Nina BERLINGER, Friedhelm KÄPNICK, Münster

Besondere Visualisierungskompetenzen kleiner Matheasse

Im Ringen um immer tiefere Einsichten in Problemlöseprozesse mathematisch begabter Kinder zeigte sich, dass es zwischen zwei ursprünglich relativ unabhängigen Untersuchungsthemen doch enge Verflechtungen gibt, die wir im Folgenden überblicksartig und exemplarisch vorstellen.

1. Räumliches Vorstellungsvermögen und mathematische Begabungen

Das Ziel eines ersten Forschungsvorhabens ist die Klärung der Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens für die Entwicklung einer mathematischen Begabung bei Dritt- und Viertklässlern. Die generell große Relevanz räumlichen Vorstellungsvermögens für mathematisches Tätigsein ist unbestritten. In Käpnicks Untersuchungen (1998) konnte die Annahme aber nicht bestätigt werden, dass das räumliche Vorstellungsvermögen ein mathematikspezifisches Begabungsmerkmal ist. Auffällig war, dass sich die mathematisch begabten Kinder bzgl. der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens stark voneinander unterschieden. Dies könnte u. a. im Sinne Krutetzkis (1968) interpretiert werden, der das räumliche Vorstellungsvermögen als günstige, jedoch nicht als unbedingt erforderliche Komponente für eine mathematische Begabung einschätzt und hinsichtlich einer Typisierung verschiedener Ausprägungen mathematischer Begabungen zwischen einem analytischen, einem geometrischen und einem harmonischer Typ differenziert. Dabei nutzen vor allem Kinder des geometrischen Typs aber auch des harmonischen Typs auf beachtlichem Niveau räumlich-visuelle Strategien beim mathematischen Problemlösen.

Darüber hinaus konnten verschiedene Studien im Kontext mathematischer Allgemeinbildung (u. a. Grüßing 2012, Lehmann & Jüling 2002) einen Zusammenhang zwischen der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens und allgemeinen mathematischen Kompetenzen nachweisen. Dieser Zusammenhang ist beim Lösen komplexer Problemaufgaben tendenziell größer als beim Bearbeiten von Routineaufgaben. Als Erklärungen hierfür werden u. a. besondere Fähigkeiten im Wechseln der Repräsentationsebene und im Einnehmen von verschiedenen Perspektiven, die Verfügbarkeit einer effektivitätssteigernden räumlich-visuellen Strategie zusätzlich zu einer abstrakt-logischen Strategie und Kompetenzen im Wechseln zwischen bildhaft-anschaulicher und begrifflich-abstrakter Ebene in Form von Doppelrepräsentationen genannt (z. B. Lehmann & Jüling 2002).

2. Intuitionen und mathematische Begabungen

Als wichtiges Fazit einer zweiten Untersuchung lässt sich auf der Basis von langjährigen Studien zu und der praktischen Tätigkeit mit mathematisch begabten Kindern herausstellen, dass Intuitionen ein allgemein wichtiger und prägender Aspekt mathematisch-produktiven Tuns dieser Kinder sind. Ausgehend von vielen Fallbeispielen gilt für derartige Intuitionen, dass sie

- nicht nur auf dem jeweiligen mathematischen Vorwissen, sondern auch auf allgemeinen kognitiven Kompetenzen der Kinder beruhen,
- durch ein ganzheitlich-komplexes, sinnlich-emotionales Erfassen eines mathematischen Sachverhaltes geprägt sind,
- nicht vordergründig an verbale Sprache gebunden sind, sondern aus im Unbewussten subjektiv konstruierten komplexen „Bild- und Symbolwelten“ bestehen,
- in allen Problemphasen auftreten und den jeweiligen Stil und die Lösungsqualität mitbestimmen, etwa als
  - sinnlich-emotionales, ganzheitliches Erfassen einer Problemsituation,
  - als plötzliche, meist vage Eingebung einer Lösungsidee,
  - als bruchstückhafte oder diffuse Darstellung bzw. Erklärung einer Lösung,
  - intuitives „Theoriekonstrukt“ (Definition eines Begriffs, Begründung eines wesentlichen mathematischen Zusammenhangs) (vgl. Käpnick 2010, Käpnick 2012).

