

BÜRKER, Michael
Tübingen

Vorstellung des Buches „Von Eratosthenes bis Einstein – eine mathematische Zeitreise durch die Geschichte des physikalischen Weltbilds“

Als ich nach meiner mehrere Jahrzehnte dauernden Unterrichtstätigkeit am Dietrich-Bonhoeffer-Gymnasium Metzingen und der anschließenden fünfjährigen Betreuung der Didaktik-Abteilung am Mathematischen Institut der Uni Freiburg in den Ruhestand ging, beschloss ich, das Buch mit dem obigen Titel zu schreiben. Ein wesentlicher Grund dafür lag darin, dass Mathematik-Fachleiter des Tübinger Studienseminars ein nur geringes Wissen der Referendare über die Geschichte der Mathematik feststellten und diesen Mangel der Hochschulausbildung zuordneten. Das Buch habe ich daher fächerübergreifend konzipiert, so dass darin die Fachgebiete Mathematik, Physik, Astronomie, Philosophie und Geschichte vernetzt werden, wobei die geschichtliche Entwicklung des physikalischen Weltbilds den roten Faden des Buches bildet. Kurzbiografien der wichtigsten Protagonisten wie Eratosthenes, Aristoteles, Kopernikus, Galilei, Kepler, Newton, Planck und Einstein zeigen nicht nur deren geniale Ideen und Meilensteine dieser Entwicklung auf, sondern auch deren menschliche Seite wie auch die Zeitumstände, in denen diese gelebt und gewirkt haben. Dass ich als langjähriges Mitglied des GDM-Arbeitskreises „Vernetzungen *im Mathematikunterricht*“ unter der Leitung von Astrid Brinkmann mitwirken konnte, war ein wesentlicher Grund für die achtjährige Denk- und Schreibarbeit.

Da ich für den Vortrag nur 35 Minuten Zeit für beispielhafte, für den Mathematikunterricht relevante Ausschnitte aus dem Buch habe, konzentriere ich mich auf drei Aufgaben aus den Bereichen

- Pythagoreische Zahlentripel aus einer babylonischen Keilschrifttafel,
- Bestimmung der Mondentfernung in der Antike,
- Relativistische Effekte, veranschaulicht mittels Dreifachsymmetrie.

1. Auf babylonischen Keilschrifttafeln standen pythagoreische Zahlentripel wie zum Beispiel (12709; 13500; 18541) mit lauter 5-stelligen Zahlen. Wie konnten die Babylonier solche Zahlentripel finden (Bürker 2024, S. 18)?

Offenbar hatten sie ein Verfahren gefunden, das darin bestand, aus einem Zahlenpaar $(p; q)$ mit $p > q$ ein Tripel $(a; b; c)$ ganzer Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$ zu erzeugen. Man wählt a, b, c in Abhängigkeit von p und q folgendermaßen:

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

$a = p^2 - q^2$; $b = 2pq$; $c = p^2 + q^2$, daraus folgt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Beispiele: Das „ägyptische“ Tripel (3; 4; 5) wird erzeugt vom Zahlenpaar (2; 1), das Tripel (5; 12; 13) vom Zahlenpaar (3; 2), das obige Tripel der Keilschrifttafel vom Zahlenpaar (125; 54).

2. Wie konnte man in der Antike die Mondentfernung (ME) bestimmen?

Mit einem einfachen Versuch kann man wenigstens das Verhältnis Mondentfernung / Mondradius bestimmen (Bürker 2024, S. 42 –45).

Hält man eine Erbse am ausgestreckten Arm vor den Vollmond, sodass diese ihn knapp bedeckt, so gilt nach dem 2. Strahlensatz

Mondentfernung / Mondradius = Armlänge / Erbsenradius

Man benötigt nun eine zweite Information über das Verhältnis Mondradius zu Erdradius, die man aus dem Verhältnis

Durchmesser des Kernschattenkreises / Monddurchmesser

bei einer Mondfinsternis ableiten kann. Dieses Verhältnis hat Aristarch im 3. Jahrhundert v. Chr. mit 2:1 angegeben (Heath 1913, S. 329, 412). Er konnte dies aus Beobachtungen von Mondfinsternissen beim Durchgang des „Blutmondes“ durch den Kernschattenkreis der Erde erschließen.

