

Schwierigkeitsgenerierende Merkmale in Aufgaben zum Bündelungsprinzip bei Schüler*innen der 3. Jahrgangsstufe

Das Wissen über das Stellenwertsystem stellt die Grundlage für den Erwerb arithmetischer Kompetenzen dar. Verschiedene Studien haben gezeigt, dass Schüler*innen Probleme mit dem Verständnis des Stellenwertsystems haben (Jensen et al., 2021; Fuson et al., 1997). Unklar ist bislang, welche konkreten Aufgabenmerkmale die Schwierigkeit von Anforderungen in Bezug auf das Stellenwertsystem beeinflussen, und welches Wissen zum Stellenwertsystem diese Anforderungen erfordern. Der Beitrag beschränkt sich auf Anforderungen in Bezug auf das Bündelungsprinzip. Folgende Fragestellung soll in diesem Beitrag geklärt werden: Welche Hinweise geben Lösungsraten systematisch variiert Aufgaben im Hinblick auf verschiedene Anforderungen an das Wissen zum Bündelungsprinzip?

Theoretischer Rahmen

Stellenwertverständnis umfasst Wissen zum Stellenwertprinzip sowie Wissen zum Bündelungsprinzip (Scherer & Opitz, 2010), die als separate Konstrukte betrachtet werden können (Jensen et al., 2021). Das Bündelungsprinzip besagt, dass eine immer gleiche Anzahl an Objekten b zu einer nächstgrößeren Bündelungseinheit gruppiert wird. Eine Ziffer in einer Zahl gibt zum einen durch die Position an, auf welche Bündelungseinheit zur Basis b sie sich bezieht, und zum anderen durch den Wert, wie häufig die Bündelungseinheit mit Basis b in der Zahl vorkommt (Stellenwertprinzip). Dem dezimalen Stellenwertsystem liegt dabei die Basis 10 zugrunde.

Von einem tragfähigen Zahlverständnis wird von Dehaene (1992) ausgegangen, wenn die drei Zahlrepräsentationen - symbolische Zahldarstellung, zugehöriges Zahlwort und Mengenvorstellung - wechselseitig verbunden werden können. Fuson et al. (1997) greifen dieses sogenannte "Triple-Code-Model" von Dehaene (1992) in ihrem UDSSI-Entwicklungsmodell auf. Sie beschreiben zwei parallel ablaufende Entwicklungsaspekte von Stellenwertverständnis. Die Struktur von mehrstelligen Zahlen kann auf zwei verschiedene Arten verstanden werden. Ist bei einem Kind das ordinale Konzept "sequence-tens and ones" entwickelt, so wird in Zehnerschritten gezählt (Zehn, Zwanzig, ...). Beim kardinalen Konzept "seperate-tens and ones" wird der Zehner als separate Bündelungseinheit betrachtet. Die Zehner werden nicht mehr durch die Zahlwortreihe bestimmt, sondern einzeln betrachtet (ein, zwei, drei, ... Zehner). Die flexible Verwendung beider Konzepte bezeichnen Fuson et al. (1997) als entwickeltes Verständnis des Zahlsystems.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Fromme (2017) greift ebenfalls den Bezug zu Zahlrepräsentationen bei Dehaene (1992) auf, wobei sie insbesondere auf materialgebundene Zahldarstellungen fokussiert. Von einem Stellenwertverständnis kann nach Fromme (2017) gesprochen werden, wenn dezimale Strukturen bei Übersetzungsprozessen zwischen oder innerhalb verschiedener Zahlpräsentationen effektiv genutzt werden. Für die Übersetzungsprozesse sind folgende Zahlrepräsentationen von Bedeutung: Symbolische Stellenwertdarstellung, Stufenschreibweisen, verbale Darstellungen, Darstellungen mit Bündelmaterial ohne weitere Strukturierung (z. B. Zehnersystemblöcke nach Dienes) sowie Darstellungen in der Stellenwerttafel mit Ziffern, unstrukturiertem Material (z. B. Plättchen) oder Bündelmaterial. Verknüpft mit dem Stellenwert- und Bündelungsprinzip zeigt sich Stellenwertverständnis aus unserer Perspektive darin, dass Lernende Bündelungsoperationen in verschiedenen Darstellungen durchführen (Bündelungsprinzip) und symbolische Darstellungen in andere Darstellungen übersetzen können (Stellenwertprinzip).

Methode

In einer Längsschnittstudie sollen schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale identifiziert und das Stellenwertverständnis sowie seine Entwicklung bei Lernenden der 3. Jahrgangsstufe untersucht werden. Die erste Datenerhebung fand im Herbst 2024 vor der Einführung des Tausenderraums statt (795 Schüler*innen). Die Folgerhebung wird im Frühjahr 2025 nach dieser Einführung durchgeführt (ca. 450 Schüler*innen).

Den Schüler*innen wurden im Herbst Aufgaben in drei Blöcken digital auf Tablets vorgelegt. Ein Block umfasste Aufgaben zum Stellenwertprinzip, ein weiterer Aufgaben zum Bündelungsprinzip und ein dritter Block Aufgaben, die sowohl Wissen zum Stellenwert- als auch Bündelungsprinzip erforderten. Als Zahlrepräsentationen wurden bei der Studie das Dienes-Material, die Stellenwerttafel mit Plättchen, die auf den Tablets interaktiv zur Verfügung standen, sowie die symbolische Stellenwertdarstellung ausgewählt. Bei den Aufgaben zum Stellenwertprinzip musste jeweils zwischen zwei der drei verschiedenen Zahlrepräsentationen gewechselt werden. Bei den Aufgaben zum Bündelungsprinzip wurde innerhalb der Darstellungen mit Bündelungsinformation (Dienes-Material, Stellenwerttafel) gearbeitet. Sowohl die Reihenfolge der beiden ersten Blöcke als auch die Reihenfolge der Aufgaben innerhalb der Blöcke wurden randomisiert, wobei die Zeit für einzelne Teillöcke von der Versuchsleitung festgelegt wurde.

