HAUER-TYPPELT, Petra
Wien

Anfangsunterricht Wahrscheinlichkeit

1. Ausgangspunkt

Der Begriff "Wahrscheinlichkeit" ist reich an Aspekten. In der Mathematikdidaktik herrscht längst Übereinkunft, dass es einer längerfristigen Entwicklung im Sinne des Spiralprinzips bedarf, um für die Lernenden den Aufbau eines adäquaten Begriffsverständnisses zu ermöglichen. Beginnend auf einfachem, intuitivem Niveau in der Primarstufe, systematischer und formaler in der Sekundarstufe bis hin zu einem tragfähigen stochastischen Denken, auf dem Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik verständnisorientiert aufgebaut werden können.

Mit dem neuen Lehrplan 2023 wird nun (endlich) auch an Österreichs Schulen diesen Überlegungen Rechnung getragen. Der Begriff „Wahrscheinlichkeit“, der bislang erst ab der 10. Schulstufe, also außerhalb der Pflichtschulzeit, im Lehrplan verankert war, findet im neuen Lehrplan bereits in der 3. und 4. Schulstufe Eingang. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sollen qualitativ beschrieben und verglichen werden. Was genau aber soll ein solcher Anfangsunterricht zu Zufall und Wahrscheinlichkeit leisten?

In zahlreich durchgeführten Fortbildungen für Lehrpersonen der Primarstufe und der Sekundarstufe 1 zur Thematik hat sich herauskristallisiert, dass neben dem "Was und Wie" vor allem die Frage nach dem "Wozu?" eine Herausforderung an die Lehrkräfte darstellt. Ersteres lässt sich insbesondere anhand vielfältiger Aufgabenstellungen gut darlegen. Die gewinnbringende Umsetzung im Unterricht hängt aber von einer klaren Zielperspektive der Lehrperson ab.

2. Zielperspektive

Im Anfangsunterricht Wahrscheinlichkeit geht es um einen intuitiven Zugang anhand altersadäquater Beispiele noch ohne jede Art von Formalismus oder Berechnen von Wahrscheinlichkeiten. Vielmehr soll ein zu früher Fokus auf das Bestimmen von Zahlenwerten vermieden werden, denn das würde unwillkürlich zu einer einseitigen Darlegung von Wahrscheinlichkeit in Form der Laplace Wahrscheinlichkeit führen. Probleme im späteren Unterricht, wenn es beispielsweise um das Verständnis eines Begriffes wie Irrtumswahrscheinlichkeit geht, wären durch eine einseitige Besetzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorprogrammiert.

Überdies sollen Kontexte und Aufgaben, in denen Wahrscheinlichkeiten auf

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Basis empirischer Befunde eingeschätzt werden, im Auftrag der Allgemeinbildung der Pflichtschule von Beginn an im Unterricht angemessen repräsentiert sein. Denn dieser Aspekt von Wahrscheinlichkeit ist jener, mit dem Menschen in ihrem (Berufs-)Alltag in der Regel am häufigsten konfrontiert sind.

Ein grundsätzliches Ziel eines umsichtigen Anfangsunterrichts ist es, klassische Fehlvorstellungen erst gar nicht aufkommen zu lassen, wie z. B. den Klassiker, dass auch nach Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung der Lottotipp 1,2,3,4,5,6 als unwahrscheinlicher eingestuft wird als ein Tipp, der keinerlei Muster aufweist. Eichler (2010, S. 10) legt weitere Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit künstlichen Zufallsexperimenten am Beispiel des Würfelns dar. Sie ergeben sich häufig aus unpassenden Primärintuitionen, die möglichst frühzeitig durch passende Sekundärintuitionen abgelöst werden sollen.

3. Was meint ein "intuitiver Zugang" zu Wahrscheinlichkeit?

Für einen intuitiven Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff setzen wir dort an, wo Schülerinnen und Schüler bereits Berührungspunkte haben, nämlich bei der Verwendung des Wortes "wahrscheinlich" im alltäglichen Sprachgebrauch. Menschen aller Altersstufen verwenden "wahrscheinlich" meist im Sinn von "sehr wahrscheinlich", etwa wenn wir unsere Absichten ausdrücken oder wenn wir das eigene Erwartungsgefühl zum Eintreten eines bestimmten Ablaufes oder Vorganges ausdrücken. Insofern geht es darum den Begriff „wahrscheinlich“ zu erweitern, zunächst rein verbal, indem Wortkombinationen wie beispielsweise „höchst wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich“ oder „wenig wahrscheinlich“ ins Spiel kommen und an Beispielen aus dem Umfeld der Lernenden, aus der Natur oder aus gesellschaftlichen Vorgängen mit den Kindern diskutiert werden. Ebenfalls an altersadäquaten Beispielen und ansetzend am Sprachverständnis der Lernenden kann erarbeitet werden, dass ein Ergebnis "wahrscheinlicher" als ein anderes sein kann.

In Folge empfiehlt es sich mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsskala, bei waagrechter Lage auch Wahrscheinlichkeitsstreifen genannt, eine Erweiterung zu erarbeiten. Denn die Wahrscheinlichkeitsskala zeigt auch anschaulich auf, dass für Wahrscheinlichkeiten mehr unterschiedliche Grade möglich sind, als man verbal auszudrücken vermag. Lernende werden aufgefordert, die Wahrscheinlichkeit zu einem Sachverhalt einzuschätzen und mit einem Kreuz auf der Skala zu markieren.

