diss. (Technische Universität Dortmund, 2021).
- <sup>18</sup>D. Pfaller, *Einfluss der Verdrängergeometrie auf die Auslegung von Schraubenspindel-Vakuumpumpen*, Diss. (Technische Universität Dortmund, 2012).
- <sup>19</sup>A. Rohe, *Wärmehaushalt von Schraubenspindel-Vakuumpumpen*, Diss. (Universität Dortmund, 2005).
- <sup>20</sup>D. Stratmann, *Kennfeldverhalten zweiwelliger Rotationsverdrängervakuumpumpen*, Diss. (Technische Universität Dortmund, 2010).
- <sup>21</sup>D. Wenderott, *Spaltströmungen im Vakuum*, Diss. (Universität Dortmund, 2001).
- <sup>22</sup>T. Ohbayashi et al., *Study on the performance prediction of screw vacuum pump*, [Appl. Surf. Sci.](#) **169-170**, 768 (2001).
- <sup>23</sup>C. Huck, *Verdünnte Strömung in Spalten von Vakuumpumpen mit bewegter Berandung*, Diss. (Technische Universität Dortmund, 2020).
- <sup>24</sup>A. Beskok, *Validation of a new velocity-slip model for separated gas microflows*, [Numer. Heat Transfer, Part B](#) **40**, 451 (2001).
- <sup>25</sup>C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. Introduction to the fundamentals of CFD*, Bd. 2 (Butterworth-Heinemann, 2007).
- <sup>26</sup>J. H. Ferziger und M. Perić, *Numerische Strömungsmechanik* (Springer, 2008).
- <sup>27</sup>R. Sachs, *Experimentelle Untersuchung von Gasströmungen in Schraubenmaschinen*, Diss. (Universität Dortmund, 2002).
- <sup>28</sup>H. Pleskun et al., *Modelling of inhomogeneous chamber states in rotary positive displacement vacuum pumps*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.](#) **1180**, 12009 (2022).
- <sup>29</sup>H. Vasuthevan und A. Brümmer, *Multiphase-flow simulation of a rotating rectangular profile within a cylinder in terms of hydraulic loss mechanisms*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.](#) **425**, 012002 (2018).
- <sup>30</sup>F.-J. Peveling, *Ein Beitrag zur Optimierung adiabter Schraubenmaschinen in Simulationsrechnungen*, Diss. (Universität Dortmund, 1987).
- <sup>31</sup>C. Fost, *Ein Beitrag zur Verbesserung der Kammerfüllung von Schraubenmotoren*, Diss. (Universität Dortmund, 2003).
- <sup>32</sup>M. Grieb und A. Brümmer, *Effects of surface condensation in an idealised steam-driven screw expander*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.](#) **425**, 012004 (2018).
- <sup>33</sup>M. Janicki, *Modellierung und Simulation von Rotationsverdrängermaschinen*, Diss. (Universität Dortmund, 2007).
- <sup>34</sup>J. Temming, *Stationärer und instationärer Betrieb eines unsynchronisierten Schraubenladers*, Diss. (Universität Dortmund, 2007).
- <sup>35</sup>A. Kovačević und S. Rane, *3D CFD analysis of a twin screw expander*, [8th International Conference on Compressors and their Systems](#), S. 417–429 (Woodhead Publishing, London, 2013).

