SPRATTE, Verena & SCHRÖTER, Lennart
Göttingen, Tübingen

Rekonstruktion von Beweisleseprozessen mit dem Toulmin-Schema

Das Lesen von Beweisen stellt eine regelmäßige und komplexe Anforderung an Studienanfänger:innen dar. Von den Leser:innen wird dabei unter anderem erwartet, die im Beweis enthaltene deduktive Argumentationsstruktur individuell zu rekonstruieren (Neuhaus-Eckhardt, 2022). Die jüngere Forschung zum Beweislesen hat sich überwiegend auf das Beweisverständnis als Produkt des Leseprozesses konzentriert (Spratte, in press). In diesem Forschungsprojekt wird der Beweisleseprozess selbst in den Blick genommen: Elf Studienanfänger:innen lasen laut denkend einen Beweis nach Forster (2016, S. 180). Anschließend wurden die beim Lesen rekonstruierten Argumentationsstrukturen aus den Transkripten herausgearbeitet. Die verwendete Methodik lehnt sich an Knipping und Reid (2015) an und basiert auf dem Toulmin-Schema, das in der Mathematikdidaktik zur Analyse von Argumentationsstrukturen in Beweiskonstruktionen etabliert ist.

Es ergeben sich drei typische Rekonstruktionsmuster, die sich in der Anzahl rekonstruierter Aussagen, Argumente und zusammenhängender Argumentationsstränge sowie in den auftretenden Bausteinen des Toulmin-Schemas unterscheiden: Im unstrukturierten Rekonstruktionsmuster gelingt nur vereinzelt eine Rekonstruktion isolierter Argumente, nicht jedoch eines zusammenhängenden Argumentationsstrangs. Im linearen Rekonstruktionsmuster kann der gelesene Beweis durch einen Argumentationsstrang in Grundzügen erfasst werden. Erst durch mehrfaches vollständiges Lesen des Textes konnte eine höhere Komplexität der rekonstruierten Struktur erreicht werden. Diese Rekonstruktionsmuster ähneln der Quellstruktur nach Knipping und Reid (2015). Nur hier gelang den Leser:innen die zuverlässige Identifikation von Schlussregeln und die Verbindung mehrerer Argumentationsstränge, die zu einem umfassenden Beweisverständnis beitragen.

Literatur

Forster, O. (2016). *Analysis 1*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11545-6

Knipping, C. & Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Hrsg.): *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (S. 75–101).

Neuhaus-Eckhardt, S. (2022). *Beweisverständnis von Studierenden: Zusammenhänge zu individuellen Merkmalen und der Nutzung von Beweislesestrategien*. Waxmann.

Spratte, V. (in press). Models for proof comprehension in secondary and tertiary education: Uniting the perspectives. *mathematica didactica.*

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN IN PUBLICA COMMODA SEIT 1737

MATHEMATISCHES INSTITUT

AG Mathematik und ihre Didaktik

REKONSTRUKTION VON BEWEISLESE-PROZESSEN MIT DEM TOULMIN-SCHEMA

Eine Untersuchung zur Analysis bei Studienanfänger:innen

Verena Spratte (Göttingen), Lennart Schröter (Tübingen)

Forschungsinteresse

Das Toulmin-Schema wird in der Mathematikdidaktik genutzt, um Argumentationsstrukturen in Prozessen der Beweiskonstruktion sichtbar zu machen (Knipping & Reid, 2010).

Kann es auch Muster individueller Rekonstruktionen eines Beweises im Rahmen des laut denkenden Beweislesens aufdecken?

Wenn ja, lassen sich unterschiedliche Typen von Argumentationsrekonstruktionen erkennen?

Untersuchung

- Laut-Denken-Protokolle aus Einzelinterviews mit jeweils 2 Beweisen
- N=11 Absolvent:innen des mathematischen Vorkurses an der Uni Göttingen
- Wörtliche Transkription inklusive Erfassung der relevanten Handbewegungen

Methodisches Vorgehen

1. Erstellung eines Kodierleitfadens für die Bausteine des Toulmin-Schemas
2. Kodierung der Bausteine in den Transkripten zum laut denkenden Beweislesen
3. Zusammenführung inhaltsgleicher Bausteine in unterschiedlicher Funktion
4. Visualisierung der Schemata
5. Qualitative Fallbeschreibung und quantitative Ergebnisauswertung
6. Typenbildung durch kontrastierenden Vergleich

Bausteine im Toulmin-Schema

- ○ Datum
- □ Konklusion
- Schlussregel
- Stützung
- Widerlegung
- △ Modaler Operator
- Ausnahmebedingung
- Datum und Konklusion

Der verwendete Beweis

Satz

Die Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in]a,b[$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x)=0$.