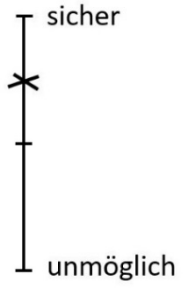

Abb. 1: Wahrscheinlichkeitsskala

Die obere und untere Grenze der Skala sind mit "sicher" bzw. "unmöglich"

bezeichnet, alle anderen Angaben werden dazwischen eingeordnet. Es ist mit den Schülerinnen und Schülern zu klären, welche der verwendeten Wortkombinationen zu welchen Bereichen der Wahrscheinlichkeitsskala passen.

Anzumerken ist, dass selbst das Wort "sicher", das bei der Beurteilung stochastischer Situationen zweifelsfrei besetzt ist, sprachlich verschiedene Bedeutungen hat. Eine Wortkombination wie "sehr sicher" oder der Komparativ "sicherer" finden in der Alltagssprache durchaus Verwendung, beispielsweise in Aussagen wie "Geh weiter rechts, dort ist es sicherer." Insofern ist auch die klar scheinende Bedeutung der oberen Grenze der Wahrscheinlichkeitsskala, insbesondere im Anlassfall entsprechend ausführlich zu thematisieren. Krüger et al. (2015, S.234) empfehlen sogar, im Unterricht entsprechende Zusätze zu verwenden, wie z.B. "ganz sicher" oder "völlig sicher".

Es könnte als problematisch angesehen werden, nach der Einschätzung einer "Wahrscheinlichkeit" zu fragen, ohne dass der Begriff vorab definiert ist. Das liegt aber gerade im Wesen eines intuitiven Zuganges. Als Alternative wird manchmal der Begriff "Chance" für den Anfangsunterricht zur Debatte gestellt (vgl. z.B. Prechtl und Schroeders 2018, S.5 f.). Der Begriff Chance bringt hier allerdings eine andere Problematik mit sich. Chancen werden üblicherweise durch das Verhältnis von günstigen zu ungünstigen Fällen angegeben, man spricht z.B. von einer "fifty-fifty-Chance" bzw. werden Verhältnisse angegeben, z. B. ist die Chance einen Sechser zu würfeln 1:5. Hingegen erfolgt die Beschreibung von Chancen mit Wahrscheinlichkeiten durch den Anteil der günstigen Fällen an allen möglichen Fällen.

Bei der Arbeit mit der Wahrscheinlichkeitsskala kann der zentrale Aspekt, wie man zu Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten kommt, sehr gut miteinfließen. Zu Beginn empfehlen sich Aufgaben aus der unmittelbaren Lebenswelt der Lernenden. Auch auf diesem Niveau ist es bereits ein Ziel, dass Schülerinnen und Schüler erkennen, wann sie bei ihrer Einschätzung auf persönliche Erfahrungen, vielleicht sogar Wünsche, auf Annahmen oder auf fundierte Kenntnisse zurückgreifen. Dabei sollen sie auch lernen, das eine vom anderen zu unterscheiden. Optimalerweise ergibt sich durch die Diskussion um die Aufgaben die Erkenntnis, dass Eigenerfahrung und eigene Kenntnisse individuelle Merkmale sind, die zu sehr unterschiedlichen Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten führen können. Damit zeigt sich der Vorteil von gesicherten Erkenntnissen oder der Verwendung von Daten aus der Vergangenheit im Kontext der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Aufgaben zur Einschätzung auf Basis von Daten sollten jedenfalls noch vor dem Übergang zum Quantifizieren von Wahrscheinlichkeiten bearbeitet

werden. Das Quantifizieren erfolgt über das "neue" Skalieren der Wahrscheinlichkeitsskala von 0 bis 1.

4. Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Am Ende der Pflichtschulzeit sollten möglichst alle Schülerinnen und Schüler den essentiellen Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit verinnerlicht haben: Einerseits werden Wahrscheinlichkeiten, die nicht theoretisch ermittelt werden können, (nach Möglichkeit) aus relativen Häufigkeiten einer sehr großen Versuchsanzahl geschätzt, andererseits werden Wahrscheinlichkeiten als Prognosewerte für relative Häufigkeiten erst für eine große Versuchsanzahl relevant. Wenn auch dieser Zusammenhang inklusive des zugehörigen Empirischen Gesetzes der großen Zahlen nicht (bzw. jedenfalls nicht vollumfänglich) Gegenstand des Anfangsunterrichts ist, so muss er doch von Anfang an im Sinn der Zielperspektive mitberücksichtigt werden. Auch oder gerade bei der Arbeit mit künstlichen Zufallsexperimenten (Münzwurf, Würfeln, Ziehen, Glücksrad etc.) im Anfangsunterricht muss die Bedeutung bzw. Relevanz von Ergebnissen mit den Lernenden in dieser Hinsicht diskutiert und eingeordnet werden.

Literatur

Altmann, S., Hentschel, U., Kurtzmann, G. (2019): *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit 4*. Westermann.

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003): Empfehlungen zu Zielen und Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule 23(3)*, 21-26. https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang23-2003/heft3/Langfassungen/2003-3_ak-empfehl.pdf

Eichler, K.-P. (2010): Wie die Würfel fallen. Zufall und Wahrscheinlichkeit: Fakten und Anregungen. *Grundschule 5*, 10-13

Hauer-Typpelt, P. (2023): Stochastik in der Sekundarstufe 1. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. 54*, 35-49

Hauer-Typpelt, P. (2011): Angemessene Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 43*, 75-87.

Krüger, K., Sill, H.-D., Sikora, C. (2015): *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.

Prechtl A., Schroeders, N. (2018): „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik. *Stochastik in der Schule 38*(3), 2-11.