Ingo WITZKE & Frederik DILLING, Siegen

Vorschläge zum Einsatz der 3D-Druck-Technologie für den Analysisunterricht – Funktionen zum „Anfassen“

Einleitung

Die 3D-Druck-Technologie ist ein digitales Fabrikationsverfahren, das durch schichtweises Auftragen von Kunststoffen das Erstellen komplexer geometrischer Strukturen ermöglicht. Unser Forschungsinteresse liegt in der Beschreibung der Entwicklung mathematischen Wissens im Kontext ontologischer Bindungen an Objekte der Empirie, wobei ein spezieller Fokus auf die Digitalisierung und den Einsatz neuer Medien gesetzt wird. Grundlegend ist der Ansatz eines empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts (vgl. Burscheid & Struve, 2010). In der Analysis der Schule treten gegebene Kurven als zentrale Bezugsobjekte auf (vgl. Witzke, 2014). Dies stellt eine interessante Parallele zum Calculus von Leibniz aus dem 17. Jh. dar (vgl. Witzke, 2009).

In den letzten Jahren wurde zunehmend eine stärkere Betonung der qualitativen Analysis gefordert (vgl. z.B. Danckwerts & Vogel, 2006). Dennoch wird kaum enaktiv mit gegenständlichen Modellen operiert (vgl. Dexheimer, 2014). Die 3D-Druck-Technologie ermöglicht die individuelle Realisierung einer Vielzahl gegenständlicher Anschauungsmittel für den Unterricht. Im Folgenden sollen drei Beispiele genauer beschrieben werden. Fotos zu den Beispielen sowie weitere Informationen befinden sich unter:

https://www.uni-siegen.de/nt/didaktik/mintus/mintus-digital/

1. Software „Graphendrucker“

Mit der Software „Graphendrucker“ lassen sich auf einfache Weise dreidimensionale Modelle von Funktionsgraphen erstellen. Hierzu müssen lediglich die Funktionsgleichung und das Intervall im Eingabefeld eingetragen werden. Die so entstehende Datei kann, abhängig von der Größe des Modells, innerhalb von etwa 20 Minuten gedruckt werden.

Durch die Verwendung der Modelle im Analysisunterricht wird der Funktionsgraph zu einem Gegenstand, der sich berühren lässt und damit qualitativ erfahrbar wird. Tall (2013) schlägt zur Verdeutlichung des Stetigkeits- und Steigungsbegriffs das mentale Entlangfahren an Funktionsgraphen mit der Fingerspitze bzw. der ausgestreckten Hand vor. Diese Überlegungen lassen sich mit Hilfe der Modelle in enaktive Handlungen überführen. Des Weiteren treten, gegenüber des bei ikonischen Darstellungen dominanten Zuordnungsaspekts, der Kovariations- und Objektaspekt (vgl. Vollrath,

1989) in den Vordergrund. Insbesondere der Kovariationsaspekt ist auf Grund seiner Verbindung zur Änderungsrate für die Analysispropädeutik von besonderer Bedeutung. Der Einsatz der Modelle eignet sich zudem zur Präzisierung des Kurvenbegriffs. Es handelt sich bei ihnen um Objekte des reellen Raumes, die verschoben oder gedreht werden können, weshalb eine Interpretation als Kurve sinnvoll ist. Eine weitere Einsatzmöglichkeit ergibt sich im Rahmen einer qualitativen Kurvendiskussion (vgl. Hahn, 2005). Die in Form des Modells qualitativ gegebene Funktion bildet den Ausgangspunkt für einen Austausch über zentrale Eigenschaften von Kurven.

In einer empirischen Erprobung des Programms und der Modelle konnten erste Eindrücke über deren Wirkung auf Schüler gewonnen werden. Im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) wurden insbesondere vier interessante Kategorien identifiziert. Das Programm wurde von den Schülern zum Experimentieren mit Funktionen verwendet. Außerdem konnten in Bezug auf die Modelle viele gegenstandsbezogene Assoziationen (Material, Farbe etc.) festgestellt werden. Einige Aussagen deuteten zudem darauf hin, dass der Funktionsgraph als eigenständiges Objekt des Raumes im Sinne einer Kurve wahrgenommen wurde. Auch das Fühlen bestimmter Kurveneigenschaften (Steigung etc.) wurde von vielen Schülern genannt und erläutert.

2. Integraph

Bei einem Integraphen handelt es sich um einen Apparat, der zu einer gegebenen Kurve auf mechanische Weise die Stammkurve zeichnet. Der y-Wert der zugrundeliegenden Kurve wird als Steigung auf die neue Kurve übertragen. Ein Richtungsrad verschiebt die obere Zeichenebene, sodass eine stetige Kurve entsteht. Erste Konzepte für einen Integraphen gehen bis auf Leibniz (1693) zurück. Das Gerät eignet sich im Unterricht insbesondere zur Veranschaulichung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Auf der Grundlage eines Integrapheneinsatzes entwickelte Blum (1982a) einen veränderten Beweis des Hauptsatzes, in dem die Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion eine besondere Rolle spielt. Ein zentrales Element ist in der Einführung der Differentialrechnung zudem das graphische Integrieren und Differenzieren an diskreten Stellen. Durch den Einsatz des Integraphen ist es möglich, dies kontinuierlich zu tun und damit den Funktionscharakter von Integral und Ableitung zu betonen. Weitere Einsatzmöglichkeiten sind das Bestimmen des Inhalts von durch Kurven begrenzten Flächen oder das graphische Lösen algebraischer Gleichungen. Nach Blum (1982b) sind die Vorteile eines Integrapheneinsatzes die erhöhte Motivation und Herausforderung der Schüler, ein tieferesVerständnis des Hauptsatzes und ein aktives Lernen. Das Prinzip des

