Ordnungserhaltende positive Varianzschätzer bei gepaarten Messungen ohne Wiederholungen [1]

Joachim Hartung
Fachbereich Statistik
Universität Dortmund

Zusammenfassung

Sind in einer statistischen Analyse mehr als eine Variationsursache zu berücksichtigen, so zerfällt die Gesamtvariation in mehrere Komponenten. Für diese sind in der Regel auch Beziehungen oder Ordnungen bekannt. Aber keine der bekannten Schätztheorien ist in der Lage, diese Ordungen auch auf die Schätzfunktionen für die theoretischen Größen zu übertragen. Gängigerweise kann etwa eine einzelne Komponente durchaus wesentlich größer geschätzt werden als die Summe der (positiven) Komponenten. Zumindest im technischen Bereich wird dieses Verhalten der bekannten Schätzfunktionen als besonders störend empfunden, da es erhebliche Anforderungen an die Interpretation stellt. Aus diesem Grunde werden hier für die Varianz bzw. Präzision zweier unterschiedlicher Meßverfahren, welche jeweils das selbe Produkt aus einem Los genau einmal beurteilen (gedanklich: zerstörende Prüfung), positive Schätzfunktionen betrachtet, die eine spezifizierte natürliche Ordnung einhalten. Die Bedeutung dieses Modells liegt für die Praxis in seiner Anwendung auf typische Kontrollsituationen auch außerhalb der Technik, z. B. Gewinnschätzungen seitens eines Betriebes versus Schätzungen seitens des Finanzamtes.

[1] Diese Arbeit wurde unterstützt durch EURATOM, Luxembourg, und SFB 475, Dortmund, der DFG.

1 Einleitung

In der Regel treten in einer statistischen Untersuchung mehrere kontrollierte und leider auch unkontrollierbare Einflußfaktoren auf, die dann meist zudem noch bewirken, daß die resultierenden Daten auf vielfältige Weise miteinander korreliert sind. Das der Analyse zugrunde liegende Modell weist dann mehrere Komponenten der Gesamtvariation auf, die es unter anderem zu schätzen gilt. Die bis jetzt bekannten Schätztheorien sind jedoch entweder mit ausgesprochenen Defekten oder zumindest mit Mängeln behaftet. Die im Wesentlichen nur Erwartungstreue verlangenden Schätzprinzipien können unsinnige, nämlich negative Werte für positive Varianzen hervorbringen, so daß man auf Null als Schätzung z. B. für eine Präzision eines Instrumentes entscheidet, von der jeder Techniker weiß, daß dies einfach nicht sein kann; das Gleiche geschieht beim (restringierten) Maximum-Likelihood-Schätzer, wenn dieser auf den Parameterraum eingeschränkt wird. Hinzu kommt nun aber noch ein anderes Phänomen, zum Teil bedingt durch eben genannte Eigenschaft: Es kann nämlich durchaus passieren, daß z. B. von zwei nicht-negativen Varianzkomponenten eine dieser Komponenten wesentlich größer geschätzt wird als die Summe der beiden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist auf jeden Fall positiv und je nach Modellgegebenheiten mitunter recht groß. Nun, dies läßt sich auch für die nicht-negativen, minimal verzerrten Schätzfunktionen feststellen, die von vornherein ihre Schätzmatrix für die quadratische Schätzung nur im Kegel der positive semi-definiten Matrizen bestimmen und Schätzer liefern, die nur mit Wahrscheinlichkeit 0 den Wert Null annehmen.
Allgemein formuliert werden in den bekannten Schätztheorien Beziehungen oder Ordnungen, denen die Varianz-Parameter unterliegen, nicht miteinbezogen, vgl. z. B. Scheffé (1959), Seely (1971), Rao (1972), Hartung (1981), Weber (1986), Elpelt (1989), Crowder (1992), Hartung/ Elpelt/ Voet (1997), Hartung/ Elpelt/ Klösener (1998), Lehmann/ Casella (1998).
Aus diesem Grunde wird hier für das spezifische Problem der Varianzschätzung bzw. Präzisionsbestimmung zweier unterschiedlicher Meßverfahren, welche jeweils das selbe Produkt eines Loses aus variierenden Produkten genau einmal, zumindest gedanklich einer zerstörenden Prüfung gleichend, beurteilen, ein gezieltes Schätzkonzept vorgestellt. Basierend auf frühen Überlegungen in Hartung (1979), die dann jedoch nicht weiter verfolgt wurden, werden nun dank spezieller Anfragen von Martin (1997/98) positive Schätzfunktionen eingeführt, die eine prädestinierte natürliche Ordnung einhalten.
Dieses Problem der gepaarten Messungen ist deshalb von herausragender Bedeutung, weil sich hinter der Formulierung "zwei Messverfahren" in der Praxis häufig typische

Kontrollsituationen verbergen, z. B. Gewinnschätzungen seitens eines Betriebes und Gegenschätzungen seitens des Finanzamtes für meherere Perioden, oder z. B. aus der Buchführung hochgerechnete Angaben des Betreibers einer atomaren Anlage und physikalische Messungen einer Kontrollbehörde für mehrere Behältnisse.

2 Das Modell

Ausgangspunkt ist das Modell von Grubbs (1948) für den Fall zweier Instrumente Y und Z, sowie für die Differenzmessung $D \hat{=} Y - Z$, d. h. wir haben für die zugehörigen beobachtbaren Zufallsvariablen y_i, z_i und d_i in $i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2$ Messungen die Modellgleichungen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
Y: \quad y_i &= \mu_Y + x_i + e_{iY}, \quad i = 1, \ldots, n, \\
Z: \quad z_i &= \mu_Z + x_i + e_{iZ}, \quad i = 1, \ldots, n, \\
D: \quad d_i &= \mu_D \qquad\ + e_{iD} \\
&= (\mu_Y - \mu_Z) + (e_{iY} - e_{iZ}) \\
&= y_i - z_i, \qquad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Hierbei sind μ_Y, μ_Z und $\mu_D = \mu_Y - \mu_Z$ Mittelwertparameter, die wir nicht zu kennen brauchen, x_i, e_{iY}, e_{iZ} und $e_{iD} = e_{iY} - e_{iz}$ sind nicht direkt beobachtbare Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $\mathrm{E}x_i = \mathrm{E}e_{iY} = \mathrm{E}e_{iZ} = \mathrm{E}e_{iD} = 0$ und den unbekannten Varianzen $\mathrm{Var}(x_i) = \sigma_X^2, \mathrm{Var}(e_{iY}) = \sigma_Y^2, \mathrm{Var}(e_{iZ}) = \sigma_Z^2$ und $\mathrm{Var}(e_{iD}) = \sigma_D^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$, $i = 1, \ldots, n$, welche es hier zu schätzen gilt. Darüber hinaus wird angenommen, daß in $x_1, \ldots, x_n, e_{1Y}, \ldots, e_{nY}, e_{1Z}, \ldots, e_{nZ}$ alle Zufallsvariablen paarweise (stochastisch) unabhängig sind.
Die Schwierigkeiten beim Schätzen sind nun dadurch bedingt, daß y_i und z_i über das gemeinsame x_i miteinander korreliert sind; für $i \neq j$, sind y_i und z_j unabhängig, $i, j = 1, \ldots, n$.