Beweis

f besitzt in x ein lokales Maximum. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[$ und

$$f(\xi) \le f(x) \quad \text{für alle } \xi \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

Wir schreiben $\lim_{\xi \searrow x}$, wenn x von oben durch ξ angenähert wird, also nur ξ größer als x betrachtet werden. Analog bedeutet $\lim_{\xi \nearrow x}$, dass sich ξ von unten an x annähert. Da f in x differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = \underbrace{\lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}}_{\le 0} = \underbrace{\lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}}_{\ge 0}.$$

Insgesamt folgt $f'(x) = 0$.

Für ein lokales Minimum ist der Satz analog zu beweisen.

nach Forster (2016, S. 180)

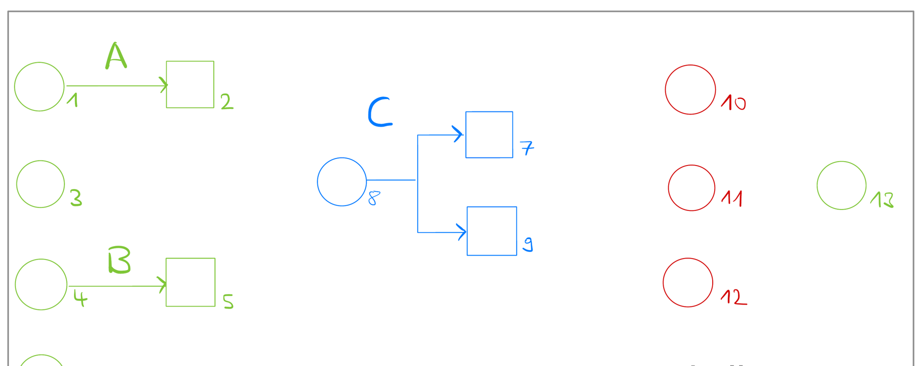
Fazit

Die Auswertungstechnik macht verschiedene Argumentationstypen erkennbar. Herausforderungen bestehen noch

- mit wörtlich vorgelesenen Textabschnitten und
- in der Zuordnung später erneut aufgegriffener Bausteine zu den Farben.

Typ 1: Unstrukturiert (3x)

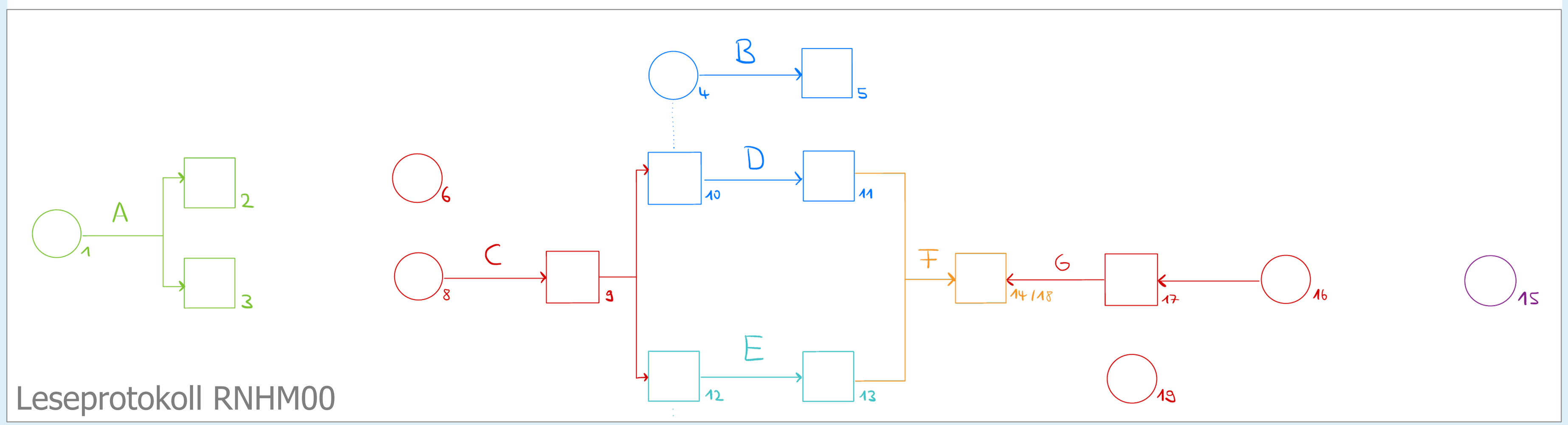
- Bis zu ca. 20 Bausteine
- Bis zu 5 unverbundene Argumente
- Kein Argumentationsstream
- Teils kein Bezug auf Zielkonklusion
- Nur Daten und Konklusionen



Leseprotokoll HTHM11

Typ 2: Lineare Argumentation (5x)

