

KAISER, Peter
Karlsruhe

Ordnungsgraphen - Das Haus der Vierecke errichten

Die Ordnung der Vierecke ist nicht nur ein typisches Problem aus dem Geometrieunterricht der Mittelstufe, sowohl im deutschsprachigen als auch im angelsächsischen Raum, sondern auch historisch bedeutsam.

Bereits Euklid entwirft im ersten Buch der Elemente ein „Haus der Vierecke“, dieses unterscheidet sich hauptsächlich darin von heutigen Varianten, dass es nicht zu einer Hierarchisierung der Vierecke führt, sondern zu einer Trennung. Dieses Vorgehen wird auch als *exklusiver Aufbau* bezeichnet. Ein Quadrat ist für die alten Griechen kein Rechteck.

Der moderne Ansatz ist der *inklusive Aufbau*, hierbei werden Klassen von Vierecken mittels Eigenschaften definiert. Man erhält eine Ordnung der Vierecke anhand ihrer definierenden Eigenschaften. Ein Problem dieser Inklusionsordnung ist, dass das System als solches nie vollständig sein kann und sich immer weitere Klassen von Vierecken einbauen lassen. Will man keine willkürliche Zusammenstellung im Haus der Vierecke erhalten, muss bei dessen Erstellung eine innere Struktur vorgegeben werden.

Volkert (1999) arbeitet in seinem Artikel heraus, dass eine solche Struktur aus einem System von Merkmalen entstehen kann. Man betrachtet eine Menge von Merkmalen und diejenigen Vierecke, die sich durch diese Merkmale klassifizieren lassen. Auch ohne eine Behandlung dieses theoretischen Rahmens wird in vielen Artikeln zur Ordnung der Vierecke ein merkmalsorientiertes System verwendet, vgl. Bauersfeld (1961), Graumann (2005), Haug und Haug (2015) und Vogelsberger (1993). Zusätzlich ist anzumerken, dass in Volkerts (1999) Zugang die Merkmale zunächst die Ordnung vorgeben und diese dann zu den Definitionen führt, wobei beim üblichen Vorgehen zunächst die Definition erfolgt, welche dann die Ordnung impliziert.

Es schließen sich zwei Fragen an. Erstens, welche Merkmale sollen ausgewählt werden? Hierzu arbeitet Volkert (1999) einen Kriterienkatalog aus, dem die ausgewählten Merkmale genügen sollten. Zweitens, wie aus den vorgegebenen Merkmalen ein Haus der Vierecke entsteht. Zur Beantwortung der zweiten Frage wollen wir das Konzept des Ordnungsgraphs einführen.

Merkmalsorientierte Ordnungsgraphen

Ein typisches Merkmalssystem bilden die Symmetrien, dieses System wollen wir im Folgenden betrachten. Das übliche Haus der Vierecke, das sich aus diesem System ergibt, ist in folgender Abbildung dargestellt.

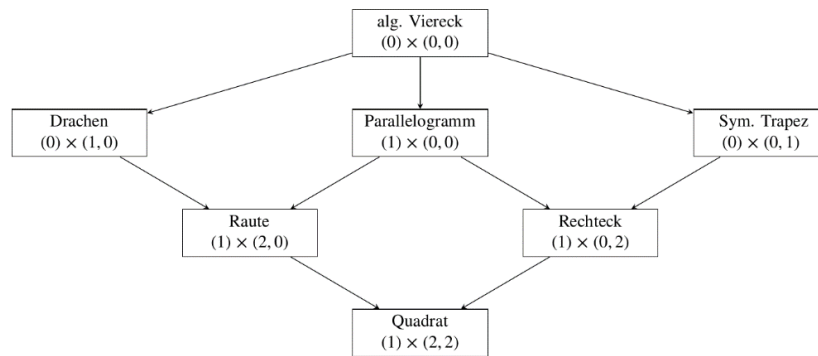


Abb. 1.: Haus der Vierecke bzgl. des Merkmalssystems der Symmetrien.

Wir kodieren das Merkmalssystem der Symmetrien mittels $\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$, wobei die erste Komponente das Vorhandensein mindestens einer Punktsymmetrie kodiert, die zweite die mindeste Anzahl an Symmetrieachsen durch die Ecken und die dritte die mindeste Anzahl an Symmetrieachsen durch die Seitenmitten. Wir fassen die beiden letzten Komponenten zu einem Tupel zusammen, welches die Achsensymmetrien kodiert.