Die Varianzkomponenten σ_Y^2 und σ_Z^2 werden auch *Präzisionen* der Meßverfahren genannt und σ_X^2 wird als *Produktvariabilität* bezeichnet.

Grundlegend sind die quadratischen Formen

$$Q_Y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}.)^2, \text{ mit } \bar{y}. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$Q_Z \text{ und } Q_D \text{ analog, und} \tag{2}$$

$$Q_{YZ} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}.)(z_i - \bar{z}.),$$

mit den Erwartungswerten

$$\mathrm{E}Q_Y = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \quad \mathrm{E}Q_Z = \sigma_X^2 + \sigma_Z^2 \quad \mathrm{E}Q_D = \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 \text{ und } \mathrm{E}Q_{XY} = \sigma_X^2. \tag{3}$$

3 Bekannte quadratische Schätzfunktionen und ein Beispiel

Durch Auflösen der Erwartungswerte-Gleichungen (3) nach den Parametern, was der Momenten-Methode entspricht, erhält man direkt die erwartungstreuen Grubbs-Schätzer, welche auch dem MINQUE- Prinzip von Rao (1972) genügen, wie folgt:

$$\widetilde{\sigma_Y^2} = Q_Y - Q_{YZ}, \quad \widetilde{\sigma_Z^2} = Q_Z - Q_{YZ}, \quad \widetilde{\sigma_X^2} = Q_{XY}, \quad \widetilde{\sigma_D^2} = Q_D. \tag{4}$$

Die nichtnegativen minimalverzerrten Schätzer nach Hartung (1981) ergeben sich in diesem Modell zu:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_Y^2} &= \frac{8}{9}(Q_Y - Q_{ZY}) + \frac{2}{9}Q_Z \\ \overline{\sigma_Z^2} &= \frac{8}{9}(Q_Z - Q_{ZY}) + \frac{2}{9}Q_Y \\ \overline{\sigma_X^2} &= \frac{4}{9}Q_{ZY} + \frac{2}{9}(Q_Y + Q_Z), \quad \text{sowie } \overline{\sigma_D^2} = \widetilde{\sigma_D^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es sei verwiesen auf Grubbs (1948, 1983), Jaech (1985), Hartung/ Heine (1984), Hartung/ Klösener (1987), Hartung/ Elpelt (1995, S. 736 ff).

Zur Illustration des möglichen Verhaltens obiger Schätzfunktionen betrachten wir das folgende von Martin (1997/98) an mich herangetragene reale *Beispiel* in Ausschnittsform, wie es in Tabelle 3.1 wiedergegeben ist. Es handelt sich dabei um codierte Daten aus Bestandsangaben bzw. physikalischen Ermittlungen zu Pu in $n = 3$ Behältern mit PuO_2-Pulver.

Tabelle 3.1. Gepaarte Messungen (codiert) ohne Wiederholungen von Pu in $n = 3$ Behältern mit PuO_2-Pulver.

Objekt	Messungen		Differenzen
Nummer	Y	Z	D
i	y_i	z_i	d_i
1	1.004	0.913	0.091
2	1.074	1.049	0.025
3	1.053	1.220	−0.167

Die Schätzfunktionen nach Grubbs, s. (4), und nach Hartung, s. (5), ergeben nun Werte, wie sie in der Tabelle 3.2 übersichtlich zum besseren Vergleich zusammengestellt sind.

Tabelle 3.2. Schätzwerte zum Beispiel aus Tab. 3.1 nach den Schätzprinzipien von Grubbs (1948) und Hartung (1981).

Parameter	Schätzwerte ($\cdot 10^{-6}$)	
	nach Grubbs	nach Hartung
σ_X^2	3495	7099
σ_Y^2	−2205	3298
σ_Z^2	20169	18215
$\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Z^2$	17964	17964

Wir beobachten die eingangs geschilderten Phänomene: $\widetilde{\sigma_Y^2}$ wird negativ und sowohl $\widetilde{\sigma_Z^2}$ als auch $\overline{\sigma_Z^2}$ fallen einzeln größer aus als der Wert, den die Schätzfunktion $\widetilde{\sigma_D^2} = \overline{\sigma_D^2}$ für die Summe $\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$ liefert.

Dabei ist zu erwähnen, daß diese Schätzfunktion allen Optimalitätseigenschaften genügt: sie ist sowohl unter allen quadratischen Schätzfunktionen für σ_D^2 diejenige erwartungstreue mit minimaler Norm für die Matrix in der diesbezüglichen quadratischen Form als auch unter den nicht-negativen quadratischen Schätzfunktionen. Bei Normalverteilungsannahme für die Zufallsvariablen im Modell (1) ist $\widetilde{\sigma_D^2} = \overline{\sigma_D^2}$ sogar unter allen erwartungstreuen Schätzfunktionen für σ_D^2 diejenige mit (gleichmäßig) kleinster Varianz, vgl. Seely (1971),

Rao (1972), Hartung (1981), Elpelt (1989), Lehmann/ Casella (1998).
Wir gehen hier deshalb so explizit auf diese Schätzfunktion ein, weil wir ihr eine hervorgehobene Stellung einräumen und Beziehungen der anderen Parameter zu σ_D^2 prädestinieren.