Integraphen kann durch die Schüler direkt erkannt werden, er ist keine *Black Box*. Da Integraphen heutzutage nur noch in einigen Sammlungen von Museen und Universitäten zu finden sind, ist ein Einsatz im Unterricht nur schwierig zu realisieren. Daher empfiehlt Blum (1982b) den Einsatz von Filmmaterial. Dies hat allerdings den Nachteil, dass die Schüler selbst nicht aktiv werden. Elschenbroich (2016) entwickelt einen virtuellen Integraphen als GeoGebra-Applet. Hiermit arbeiten die Schüler allerdings (nur) virtuell-enaktiv und nicht enaktiv im engeren Sinne. Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie ermöglicht es Schülern individuell und enaktiv mit einem solchen Gerät zu arbeiten.

3. Tangentenmodell

Das Tangentenmodell besteht aus einer mittels Lasercutting-Technologie in Holz geschnittenen Kurve und einem darauf verschiebbaren Gerät. Durch das Verschieben des Gerätes wird dynamisch ein gerader Stab als Tangente an die Kurve gelegt. Dies wird durch eine Hilfskurve auf dem Holzbrett realisiert. Die Steigung in einem Punkt kann an einer Skala abgelesen werden. Die Grundvorstellung der „Ableitung als Tangentensteigung" ist bei Schülern sehr präsent. In den meisten Fällen ist sie jedoch auch nach der Einführung der Differentialrechnung durch ein elementargeometrisches Tangentenverständnis geprägt (vgl. Witzke & Spies, 2016). Das Tangentenmodell kann dazu verwendet werden, erste Eindrücke über Tangenten an Kurven zu gewinnen. Konflikte mit dem elementargeometrischen Tangentenbegriff können dann zu der Forderung nach einer Erweiterung führen. Außerdem lassen sich anhand des Modells qualitativ die Kriterien für Extremalpunkte vorbereiten. Nach der Einführung der Differentialrechnung kann auch das Prinzip des Modells mit den Schülern erarbeitet und auf weitere Kurven übertragen werden.

Fazit

Durch den Einsatz der 3D-Druck-Technologie bieten sich für den Analysisunterricht vielfältige Chancen. Der Fokus auf (qualitative) Begriffsentwicklung unterstützt den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen. Durch den Umgang mit 3D-Zeichenprogrammen (CAD-Programme) wird das räumliche Vorstellungsvermögen und in Hinblick auf die Berufswelt die Werkzeugkompetenz der Schüler gefördert. Bei der Arbeit mit den Modellen handelt es sich um echte, anstelle virtueller enaktiver Handlungen. Außerdem werden die Schüler individuell angesprochen und können den Herstellungsprozess nachvollziehen.

Herausforderungen für die Verwendung der Technologie im Unterricht ergeben sich insbesondere durch das aufzubauende technische Handlungswissen der Lehrkräfte, relativ hohe Anschaffungskosten, dichte Lehrpläne und damit wenig verfügbare Unterrichtszeit. Zudem muss mit Modelleigenschaften reflektiert umgegangen werden, um Fehlvorstellungen zu vermeiden. Auch die Bereichsspezifität (vgl. Bauersfeld, 1983) des in den unterschiedlichen Kontexten (Programm, Modelle etc.) erworbenen Wissens muss beachtet werden.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In Bauersfeld, Heinrich, Bussmann, Hans & Krummheuer, Götz (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Blum, W. (1982a). Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion – Ein anderer Beweis des Hauptsatzes. *Mathematische Semesterberichte 25 (1)*, 126-134.

Blum, W. (1982b). Der Integraph im Analysisunterricht – Ein altes Gerät in neuer Verwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14 (1)*, 25-30.

Burscheid, H.J. & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.* Hildesheim: Franzbecker.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Berlin/Heidelberg: Springer.

Dexheimer, M. (2014). Achterbahn-Experimente. Gegenständliche Modelle im Analysisunterricht. *Praxis der Mathematik 58*, 34-37.

Elschenbroich, H.-J. (2016). Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. *Der Mathematikunterricht 62 (1)*, 26-34.

Hahn, S. (2005). Kurven in der Diskussion – Lernende auf dem Weg zu einer vorstellungsorientierten Kurvendiskussion. *Praxis der Mathematik in der Schule, 47 (2)*, 26-31.

Leibniz, G. (1693). Über die Analysis des Unendlichen. In Kowalewski, G. (1996) (Hrsg.), *Über die Analysis des Unendlichen / Abhandlung über die Quadratur von Kurven* (S. 1-72). Frankfurt am Main: Thun.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim/Basel: Beltz.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically.* Cambridge: Cambridge University Press.

Vollrath, K.T. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10 (1)*, 3-37.

Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik.* Hildesheim: Franzbecker.

Witzke, I. (2014). Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes. *Der Mathematikunterricht 60 (2)*, 19-31.

Witzke, I. & Spies, S. (2016). Domain-Specific Beliefs of School Calculus. *Journal für Mathematik-Didaktik 37 (1)*, 131-161.