Jan BLOCK, Braunschweig

Quadratische Gleichungen – Erkennen und verstehen?

1. Flexibles algebraisches Handeln

$$x^2-5x=0$$
$$x^2+2x-8=0$$
$$x^2-8x+9=2$$
$$5x^2+20x+15=0$$
$$(x-8)^2=0$$

Abbildung 1

Bei den fünf quadratischen Gleichungen in Abbildung 1 sehen Experten Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Sie wählen ausgehend von spezifischen Aufgabenmerkmalen eine adäquate Bearbeitungsmethode zum Lösen der jeweiligen Gleichung, indem sie wahrgenommene Merkmale in ein Netz von Beziehungen einordnen und ihnen somit Bedeutungen zuweisen. Diese Fähigkeit kann in Analogie zum Begriff des flexiblen Rechnens (vgl. Rathgeb-Schnierer 2006, Selter 1999) als flexibles algebraisches Handeln bezeichnet werden. Auch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I sollen mit quadratischen Gleichungen flexibel handeln können und nicht nur ein Standardverfahren (z. B. Anwendung der p-q-Formel) beherrschen.

Wenn Schülerinnen und Schüler mehrere Lösungsverfahren kennen und flexibel einsetzen, kann die Effizienz beim Lösen quadratischer Gleichungen erhöht werden, da sich die Anzahl der Rechenschritte und der Schwierigkeitsgrad der Rechnungen ggf. verringern. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler wird dadurch reduziert. Flexibilität des Handelns innerhalb eines mathematischen Gebietes korrespondiert mit Verständnis und wirkt positiv auf nachfolgende Lernprozesse (Heinze, Star, Verschaffel 2009). Förderlich für eine gute Erinnerung aber auch für die Rekonstruktion eines Verfahrens im Falle des Vergessens ist ein Verständnis im Sinne eines „relational understanding", bei dem im Gegensatz zu einem „instrumental understanding" auch begründet werden kann, warum eine Handlung in welcher Art und Weise ausgeführt wird (Skemp 1976). Flexibles algebraisches Handeln erfordert eine Reflexion des eigenen Tuns, die als Voraussetzung für die Anwendung von Wissen in neuen, unbekannten Situationen angesehen werden kann (Sjuts 2001). Die Fähigkeit zum Transfer von Kenntnissen auf unbekannte Situationen kann gefördert werden. Wenn Schülerinnen und Schüler der Durchführung von Standardverfahren blind vertrauen, schwindet oft ihr Bedürfnis und ihre Fähigkeit zur Reflexion und kritischen Prüfung von Ergebnissen. Dies ist insbesondere dann relevant, wenn das Standardverfahren anfälliger für Fehler ist als ein alternatives Lösungsverfahren (Engel 2011). Flexibles algebraisches Handeln kann außerdem zur Förderung algorithmischen Denkens beitragen, da der Prozess des Lösens einer quadratischen Gleichung mit der Auswahl eines geeigneten Verfahrens insgesamt als Algorithmus betrachtet werden kann. Für den Bereich der Arithmetik belegen Studien, dass gerade auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler davon profitieren, wenn sie nicht nur ein Standardverfahren kennen (vgl. Selter 1999). Es kann vermutet werden, dass diese Befunde für die Algebra in analoger Weise gelten.

2. Aufbau der Studie

In der Studie wird zwei zentralen Forschungsfragen nachgegangen, die im Hinblick auf die Voraussetzungen für die Fähigkeit zum flexiblen algebraischen Handeln relevant sind: Welche Merkmale nehmen Schülerinnen und Schüler beim Erfassen von quadratischen Gleichungen wahr? Welche Bedeutungen haben diese Merkmale für sie?

Kern der Untersuchung ist ein Laborexperiment mit 11 Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 9, das durch ein Unterrichtsexperiment ergänzt wird, bei dem die Aufgabenformate der Studie im Unterricht eingesetzt werden. Im Laborexperiment erfinden die Schülerinnen und Schüler bei der ersten von drei Aufgaben zu einer gegebenen quadratischen Gleichung durch Variation neue Gleichungen. Diese Aufgabenstellung kann als eine generierende Metaaufgabe bezeichnet werden. Als zweite Aufgabe müssen fünf quadratische Gleichungen unterschiedlicher Gestalt (s. Abbildung 1) gelöst werden. Hierbei handelt es sich um eine algebraische Basisaufgabe, für die die Schülerinnen und Schüler mindestens ein Bearbeitungsverfahren kennen sollten. Bei der dritten Aufgabe sortieren die Schülerinnen und Schüler 20 quadratische Gleichungen, die sich hinsichtlich der anzuwendenden Lösungsverfahren und der Gestalt der auftretenden Terme unterscheiden. Die Sortierkriterien müssen von den Schülerinnen und Schülern selbstständig entwickelt, erläutert und begründet werden. Diese analytische Metaaufgabe geht über das Lösen einer quadratischen Gleichung hinaus und ist daher geeignet, Hinweise auf solche kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und der Bedeutungszuweisungen zu liefern, auf die die Forschungsfragen ausgerichtet sind (vgl. Block 2012).

3. Erste Ergebnisse

Die Analyse der von Schülerinnen und Schülern genannten Merkmale und der zugehörigen Begründungen beim Sortieren der 20 Gleichungen ergibt, dass zwei Kategorien von Merkmalen von besonderer Bedeutung sind. Dies sind einerseits Merkmale, die sich auf die Struktur und Komponenten der Terme als Bestandteile der Gleichung beziehen und andererseits Merkmale, die sich auf die Gleichungen als Ganzes beziehen. Bezüglich der Terme wurden gehäuft folgende Merkmale benannt: Anzahl der Komponenten des Terms, Anwendbarkeit binomischer Formeln (auch bei Termen wie $(x-3)(x+5)=0$), Vorhandensein von Klammern, Koeffizienten vor x oder x^2, Vorhandensein von x^2, Auftreten eines Exponenten, Größe der auftretenden Zahlen. Bezogen auf die Gleichungen als Ganzes wurden folgende Merkmale vielfach genannt: Anzahl der Komponenten der Gleichung, Anzahl der Rechenschritte zur Auflösung der Gleichung, Art der Komponenten auf einer Seite der Gleichung (Null, Zahl, x^2).