4 Ordnungserhaltende Parameterschätzer

Wie eben genannt, stehen im Vordergrund unserer Überlegungen die Beziehungen

$$\sigma_Y^2 \geq 0 \text{ und } \sigma_Z^2 \geq 0 \tag{6}$$

sowie

$$\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 = \sigma_D^2, \tag{7}$$

von denen wir erstere (6) auch punktweise für die entsprechenden, noch zu definierenden Schätzfunktionen verlangen, während wir die Gleichungsbeziehung (7) zuerst nur für ihre Erwartungen fordern; ihre Realisierungen, da zunächst noch Parameter in den Schätzfunktionen auftauchen, lassen sich jedoch so wählen, daß auch die Beziehung (7) von den zugehörigen Schätzfunktionen punktweise erfüllt wird.

Wir gehen aus von den nicht-negativen minimal verzerrten Präzisionsschätzern (5), so daß die Beziehungen (6) direkt auch punktweise erfüllt sind, multiplizieren sie jedoch der Einfachheit halber mit dem Faktor 9/8, was insofern keine weiteren Auswirkungen hat, als diese im Folgenden ohnehin noch mit einem weiteren Faktor versehen werden, der dies entsprechend korrigiert. Also definieren wir, vgl. (5),

$$\widehat{\sigma_Y^2} = Q_Y - Q_{ZY} + \frac{1}{4}Q_Z, \quad \widehat{\sigma_Z^2} = Q_Z - Q_{ZY} + \frac{1}{4}Q_Y, \text{ sowie } \widehat{\sigma_D^2} = Q_D, \tag{8}$$

und führen als einen Adjustierungsfaktor α ein

$$\alpha = \frac{4\sigma_D^2}{5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2}, \tag{9}$$

so daß wir die bezüglich der Beziehung (7) adjustierten Schätzfunktionen für die Präzisionen definieren als

$$\widehat{\sigma_{Y,\alpha}^2} = \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2} \quad \text{und} \quad \widehat{\sigma_{Z,\alpha}^2} = \alpha \cdot \widehat{\sigma_Z^2}, \tag{10}$$

während $\widehat{\sigma_D^2} = \widetilde{\sigma_D^2} = \overline{\sigma_D^2}$ aufgrund der oben genannten Eigenschaften natürlich so unverändert beibehalten wird.
Mit den Erwartungen der Quadratformen in (3) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} + \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Z,\alpha}} &= \alpha \left\{ \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Y} + E\widehat{\sigma^2_Z} \right\} \\ &= \alpha \left\{ (\sigma_Y^2 + \tfrac{1}{4}\sigma_X^2 + \tfrac{1}{4}\sigma_Z^2) + (\sigma_Z^2 + \tfrac{1}{4}\sigma_X^2 + \tfrac{1}{4}\sigma_Z^2 \right\} \\ &= \frac{4\sigma_D^2}{5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2} \left\{ \tfrac{5}{4}\sigma_Y^2 + \tfrac{5}{4}\sigma_Z^2 + \tfrac{2}{4}\sigma_X^2 \right\} \\ &= \sigma_D^2, \end{aligned} \tag{11}$$

so daß die Beziehung (7) in der Erwartung erfüllt ist. Wählt man für α die Schätzung

$$\hat{\alpha} = \frac{4 \cdot Q_D}{\widehat{\sigma_Y^2} + \widehat{\sigma_Z^2}} \quad , \tag{12}$$

so erfüllen die so adjustierten Schätzer und $\widehat{\sigma_D^2}$ die Beziehung (7) analog auch punktweise:

$$\widehat{\sigma^2_{Y,\hat{\alpha}}} + \widehat{\sigma^2_{Z,\hat{\alpha}}} = \widehat{\sigma^2_D}. \tag{13}$$

Im *Beispiel* aus Tab. 3.1 ergibt sich dieser Adjustierungsfaktor dann zu $\hat{\alpha} = 0.835$ und die hiermit adjustierten Präzisionsschätzer erzielen die Werte ($\cdot 10^{-6}$)

$$\widehat{\sigma^2_{Y,\hat{\alpha}}} = 2754 \quad \text{und} \quad \widehat{\sigma^2_{Z,\hat{\alpha}}} = 15210,$$

welche in der Summe natürlich den Wert $\widehat{\sigma_D^2} = 17964$ ergeben müssen.
Nun läßt sich der Adjustierungsfaktor auch schreiben als

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4(\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2)}{5(\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2) + 2\sigma_X^2} \\ &= \frac{4}{5 + 2 \cdot \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}} \quad , \end{aligned} \tag{14}$$

was als weiteren möglichen Schätzer

$$\widehat{\alpha}_* = \frac{4}{5 + 2 \cdot \dfrac{\widehat{\sigma_X^2}}{Q_D}} \tag{15}$$

nahelegt, wobei $\widehat{\sigma^2_X}$ eine geeignete Schätzung, z. B. $\widetilde{\sigma^2_X}$ oder $\overline{\sigma^2_X}$, für σ^2_X darstellt; die analoge Beziehung (7) ist für die hiermit adjustierten Schätzer $\widehat{\sigma^2_{Y,\hat{\alpha}_*}}$ und $\widehat{\sigma^2_{Z,\hat{\alpha}_*}}$ sowie für $\widehat{\sigma^2_D}$ in der Erwartung dann approximativ erfüllt.

Aus (14) ersehen wir, daß stets gilt

$$0 < \alpha < \frac{4}{5} < 1, \tag{16}$$

so daß die Varianz der adjustierten Schätzer kleiner ausfallen muß als die der nichtadjustierten,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right) &= \alpha^2 \cdot \mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma^2_Y}\right) \\ &< \frac{16}{25} \cdot \mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma^2_Y}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

wobei wir bei Varianzbetrachtungen für die Präzisionsschätzer stets implizit die *Normalverteilungsannahme* für die Zufallsvariablen im Modell (1) treffen müssen.

Für die Varianz der positiven Schätzer läßt sich mit einigem Aufwand die Beziehung

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma^2_Y}\right) = \frac{2}{n-1}\left(\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Y}\right)^2 \tag{18}$$

herleiten, so daß man analog zu Hartung/ Voet (1986) für die Schätzfunktion der Varianz des adjustierten Präzisionsschätzers die elegante Darstellung erhält:

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right) = \frac{2}{n+1}\left\{\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right\}^2. \tag{19}$$

Bezüglich der entsprechenden Schätzungen für die Varianz der Grubbs-Schätzer (4) für die Präzisionen sei auf Hartung/ Heine (1984) hingewiesen.