Nach Volkert (1999) ergibt sich das zugehörige Haus, indem alle möglichen Kombinationen betrachtet werden und diese mittels „Flurbereinigung“ reduziert werden. Bei diesem Vorgehen werden alle logisch möglichen Kombinationen der Merkmale betrachtet und diejenigen, die nicht existieren, gestrichen. Im Gegensatz dazu starten wir mit dem allgemeinen Viereck als Ausgangsknoten. Dem allgemeinen Viereck sind keinerlei Merkmale aufgeprägt, weshalb es in jedem Ordnungsgraphen vorkommt. Zum allgemeinen Viereck können wir ein weiteres Merkmal – aus dem Merkmalssystem – fordern. Dies erzeugt einen neuen Knoten im Graphen und einen Pfeil, der dem geforderten Merkmal zugesprochen wird. Die Idee des Forderns von neuen Eigenschaften findet sich schon in Ehringhaus (1964) Artikel, er gestaltet dies jedoch nicht so konsequent und schematisch aus und verwendet auch keine mehrfachen Pfeile.

Wir können ausgehend vom allg. Viereck drei Kanten einzeichnen, siehe Abb. 2, zur besseren Unterscheidung werden diese unterschiedlich dargestellt. Die durchgezogene Linie repräsentiert das Merkmal einer Achsensymmetrie durch Ecken, die gestrichelte eine Achsensymmetrie durch Seitenmitten und die gepunktete eine Punktsymmetrie. In der ersten Ebene passiert somit das Gleiche wie in Abb. 1. Betrachten wir den Knoten des Drachen, können wir für diesen drei verschiedene weitere Merkmale fordern. Eine zusätzliche Punktsymmetrie macht aus dem Drachen eine Raute, eine weitere Achsensymmetrie durch Ecken macht aus dem Drachen auch eine Raute. Fordern wir eine Achsensymmetrie durch Seitenmitten, so „überspringen“ wir die Raute und erhalten direkt ein Quadrat. Jede Forderung erhöht eine der Komponenten um mindestens 1, womit sich auf natürliche Weise

Ebenen im Ordnungsgraphen ergeben. Diese Knoten werden im Graphen ergänzt und für jede mögliche Forderung eine Kante gezeichnet und diese analog zu Ebene eins markiert. Genauso verfahren wir mit den anderen Knoten und es ergibt sich die folgende Abbildung. In der Abbildung erkennt man eine Symmetrie, die die beiden Achsensymmetrien vertauscht, diese sind in einem gewissen Sinne dual zueinander, dies bekräftigt auch die Zusammenfassung der Merkmale in ein Tupel.

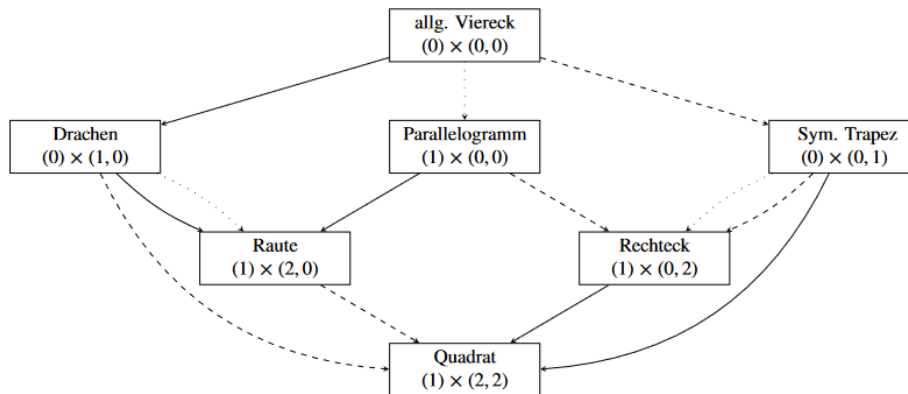


Abb. 2.: Ordnungsgraph des Merkmalsystems der Symmetrien.