In der Auswertung der Daten werden insbesondere die von den Teilnehmern zwischen den beiden Kategorien hergestellten Bezüge analysiert. Diese sind von besonderer Bedeutung für den flexiblen Umgang mit quadratischen Gleichungen, wie an den folgenden zwei Beispielen deutlich wird: I. $(x-3)(x+5)=0$, II. $(x-3)(x+5)=7$. Die Struktur der Terme auf den linken Seiten dieser Gleichungen ist identisch. Bei der ersten Gleichung erschwert ein Ausmultiplizieren des Produkts das Lösen der Gleichung. Im Gegensatz dazu ist selbiges bei der zweiten Gleichung aber nötig, um zu einer Lösung zu gelangen. Dies zu erkennen ist nur möglich, wenn den Schülerinnen und Schülern bewusst ist, dass die „Größe“ der Zahlen (Null oder nicht Null) auf den rechten Seiten der Gleichungen bei den vorliegenden Strukturen der Terme Einfluss auf die Auswahl eines Lösungsverfahrens hat. Die Werte der Zahlen auf den linken Seiten der Gleichungen sind bezüglich eines geeigneten Lösungsverfahrens in diesem Fall hingegen irrelevant.

Exemplarisch soll hier vertiefend auf das bei der Sortieraufgabe häufig genannte Merkmal „Klammern vorhanden“ eingegangen werden. Diesem Merkmal wurden Bedeutungen unterschiedlicher Art zugeschrieben, die im Folgenden beschrieben und diskutiert werden.

Eine Bedeutungszuschreibung betrifft die Vorrangigkeit von Termen mit Klammern gegenüber solchen ohne Klammern. Die Schülerinnen und Schüler formulierten, dass Terme mit Klammern Priorität haben und zuerst ausgerechnet bzw. ausmultipliziert werden müssen. Ein solches Konzept, das als spontane Reaktion das Ausmultiplizieren von Klammern (z. B. bei den genannten Gleichungen I. und II.) hervorruft, führt nicht nur zu weniger effizienten Lösungswegen, sondern steht der Idee der Faktorisierung eines Terms als Lösungsverfahren für Gleichungen entgegen. Als Ursache für ein solch dominierendes Konzept kann u. a. eine Einseitigkeit des Umgangs mit Termen mit Klammern vermutet werden. Hieraus resultiert die Frage, wie im Unterricht und in Schulbüchern mit solchen Termen umgegangen wird: Dominiert im Unterricht das Ausmultiplizieren oder wird auch gleichwertig das Faktorisieren thematisiert? In welchen Kontexten werden diese Termumformungen erarbeitet und geübt?

Den Schwierigkeitsgrad einer Gleichung begründeten die Schülerinnen und Schüler vielfach mit den auftretenden Termen. Die Schülerinnen und Schüler beschrieben Terme mit Klammern als kompliziert und schwierig. Klammern wurden hier nur im Hinblick auf die Struktur des Terms und die resultierenden Rechenschritte bei einer Termumformung gesehen, nicht aber im Hinblick auf die Struktur des Terms im Kontext des Lösens von Gleichungen. Klammern können gerade auf eine faktorisierte Darstellung hindeuten, die das Lösen der Gleichung ggf. vereinfacht.

Als eine weitere Bedeutung nannten die Schülerinnen und Schüler, dass die Variable schwieriger zu isolieren sei, wenn sie in einer Klammer auftritt. Diese Erklärung bezieht sich nicht nur auf den Term selbst, sondern auch auf den Kontext des Lösens einer Gleichung. Sie weist auf ein Konzept zum Lösen von Gleichungen hin, bei dem die Variable auf einer Seite zu isolieren ist und auf der anderen Seite der Gleichung eine Zahl übrig bleibt. Ein solches Lösungsschema steht z. B. dem Lösen einer quadratischen Gleichung mit quadratischer Ergänzung oder der Anwendung einer binomischen Formel zum Faktorisieren des Terms entgegen, da hierbei zunächst ein Term mit Klammern erzeugt wird. Die Argumentation der Schülerinnen und Schüler deutet auf eine Übergeneralisierung der Regeln zum Gleichungslösen hin, die an linearen Gleichungen gelernt wurden. Hieraus ergeben sich Fragen hinsichtlich der unterrichtlichen Behandlung verschiedener Typen von Gleichungen z. B. mithilfe von Kontrastierungen und Vergleichen.

Literatur

Block, J. (2012): „Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM. 137-140.

Engel, H.-J. (2011): Denn sie wissen nicht, was sie tun. In: T. Fritzlar u. a. (Hg.): Konstruktionsprozesse im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker. 89-92.

Heinze, A.; Star, J. R.; Verschaffel, L. (2009): Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. In: ZDM Mathematics Education 41 (5), 535-540.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006): Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Hildesheim: Franzbecker.

Selter, C. (1999): Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren. In: Die Grundschulzeitschrift 13 (125), 6-11.

Sjuts, J. (2001): Metakognition beim Mathematiklernen: Das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. In: MU – Der Mathematikunterricht 47 (1), 61-68.

Skemp, R. R. (1976): Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Mathematics Teaching 77, 20-26.