- <sup>36</sup>A. Kovačević et al., *Influence of approaches in CFD solvers on performance prediction in screw compressors*, [International Compressor Engineering Conference, paper 2252 \(Purdue e-Pubs, 2014\)](#).
- <sup>37</sup>D. Rowinski, A. Nikolov und A. Brümmer, *Modeling a dry running twin-screw expander using a coupled thermal-fluid solver with automatic mesh generation*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. \*\*425\*\*, 012019 \(2018\)](#).
- <sup>38</sup>A. Kovačević, *Three dimensional numerical analysis for flow prediction in positive displacement screw machines*, Diss. (City University London, 2002).
- <sup>39</sup>A. Kovačević, N. Stošić und I. K. Smith, *Three dimensional numerical analysis of screw compressor performance*, [J. Comput. Methods Sci. Eng. \*\*3\*\*, 259 \(2003\)](#).
- <sup>40</sup>S. Rane, A. Kovačević und N. Stošić, *Analytical grid generation for accurate representation of clearances in CFD for screw machines*, [IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. \*\*90\*\*, 012008 \(2015\)](#).
- <sup>41</sup>M. Pascu et al., *Numerical investigation of the leakage flows in twin screw compressor rotors*, [International Compressor Engineering Conference, paper 2321 \(Purdue e-Pubs, 2014\)](#).
- <sup>42</sup>A. Kovačević et al., *Turbulence capture in CFD for screw machines*, *Schraubenmaschinen 2010: VDI-Berichte **2101***, S. 245–259 (VDI-Verlag, 2010).
- <sup>43</sup>K. Nadler und A. Brümmer, *Schraubenmaschinen*, Bd. 14 (2011), S. 68–81.
- <sup>44</sup>Verein Deutscher Ingenieure, Hrsg., *VDI-Wärmeatlas*, Bd. 11 (Springer-Verlag, 2013).
- <sup>45</sup>H. Schlichting und K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, Bd. 10 (Springer-Verlag, 2006).
- <sup>46</sup>F. M. White, *Viscous fluid flow* (McGraw-Hill, New York, 1991).
- <sup>47</sup>R.-Y. Chen, *Flow in the entrance region at low Reynolds numbers*, [J. Fluids Eng. \*\*95\*\*, 153 \(1973\)](#).
- <sup>48</sup>R. Mises, *Berechnung von Ausfluß- und Überfallzahlen*, *VDI-Zeitschrift* **61**, 21 (1917).
- <sup>49</sup>P. A. McCuen, W. M. Kays und W. C. Reynolds, *Heat transfer with laminar and turbulent flow between parallel planes with constant and variable wall temperature and heat flux*, Techn. Ber. (Thermosciences Divison Department of Mechanical Engineering Stanford University Stanford, 1962).
- <sup>50</sup>J. A. Prins, J. Mulder und J. Schenk, *Heat transfer in laminary flow between parallel plates*, [Appl. Sci. Res. \*\*2\*\*, 431 \(1951\)](#).
- <sup>51</sup>J. Schenk und J. Mulder, *Heat transfer in laminary flow between parallel plates*, [Appl. Sci. Res. \*\*4\*\*, 405 \(1954\)](#).
- <sup>52</sup>G. M. Brown, *Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit*, [AIChE J. \*\*6\*\*, 179 \(1960\)](#).
- <sup>53</sup>W. C. Reynolds, R. E. Lundberg und P. A. McCuen, *Heat transfer in annular passages. General formulation of the problem for arbitrarily prescribed wall temperatures or heat fluxes*, [Int. J. Heat Mass Transfer \*\*6\*\*, 483 \(1963\)](#).
- <sup>54</sup>R. E. Lundberg, P. A. McCuen und W. C. Reynolds, *Heat transfer in annular passages. Hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed wall temperatures or heat fluxes*, [Int. J. Heat Mass Transfer \*\*6\*\*, 495 \(1963\)](#).
- <sup>55</sup>B. Saint-Venant und L. Wantzel, *Mémoire et expériences sure l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pression considérables*, *J. Ec. polytech. Math.* **16**, 85 (1839).
- <sup>56</sup>L. Hartshorn und R. J. Strutt, *The discharge of gases under high pressures*, [Proc. R. Soc. London, Ser. A. \*\*94\*\*, 155 \(1918\)](#).