Ein Vergleich mit Selbstreflexionen professioneller Mathematiker zeigt, dass es diesbezüglich offenbar keine prinzipiellen Unterschiede zwischen der Entdeckertätigkeit von Kindern und der von Wissenschaftlern gibt. Auffällig ist insbesondere, dass Intuitionen bei kleinen wie bei großen Matheassen in verschiedenen Problemlösephasen auftreten und dass sich Problemlöseabläufe in beiden Gruppierungen ähneln.

3. Ein Fallbeispiel für visuelle Bilder beim Lösen mathematischer Probleme

Das folgende Fallbeispiel kann verdeutlichen, wie sowohl besondere Kompetenzen im räumlichen Vorstellen als auch ein Aspekt von Intuitionen beim Lösen einer Problemaufgabe „zusammenspielen“. Die Beispielaufgabe bestand darin, alle Möglichkeiten für die Anzahl von Schnittpunkten bei 1, 2, 3, 4 und 5 Geraden (in einer Ebene) zu erkunden. Der 10jährige Sven zeichnete nicht, wie die meisten anderen mathematisch begabten Kinder, spontan oder systematisch verschiedene Lagebeziehungen von Geraden auf, sondern löste die Aufgabe „nur im Kopf“ und schrieb nach wenigen

Minuten die nebenstehende Lösung auf. Auf der Basis eines vertrauten Analysegesprächs lässt sich diese so interpretieren: Sven begann durchaus systematisch alle verschiedenen Lagemöglichkeiten im Kopf „durchzuspielen“, schrieb sie auf und entdeckte dabei spontan eine doppelte Dreiecksanordnung als „visuelles Lösungsbild“, die sich zum einen durch die Anzahl der minimalen und maximalen Schnittpunktanzahlen bei steigender Geradenzahl und zum anderen durch die unmöglichen Schnittpunktanzahlen für 4, 5, … Geraden ergab.

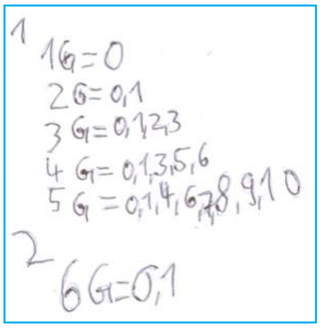

Abb. 1: Svens Lösung zur Schnittpunkt-Aufgabe

Hiervon war er so fasziniert, dass die unvollständige Angabe seiner Einzellösungen nebensächlich wurde. Er wollte vielmehr seine Lösungsmuster für noch höhere Geradenzahlen prüfen und gab sich selbst als Anschlussproblem die Zusatzaufgabe „2“ für 6 Geraden. Das für ihn typische Erzeugen intuitiver visueller Lösungsbilder reflektiert der Junge verallgemeinernd: *„Ich habe beim Knobeln so viele Dinge im Kopf, dass ich das, was ich sagen möchte, nicht [mit Worten] rausselektieren kann.“*

4. Theoretische Reflexionen zu „visuellen Bildern“ beim Bearbeiten mathematischer Probleme

Wie im Fallbeispiel zu erkennen, zeigen unsere Analysen verallgemeinernd, dass solche visuellen Vorstellungen intuitiv entstehen und den Kindern zumindest z. T. noch unbewusst sind. Sie werden als Bilder oder Zeichengebilde und (meist) nonverbal (gedanklich) repräsentiert, sie sind oft noch unpräzise, aber zugleich sehr komplex, d. h., die Bilder beinhalten wesentliche Grundstrukturen oder Kernideen. Da die visuellen Bilder individuell geprägt sind, identifizieren sich die Problembearbeiter außerdem sehr schnell mit den Vorstellungsbildern, indem sie diese gefühlsmäßig für sehr wichtig und richtig erachten. Die besonderen Stärken visueller Vorstellungen ergeben sich u. E. gerade daraus, dass sie bild- oder zeichenhaft, nonverbal und unpräzise sind. Dies ermöglicht den Kindern unter Beibehalt wesentlicher Zusammenhänge bzw. Kernideen ein sehr schnelles Vergleichen und Auswählen von Wichtigem aus dem jeweiligen inhaltlichen Kontext, eine große Komplexitätsreduktion und damit eine beträchtliche Entlastung des Arbeitsgedächtnisses sowie einen sehr flexiblen und spielerisch-kreativen Umgang mit den visuellen Vorstellungen.

