Hans M. DIETZ, Paderborn

Mathematik für Nichtmathematiker – diagrammatische Aspekte

1. Einführung

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Möglichkeit, Studierenden eine methodische Hilfestellung bei der „Übersetzung“ von Formeln in Grafiken und umgekehrt zu geben. Ein besonders hoher Bedarf an solchen Hilfestellungen besteht in der Regel dort, wo Studierende auf einen für sie überraschend hohen Mathematikanteil im Studium treffen. Das gilt z.B. bei Wirtschaftswissenschaftlern, für die der Autor seit einigen Jahren mathematische Grundkurse liest. Die Beschäftigung mit deren typischen Studienschwierigkeiten führte zur Entwicklung eines Lehrkonzeptes, welches studien- und arbeitsmethodische Instruktionen gezielt in die reguläre Lehre integriert, vgl. Dietz (2013). Von zentraler Bedeutung dafür ist eine Prozedur zum verstehenden Lesen mathematikhaltiger Texte, die beim „Buchstabieren“ beginnt und bis hin zu einem validen mentalen Konzept des jeweiligen mathematischen Objektes führt. Als materielles Abbild zentraler Elemente dieses Konzeptes wurde das Instrument der „Konzeptbasis“ entwickelt, welches sich in der Praxis bereits als äußerst hilfreich erwiesen hat; mehr darüber siehe Dietz (2012). Aufgabe der Studierenden beim Anlegen einer solchen Konzeptbasis ist es u.a., ausgehend von textlichen Repräsentationen mathematischer Objekte oder Sachverhalte visuelle Darstellungen dafür zu entwickeln. Auch der umgekehrte Weg ist für die Fähigkeit zum mathematischen Arbeiten von grundsätzlicher Bedeutung.

2. Übersetzung von Text in Graphik und vice versa: Probleme

Sowohl Formeln als auch Graphiken sind wesentliche Bestandteile des *concept image* im Sinne von Tall & Vinner (1981). Wir verstehen sie als Elemente zweier unterschiedlicher Sprachen zur Beschreibung derselben Objekte bzw. Sachverhalte. Damit stellt sich die Frage nach der wechselseitigen Übersetzbarkeit. Zugleich sind sie bei entsprechendem Gebrauch als *Diagramme* im Sinne von Peirce zu verstehen, vgl. z.B. Dörfler (2010). Auch deren wechselseitige Transformationen können jeweils als Übersetzungsprozess gedeutet werden, der Parallelitäten zu einem sprachlichen Lese- bzw. Übersetzungsprozess aufweist, wegen der erheblich höheren Komplexität und Kontextgebundenheit der Bildinformationen jedoch wesentlich schwieriger zu formalisieren und zu prozeduralisieren ist.

Die semantisch korrekte Übersetzung eines in einer natürlichen oder künstlichen Sprache formulierten Ausgangstextes in einen in einer anderen Sprache formulierten *Text* ist bekanntlich nicht allein mit Hilfe eines Wörterbuchs bzw. *Lexikons* zu bewerkstelligen; sie gelingt vielmehr erst mit Hilfe der *Syntax* beider Sprachen und unter sorgfältiger Berücksichtigung des *Kontextes* sowie *semantischer Regeln*. Will man nun ein textlich definiertes mathematisches Konzept möglichst gut durch eine *Graphik* visualisieren – im Idealfall so gut, dass sich der Text aus der Graphik rekonstruieren lässt –, wirft das die Frage auf, welche Konstituenten des Textes in welche der Graphik zu übersetzen sind. Anders gefragt: Welche Objekt- bzw. Beziehungsentitäten einer Graphik entsprechen den lexikalischen Einheiten eines Textes, seiner Syntax, seines Kontextes und seiner Semantik? Nach welchen Regeln sind Erstere in Letztere zu überführen?

So komplex diese Fragestellung ist, wird sie im Kontext der Mathematikdidaktik noch um eine zusätzliche Facette angereichert: Sowohl die Entitäten als auch deren Transformationen sollen auf eine möglichst einfache Weise beschrieben werden, die dem Wunsch vieler Studierender nach handlungsleitenden Prozeduren entgegenkommt.