- <sup>57</sup>T. E. Stanton, *On the flow of gases at high speeds*, *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* **111**, 306 (1926).
- <sup>58</sup>D. A. Jobson, *On the flow of a compressible fluid through orifices*, *P I Mech Eng* **169**, 767 (1955).
- <sup>59</sup>S. L. Bragg, *Effect of compressibility on the discharge coefficient of orifices and convergent nozzles*, *J Mech Eng Sci* **2**, 35 (1960).
- <sup>60</sup>S. P. Tang und J. B. Fenn, *Experimental determination of the discharge coefficients for critical flow through an axisymmetric nozzle*, *AIAA J.* **16**, 41 (1978).
- <sup>61</sup>A. H. Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, Volume 1* (Ronald Press, 1953).
- <sup>62</sup>A. H. Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, Volume 2* (Ronald Press, 1953).
- <sup>63</sup>H. R. van d. Berg, C. A. Seldam und P. S. van d. Gulik, *Compressible laminar flow in a capillary*, *J. Fluid Mech.* **246**, 1 (1993).
- <sup>64</sup>G. P. Celata et al., *Experimental study on compressible flow in microtubes*, *Int. J. Heat Fluid Flow* **28**, 28 (2007).
- <sup>65</sup>J. C. Harley et al., *Gas flow in micro-channels*, *J. Fluid Mech.* **284**, 257 (1995).
- <sup>66</sup>Y. Asako et al., *Effect of compressibility on gaseous flows in micro-channels*, *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 3041 (2003).
- <sup>67</sup>C. Hong, Y. Asako und J.-H. Lee, *Poiseuille number correlation for high speed micro-flows*, *J. Phys. Appl. Phys.* **41**, 105111 (2008).
- <sup>68</sup>C. Cercignani und A. Daneri, *Flow of a rarefied gas between two parallel plates*, *J. Appl. Phys.* **34**, 3509 (1963).
- <sup>69</sup>C. Cercignani und C. D. Pagani, *Variational approach to boundary value problems in kinetic theory*, *Phys. Fluids* **9**, 1167 (1966).
- <sup>70</sup>S. K. Loyalka, N. Petrellis und T. S. Storvick, *Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates*, **30**, 514 (1979).
- <sup>71</sup>S. K. Loyalka und S. A. Hamoodi, *Poiseuille flow of a rarefied gas in a cylindrical tube: Solution of linearized Boltzmann equation*, *Phys. Fluids A* **2**, 2061 (1990).
- <sup>72</sup>F. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long tube at any temperature ratio*, *J. Vac. Sci. Technol. A* **14**, 2627 (1996).
- <sup>73</sup>F. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, *J. Vac. Sci. Technol. A* **17**, 3062 (1999).
- <sup>74</sup>F. Sharipov, *Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. I. Plane flow between two parallel plates*, *Eur. J. Mech. B. Fluids* **21**, 113 (2002).
- <sup>75</sup>F. Sharipov und D. Kalempa, *Velocity slip and temperature jump coefficients for gaseous mixtures. IV. Temperature jump coefficient*, *Int. J. Heat Mass Transfer* **48**, 1076 (2005).
- <sup>76</sup>F. Sharipov, L. M. G. Cumin und D. Kalempa, *Heat flux between parallel plates through a binary gaseous mixture over the whole range of the Knudsen number*, *Phys. A* **378**, 183 (2007).
- <sup>77</sup>P. L. Bhatnagar, E. P. Gross und M. Krook, *A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems*, *Phys. Rev.* **94**, 511 (1954).
- <sup>78</sup>E. M. Shakov, *Generalization of the Krook kinetic relaxation equation*, *Fluid Dynam.* **3**, 95 (1968).

