HERRMANN, Janine & WESSEL, Lena
Paderborn

Verstehenstypen von Lehrkräften zum Konzept Skalarprodukt und ihre Vorstellungen von Verstehensprozessen

Theorie: Expertise und Wissen zum verständigen Lehren

Um Anforderungssituationen kompetent bewältigen zu können, benötigen Lehrkräfte gegenstandsspezifische Expertise (Prediger, 2019), welche unter anderem durch gegenstandsbezogene Denk- und Wahrnehmungskategorien spezifiziert wird. Diese Kategorien umfassen gegenstandsspezifische Aspekte von Fachwissen (CK), fachdidaktischem Wissen (PCK) sowie pädagogischem Wissen (GCK) (Prediger, 2019) und sind für den Bereich der analytischen Geometrie noch nicht weiter spezifiziert. Dieser Beitrag beleuchtet das Fachwissen als "Grundlage, auf der fachdidaktische Beweglichkeit entstehen kann" (Baumert & Kunter, 2006, S. 496) im Hinblick auf die Realisierung verständigen Unterrichts. Neben dem eigenen fachlichen Verständnis werden auch „Vorstellungen darüber, wie Verstehensprozesse ablaufen“ (Drollinger-Vetter, 2011, S. 332) in Betracht gezogen. Die theoretische Grundlage bildet dabei eine kognitionstheoretische Modellierung von konzeptuellem Verständnis, welche sich durch Verknüpfungen (1) zu anderen Konzepten, (2) von Darstellungen und (3) von Verstehenselementen (VE) auszeichnet (Drollinger-Vetter, S. 188). Aufgabe der Lehrkraft ist es, Prozesse anzuregen, bei denen diese drei Ebenen miteinander vernetzt werden, was als Auffalten und Verdichten bezeichnet wird.

Für verständigen Unterricht im Bereich der analytischen Geometrie sind Prozesse des Algebraisierens und Geometrisierens zentral (Tietze et al., 2000, S. 71). Vohns (2013, S. 149) erachtet das Vernetzen von geometrischen und algebraischen Darstellungen als relevant und grenzt zudem vektorielle von elementaren Darstellungen ab. Obwohl einige Inhalte der analytischen Geometrie fachlich abgesteckt sind (Tietze et al., 2000), gibt es in der Literatur kaum Modellierungen gegenstandsspezifischer Verstehensprozesse.

Forschungsinteresse

Dieser Beitrag konkretisiert das Verstehen im Bereich der analytischen Geometrie am Beispiel des Skalarproduktes und schlägt ein gegenstandsbezogenes Verstehensmodell vor. Daran anschließend wird das unterrichtsbezogene Verständnis von Lehrkräften zum Konzepte Skalarprodukt untersucht, mit dem theoretischen Modell abgeglichen und in Zusammenhang mit Vorstellungen über Verstehensprozesse von Lernenden gebracht.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

(FF1) Wie kann Verstehen zum Konzept Skalarprodukt kognitionstheoretisch modelliert werden?

(FF2) Welche Verstehenstypen von Lehrkräften sind zum Skalarprodukt rekonstruierbar und welche typischen Vorstellungen über Verstehensprozesse im Unterricht können darauf aufbauend unterschieden werden?

Mit der Beantwortung der Forschungsfragen wird zum einen ein Modell zur Spezifikation gegenstandsspezifischer Expertise vorbereitet. Zum anderen werden Implikationen für die Gestaltung von Fortbildungen sichtbar.

Spezifikation eines Verstehensmodells zum Skalarprodukt (FF1)

Aus der Literatur lassen sich im Bereich der analytischen Geometrie vier Formen von spezifizierten Darstellungen ableiten: Elementargeometrische, elementaralgebraische, pfeilgeometrische und vektoriell algebraische. Darin lassen verschiedene Darstellungen des Skalarproduktes wiederfinden:

