Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Mathematisch fundiertes fachdidaktisches Wissen

„Es ist an der Zeit, gründlich darüber zu diskutieren, was »fachdidaktisches Wissen« ausmacht, in welchem Bezug es zur Fachwissenschaft steht und welche Qualifikationen eine »Fachdidaktikerin« oder ein »Fachdidaktiker« haben muss, um dieses fachdidaktische Wissen mathematisch fundiert entwickeln und vermitteln zu können.“ (Walcher & Wittmann 2012)

Die nachfolgenden Überlegungen wurden durch diese für die Autorin sehr einsichtige Forderung veranlasst und verstehen sich als Beitrag zu ihrer Einlösung.

1. Bildungstheoretische Grundposition

Die Diskussion darüber, was »fachdidaktisches Wissen« ausmacht, kann nicht unabhängig von bildungstheoretischen Grundpositionen geführt werden. Wir orientieren uns an der folgenden Leitidee:

„Deshalb gehört es zur Bildung, dass sie unterschiedliche Weltzugänge, unterschiedliche Horizonte des Weltverstehens eröffnet, die ... nicht wechselseitig substituierbar sind und auch nicht nach Geltungshierarchien zu ordnen sind: empirische, logisch-rationale, hermeneutische und musisch-ästhetische Weltzugänge mit ihren jeweils unterschiedlichen Potenzialen an Verfügungswissen und Orientierungswissen, mit ihren jeweils eigenen Rationalitätsformen.“ (Dressler 2006, S. 110)

Dahinter steht ein weit gefasster bildungstheoretischer Ansatz, der von folgender Feststellung ausgeht: „Hauptkennzeichen der Moderne ist der Prozess funktionaler Ausdifferenzierung und, damit verbunden, die Pluralisierung von Rationalitätsformen.“ (ebd., S. 36). Es steht keine übergreifende Zentralperspektive mehr zur Verfügung, aus der verschiedene Lebensbereiche und Lebenserfahrungen gleichermaßen Erklärung und Sinn beziehen könnten. Bildungsprozesse müssen daher auch die Fähigkeit zum Perspektivenwechsel und das damit verbundene Unterscheidungsvermögen vermitteln. Dazu gehört ein Wissen darum, „wie die Welt im Lichte dieser unterschiedlichen Zugangsweisen jeweils modelliert wird, …, was ihre Propria und Grenzen sind.“ (ebd., S. 112). Diese Forderung steht kurzschlüssigen Funktionalisierungen von Bildungsinhalten und Bildungszielen entgegen und ist für eine humane Qualität von Bildung konstitutiv.

2. Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Mathematik ist eine Weise des Weltverstehens, die unverwechselbar und nicht ersetzbar ist und sich in einer langen Kulturgeschichte herausgebildet hat. Sie geht logisch-rational vor und hat diese Form der Rationalität zu einem Höchstmaß an Stringenz und zugleich zu einer weiten Anwendbarkeit entwickelt. Damit nimmt sie im Zeitalter der Hochtechnologie eine unentbehrliche Position ein.

Vor dem Hintergrund von 1. formulieren wir nun folgende Bildungsziele für den Mathematikunterricht:

Epistemologisches Bewusstsein: Mathematikunterricht sollte in jeweils stufengemäßer Weise erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Dazu gehört ein Wissen um typisch mathematische Denkhandlungen und die Art ihres Einsatzes. Beispiele für solche Denkhandlungen sind: Strukturieren, Abstrahieren, Verallgemeinern, Präzisieren, Formalisieren, Definieren, Begründen und Beweisen.

Alltagstauglichkeit: Der Unterricht sollte selbstverständlich auch Sicherheit in der alltagspraktischen Bewältigung des Faches und das hierfür notwendige Verfügungswissen (z. B. Prozentrechnung) vermitteln.

Wissenschaftsorientierung: Je nach Bildungsgang sollten Lernende auch wissenschaftlich vermittelte Erfahrungen und Erkenntnisse erwerben. Dazu gehört zum Beispiel die Einsicht in die Reichweite des Integralbegriffs und das Wissen darum, dass und warum man hiermit sowohl Bogenlängen wie auch Flächeninhalte und Volumina und schließlich physikalische und ökonomische Größen berechnen kann.

Wissenschaftstheoretische Reflexion: Schließlich erscheint es wünschenswert, die Erkenntnisweisen des Faches auch wissenschaftstheoretisch zu reflektieren und Fragen wie die folgenden zu erörtern: Welche Art von Orientierungswissen stellt die Mathematik bereit? Zu welcher Leistungsfähigkeit kann eine Betrachtung von Realitätsausschnitten nach Maß und Zahl gelangen, wo liegen ihre Grenzen, wo wird sie unangemessen?

Ausgewogenheit: Auf allen Stufen sollte der Unterricht ein ausgewogenes Verhältnis zwischen intellektueller Selbstentfaltung und Aspekten der Nützlichkeit und Verwendbarkeit herstellen.

3. Was Lehrkräfte können sollten

Aus den in 2. genannten Zielen ergeben sich Anforderungen an das *»fachdidaktische Wissen«* von Lehrkräften, die wir im Folgenden nach vier Dimensionen aufschlüsseln.