- <sup>79</sup>S. Fukui und R. Kaneko, *Analysis of ultra-thin gas film lubrication based on the linearized Boltzmann equation : Influence of accommodation coefficient*, *Jsmc Int J* **30**, 1660 (1987).
- <sup>80</sup>S. Fukui und R. Kaneko, *Analysis of ultra-thin gas film lubrication based on linearized Boltzmann equation: first report - Derivation of a generalized lubrication equation including thermal creep flow*, *J. Tribol.* **110**, 253 (1988).
- <sup>81</sup>S. Fukui und R. Kaneko, *A database for interpolation of Poiseuille flow rates for high Knudsen number lubrication problems*, *J. Tribol.* **112**, 78 (1990).
- <sup>82</sup>F. Sharipov, P. Fahrenbach und A. Zipp, *Numerical modeling of the Holweck pump*, *J. Vac. Sci. Technol. A* **23**, 1331 (2005).
- <sup>83</sup>W. Fister und G. Neumann, *Berechnung der reibungsbehafteten Strömung in den Zahnücken und Dichtspalten von Schraubenmaschinen*, Schraubenmaschinen: VDI-Berichte **521**, S. 299–237 (VDI-Verlag, 1984).
- <sup>84</sup>B. Dreißig, *Ein Beitrag zur Auslegung von trockenlaufenden Schraubenmotoren*, Diss. (Universität Dortmund, 1989).
- <sup>85</sup>Z. Fan und Z. Chen, *A calculation method for gas leakage in compressor*, *International Compressor Engineering Conference*, paper 955 (Purdue e-Pubs, 1994).
- <sup>86</sup>Y. Huang, *Leakage calculation through clearances*, *International Compressor Engineering Conference*, paper 953 (Purdue e-Pubs, 1994).
- <sup>87</sup>N. Ishii et al., *Refrigerant leakage flow evaluation for scroll compressors*, *International Compressor Engineering Conference*, paper 1175 (Purdue e-Pubs, 1996).
- <sup>88</sup>N. Ishii et al., *Effects of surface roughness upon gas leakage flow through small clearances in CO2 scroll compressors*, *International Compressor Engineering Conference*, paper 1851 (Purdue e-Pubs, 2008).
- <sup>89</sup>I. H. Bell et al., *A computationally efficient hybrid leakage model for positive displacement compressors and expanders*, *Int. J. Refrig* **36**, 1965 (2013).
- <sup>90</sup>F. Sharipov und V. Seleznev, *Data on internal rarefied gas flows*, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **27**, 657 (1998).
- <sup>91</sup>C. Huck, H. Pleskun und A. Brümmer, *Measurement and simulation of rarefied Couette Poiseuille flow with variable cross section*, *J. Vac. Sci. Technol. A* **36**, 031606 (2018).
- <sup>92</sup>D. Hänel, *Molekulare Gasdynamik* (Springer, 2004).
- <sup>93</sup>H. Struchtrup, *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows* (Springer, 2005).
- <sup>94</sup>G. A. Bird, *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows* (Clarendon Press, Oxford, 1994).
- <sup>95</sup>V. Giovangigli, *Multicomponent flow modeling* (Birkhäuser, 1999).
- <sup>96</sup>M. P. Pavić, *Mathematical modelling and analysis of polyatomic gases and mixtures in the context of kinetic theory of gases and fluid mechanics*, Diss. (École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan ; Univerzitet u Novom Sadu, 2014).
- <sup>97</sup>L. Desvilletes, R. Monaco und F. Salvarani, *A kinetic model allowing to obtain the energy law of polytropic gases in the presence of chemical reactions*, *Eur. J. Mech. B. Fluids* **24**, 219 (2005).
- <sup>98</sup>T. W. Tuer und G. S. Springer, *A test particle Monte Carlo method*, *Comput. & Fluids* **1**, 399 (1973).