3. Ein Übersetzungsbeispiel

Die letzte Bemerkung rechtfertigt es, sich der Lösung des Problems von einem Beispiel ausgehend zu nähern. Dazu betrachten wir das Konzept einer streng monoton wachsenden Funktion, wie es durch folgenden dreizeiligen mathematischen Text gegeben ist:

Definition: *Eine Funktion $f\colon D \rightarrow R$ mit $D \subseteq R$ heißt* streng monoton wachsend*, wenn gilt*

$$\forall\ x,y \in D\colon\ x < y \rightarrow f(x) < f(y)\,. \qquad (*)$$

Als Ausgangspunkt einer Visualisierung empfiehlt es sich, zunächst den Text als solchen genauer zu analysieren; insbesondere ist Klarheit über den Kontext, in dem diese Definition steht, erforderlich. Wir setzen voraus, dass alle Begriffe und Konzepte, auf die sich die ersten beiden Zeilen dieser Definition beziehen, für den Leser gut bekannt und verstanden (!) sind – z.B. aus dem bisher in einer Vorlesung schon Behandelten. Dann assoziiert der Leser mit diesen Begriffen und Konzepten bereits visuelle Grundbausteine wie z.B. ein Koordinatensystem und – repräsentativ – einen Definitionsbereich *D*, auf die wir uns weiterhin beziehen.

Das eigentlich Neue wird durch die Definitionsklausel (*) gegeben. Sie ist als Kette aus 14 „Atomen" zu interpretieren, wenn *„f(x)", „f(y)"* und alle anderen Zeichen jeweils einzeln als ein Atom gedeutet werden. Offensichtlich gibt es unterschiedliche Kategorien von Atomen:

(1) solche, denen *„piktorielle Entitäten"* in einer Graphik entsprechen: dies sind *„x", „y", „f(x)", „f(y)"* als an die Koordinatenachsen schreibbare Zeichen (im Sinne von Referenzen auf Punkte der Achsen) sowie *„D",* welches meist als Intervall [*a, b*] der Abszissenachse dargestellt wird;

(2) solche, die visualisierbare *Relationen* dieser Objekte definieren: dies sind die Zeichen *„ ∈" und „ < " (zweifach);*

(3) solche, die kein visuelles Abbild benötigen *(Komma, Doppelpunkt);*

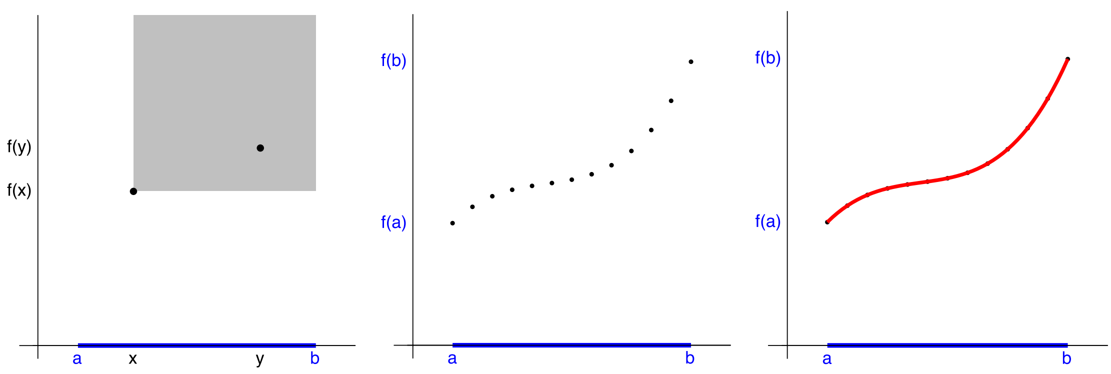
(4) solche, die bei der Visualisierung berücksichtigt werden müssen, jedoch *„nicht unmittelbar innerhalb (nur) einer Skizze visualisierbar"* sind; dies sind der Quantor „ $\forall$ " *sowie der Implikationspfeil „ $\rightarrow$ ".*