Beim Erzeugen visueller Bilder im Kontext des Lösens mathematischer Probleme verbinden kleine Matheasse somit u. E. besondere Kompetenzen im räumlichem Vorstellen und im Nutzen von Intuitionen. Fischer charakterisiert den Zusammenhang so: *„Um zu Vermutungen, zu Beweisideen, zu* *tragfähigen Begriffsbildungen, zu Ideen für eine Mathematisierung bei außermathematischen Sachverhalten zu kommen, (muss) man eine sinnliche, in der Regel eine visuelle Vorstellung von der Angelegenheit haben*" (Fischer 1984, S. 151). Verschiedene Studien (u. a. Kozehvnikov, Hegarty & Mayer 2002, van Garderen 2006) zeigen demgemäß, dass visuelle Bilder gerade beim mathematischen Problemlösen, nicht unbedingt bei Routineaufgaben, hilfreich sein können, wobei zwischen primär bildhaften und primär schematischen Repräsentationen unterschieden wird. Diese Zusammenhänge könnten darüber hinaus von genereller Bedeutung für kindliches Lernen von Mathematik sein, da sich prinzipielle Übereinstimmungen zum „Modell der Repräsentationsumorganisation" (Karmiloff-Smith 1996) und zu Analysen von Lorenz zu rechenschwachen Kindern (1992, 2003) zeigen.

Bzgl. des Erkennens und Analysierens solcher Lösungsprozesse ist natürlich zu beachten, dass Kinder nur z. T. über ihre visuellen Vorstellungen reflektieren und sie nur vage beschreiben können. Durch Beobachtung können sie i. Allgem. ebenfalls nicht erfasst werden. Aber ein gemeinsames Analysegespräch bietet Chancen, visuelle Vorstellungen von Kindern zu erkennen bzw. vage zu erfassen und dann zu werten. Eine wichtige Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass der Interviewer mathematisch kompetent und sensibel für intuitive und individuell geprägte Problemlöseprozesse ist.

5. Selbstreflexionen professioneller Mathematiker

Da Kinder über ihre Visualisierungen kaum sprachlich reflektieren können, bieten sich „Selbstanalysen" professioneller Mathematiker als Belege für das angesprochene Phänomen an, wie z. B. die folgende, u. E. repräsentative Selbstreflexion des bekannten Münsteraner Mathematikers Deninger:

„*Also jeder macht sich halt ein Bild von den Dingen, mit denen er operiert. Niemand operiert ganz, indem er formal irgendwelche Dinge umformt und ohne ein übergeordnetes Bild. Wenn man nicht ein übergeordnetes Bild hat, in irgendeinem Sinne, kann man diese tausende Umformungen, die man machen muss, ja nicht zielgerichtet machen. Man muss schon eine Vorstellung haben. Diese Vorstellung ist irgendwie bildhaft, ja das ist irgendwie, man sieht es. Aber es ist nicht zu vergleichen mit irgendetwas anderem in dieser Welt. …Man sucht, probiert, macht, tut, entwickelt ein Gefühl für den Gegenstand und in irgendeiner Weise entsteht dann ein Bild von dem Gegenstand. Aber das Wort Bild ist … in einem sehr viel weiteren Sinne, als das Übliche, was man darunter versteht, gemeint.*"

Literatur

Die verwendeten Literaturquellen können bei den Autoren erfragt werden.