- <sup>99</sup>J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss und R. B. Bird, *Molecular theory of gases and liquids* (John Wiley & Sons, Inc., 1964).
- <sup>100</sup>W. Sutherland, *LII. The viscosity of gases and molecular force*, *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **36**, 507 (1893).
- <sup>101</sup>W. M. Kays, *Turbulent Prandtl number - Where are we?*, *J. Heat Transfer* **116**, 284 (1994).
- <sup>102</sup>D. C. Wilcox, *Formulation of the  $k$ - $w$  turbulence model revisited*, *AIAA Journal* **46**, 2823 (2008).
- <sup>103</sup>F. Menter, *Zonal two equation  $k$ - $w$  turbulence models for aerodynamic flows*, *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference* (1993).
- <sup>104</sup>R. Langtry und F. Menter, *Transition modeling for general CFD applications in aeronautics*, *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (2005).
- <sup>105</sup>J. C. Maxwell, *VII. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature*, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **170**, 231 (1879).
- <sup>106</sup>N. T. P. Le et al., *Langmuir-Maxwell and Langmuir-Smoluchowski boundary conditions for thermal gas flow simulations in hypersonic aerodynamics*, *Int. J. Heat Mass Transfer* **55**, 5032 (2012).
- <sup>107</sup>F. Sharipov, *Rarefied gas dynamics - Fundamentals for research and practice* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2016).
- <sup>108</sup>F. Sharipov, *Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. III. Poiseuille flow and thermal creep through a long tube*, *Eur. J. Mech. B. Fluids* **22**, 145 (2003).
- <sup>109</sup>C. Cercignani und M. Lampis, *Kinetic models for gas-surface interactions*, *Transport Theor Stat* **1**, 101 (1971).
- <sup>110</sup>F. Sharipov und D. Kalempa, *Velocity slip and temperature jump coefficients for gaseous mixtures. I. Viscous slip coefficient*, *Phys. Fluids* **15**, 1800 (2003).
- <sup>111</sup>F. Sharipov und D. Kalempa, *Velocity slip and temperature jump coefficients for gaseous mixtures. II. Thermal slip coefficient*, *Phys. Fluids* **16**, 759 (2004).
- <sup>112</sup>M. Smoluchowski von Smolan, *Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen*, *Ann. Phys. (Berl.)* **300**, 101 (1898).
- <sup>113</sup>I. Ansys, *Ansys CFX-Solver Theory Guide Release 2021 R2*, Techn. Ber. (2021).
- <sup>114</sup>E. Buckingham, *On physically similar systems - Illustrations of the use of dimensional equations*, *Phys. Rev.* **4**, 345 (1914).
- <sup>115</sup>D. Y. C. Chan und R. G. Horn, *The drainage of thin liquid films between solid surfaces*, *J. Chem. Phys.* **83**, 5311 (1985).
- <sup>116</sup>M. L. Gee et al., *Liquid to solidlike transitions of molecularly thin films under shear*, *J. Chem. Phys.* **93**, 1895 (1990).
- <sup>117</sup>R. K. Shah und A. L. London, *Laminar flow forced convection in ducts* (Academic Press, 1978).
- <sup>118</sup>F. M. White, *Fluid mechanics* (McGraw Hill Education, New York, 2016).
- <sup>119</sup>G. S. Beavers und E. M. Sparrow, *Experiments on the breakdown of laminar flow in a parallel-plate channel*, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 809 (1970).
- <sup>120</sup>V. J. Berry und C. R. De Prima, *An Iterative Method for the Solution of Eigenvalue Problems*, *J Appl Phys* **23**, 195 (1952).
- <sup>121</sup>J. R. Dormand und P. J. Prince, *A family of embedded Runge-Kutta formulae*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **6**, 19 (1980).