Ähnlich elegant läßt sich der Bias erwartungstreu schätzen,

$$\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma^2_Y = \mathrm{E}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \widetilde{\sigma^2_Y}\right), \tag{20}$$

und da der erwartungstreue Schätzer $\widetilde{\sigma^2_Y}$ aus (4) negativ werden kann, wird er ersetzt durch

$$\widetilde{\sigma^2_{Y(+)}} = \max\left\{0, \widetilde{\sigma^2_Y}\right\}, \tag{21}$$

so daß wir den Bias, mangels besserer Alternative, schätzen durch

$$\widehat{\left\{ \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma^2_Y \right\}} = \widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \widetilde{\sigma^2_{Y(+)}}. \tag{22}$$

Für den mittleren quadratischen Fehler (MSE)

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma^2_Y\right)^2 = \mathrm{Var}\left(\sigma^2_{Y,\alpha}\right) + \left(\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma^2_Y\right)^2 \tag{23}$$

erhalten wir somit in geschlossener Form die Schätzfunktion in der einfachen Darstellung

$$\widehat{\left\{ \mathrm{E}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma^2_Y\right)^2 \right\}} = \frac{2}{n+1}\left\{\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right\}^2 + \left\{\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \widetilde{\sigma^2_{Y(+)}}\right\}^2. \tag{24}$$

Von Martin (1997/98) mir dankenswerterweise zur Verfügung gestellte *Simulationsergebnisse* zeigen bei extremsten Konstellationen der beteiligten Parameter für die betragliche Differenz der Standardabweichungen $|\sigma_Y - \sqrt{\widehat{\sigma^2_{Y,\hat{\alpha}}}}|$ einen Durchschnittswert von 11,57 % bzgl. σ_Y auf, mit einem Standardfehler von 0.44; vergleiche jedoch auch die folgenden Abschnitte.

Zu erwähnen ist ebenfalls, daß seine Anwendungen der adjustierten positiven Schätzer auf eine große Anzahl *realer Datensätze* aus dem Kontrollbereich von EURATOM durchweg stimmige, sachlogisch plausible Ergebnisse zeigen. Bedingt u. a. durch die in diesem Bereich typischerweise hohe Produktvariabilität im Vergleich zu einer Präzision fällt nahezu sicher der Grubbs- Schätzer dabei für eine der beiden Präzisionen stets negativ aus. Aus diesem Grunde gehen wir jetzt näher auf deren Einfluß ein.

5 Einfluß der Produktvariabilität

Man kann zwar im Modell (1) zunächst auch die Produktvariabilität mit herausprojizieren und so Invarianz nicht nur bezüglich Mittelwerttranslationen sondern auch in Hinsicht auf die Produktvariabilität erreichen, aber dann lassen sich die Präzisionen σ^2_Y und σ^2_Z nicht mehr getrennt identifizieren; dies macht erst Sinn, wenn mindestens drei Meßverfahren simultan beteiligt sind, was schon von Grubbs (1948) ausführlich diskutiert wird. Das hat zur Folge, daß im vorliegenden Fall von nur zwei Meßverfahren sowohl die Grubbs-Schätzer als auch die nicht-negativen minimal verzerrten quadratischen Schätzer für die

Präzisionen in fataler Weise von der Produktvariabilität abhängen. Es gilt nämlich, vgl. z. B. Grubbs (1948), Hartung/ Heine (1984), für die Varianz der Grubbs-Schätzer

$$\lim_{\sigma_X^2 \to \infty} \operatorname{Var}\left(\widetilde{\sigma_Y^2}\right) = \infty, \tag{25}$$

und mit (18) über (8) und (3) analog für die positiven Schätzer

$$\lim_{\sigma_X^2 \to \infty} \operatorname{Var}\left(\widehat{\sigma_Y^2}\right) = \infty. \tag{26}$$

Hier zeigt sich nun ein weiterer erfreulicher Effekt unserer Adjustierungsmaßnahme. Mit (9), (18) und (8), (3) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\widehat{\sigma_{Y,\alpha}^2}\right) &= \frac{2}{n-1} \cdot \frac{16 \cdot \left(\sigma_D^2\right)^2}{\left(5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2\right)^2} \cdot \left(\sigma_Y^2 + \frac{1}{4}\sigma_Z^2 + \frac{1}{4}\sigma_X^2\right)^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \cdot \frac{16 \cdot \left(\sigma_D^2\right)^2}{\left(5 \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} + 5 \cdot \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_X^2} + 2\right)^2} \left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_X^2} + \frac{1}{4}\right)^2, \end{aligned} \tag{27}$$

so daß wir für die adjustierten positiven Präzisionsschätzer eine bezüglich der Produktvariabilität beschränkte Varianz nachweisen können:

$$\lim \operatorname{Var}\left(\widehat{\sigma_{Y,\alpha}^2}\right) = \frac{2}{n-1} \cdot \begin{cases} \frac{16}{25} \cdot \left(\sigma_Y^2 + \frac{1}{4}\sigma_Z^2\right)^2 & \text{für } \sigma_X^2 \to 0, \\ \frac{1}{4} \cdot \sigma_D^2 & \text{für } \sigma_X^2 \to \infty. \end{cases} \tag{28}$$

Um Aussagen auch für den mittleren quadratischen Fehler treffen zu können, müssen wir jetzt noch den Bias diesbezüglich genauer anschauen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\, \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2} - \sigma_Y^2 &= \mathrm{E}\, \alpha \cdot \left(\widehat{\sigma_Y^2} - \sigma_Y^2\right) + \alpha \cdot \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{4}\left(\sigma_Z^2 + \sigma_X^2\right) + (1-\alpha)\sigma_Y^2 \\ &= \frac{\sigma_D^2 \cdot \left(\sigma_Z^2 + \sigma_X^2\right)}{5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2} + \frac{4\sigma_D^2\sigma_Y^2 - \left(5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2\right) \cdot \sigma_Y^2}{5\sigma_Y^2 + 5\sigma_Z^2 + 2\sigma_X^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_Z^2\sigma_D^2 + \sigma_X^2\sigma_Y^2 + \sigma_X^2\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\sigma_D^2 - 2\sigma_X^2\sigma_Y^2}{5\sigma_D^2 + 2\sigma_X^2} \\
&= \frac{\sigma_D^2\left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right) + \sigma_X^2\left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right)}{5\sigma_D^2 + 2\sigma_X^2} \qquad (29) \\
&= \left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right) \cdot \frac{\sigma_D^2 + \sigma_X^2}{5\left(\sigma_D^2 + \sigma_X^2\right) - 3\sigma_X^2} \\
&= \left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right) \cdot \frac{1}{5 - 3 \cdot \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_D^2 + \sigma_X^2}} \\
&= \left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right) \cdot \frac{1}{5 - 3\left(1 + \dfrac{\sigma_D^2}{\sigma_X^2}\right)^{-1}},
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\left(\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma_Y^2\right) \longrightarrow \left(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right) \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{5} \text{ für } \sigma_X^2 \to 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ für } \sigma_X^2 \to \infty, \end{cases} \qquad (30)
$$