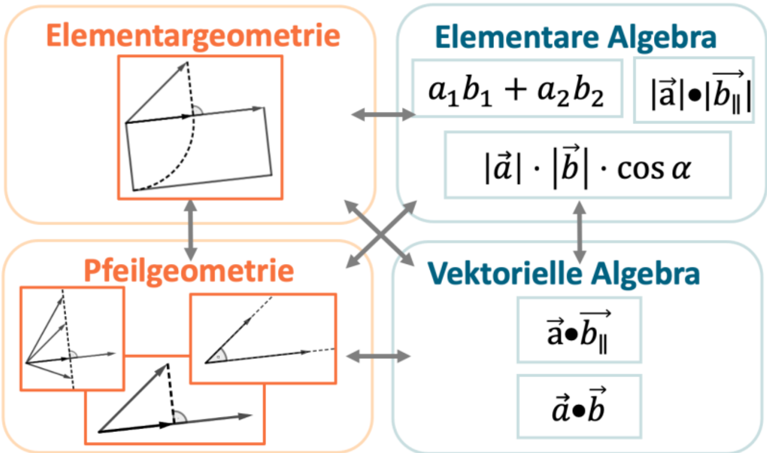

Abb. 1: Darstellungen zum Skalarprodukt in vier unterschiedlichen Formen

Diesen Darstellungen liegen jeweils Verstehenselemente zugrunde, die wiederum jeweils in den vier unterschiedlichen Darstellungsformen formuliert sein können. Hier sollen die folgenden Verstehenselemente berücksichtigt werden, die sich aus einer stoffdidaktischen Analyse ergeben (genauer in Herrmann, et al., i.V.): *Orthogonalität, Längen, Winkel, Rechteck, Gerade, Projektion, Kosinus, Vektoren/Pfeile, Orientierung und Richtung, Produkte, Zahl und Rechenoperationen.*

Methode: Kodierung von Elementen des Verstehensmodells (FF2)

Lehrkräfte bekamen den Auftrag, die Lernendenaufgabe in Abb. 2 zunächst selbst zu lösen und anschließend deren Relevanz für ihren Unterricht zu diskutieren. Datengrundlage zur Beforschung der Bearbeitungsprozesse sind transkribierte Videographien dreier Gruppendiskussionen sowie die zugehörigen Schriftprodukte der Lehrkräfte (N=15).

Gleiche Skalarprodukte

In der nebenstehenden Abbildung sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ und $\vec{v}$ durch Pfeile mit gemeinsamen Ursprung dargestellt.

Vergleiche die Skalarprodukte $\vec{a} \bullet \vec{v}$, $\vec{b} \bullet \vec{v}$, $\vec{c} \bullet \vec{v}$ und $\vec{d} \bullet \vec{v}$ jeweils miteinander ohne zu rechnen.

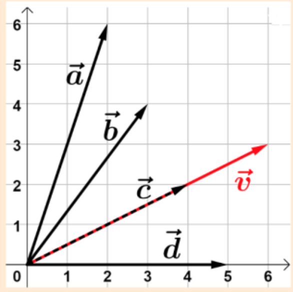

Abb. 2: Lernendenaufgabe zum Skalarprodukt

Das im Theorieteil dargestellte Verstehensmodell stellt eine normative Grundlage zur deduktiven Kategorienbildung nach Kuckartz (2018) dar, bei der inhaltsspezifische VE und Darstellungen berücksichtigt werden. Ein Fokus auf eine verständige Begriffsverwendung, bei der VE und Darstellungen nur dann kodiert werden, wenn sie fachlich korrekt dargestellt und in einem symbolischen Sinne auf das Skalarprodukt bezogen werden, erwies sich als sinnvoll. Auf Grundlage der Kodierung wurden im Anschluss Typen herausgearbeitet, deren eigenes Verständnis des Konzeptes Skalarprodukt unterscheidbar ist (Kuckartz, 2018, S. 143-161). Durch eine Kodierung unterrichtsbezogener Aussagen lassen sich aufbauend auf der Typisierung Vorstellungen der Lehrkräfte zu Verstehensprozessen benennen.

Datenauszug: Exemplarische Kodierung

Die Kodierung soll im Folgenden exemplarisch dargestellt werden:

Christian: Ich habe […] mal so einen Unterrichtseinstieg kennengelernt, wo eben genau von diesem Geometrischen ausgegangen wird, dass man sich unterschiedliche Dreiecke anguckt, dann über Kosinus rum und dann quasi guckt, wie projiziere ich quasi diesen senkrechten Teil auf meinen Vektor.