- 
- <sup>122</sup>I. Ansys, *Ansys CFX-Solver Modeling Guide Release 2021 R2*, Techn. Ber. (2021).
- <sup>123</sup>N. T. P. Le, N. A. Vu und L. T. Loc, *New type of Smoluchowski temperature jump condition considering the viscous heat generation*, [AIAA J.](#) **55**, 474 (2017).
- <sup>124</sup>S. C. Metcalf, D. C. Lillicrap und C. J. Berry, *A study of the effect of surface temperature on the shock-layer development over sharp-edge shapes in low-Reynolds-number high-speed flow*, Rarefied gas dynamics : proceedings of the sixth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, S. 619–634 (Academic Press, 1969).
- <sup>125</sup>C. White et al., *dsmcFoam+: An OpenFOAM based direct simulation Monte Carlo solver*, [Comput. Phys. Comm.](#) **224**, 22 (2018).
- <sup>126</sup>H. G. Weller et al., *A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques*, [Computers in Physics](#) **12**, 620 (1998).



# A Lösung der Jeffery-Hamel-Strömung

**Tab. A.1** Poiseuille-Zahl  $Po$  und Impulsflussformfaktor  $K_D$  basierend auf der Schlankkanallösung der Jeffery-Hamel-Strömung für eine Düse  $\alpha < 0$  und einen Diffusor  $\alpha > 0$ . Werte in Abhängigkeit des Produkts von Reynolds-Zahl und Öffnungswinkel  $\alpha \cdot Re$ . (vgl. [Abb. 4.2](#))

$\alpha Re$	$Po$	$K_D$	$\alpha Re$	$Po$	$K_D$
-355,96	293,65	1,06	-125,53	196,49	1,09
-348,41	291,07	1,06	-118,34	192,46	1,09
-340,86	288,46	1,06	-111,17	188,34	1,09
-333,32	285,82	1,06	-104,04	184,12	1,10
-325,78	283,16	1,06	-96,94	179,79	1,10
-318,25	280,47	1,06	-89,89	175,36	1,10
-310,72	277,75	1,06	-82,88	170,81	1,10
-303,20	275,00	1,06	-75,92	166,13	1,11
-295,68	272,22	1,06	-69,02	161,32	1,11
-288,17	269,41	1,06	-62,18	156,36	1,12
-280,67	266,57	1,06	-55,42	151,25	1,12
-273,18	263,69	1,06	-48,73	145,98	1,12
-265,69	260,78	1,06	-42,15	140,52	1,13
-258,21	257,83	1,06	-35,67	134,87	1,14
-250,74	254,84	1,07	-29,31	129,02	1,14
-243,27	251,82	1,07	-23,09	122,94	1,15
-235,82	248,75	1,07	-17,02	116,62	1,16
-228,37	245,64	1,07	-11,14	110,03	1,17
-220,94	242,49	1,07	-5,46	103,17	1,18
-213,51	239,29	1,07	0,00	96,01	1,20
-206,10	236,05	1,07	5,20	88,54	1,21
-198,69	232,76	1,07	10,12	80,72	1,23
-191,30	229,41	1,07	14,73	72,54	1,26
-183,93	226,01	1,07	19,02	63,99	1,28
-176,56	222,55	1,08	22,95	55,04	1,31
-169,22	219,03	1,08	26,52	45,67	1,35
-161,89	215,45	1,08	29,72	35,87	1,39
-154,57	211,81	1,08	32,54	25,61	1,44
-147,28	208,09	1,08	35,00	14,87	1,50
-140,01	204,30	1,08	37,10	3,62	1,57
-132,76	200,44	1,09	37,67	0,00	1,60



## B Eigenwerte und Konstanten für die Bestimmung der dimensionslose Wandwärmestromdichten

**Tab. B.1** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,P): Eine vollständig ausgebildete, laminare Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Kontinuumsströmung ( $\delta \rightarrow \infty$ ).