Bei der Aufgabenkonstruktion wurden potenziell schwierigkeitsgenerierende Merkmale systematisch variiert. Wo möglich wurden die Anforderungen für verschiedene Zahlrepräsentationen parallelisiert. Für das

Bündelungsprinzip werden hier exemplarisch drei Anforderungen herausgegriffen und beschrieben:

Anforderung	Beschreibung
Handlung	Muss zur Lösung der Aufgabe gebündelt oder entbündelt werden?
Ausgangs-Stellenwert	Bleibt nach der Handlung am betroffenen Stellenwert ein Rest übrig?
Ziel-Stellenwert	Ist der Ziel-Stellenwert, zu dem ge-/entbündelt wird, vorher schon besetzt oder leer?

Tabelle: Anforderungen an das Wissen zum Bündelungsprinzip

Insgesamt wurden aus der Kombination der verschiedenen Anforderungen 88 Aufgaben für die Darstellung mit dem Dienes-Material und 89 Aufgaben für die Darstellung mit der Stellenwerttafel im Zahlenraum bis 1000 erstellt. Im Mittel hat ein Kind von den insgesamt 177 Aufgaben zum Bündelungsprinzip 40 Aufgaben bearbeitet.

Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden werden zu den oben vorgestellten Anforderungen einzelne Ergebnisse präsentiert. Es lässt sich im Allgemeinen feststellen, dass Aufgaben mit Dienes-Material als vorgegebene Zahlrepräsentation deutlich höhere Lösungsraten aufwiesen, als die parallelen Aufgaben zur Stellenwerttafel. Im Mittel wurden von knapp der Hälfte der Schüler*innen die Aufgaben mit Dienes-Material gelöst (SD = 15 %). Im Vergleich dazu wurden die Aufgaben mit Stellenwerttafel im Mittel von einem Drittel der Lernenden korrekt bearbeitet (SD = 13 %).

Aufgaben, bei denen gebündelt werden musste, wurden etwas besser gelöst als Aufgaben zum Entbündeln. Der Unterschied zeigt sich dabei deutlicher bei den Aufgaben mit Dienes-Material als Zahlrepräsentation: Über die Hälfte der Schüler*innen lösten im Mittel die Aufgaben zum Bündeln. Aufgaben mit Entbündeln als Handlung wurden im Mittel von ca. 40 % der Schüler*innen richtig bearbeitet. Werden die Aufgaben gegenübergestellt, die bis auf die Handlung (Bündeln bzw. Entbündeln) in allen anderen Aufgabenmerkmalen übereinstimmten, so fällt auf, dass fast alle Entbündelungsaufgaben eine geringere Lösungsrate als ihre zugehörige Bündelungsaufgabe hatten. Bei den Aufgaben mit Stellenwerttafel war dieser Unterschied nicht ganz so ausgeprägt wie beim Dienes-Material. Die Aufgaben zum Bündeln und Entbündeln wurden hier im Mittel von einem Drittel der Schüler*innen korrekt bearbeitet.

Aufgaben, bei denen der Ziel-Stellenwert vorher leer war, wurden im Mittel von knapp der Hälfte der Lernenden richtig gelöst. Im Vergleich dazu hatten die Aufgaben mit vorher besetztem Ziel-Stellenwert im Mittel eine 10 Prozent geringere Lösungsrate. Die Aufgaben, bei denen vorher eine leere sowie eine besetzte Stelle vorkamen, hatten im Mittel die geringste Lösungsrate. Ähnlich verhielt es sich bei der Betrachtung der Unterschiede nach der vorgenommenen Handlung beim Ausgangs-Stellenwert. blieb nach dem (Ent-)Bündeln kein Rest übrig, so lösten im Mittel knapp die Hälfte der Schüler*innen die Aufgaben richtig. Die Lösungsrate sank im Mittel um circa 10 %, wenn der Ausgangs-Stellenwert nach dem (Ent-)Bündeln einen Rest hatte. Nur noch knapp 30 % der Lernenden bearbeiteten im Mittel die Aufgaben richtig, wenn innerhalb der Aufgabe ein Stellenwert ohne und einer mit Rest ge-/entbündelt werden musste.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass die gewählten Aufgabenmerkmale Unterschiede in der Schwierigkeit der Aufgaben zum Bündelungsprinzip erklären. Dies gilt sowohl für die geforderte Handlung als auch für die Zahlendarstellung. Aufgaben scheinen den Schüler*innen weiterhin leichter zu fallen, wenn der Ausgangs-Stellenwert am Ende der Handlung vollständig gebündelt ist und der Ziel-Stellenwert vorher unbesetzt war. In diesem Beitrag wurden die verschiedenen Anforderungen bislang isoliert betrachtet. Aufgabe weiterer empirischer Forschung ist es, die Anforderungen in Zusammenhang zu bringen und Abhängigkeiten der Anforderungen untereinander zu betrachten. Dies könnten zentrale Aspekte sein, um die Entwicklung sowie Schwierigkeiten des Stellenwertverständnisses bei Schüler*innen zu verstehen sowie zu diagnostizieren.

Literatur

- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100 - Theoretische und empirische Analysen*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-14775-4>
- Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130–162. <https://doi.org/10.2307/749759>
- Jensen, S., Gasteiger, H. & Bruns, J. (2021). Stellenwertverständnis: Verständnis von Stellenwertprinzip und Bündelungsprinzip als separate Konstrukte. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*. WTM Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0>
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2693-2>