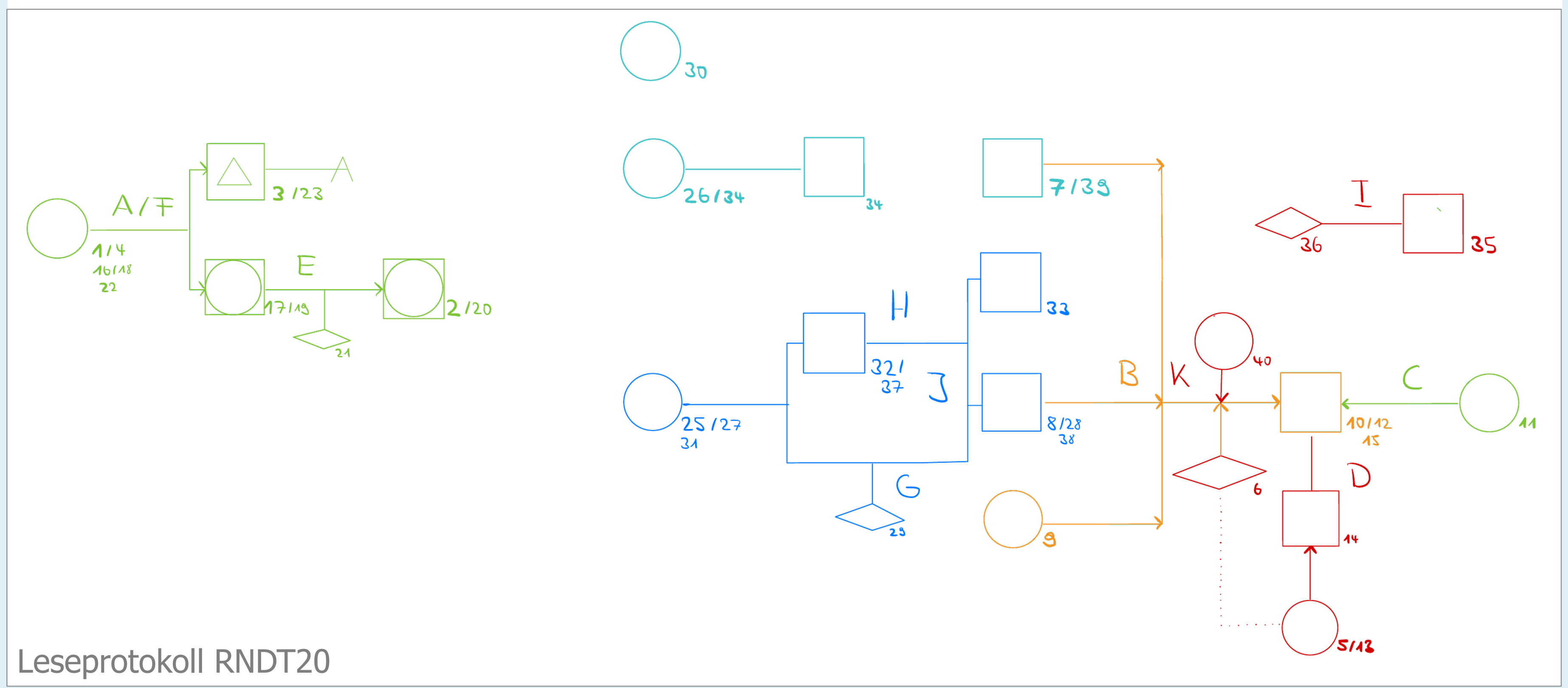
- Ca. 20-45 Bausteine
- Ca. 5-15 meist mehrgliedrige Argumente, selten mehrschichtig
- 1 Argumentationsstream aus 2-3 Abschnitten
- Daneben weitere unverbundene Argumente
- Zielkonklusion wird durch Argumentationsstream erreicht
- Gelegentliche Angabe von Schlussregeln, Stützungen und Widerlegungen



Leseprotokoll RNHM00

Typ 3: Spiralstruktur (3x)

- Mehr als 40 Bausteine
- Mindestens 10 Argumente, darunter viele mehrgliedrige und mehrschichtige
- mehrere Argumentationsstreams
- Zielkonklusion wird mehrfach begründet (hier je 3 Mal)
- Angabe von Schlussregeln
- Gelegentliche Stützungen, Widerlegungen und Ausnahmebedingungen



Leseprotokoll RNDT20

Ausblick

- Vergleich mit Ergebnissen eines zweiten Beweises (Zahlentheorie)
- Klassifikation tragfähiger und nicht tragfähiger Argumente
- Validierung der Typenbildung durch Bezüge zu Beweiskonstruktionen in neuer Stichprobe
- Wechselbeziehungen der entdeckten Argumentationsstruktur und den Lesestrategien der Studienanfänger:innen
- Andere Analysewerkzeuge zur Argumentationsstrukur, z.B. Govier (2010)

Literatur

Forster, O. (2016). *Analysis 1*. Springer.
Govier, T. (2010). *A practical study of argument.* Wadsworth Cengage Learning.
Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3–21.
Knipping, C. & Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.): *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (S. 75–101).
Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarbeitete Auflage). Beltz.
Meyer, M. (2021). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument* (2. Auflage). Springer Spektrum.
Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Sense publishers.
Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Überarbeitete Version des Werkes von 1958). Cambridge University Press.

Kontakt

Verena Spratte
verena.spratte@uni-goettingen.de

Bunsenstraße 3-5 (Büro 014)
37073 Göttingen