$n$	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	30,1628	-0,858087	0,858087
1	143,848	0,65922	0,65922
2	342,904	-0,569463	0,569463
3	627,313	0,514523	0,514522
4	997,066	-0,476066	0,476065
5	1452,16	0,447019	0,447018
6	1992,59	-0,423974	0,423973
7	2618,35	0,40505	0,405049
8	3329,45	-0,389109	0,389108
9	4125,89	0,375415	0,375413

**Tab. B.2** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,P): Eine vollständig ausgebildete, laminare Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 1000$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	30,1725	-0,854176	0,854176
1	144,001	0,65519	0,65519
2	343,386	-0,565228	0,565228
3	628,324	0,510086	0,510085
4	998,816	-0,47144	0,471439
5	1454,87	0,442218	0,442217
6	1996,48	-0,41901	0,419009
7	2623,65	0,399933	0,399932
8	3336,39	-0,383848	0,383847
9	4134,7	0,370018	0,3700166

**Tab. B.3** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,P): Eine vollständig ausgebildete, laminare Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 100$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	30,1507	-0,820247	0,820247
1	144,87	0,620089	0,620088
2	346,519	-0,528164	0,528163
3	635,262	0,471058	0,471057
4	1011,2	-0,43054	0,430539
5	1474,41	0,399543	0,399542
6	2024,95	-0,374646	0,374645
7	2662,88	0,353957	0,353956
8	3388,23	-0,336327	0,336326
9	4201,05	0,32101	0,321008

**Tab. B.4** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,P): Eine vollständig ausgebildete, laminare Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 20$ .

$n$	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	28,5893	-0,691339	0,691339
1	141,82	0,481899	0,481899
2	344,786	-0,377731	0,377731
3	639,214	0,309384	0,309384
4	1026,44	-0,259343	0,259343
5	1507,59	0,220646	0,220645
6	2083,56	-0,18977	0,189769
7	2755,13	0,164637	0,164636
8	3522,94	-0,14389	0,14389
9	4387,51	0,12658	0,12658

**Tab. B.5** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,P): Eine vollständig ausgebildete, laminare Poiseuille-Strömung, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 10$ .

$n$	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	25,5318	-0,568475	0,568475
1	132,982	0,348891	0,348891
2	333,028	-0,239017	0,239017
3	631,077	0,171917	0,171917
4	1030,74	-0,127953	0,127953
5	1534,38	0,0979475	0,0979473
6	2143,55	-0,0768126	0,0768124
7	2859,24	0,0615155	0,0615153
8	3682,14	-0,050173	0,0501728
9	4612,71	0,0415792	0,0415791

**Tab. B.6** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C1): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Kontinuumströmung ( $\delta \rightarrow \infty$ ).

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	37,9125	-0,929358	1,5
1	163,773	0,824881	1,5
2	378,442	-0,769663	1,5
3	681,934	0,732936	1,5
4	1074,25	-0,705757	1,5
5	1555,39	0,684352	1,5
6	2125,36	-0,666794	1,5
7	2784,16	0,65197	1,5
8	3531,78	-0,639182	1,49999
9	4368,23	0,627965	1,49999

**Tab. B.7** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C1): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 1000$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	37,6126	-0,925479	1,49491
1	162,515	0,82092	1,49467
2	375,575	-0,765469	1,49412
3	676,816	0,728437	1,4933
4	1066,24	-0,7009	1,49222
5	1543,86	0,679094	1,49088
6	2109,67	-0,661093	1,4893
7	2763,67	0,645787	1,48746
8	3505,88	-0,632481	1,48539
9	4336,28	0,620709	1,48307

**Tab. B.8** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C1): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 100$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	35,0696	-0,88941	1,44234
1	151,895	0,777285	1,41303
2	351,615	-0,709592	1,3644
3	634,606	0,657271	1,30065
4	1001,29	-0,612441	1,22627
5	1452,13	0,572198	1,14565
6	1987,57	-0,535328	1,06265
7	2608,06	0,501281	0,980326
8	3314	-0,469779	0,900913
9	4105,73	0,440647	0,825875

**Tab. B.9** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C1): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 20$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	26,6147	-0,732948	1,15872
1	119,251	0,552433	0,863208
2	285,485	-0,419016	0,591434
3	530,405	0,322346	0,404097
4	856,729	-0,253486	0,284271
5	1265,84	0,203906	0,207304
6	1758,5	-0,167396	0,156379
7	2335,19	0,139842	0,121485
8	2996,24	-0,118561	0,0967614
9	3741,9	0,101785	0,0787092

