

GLEIBBERG, Sandra
Schwäbisch Gmünd

Aufgabenangebot von Lehrwerken der Klassen 2 und 3 zur Entwicklung des Operationsverständnisses der Multiplikation

Der Beitrag präsentiert eine aktuelle Analyse von vier weit verbreiteten Lehrwerken für die Klassen 2 und 3 im Hinblick auf die Entwicklung des inhaltlichen Verständnisses der Multiplikation. Grundlagen des von uns genutzten Frameworks sind die Repräsentationsebenen nach Bruner und die Tatsache, dass Terme Begriffe sind. Die Befunde zeigen über alle Lehrwerke hinweg ein nahezu homogenes Bild: Bereits in Klasse 2 und noch stärker in Klasse 3 dominiert das Bestimmen von Termwerten. Nur ein geringer Anteil der Aufgaben erfordert den intermodalen Transfer zur ikonischen, zur enaktiven oder zur verbal-symbolischen Ebene.

Kontext der Untersuchung

Die Multiplikation ist ein zentraler Inhalt des Mathematikunterrichts der Grundschule. Lernziele sind dabei erstens der Erwerb eines inhaltlichen Verständnisses der Operation Multiplikation, zweitens die Fähigkeit, den Wert beliebiger Produkte unter Nutzung verschiedener Strategien zu bestimmen und drittens die gedächtnismäßige Beherrschung aller Grundaufgabengleichungen, d.h. aller Gleichungen mit beiden Faktoren kleiner oder gleich 10, (z. B. Kling & Bay-Williams 2015, CCSSI 2010, S. 23, KMK 2022, S.14). Gedächtnismäßiges Beherrschen bedeutet Besitz eingepprägter Fakten und muss vom so genannten Automatisieren, dem Multiplizieren auf Fertigkeitsebene, unterschieden werden (Kling & Bay-Williams 2015, S. 550). Auch wenn die Grundaufgabengleichungen der Multiplikation letztlich gedächtnismäßig zu beherrschen sind, ist die Fähigkeit zum Lösen der Grundaufgaben eine Grundlage und muss deshalb vor dem Einprägen gesichert werden.

Bis zur Sekundarstufe sind drei Probleme immer wieder zu beobachten. Erstens gibt es Defizite bei der gedächtnismäßigen Beherrschung der Grundaufgabengleichungen, die beispielsweise beim Kürzen von Brüchen benötigt werden. Eine Ursache dafür ist, dass vergessene Gleichungen oft nicht rekonstruiert werden können. Zweitens können Schülerinnen und Schüler häufig nicht den Wert von Produkten mit einem Faktor größer als 10 bestimmen. Drittens wissen Schülerinnen und Schüler zuweilen beispielsweise zwar, dass $6 \cdot 8 = 48$ ist, können dies aber nicht inhaltlich begründen, sondern argumentieren bestenfalls, dass $6 \cdot 8$ eine verkürzte Schreibweise für die Additionsaufgabe $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$ ist. Alle drei Probleme haben als gleiche Ursache einen Mangel an inhaltlichem Verständnis der Multiplikation.

Der Erfolg des Unterrichts hängt maßgeblich von der Auswahl der Aufgaben

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

und der Art und Weise, wie Lehrpersonen mit ihnen arbeiten, ab (vgl. Fanghänel 2000). Eine wesentliche Quelle der Aufgaben ist und damit entscheidenden Einfluss auf den Unterricht und seine Ergebnisse hat das genutzte Lehrwerk in Einheit von Lehrbuch und Arbeitsheft. Aus diesem Grund analysierten wir vier in Baden-Württemberg weit verbreitete Lehrwerke der Klassenstufen 2 und 3. Gegenstand der Analyse war das Potential des Aufgabenangebots dieser Lehrwerke zur Förderung des inhaltlichen Verständnisses der Operation Multiplikation.

Zur Sache: Inhaltliches Verständnis der Multiplikation

Terme wie $3 \cdot 4$ oder $6 \cdot 8$ sind nonverbal-symbolische Repräsentationen von Begriffen und Begriffe sind gedankliche Widerspiegelungen von Klassen der objektiven Realität. Terme beschreiben damit Klassen von Situationen der Wirklichkeit. Dies steht im Einklang mit den von Anghileri (1989) genannten Schlüsselaspekten der Multiplikation. Auch Park & Nunes (2001, S. 771) heben hervor, dass der Ursprung des kindlichen Verständnisses multiplikativer Beziehungen in der eins-zu-viele-Korrespondenz liegt und dass die wiederholte Addition gleicher Summanden bestenfalls ein Verfahren zum Bestimmen des Wertes von Produkten ist.

Inhaltliches Verstehen eines Begriffs bedeutet, ihn identifizieren, realisieren und systematisieren zu können. Wer einen Begriff wie $6 \cdot 8$ identifiziert, erkennt ihn in einer enaktiven, einer ikonischen oder einer verbal-symbolischen Darstellung (vgl. Bruner 1964, Gleißberg & Eichler 2019). Einen Begriff wie $6 \cdot 8$ zu realisieren bedeutet, dazu passend eine enaktive Repräsentation, eine ikonische Repräsentation oder eine verbal-symbolische Repräsentation herzustellen.

Wenn Schüler Begriffe systematisieren, stellen sie Beziehungen zwischen zwei Begriffen her wie etwa zwischen den Gleichungen $5 \cdot 8 = 40$ und $6 \cdot 8 = 48$. Diese Beziehungen können mit einer enaktiven oder einer ikonischen Darstellung referenziert werden oder aber ohne jegliche Referenz rein auf nonverbal-symbolischer Ebene hergestellt werden.