Vergleich der Ansätze

Der Vorteil am schrittweisen Erzeugen mittels des Ordnungsgraphs liegt in der Übersichtlichkeit in jedem Schritt. Die Schüler:innen werden bei diesem Vorgehen nie mit dem kompletten formalen System konfrontiert, welches zur Unübersichtlichkeit neigt, betrachte hierzu beispielsweise das Diagramm in Josefson (2016, S. 81) oder die mengentheoretische Darstellung bei Majewski (1965). Es ist jedoch zu bedenken, dass auch hier durch eine zu große oder unpassende Auswahl an Merkmalen eine Überforderung auftreten kann. Insbesondere, da es für die einzelnen Merkmale an jedem Knoten eine Kante gibt, erreicht der Graph schnell eine gewisse Unübersichtlichkeit. Kompensiert wird das in gewissem Maße jedoch durch den schrittweisen Aufbau.

Weiterhin verdeutlicht das Vorgehen die inklusive Definition der Vierecke, da man zum Erzeugen immer eine weitere Eigenschaft zusätzlich fordert. Beispielsweise sieht man, dass eine Raute ein Drachen mit einer weiteren Achsensymmetrie ist, oder auch, dass eine Raute ein Drachen mit einer Punktsymmetrie ist. Dies ist eine Weiterführung des Gedankens „Jede Raute ist ein Drachen“, welcher für Schüler:innen bei ihrer ersten Begegnung mit lokalen Ordnungen zu Problemen führen kann, vergleiche de Villiers (1994). Die Unterscheidung der verschiedenen Merkmale führt zu verschiedenen Kanten im Diagramm, was einen wesentlichen Unterschied ausmacht.

Noch entscheidender ist das Vorhandensein von Kanten über eine Ebene hinweg, wie die gestrichelte Kante vom Drachen zum Quadrat. Die Bedeutung

dieser Kante ist, dass gewisse Merkmale als Folgerung so viele weitere Merkmale implizieren, dass man eine Ebene überspringt. Schüler:innen erkennen also, dass nicht alle Merkmale unabhängig sind. Die Untersuchung der Abhängigkeiten der Merkmale bietet ein weiteres Feld zur Erkundung.

Ein weiterer Vorteil des Ordnungsgraphen ist, dass sich an ihm direkt ökonomische inklusive Definitionen als Pfade vom allg. Viereck aus ablesen lassen. Zum Beispiel ergeben sich aus dem Pfad über das Parallelogramm zur Raute folgende Charakterisierungen, indem man die Pfeile beachtet:

- Eine Raute ist ein Parallelogramm mit einer Symmetrieachse durch die Ecken.
- Eine Raute ist ein Viereck mit einer Punktsymmetrie und einer Symmetrieachse durch die Ecken.

Auf diese Weise lassen sich weitere gleichberechtigte Charakterisierungen der einzelnen Vierecksarten ablesen. Die verschiedenen Pfade bieten Schüler:innen somit einerseits ein Erkundungsfeld für Definitionen und betonen andererseits die Ordnung der Vierecke, da die Pfade hin zu einer Klasse von Vierecken durch eine Auswahl dessen übergeordneter Klassen laufen.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1961). Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren. *MNU*, 14, 274–278.
- Ehringhaus, P. (1964). Alle Neun!... Vierecke. *Prax. Math.*, 6, 148–149.
- Graumann, G. (2005). Investigating and ordering Quadrilaterals and their analogies in space—problem fields with various aspects. *ZDM*, 37, 190–198.
- Haug, J. T. & Haug C. (2015). Von der Klassifikation der Vierecke zum System der Vierecke. *Teaching of Mathematics*, 18(1).
- Josefsson, M. (2016). On the classification of convex quadrilaterals. *The Mathematical Gazette*, 100(547), 68–85.
- Kaiser, P. (2023). Ein neuer Blickwinkel auf die merkmalsorientierte Ordnung von Vierecken [Manuskript eingereicht zur Publikation].
- Von Majewski, H. (1965). Eine Einteilung der Vierecke. *Prax. Math.*, 7, 242–244.
- Neubrand, M. (1981). Das Haus der Vierecke—Aspekte beim Finden mathematischer Begriffe. *JMD*, 2, 37–50.
- Thiesemann, F. (1964). Zur Systematik der Vierecke. *Prax. Math.*, 6, 285–288.
- De Villiers, M. (1994) The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18.
- Vogelsberger, K. (1993) „Drachelo-“ und „Trapelogramme“ – Die abbildungsgeometrische Erschließung im Haus der Vierecke. *Mathematiklehren*, 60, 68–75.
- Volkert, K. (1999). Das Haus der Vierecke – aber welches?. *Mathematikunterricht*, 45(5), 17–37.