In dieser Aussage können die elementargeometrisch genutzten VE "Projektion" und "senkrecht", sowie das elementargeometrisch und -algebraisch genutzte VE "Kosinus" kodiert werden. Da Christian den Vektor hier in einem geometrischen Sinne nutzt, wird auch das VE "Pfeil" kodiert. Anhand einer anschließenden Gestikulation mithilfe der Skizze (Abb. 2) wird auch die Darstellung "Projektion mit Pfeilen" rekonstruiert. Nimmt man alle Kodierungen zusammen und bildet sie in den vier Bereichen des Verstehensmodells ab, entsteht je Lehrkraft eine Übersicht, die das eigene gegenstandsspezifische Verständnis darstellt, was bei der Bearbeitung der Lernendenaufgabe aktiviert wird (siehe Abb. 3). Die Pfeile drücken dann eine explizite Vernetzung von VE aus. Insgesamt ist bei der Kodierung von Christians Äußerungen auffällig, dass VE und Darstellungen in verschiedenen Formen genutzt und in einen Zusammenhang gebracht werden, weshalb er dem **(A) analytisch-vernetzenden Typ** zugeordnet wird. Aus Christians Äußerungen über den Unterricht wie z.B. "Aber wenn ich das geometrisch eingeführt habe, kann ich das ja" lassen sich zudem Vorstellungen zu Verstehensprozessen von Lernenden ableiten. Für die Lehrkraft ist die Anknüpfung an geometrisches Vorwissen von Bedeutung, deren Realisierung jedoch auch von der Verfügbarkeit passenden Materials abzuhängen scheint.

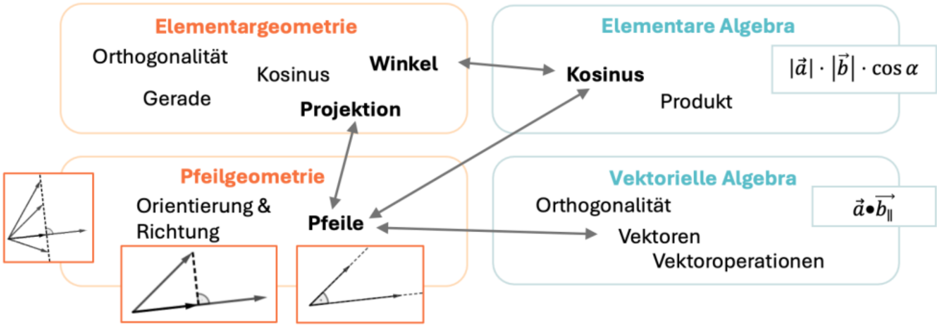

Abb. 3: Christians Kodierung

Im Zuge der Typisierung konnten drei weitere Verstehenstypen identifiziert werden: **(B) Der pragmatisch-Rechenlastige**, der den Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Orthogonalität betont, **(C) der Novize**, der Verstehenselemente benennen, allerdings kaum konzeptuell verdichten kann, und **(D) der physikalisch-Geometrische**, der einen realweltlichen Bezug des Skalarproduktes in physikalischen Kontexten herstellt. In den Vorstellungen über Verstehensprozesse im Unterricht zeigt sich ein unterschiedlicher Grad an fachdidaktischer Beweglichkeit, welcher mit den Verstehenstypen in Verbindung gebracht werden kann. Dieser Beitrag bestätigt damit für den Inhalt Skalarprodukt, dass Fachwissen, bzw. das eigene Verständnis des Inhalts, als Grundlage für fachdidaktische Beweglichkeit anzunehmen ist (Baumert, Kunter, 2006, S. 496). Hieraus ergeben sich Bedarfe für Fortbildungen.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). *Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften.* ZfE 9, 469–520.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit*. Waxmann.

Herrmann, J., Hoffmann, M. & Wessel, L. (i.V.). *Mit Darstellungen verstehen – Konzeptverständnis durch Darstellungsvernetzung in der analytischen Geometrie*.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz.

Prediger, S. (2019). *Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching*. Mathematics Education Research Journal, 31(4), 367–392.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Friedrich, Vieweg & Sohn.

Vohns, A. (2013). Von der Vektorrechnung zum reflektierten Umgang mit vektoriellen Darstellungen. In: Allmendinger, H., et al. (Hrsg.): *Mathematik verständlich unterrichten*. Springer Spektrum, 147-168.