Die fachlich-inhaltliche Dimension: Hierzu gehört eine solide fachliche Grundbildung, die nötige Wissensgrundlagen für den Unterricht bereitstellt und ein vertieftes Durchdringen des Schulstoffes ermöglicht. Darüberhinaus sollten Lehrkräfte wissen und erzählen können, welche Rolle Mathematik heute in der Welt spielt. Schließlich sollten sie über Wissensreserven für die Gestaltung phantasievoller und produktiver Aufgaben und Lernumgebungen verfügen.

Die fachlich-epistemologische Dimension: Hier geht es um die Frage, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Diese Frage kann man sowohl in horizontaler wie in vertikaler Ausrichtung verfolgen. Man kann sie also auf einen augenblicklichen Lernprozess wie auch auf die langfristige mathematische Denkentwicklung beziehen.

Die *horizontale Blickrichtung* untersucht Fragen der folgenden Art: Welche Phänomene können mit dem jeweiligen Wissensbereich organsiert werden? Welche Denkhandlungen sind beteiligt? Welche spezifischen Stilmittel und Rationalisierungspraktiken sind am Werk und wodurch zeichnen sie sich aus? Spezifisch mathematische Tätigkeiten sind zum Beispiel: Genaues Beobachten und gezieltes Fragen, plausibles Schließen, exaktes Schließen (Beweisen), gedankliches Ordnen (z. B. eine Fallunterscheidung treffen), formalisieren usw.

Die *vertikale Blickrichtung* betrifft die genetische Entwicklung. Wie entwickelt sich ein mathematischer Gegenstand vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken und schließlich präzisen Beschreiben in der Sprache der Mathematik? Wie kann man ein mathematisches Thema auf verschiedenen Stufen der Denkentwicklung intellektuell redlich entfalten?

Die lern- und kognitionspsychologische Dimension bezieht sich auf das lernende Individuum und dessen Umgang mit Mathematik. Ein wichtiger Aspekt ist die Denkentwicklung, die ein Individuum im Laufe einer Lernbiographie durchläuft, wie sie zum Beispiel von der genetischen Psychologie der Genfer Schule (Piaget, Aebli) untersucht wurden. Weiterhin interessant sind individuelle Präferenzen für verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung (Schwank 1996). Schließlich gehört in diesen Bereich die Diagnose individueller Lernwege, Lernhürden, Fehlvorstellungen und Fehlermuster.

Die unterrichtsmethodische Dimension bezieht sich auf die Umsetzung der genannten Kenntnisse in der Entwicklung von Lernumgebungen mit Aufgabenideen, Lernimpulsen und Lehrmaterialien. Dazu gehören auch fachliche Inhalte und Wissensbildungsprozesse akzentuierende Techniken der Unterrichtsmoderation.

Zu diesem Programm seien abschließend zwei illustrierende Beispiele betrachtet.

Beispiel 1: Auf der Unter- und Mittelstufe bewährt sich das operative Prinzip als Ausdruck eines speziellen handlungsorientierten Vorgehens. Der für Schülerinnen und Schüler der Klassen 5/6 schwierige geometrische Relationsbegriff „senkrecht“ kann auf diesem Wege mit Hilfe von Faltexperimenten erarbeitet werden. Man betrachte dazu, welche Gebilde aus geraden Linien durch zweimaliges Falten eines Blattes entstehen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten gibt es eine, die bewirkt, dass beim Falten längs einer Geraden die Teile der anderen Geraden aufeinander fallen. Dabei sind die Rollen der Geraden austauschbar. In Veranstaltungen zur Didaktik der Geometrie ist jedoch häufig zu beobachten, dass Studierende den Clou dieses Experimentes nicht durchschauen und nur an der optischen Oberfläche korrekte Bilder erzeugen (vgl. Hefendehl-Hebeker 2013).

Beispiel 2: Parabelscharen bilden ein klassisches Unterrichtsthema zu Beginn der Oberstufe. Die Gleichung $y = x^2 - px + 3p$ beschreibt eine solche parametrisierte Schar. Typische Aufgaben bestehen darin, die Scheitelkoordinaten der Schargleichungen und den Trägergraphen der Scheitelpunkte zu bestimmen. Wenn eine Lehrkraft die hierzu erforderlichen Lösungsansätze und Techniken durchsichtig erklären will, muss sie sicher mit den verschiedenen Variablenaspekten umgehen können.

4. Missverständnisse und Scheinklarheiten

Studierende verkennen oft die Aufgabe der Fachdidaktik; dabei vollziehen sie grundlegende Verwechslungen, etwa zwischen Schonatmosphäre und stufengemäßer Vorgehensweise im Unterricht oder zwischen oberflächlichem „Spaß“ und echter intellektueller Herausforderung („Flow-Erleben“). Hinter diesen Fehleinschätzungen steckt oft ein unzureichendes Bewusstsein für Ausgestaltung und Anforderung des angestrebten Berufszieles. Hier muss die fachdidaktische Ausbildung korrigierend eingreifen.

Literatur

Dressler, B. (2006): Unterscheidungen. Leipzig: Evangelische Verlagsanstalt.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013): Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Wiesbaden: Springer, 1-15.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: ZDM-Analysenheft ”Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik”. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 6, 168-183.

Walcher, S. & Wittmann, E. Ch. (2012): »Minus mal minus« Zum Fundament der COACTIV-Studie. In: MNU 65/6 (1.9.2012), 371-377.