so daß wir mit (28) nun auch für den mittleren quadratischen Fehler des adjustierten Schätzers die Beschränktheit bezüglich der Produktvariabilität konstatieren können:

$$
\lim_{\sigma_X^2 \to \infty} \mathrm{E}\left\{\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}} - \sigma_Y^2\right\}^2 = \frac{1}{2(n-1)}\left\{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2\right\}^2 + \frac{1}{4}\left\{\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\right\}^2. \qquad (31)
$$

Desweiteren ist (29) zu entnehmen, daß sich der Bias der adjustierten positiven Schätzer in Hinsicht auf die beiden Meßverfahren Y und Z völlig symmetrisch verhält in dem Sinne, daß nämlich gilt

$$
\mathrm{Bias}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right) = -\mathrm{Bias}\left(\widehat{\sigma^2_{Z,\alpha}}\right), \qquad (32)
$$

wobei in der Erwartung stets der größere Parameter unterschätzt und folglich der kleinere Parameter überschätzt wird,

$$
\sigma_Y^2 > \sigma_Z^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Bias}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}\right) < 0, \\ \mathrm{Bias}\left(\widehat{\sigma^2_{Z,\alpha}}\right) > 0, \end{cases} \qquad (33)
$$

mit der direkten Konsequenz der Erwarungstreue für den Fall, daß beide Parameter gleich sind:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_Z^2 \Rightarrow \text{Bias}\left(\widehat{\sigma_{Y,\alpha}^2}\right) = \text{Bias}\left(\widehat{\sigma_{Z,\alpha}^2}\right) = 0. \tag{34}$$

Den Formeln (27), (28) für die Varianz und (29), (30) für den Bias ist zu entnehmen, daß wir mittels der eingeführten Adjustierung den Einfluß der Produktvariabilität praktisch eliminiert haben, was gerade für die Anwendungen von wesentlicher Bedeutung ist.

6 Voradjustierung

Etwa in der Formel (31) wird aber auch deutlich, daß eine Abhängigkeit vom jeweils anderen Präzisionsparameter besteht. Diese wird durch eine Voradjustierung gemindert. Dazu dienen uns die mittleren Quadratsummen Q_Y und Q_Z, die ja wie Q_D optimale Schätzfunktionen darstellen, und zwar für $\sigma_Y^2 + \sigma_X^2$ bzw. für $\sigma_Z^2 + \sigma_X^2$.
Die folgenden Vorfaktoren seien eingeführt:

$$\psi_Y = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_Z^2 + \sigma_X^2}{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}} \tag{35}$$

mit der Schätzung

$$\widehat{\psi_Y} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_Z}{Q_Y}}, \tag{36}$$

sowie entsprechend für Z

$$\psi_Z = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}{\sigma_Z^2 + \sigma_X^2}} \tag{37}$$

mit der Schätzung

$$\widehat{\psi_Z} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_Y}{Q_Z}}. \tag{38}$$

Damit haben wir erreicht, daß für die mittels ψ_Y adjustierten Schätzer

$$\widehat{\sigma_{Y,\psi_Y}^2} = \psi_Y \cdot \widehat{\sigma_Y^2} \quad \text{und} \quad \widetilde{\sigma_{X,\psi_Y}^2} = \psi_Y \cdot \widetilde{\sigma_X^2} \tag{39}$$

in der Erwartung die folgende Beziehung besteht:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}} + \widetilde{\sigma^2_{X,\psi_Y}}\right\} &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sigma_Z^2+\sigma_X^2}{\sigma_Y^2+\sigma_X^2}}\cdot\left\{\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Y}+\sigma^2_X\right\} \\
&= \frac{(\sigma_Y^2+\sigma_X^2)\cdot\{\sigma_Y^2+\frac{1}{4}\cdot(\sigma_Z^2+\sigma_X^2)+\sigma_X^2\}}{\sigma_Y^2+\sigma_X^2+\frac{1}{4}\cdot(\sigma_Z^2+\sigma_X^2)} \qquad (40)\\
&= \sigma_Y^2+\sigma_X^2;
\end{aligned}$$

in entsprechender Weise definiert man $\widehat{\sigma^2_{Z,\psi_Z}} = \psi_Z \cdot \widehat{\sigma^2_Z}$.

Für die Verzerrung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}} - \sigma_Y^2 &= \sigma_X^2(1-\psi_Y) \\
&= \frac{\sigma_X^2\{\sigma_Y^2+\sigma_X^2+\frac{1}{4}(\sigma_Z^2+\sigma_X^2)-\sigma_Y^2-\sigma_X^2\}}{\sigma_Y^2+\sigma_X^2+\frac{1}{4}(\sigma_Z^2+\sigma_X^2)} \qquad (41)\\
&= \sigma_X^2\cdot\frac{1}{1+4\cdot\frac{\sigma_Y^2+\sigma_X^2}{\sigma_Z^2+\sigma_X^2}},
\end{aligned}$$

und somit für die Grenzfälle

$$\{\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}} - \sigma_Y^2\} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_Z^2 \to 0 \\ \sigma_X^2 & \text{für } \sigma_Z^2 \to \infty, \end{cases} \qquad (42)$$

also auf jeden Fall eine Beschränktheit bzgl. σ_Z^2.
Für die Varianz haben wir mit (18)

$$\mathrm{Var}(\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}}) = \frac{(\sigma_Y^2+\sigma_X^2)^2\cdot(\sigma_Y^2+\frac{1}{4}\sigma_Z^2+\frac{1}{4}\sigma_X^2)^2}{(\sigma_Y^2+\frac{1}{4}\sigma_Z^2+\frac{1}{4}\sigma_X^2+\sigma_X^2)^2}\cdot\frac{2}{n-1}$$

bzw.