Aus diesen Informationen konnte man die Mondentfernung berechnen. Gegen Ende der Antike waren relativ genauer Werte der Mondentfernung bekannt. So benutzte zum Beispiel Newton in seiner Mondrechnung für die Mondentfernung den Wert von 60 Erdradien.

3. Wie kann man die relativistischen Effekte wie Zeitdilatation und Längenkontraktion durch maximale Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften veranschaulichen (Bürker 2024, S. 192-203)?

In einem Minkowski-Diagramm beschränkt man sich in der Regel auf eine Wegachse und eine Zeitachse, denn damit lassen sich Ereignisse durch Punkte darstellen, die durch zwei Zahlen gekennzeichnet sind, eine Weg-Koordinate und eine Zeit-Koordinate. Solange man nur einen Beobachter hat und dessen Weltlinie aufzeichnen will, verwendet man ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Will man jedoch zwei Beobachtern und der von Einstein in seinen Prinzipien der Speziellen Relativitätstheorie postulierten Gleichwertigkeit der beiden Beobachtersysteme gerecht werden, führe ich ein rechtwinkliges Mittelsystem (MS) ein, bezüglich dessen die beiden Beobachtersysteme A und B die folgende so genannte **Dreifachsymmetrie** erfüllen (Abbildung auf der letzten Seite):

- Die Zeitachsen von A und B sind achsensymmetrisch bezüglich der Hochachse von MS, entsprechend sind

- die Wegachsen von A und B achsensymmetrisch bez. der Rechtsachse von MS und schließlich
- sind jeweils Weg- und Zeitachse von A und von B achsensymmetrisch bez. der 1. Winkelhalbierenden, der Weltlinie des Lichts.

Aus dieser Dreifachsymmetrie folgt sofort:

Die Zeitachsen von A und B sind orthogonal zur Wegachse des jeweils anderen Beobachtersystems. Daraus folgt unmittelbar, dass z.B. das Dreieck ODA_2 rechtwinklig ist. Ruht der Beobachter A, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung O befindet, so ist er nach 5 Fünftel-Zeiteinheiten beim Punkt A_2 , er bleibt also auf der Zeitachse, die Zeitachse ist seine Weltlinie. Deren Punkte stellen also alle Ereignisse dar, die am selben Ort, dem Ursprung stattfinden. Allgemein stellen die Punkte einer beliebigen Parallelen zur Zeitachse Ereignisse dar, die am selben Ort im A-System stattfinden. Entsprechend stellen die Punkte einer beliebigen Parallelen zur Wegachse von A Ereignisse dar, die zur gleichen Zeit im A-System stattfinden.

Entsprechendes gilt für das Beobachtersystem B. Bewegt sich Beobachter B mit der Geschwindigkeit $v = 0,6c$, so ist die Halbgerade OD die Weltlinie von B im A-System. Da B sich auch als in Ruhe befindlich betrachten kann, ist OD die Zeitachse von B. Die Einheiten für Eigenzeit und Eigenlänge können in beiden Systemen gleich gewählt werden. Da die Punkte D und A_2 auf einer Parallelen zur Wegachse des A-Systems liegen, sind die beiden Ereignisse in A-System gleichzeitig. Der Vergleich der Streckenlängen OA_2 und OD zeigt: Während im A-System eine ganze Zeiteinheit vergangen ist, ist im B-System $4/5$ der A-Zeit vergangen. Mit Hilfe der Dreifachsymmetrie lässt sich somit die Zeitdilatation stets an einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 1, β und $\sqrt{1 - \beta^2}$ veranschaulichen ($\beta = v/c$). Entsprechendes gilt für die Längenkontraktion.