**Tab. B.10** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C1): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit oberer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 10$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	20,2657	-0,585651	0,86779
1	98,142	0,367478	0,463593
2	247,912	-0,234627	0,245132
3	475,689	0,158508	0,143192
4	783,943	-0,112973	0,091807
5	1173,97	0,0840524	0,063221
6	1646,57	-0,0646925	0,0459407
7	2202,28	0,0511652	0,0347855
8	2841,49	-0,0413773	0,0272006
9	3564,46	0,0340879	0,0218246

**Tab. B.11** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C2): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Kontinuumsströmung ( $\delta \rightarrow \infty$ ).

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	37,9125	-0,929358	0,575803
1	163,773	0,824881	0,453618
2	378,442	-0,769663	0,39492
3	681,934	0,732936	0,358129
4	1074,25	-0,705757	0,332061
5	1555,39	0,684352	0,312224
6	2125,36	-0,666794	0,296409
7	2784,16	0,65197	0,283375
8	3531,78	-0,639182	0,272368
9	4368,23	0,627965	0,262892

**Tab. B.12** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C2): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 1000$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	37,6126	-0,925479	0,57295
1	162,515	0,82092	0,450874
2	375,575	-0,765469	0,392164
3	676,816	0,728437	0,355333
4	1066,24	-0,7009	0,329214
5	1543,86	0,679094	0,309324
6	2109,67	-0,661093	0,293455
7	2763,67	0,645788	0,280369
8	3505,88	-0,632481	0,269309
9	4336,28	0,620709	0,259784

**Tab. B.13** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C2): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 100$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	35,0696	-0,88941	0,548447
1	151,895	0,777285	0,427573
2	351,615	-0,709592	0,36904
3	634,606	0,657271	0,332144
4	1001,29	-0,612441	0,305873
5	1452,13	0,572198	0,285784
6	1987,57	-0,535328	0,269679
7	2608,06	0,501281	0,256323
8	3314	-0,469779	0,244963
9	4105,73	0,440647	0,235107

**Tab. B.14** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C2): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 20$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	26,6147	-0,732948	0,463624
1	119,251	0,552432	0,353543
2	285,485	-0,419016	0,296862
3	530,405	0,322346	0,257132
4	856,729	-0,253486	0,226034
5	1265,84	0,203906	0,200562
6	1758,5	-0,167396	0,179188
7	2335,19	0,139842	0,160971
8	2996,24	-0,118561	0,145271
9	3741,9	0,101785	0,131625

**Tab. B.15** Eigenwerte und Konstanten für die Gleichungen (5.11) und (5.12) ermittelt aus der Lösung des Sturm-Liouville-Problems für den Fall (1,C2): Eine vollständig ausgebildete, laminare Couette-Strömung mit unterer bewegter Wand, bei der die obere Wand eine andere Temperatur als die Ausgangsströmung hat ( $T_{W1} \neq T_0$ ), während die untere Wand die gleiche Temperatur wie die Ausgangsströmung aufweist ( $T_{W2} = T_0$ ). Werte für eine Schlupfströmung mit  $\delta = 10$ .

n	$\lambda_n$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=-1}$	$\Xi_n \frac{d\psi_n}{dY} \Big _{Y=1}$
0	20,2657	-0,585651	0,395242
1	98,142	0,367478	0,29129
2	247,912	-0,234627	0,224572
3	475,689	0,158508	0,175461
4	783,943	-0,112973	0,139019
5	1173,97	0,0840525	0,111747
6	1646,57	-0,0646925	0,0910978
7	2202,28	0,0511652	0,0752572
8	2841,49	-0,0413773	0,0629423
9	3564,46	0,0340879	0,0532417