$$\lim \mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma^2_{Y,psi_Y}}\right) = \frac{2}{n-1}\left\{\sigma_Y^2+\sigma_X^2\right\}^2\cdot\begin{cases} 1 & \text{für } \sigma_Z^2\to\infty, \\ \left(1+\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2+\frac{1}{4}\sigma_X^2}\right)^{-2} & \text{für } \sigma_Z^2 \to 0. \end{cases} \qquad (43)$$

Also können wir insgesamt im mittleren quadratischen Fehler von $\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}}$ eine Beschränktheit bezüglich variierendem σ^2_Z feststellen; entsprechendes gilt natürlich ebenfalls für $\widehat{\sigma^2_{Z,\psi_Z}}$ bezüglich σ^2_Y.

7 Kombinierte Adjustierungen

In obigen Formeln ist aber auch zu ersehen, daß der Schätzer $\widehat{\sigma^2_{Y,\psi_Y}}$ stark von σ^2_X abhängt, was er aufgrund seiner Konstruktion allerdings auch tun muß. Naheliegend ist daher, die Adjustierung aus Abschnitt 5 zwecks Bereinigung um den σ^2_X-Einfluß mit der Adjustierung aus Abschnitt 6 zwecks Bereinigung um den σ^2_Z-Einfluß zur simultanen Adjustierung von $\widehat{\sigma^2_Y}$ zu kombinieren. Dazu definieren wir zunächst gewissermaßen als Umrechnungsfaktor

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Y} + \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Z}}{\psi_Y \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Y} + \psi_Z \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma^2_Z}} \tag{44}$$

mit dem möglichen kanonischen Schätzer

$$\hat{\lambda} = \frac{\widehat{\sigma^2_Y} + \widehat{\sigma^2_Z}}{\widehat{\psi_Y} \cdot \widehat{\sigma^2_Y} + \widehat{\psi_Z} \cdot \widehat{\sigma^2_Z}}. \tag{45}$$

Für λ erhalten wir die ausführliche Darstellung

$$\lambda = \frac{\frac{1}{4} \cdot (5\sigma^2_Y + 5\sigma^2_Z + 2\sigma^2_X)}{\sigma^2_Y(\psi_Y + \frac{1}{4}\psi_Z) + \sigma^2_Z(\psi_Z + \frac{1}{4}\psi_Y) + \frac{1}{4} \cdot \sigma^2_X(\psi_Y + \psi_Z)}, \tag{46}$$

so daß wir uns zwecks Abschätzung zunächst die ψ-Größen genauer anschauen müssen.

Gilt etwa $\psi_Y \leq 1/c$ für ein $c > 1$, d. h.

$$\frac{1}{c} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^2_Z + \sigma^2_X}{\sigma^2_Y + \sigma^2_X}}, \text{ bzw.}$$

$$(c-1) \cdot 4 \leq \frac{\sigma^2_Z + \sigma^2_X}{\sigma^2_Y + \sigma^2_X}, \text{ oder}$$

$$1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^2_Y + \sigma^2_X}{\sigma^2_Z + \sigma^2_X} \leq 1 + \frac{1}{16 \cdot (c-1)},$$

so folgt dann

$$\psi_Z \geq \frac{16 \cdot (c-1)}{16 \cdot (c-1) + 1}. \tag{47}$$

Wählen wir zunächst $c = 2$, so sind entweder ψ_Y und ψ_Z beide jeweils größer als 1/2, oder wenn einer kleiner oder gleich 1/2 ist, so ist nach obiger Aussage (47) der andere mindestens 16/17 , so daß wir auf jeden Fall haben

$$\psi_Y + \psi_Z \geq \frac{16}{17} > \frac{4}{5}. \tag{48}$$

Wählen wir jetzt in (47) die Größe $c = 4$, so sind mit der gleichen Argumentation wie eben entweder beide Größen ψ_Y und ψ_Z größer als 1/4, oder falls eine dies nicht ist, dann ist die andere nach (47) mindestens 48/49, so daß wir allenthalben erhalten

$$\psi_Y + \frac{1}{4}\psi_Z \geq \frac{12}{49} > \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \psi_Z + \frac{1}{4}\psi_Y \geq \frac{12}{49} > \frac{1}{5}. \tag{49}$$

Andererseits ist sofort ersichtlich, daß ψ_Y und ψ_Z jeweils kleiner als 1 sind, was direkt als untere Abschätzung von λ ergibt

$$\lambda \geq \frac{\frac{1}{4} \cdot (5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2)}{\frac{5}{4} \cdot \sigma_Y^2 + \frac{5}{4} \cdot \sigma_Z^2 + \frac{2}{5} \cdot \sigma_X^2} = 1, \tag{50}$$

und mit (48) und (49) erhalten wir für λ eine obere Abschätzung, indem wir jeweils die dort genannten untersten Schranken verwenden, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \frac{\frac{1}{4} \cdot (5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2)}{\frac{1}{5} \cdot \sigma_Y^2 + \frac{1}{5} \cdot \sigma_Z^2 + \frac{1}{5}\sigma_X^2} \\
&\leq \frac{\frac{1}{4} \cdot (5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2)}{\frac{1}{25} \cdot (5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2) + \frac{3}{25} \cdot \sigma_X^2} \\
&\leq \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot \dfrac{\sigma_X^2}{5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2}} \\
&\leq \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot \dfrac{1}{2 + 5 \cdot \dfrac{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_X^2}}} \\
&\leq \frac{25}{4},
\end{aligned} \tag{51}$$

sowie

$$\lim_{\sigma_X^2 \to \infty} \lambda \leq \frac{5}{2} \text{ und } \lim_{\sigma_Z^2 \to \infty} \lambda \leq \frac{25}{4}, \tag{52}$$

wobei wir obige Umformung deshalb soweit getrieben haben, um besser zu sehen, wie die Einflüsse von σ_Z^2 und σ_X^2 hier eingeschränkt werden.