Die Steigung der Zeitachse von Beobachter B werde im Modell der Dreifachsymmetrie mit m ($m > 1$) bezeichnet, dann ist in diesem Modell die Steigung der Zeitachse im A-System $-m$ und die Steigung der Lichtlinie gleich 1, weil im letzteren Fall $v = c$ und damit $\beta = c/c = 1$ ist. Der funktionale Zusammenhang zwischen beliebigem β ($0 < \beta < 1$) und m wird durch die Gleichung $\beta = 2m/(m^2 + 1)$ beschrieben. Dies wird in meinem Buch auf den Seiten 197/198 näher ausgeführt. Will man bei gegebenem β die Steigung m ausrechnen, so führt dies auf die quadratische Gleichung $\beta m^2 - 2m + \beta = 0$, welche die Lösungen

$$m_1 = (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) / \beta \quad \text{und} \quad m_2 = (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) / \beta \quad \text{hat.}$$

Für $\beta = 0,6$ ergeben sich die Lösungen $m_1 = 3$ und $m_2 = 1/3$, genau die Steigungen für Zeit- und Wegachse des B-Systems (s. Abb. unten).

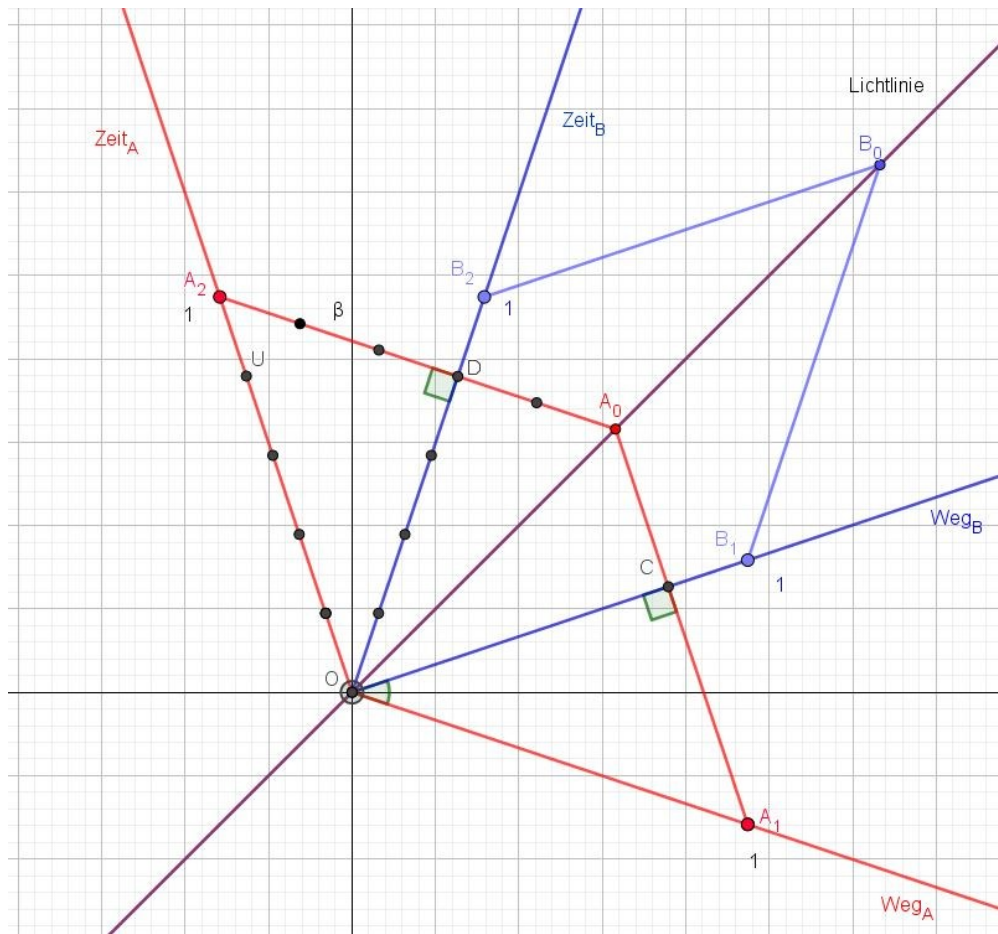


Abb. 1: Dreifachsymmetrie nach (Bürker 2024, S 196, Abb. 24.3)

Literatur

Bürker, M. (2024). *Von Eratosthenes bis Einstein*, Springer-Spektrum.

Heath, T. (1913). *Aristarchus of Samos - the ancient Copernicus*. Clarendon press.