Das inhaltliche Verständnis des Begriffes „Produkt zweier Zahlen“ ist Voraussetzung zum Beschreiben der Realität und zum Lösen von Sachaufgaben. Es befähigt zugleich zum Lösen beliebiger Multiplikationsaufgaben, insbesondere solcher mit Faktoren größer als 10 durch intermodalen Transfer oder durch Ableiten ausgehend von bekannten Gleichungen. (Baroody 2006, Kling & Bay-Williams 2015). Das inhaltliche Verständnis des Produktes zweier Zahlen ist nicht zuletzt eine wichtige Voraussetzung zur Rekonstruktion vergessener Grundaufgabengleichungen.

Methode und Befunde

Entsprechend des von Gleißberg & Eichler (2019) entwickelten Frameworks wurden alle in den vier Lehrwerken enthaltenen Aufgaben zur Multiplikation entsprechend der unten beschriebenen Kategorien quantitativ erfasst.

		LW 1				LW 2				LW 3				LW 4			
		Klasse 2		Klasse 3		Klasse 2		Klasse 3		Klasse 2		Klasse 3		Klasse 2		Klasse 3	
		LB	AH	LB	AH	LB	AH	LB	AH	LB	AH	LB	AH	LB	AH	LB	AH
1	ICE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	11	0	3	0	
2	ICI	75	56	3	4	100	47	5	3	103	36	4	7	34	21	1	0
3	ICV	39	26	20	1	57	17	17	8	90	23	26	9	58	15	41	25
4	RCE	2	0	0	0	1	0	9	0	10	0	0	0	10	0	0	0
5	RCI	122	6	10	0	34	11	0	0	39	19	0	0	12	2	0	0
6	RCV	2	1	0	0	12	1	2	0	1	0	0	0	4	1	7	0
7	SCE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	SCI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	Σ1-8	240	89	33	5	204	76	33	11	243	78	30	18	129	39	52	25
10	Σ 9	329		38		280		44		321		48		168		77	
11	SCW	104	30	60	17	126	54	70	7	193	64	13	22	152	77	73	58
12	TW	874	593	259	127	1235	765	475	344	1053	859	199	219	772	393	617	458
13	Σ11,12	978	623	319	144	1361	819	545	351	1246	923	212	241	924	470	690	516
14	Σ 13	1601		463		2180		896		2169		453		1394		1206	

Tabelle 1: Verteilung der Aufgaben auf die einzelnen Kategorien

ICE/ICI/ICV: Aufgaben zur Identifizierung des Begriffes ausgehend von der enaktiven / der ikonischen / der verbal-symbolischen Repräsentationsebene.

RCE/RCI/RCV: Aufgaben zur Realisierung des Begriffes in der enaktiven / der ikonischen / der verbal-symbolischen Repräsentationsebene.

SCE/SCI: Aufgaben zur Systematisierung von Konzepten mit Referenz in der enaktiven Repräsentationsebene / der ikonischen Repräsentationsebene.

SCW: Aufgaben zur Systematisierung von Konzepten ohne Bezug in eine andere Repräsentationsebene.

VT: Aufgaben, bei denen der Wert eines Terms zu bestimmen ist.

Diskussion

Unter vielen Ergebnissen können hier aus Platzgründen nur wenige, uns wesentliche Ergebnisse diskutiert werden.

Die Tabelle zeigt, dass in allen vier Lehrwerken sowohl in Klassenstufe 2 als auch in Klassenstufe 3 die Bestimmung von Termwerten im Mittelpunkt steht. Ein Arbeiten in der enaktiven Ebene und vor allen der intermodale Transfer werden kaum gefordert. Lehrpersonen werden durch diese Lehrwerke nicht angeregt, den Kindern die unverzichtbare Handlungserfahrung zu sichern. In den Zeilen 7 und 8 der Tabelle wird sichtbar, dass keines der vier analysierten Lehrwerke den Aufbau systemhafter Kenntnisse durch Herstellen von Referenzen in der enaktiven Repräsentationsebene (SCE) oder der ikonischen Repräsentationsebene (SCI) anregt. In drei der vier Lehrwerke ist das Aufgabenangebot zur Multiplikation in Klasse 3 gegenüber der Klasse 2 rein quantitativ betrachtet deutlich reduziert. Lernen Kinder mit diesen drei Lehrwerken, haben sie in Klasse 3 wesentlich weniger Möglichkeiten zum inhaltlichen Verstehen, Üben und Einprägen der Grundaufgabengleichungen. Die Zeilen 1 bis 8 zeigen, dass in Klasse 3 der intermodale Transfer kaum noch herausfordert wird. Haben Kinder also in Klasse 2 kein inhaltliches Verständnis des Begriffes „Produkt“ erworben, ist es wenig wahrscheinlich, dass sie in Klasse 3 dazu hinreichend Anregungen erhalten.

Literatur

- Anghileri, J. (1989). An Investigation of Young Children's Understanding of Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 367-385.
- Baroody, A. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number facts and how to help them. *Teaching children mathematics*, 13, 22–31. <https://doi.org/10.5951/TCM.13.1.0022>
- Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15. <https://doi.org/https://doi.org/10.1037/h0044160>
- CCSSI Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Retrieved from www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf
- Fanghänel, G. (2000). Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. *Mathematikunterricht gestalten* (S. 23–40). Berlin: Paetec.
- Gleißberg, S., & Eichler, K.-P. (2019). *The offer of tasks to work on multiplication in grades 2 and 3. CEME11, Utrecht University*. hal-02400941
- Kling, G., & Bay-Williams, J. M. (2015). Three Steps to Mastering Multiplication Facts. *Teaching children mathematics*, 21(9), 548-559. <https://doi.org/10.5951/teachmath.21.9.0548>
- Kultusministerkonferenz (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16, 763–773. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(01\)00058-2](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2)