Der kombinierte Adjustierungsfaktor für $\widehat{\sigma_Y^2}$ wird nun definiert als

$$A_Y = \lambda \cdot \alpha \cdot \psi_Y \tag{53}$$

mit der möglichen Schätzung, vgl. (12), (36) und (45),

$$\widehat{A_Y} = \hat{\lambda} \cdot \hat{\alpha} \cdot \widehat{\psi_Y},$$

so daß wir den kombiniert adjustierten positiven Schätzer schreiben können als

$$\widehat{\sigma_{Y,A_Y}^2} = \widehat{A_Y} \cdot \widehat{\sigma_Y^2}. \tag{54}$$

Nun gilt, vgl (27),

$$\begin{aligned}
\sqrt{\operatorname{Var}(\psi_Y \cdot \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2})} &= \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{(\sigma_Y^2 + \sigma_X^2) \cdot 4 \cdot (\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2) \cdot (\sigma_Y^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_Z^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_X^2)}{(\sigma_Y^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_Z^2 + \frac{5}{4} \cdot \sigma_X^2) \cdot (5 \cdot \sigma_Y^2 + 5 \cdot \sigma_Z^2 + 2 \cdot \sigma_X^2)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{4 \cdot \left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} + 1\right)}{\left(1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma_Y^2 + \frac{1}{4}\sigma_Z^2}{\sigma_X^2}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_X^2} + 2 \cdot \frac{1}{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}\right)} \\
&\longrightarrow \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \begin{cases} \frac{4}{10} \cdot \{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2\} \text{ für } \sigma_X^2 \to \infty, \\ 4 \cdot \{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2\} \text{ für } \sigma_Z^2 \to \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{55}$$

Hieraus erhalten wir nun für die Varianz des kombinierten Schätzers,

$$\operatorname{Var}(\widehat{\sigma_{Y,A_Y}^2}) = \lambda^2 \cdot \operatorname{Var}(\psi_Y \cdot \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2}),$$

die Grenzabschätzung mit (52),

$$\lim_{\sigma_X^2 \to \infty} \operatorname{Var}(\widehat{\sigma_{Y,A_Y}^2}) \leq \frac{2}{n-1} \cdot \{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2\}^2, \tag{56}$$

sowie jetzt auch eine bzgl. σ_Z^2,

$$\lim_{\sigma_Z^2 \to \infty} \operatorname{Var}(\widehat{\sigma_{Y,A_Y}^2}) \leq \frac{2}{n-1} \cdot 25^2 \cdot \{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2\}^2. \tag{57}$$

Kommen wir nun zum Bias, so bemerken wir zunächst

$$\mathrm{E}\ \lambda \cdot \psi_Y \cdot \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2} - \sigma_Y^2 = \lambda \cdot \psi_Y \cdot \{\mathrm{E}\ \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2} - \sigma_Y^2\} + (\lambda \cdot \psi_Y - 1) \cdot \sigma_Y^2, \tag{58}$$

so daß wir mit (29), (35) und (52) erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \psi_Y \cdot \{\mathrm{E}\ \alpha \cdot \widehat{\sigma_Y^2} - \sigma_Y^2\} &= \lambda \cdot \frac{(\sigma_Y^2 + \sigma_X^2)(\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2)}{\sigma_Y^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_Z^2 + \frac{5}{4} \cdot \sigma_X^2} \cdot \frac{1}{5 - 3 \cdot \left(1 + \frac{\sigma_D^2}{\sigma_X^2}\right)^{-1}} \\ &= \lambda \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_Z^2}}{1 + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}}\right)^{-1} \cdot \frac{1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Z^2}}{5 - 3 \cdot \left(1 + \frac{\sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_X^2}\right)^{-1}} \\ &\longrightarrow \quad \begin{cases} L_1 \leq 5 \cdot \{\sigma_Z^2 - \sigma_Y^2\} \text{ für } \sigma_X^2 \to \infty, \\ L_2 \leq 5 \cdot \{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2\} \text{ für } \sigma_Z^2 \to \infty, \end{cases} \end{aligned} \tag{59}$$

wobei L_1 und L_2 die Limiten bezeichnen mögen. Weiterhin erhalten wir für den zweiten Ausdruck in (58) mit (52)

$$\lim(\lambda \cdot \psi_Y - 1)\sigma_Y^2 \leq \begin{cases} (\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} - 1) \cdot \sigma_Y^2 \text{ für } \sigma_X^2 \to \infty, \\ (\frac{25}{4} \cdot 0 - 1)\sigma_Y^2 \text{ für } \sigma_Z^2 \to \infty. \end{cases} \tag{60}$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß Funktionen $f(\sigma_Y^2, \sigma_Z^2)$ und $g(\sigma_Y^2, \sigma_X^2)$ derart existieren, daß für den mittleren quadratischen Fehler des kombiniert adjustierten Schätzers gilt

$$\mathrm{E}\{\widehat{\sigma_{Y,A_Y}^2} - \sigma_Y^2\}^2 \leq \begin{cases} f(\sigma_Y^2, \sigma_Z^2) \text{ für } \sigma_X^2 \to \infty, \\ g(\sigma_Y^2, \sigma_X^2) \text{ für } \sigma_Z^2 \to \infty, \end{cases} \tag{61}$$

also eine simultane Absicherung gegen jeweils eine der beiden ungünstigsten Situationen. Aufgrund der Konstruktion von A_Y ist dies aber nicht zu erwarten, wenn sozusagen beide Katastrophen gleichzeitig eintreten. Hierfür ist keine Lösung in Sicht.

Somit bleibt schließlich nur noch zu zeigen, daß diese kombinierten Schätzer auch die Beziehung (7) erfüllen. Mit, vgl. (9) und (44),

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \alpha &= \frac{\mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}}{\psi_Y \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \psi_Z \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}} \cdot \frac{\sigma_D^2}{\mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}} \qquad (62) \\ &= \frac{\sigma_D^2}{\psi_Y \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \psi_Z \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}} \end{aligned}$$

erhalten wir, vgl. (53), in der folgenden Form

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\widehat{\sigma^2_{Y,A_Y}} + \widehat{\sigma^2_{Z,A_Z}}\} &= \lambda \cdot \alpha \cdot \mathrm{E}\{\psi_Y \cdot \widehat{\sigma_Y^2} + \psi_Z \cdot \widehat{\sigma_Z^2}\} \\ &= \frac{\sigma_D^2}{\psi_Y \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \psi_Z \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}} \cdot \{\psi_Y \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Y^2} + \psi_Z \cdot \mathrm{E}\widehat{\sigma_Z^2}\} \qquad (63) \\ &= \sigma_D^2 \end{aligned}$$

die gewünschte Beziehung.