Weil Letzterer eine logische Beziehung zwischen den Relationsaussagen „x < y" und „f(x) < f(y)" beschreibt, wird er zumindest implizit ebenfalls der Kategorie (2) zurechenbar. Hinsichtlich dieser vier Kategorien sind nun zwei Thesen formulierbar:

These 1: *Die unter (1) genannten Entitäten können unter Beachtung der Relationen aus (2) innerhalb* einer *Grafik entlang einer Prozedur visualisiert werden, die für Studierende gut nachvollziehbar ist.*

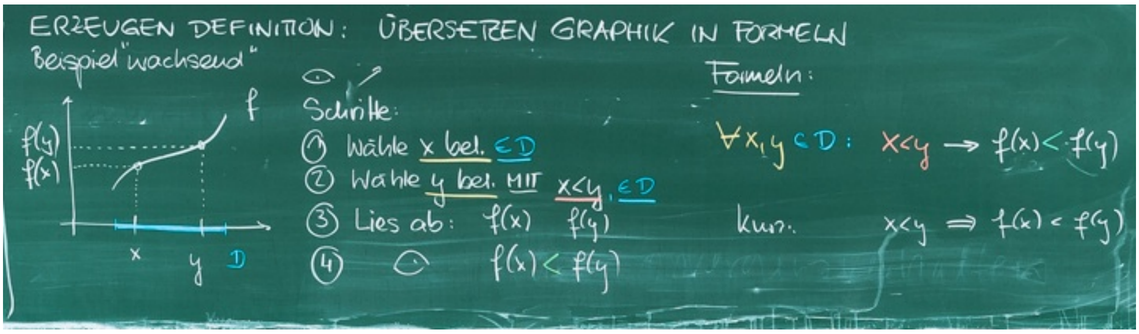
These 2: *Struktur- und logikbestimmende Entitäten der Kategorie (4) dagegen werden ggf. erst durch* Familien *von Grafiken repräsentierbar.*

Wenn hier auch nicht auf weitere Einzelheiten des Vortrages eingegangen werden kann, sei doch auf das typische Ergebnis der Prozedur zu These 1 verwiesen – siehe die nachfolgende Abbildung ganz links:



Hiervon ausgehend ist nun noch der Quantor „ $\forall$ " sichtbar zu machen. Dieser verweist darauf, dass die Punkte *x* und *y beliebig* aus *D* wählbar waren. Damit muss die qualitative Situation der Graphik links erhalten bleiben, wenn *x* und *y* lagerichtig variiert bzw. insbesondere weitere Punkte eingefügt werden. Dies führt über eine zumindest gedankliche Sequenz von Graphiken wie in der Mitte zum „graphischen Limes“ als Ziel (rechts).

Auch die umgekehrte Vorgehensweise – Übersetzung von Graphik in Text – wurde im Vortrag thematisiert. Hier ein Beispiel aus der Praxis:



4. Fazit

Für eine didaktisch-prozedurbasierte Übersetzung von Text in Graphik lassen sich Paradigmen angeben, beruhend auf Übersetzungsanweisungen für piktorielle Entitäten, Relationen sowie unsichtbare Zeichen. Dafür kann die Erzeugung von Diagrammfamilien statt nur einzelner Diagramme erforderlich sein. Die Übersetzung von Graphik in Text ist ebenfalls paradigmatisch prozeduralisierbar, erfordert jedoch mitunter zunächst Diagrammtransformationen auf der Konzeptebene. Vieles spricht dafür, dass durch spielerisches Experimentieren und Beobachten an verschiedenen diagrammatischen Stadien dieser Übersetzungen weitergehende mathematische Erkenntnisse unterstützt werden.

Literatur

Arcavi, A. (2003): The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 52, 215-241.

Dietz, H.M. (2013): CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. Vortrag auf der khdm-Arbeitstagung 2013 in Paderborn, 23.02.2013. (Veröffentlichung im Tagungsband geplant.)

Dietz, H.M. (2012): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Das ECOMath-Handbuch. Heidelberg u.a.: Springer Gabler.

Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In: Kadunz, G. (Hrsg.): Sprache und Zeichen. Berlin: Franzbecker

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.