Wegen (62) läßt sich mit einer möglichen Schätzung für den kombinierten Adjustierungsfaktor der Schätzer in geschlossener Darstellung auch wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^2_{Y,\widehat{A_Y}}} &= Q_D \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{Q_Z}{Q_Y}} \cdot \widehat{\sigma_Y^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{Q_Y}{Q_Z}} \cdot \widehat{\sigma_Z^2} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{Q_Z}{Q_Y}} \cdot \widehat{\sigma_Y^2} \qquad (64) \\ &= (\widehat{\lambda\alpha}) \cdot \widehat{\psi_Y} \cdot \widehat{\sigma_Y^2} \\ &= \widehat{A_Y} \cdot \widehat{\sigma_Y^2}; \end{aligned}$$

analog erhält man für den zweiten Präzisionsschätzer

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^2_{Z,\widehat{A_Z}}} &= (\widehat{\lambda\alpha}) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{Q_Y}{Q_Z}} \cdot \widehat{\sigma_Z^2} \qquad (65) \\ &= \widehat{A_Z} \cdot \widehat{\sigma_Z^2}. \end{aligned}$$

Diese Schätzfunktionen $\widehat{\sigma^2_{Y,\widehat{A_Y}}}$ und $\widehat{\sigma^2_{Z,\widehat{A_Z}}}$ sowie $\widehat{\sigma_D^2}$ erfüllen die Beziehung (7) dann auch punktweise.

Die allgemeinen Aussagen (18) bis (24) in Abschnitt 4 zu Verzerrung, Varianz und mittlerem quadratischen Fehler übertragen sich direkt auch auf $\widehat{\sigma^2_{Y,A_Y}}$, indem man diese Schätzfunktion in den dortigen Formeln anstelle von $\widehat{\sigma^2_{Y,\alpha}}$ einsetzt.

Schlußbemerkung

Für das Problem der Bestimmung der verfahrensspezifischen Varianzen für zwei Meßverfahren, welche paarig ohne Wiederholungen, d. h. mit Produktvariabilität, messen, wird in dieser Arbeit ein Prinzip der Adjustierung auf eine prädestinierte Ordnungsbeziehung eingeführt.
Dies hat zur Folge, daß in den erzielten Schätzfunktionen der Einfluß der Produktvariabilität im Gegensatz zu den bekannten Schätzprinzipien praktisch eliminiert wird, was für die Anwendungen der vorgeschlagenen Verfahren von wesentlicher Bedeutung ist.
Für den Fall, daß zwischen den beiden verfahrensspezifischen Varianzen eine große Diskrepanz zu erwarten ist, wird eine diesbezügliche Voradjustierung empfohlen.

Anmerkung

Spezieller Dank gilt Herrn Direktor Dipl.–Ing. Wilhelm Gmelin und Herrn Dipl.–Ing. Klaus Martin von EURATOM in Luxembourg dafür, daß sie mich auf die besonderen Probleme bei gepaarten Messungen aufmerksam machten und die Forschung daran mit großem Interesse unterstützten.

Literatur

CROWDER, M. (1992): Interlaboratory Comparisons: Round Robins with Random Effects. *Applied Statistics*, 41, 409-425.
ELPELT, B. (1989): On Linear Statistical Models of Commutative Quadratic Type. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 18, 3407-3450.
GRUBBS, F. E. (1948): On Estimating Precision of Measuring Instruments and Product Varibility. *Journal of the American Statistical Association*, 43, 243-264.
GRUBBS, F. E. (1983): Grubbs Estimators (Precision and Accuracy of Measurement). In Kotz, S. /Johnson, N. L. (eds.): *Encyclopedia of Statistical Sciences*. New York: Wiley, vol. 3, 542-549.

HARTUNG, J. (1979): Non-Negative Estimation in Variance Component Models. Preprint no. 294, *DFG-Sonderforschungsbereich 72: Approximation und Optimierung*, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Bonn.
HARTUNG, J. (1981): Non-Negative Minimum Biased Invariant Estimation in Variance Component Models. *The Annals of Statistics*, 9, 278-292.
HARTUNG, J./ELPELT, B. (1995): *Multivariate Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. München: Oldenbourg, 5. Auflage.
HARTUNG, J./ELPELT, B./KLÖSENER, K.–H. (1998): *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. München: Oldenbourg, 11. Auflage.
HARTUNG, J./ELPELT, B./VOET, B. (1997): *Modellkatalog VARIANZANALYSE: Buch mit CD-Rom*. München: Oldenbourg.
HARTUNG, J./HEINE, B. (1984): Schätzung der Varianz von Grubbs' Schätzern für die Präzision von Meßinstrumenten. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 68, 257-272.
HARTUNG, J./KLÖSENER, K.–H. (1987): Zur Bestimmung der Präzision von Meßverfahren. In: Opitz, O./Rauhut, B. (Hrsg.): *Mathematik und Ökonomie: Rudolf Henn zum 65. Geburtstag*. Berlin: Springer, 286-296.
HARTUNG, J./VOET, B. (1986): Best Invariant Estimators for the Mean Squared Error of Variance Component Estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 689-691.
JAECH, J. L. (1985): *Statistical Analysis of Measurement Errors*. New York: Wiley.
LEHMANN, E. L./CASELLA, G. (1998): *Theory of Point Estimation*. New York: Springer, 2nd edition.
MARTIN, K. (1997/98): Persönliche Mitteilungen. *EURATOM*, Luxembourg.
RAO, C. R. (1972): Estimation of Variance and Covariance Components in Linear Models. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 112-115.
SCHEFFÉ, H. (1959): *The Analysis of Variance*. New York: Wiley.
SEELY, J. (1971): Quadratic Subspaces and Completeness. *Annals of Mathematical Statistics*, 42, 710-721.
WEBER, E. (1986): *Grundriß der biologischen Statistik*. Stuttgart: Fischer, 9. Auflage.

Autorenanschrift

PROF. DR. JOACHIM HARTUNG
Fachbereich Statistik, SFB 475, Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87, D–44221 Dortmund
E-mail: hartung@omega.statistik.uni-dortmund.de