

BASTKOWSKI-KLÖPPER, Florian
Essen

Algorithmisches Denken unter dem Einfluss verschiedener Repräsentationsebenen am Beispiel einer Lernumgebung zum Euklidischen Algorithmus

Die Relevanz, Inhalte des Mathematikunterrichts auf unterschiedliche Art und Weise darzustellen, ist unumstritten. In diesem Beitrag wird am Beispiel des Euklidischen Algorithmus vorgestellt, welche Bedeutung die zugrundeliegende Repräsentationsebene auf das algorithmische Denken von Lernenden hat. Dazu werden theoretische Grundlagen beleuchtet, die entwickelte Lernumgebung skizziert, eine Forschungsfrage formuliert und ausgewählte Ergebnisse der qualitativen Analyse aus der Pilotierung diskutiert.

Theoretische Grundlagen

Algorithmisches Denken wird in der Fachdidaktik nicht einheitlich definiert. Ein Ansatz beschreibt es als eine „Denkweise, die typisch für den Umgang mit Algorithmen ist“ (Kortenkamp & Lambert, 2015, S. 5). Umfassender und mit konkreten unterrichtlichen Szenarien definiert Weber (2024, S. 16) algorithmisches Denken als „kognitive Prozesse, die involviert sind beim Ausführen und Entwickeln sowie beim Analysieren und Vergleichen von Algorithmen“. Konkret schlägt Weber (2024) vor, den Euklidischen Algorithmus auf unterschiedliche Art und Weise darzustellen, z. B. sprachlich, symbolisch oder diagrammatisch, und diese Darstellungen miteinander zu vergleichen. Eine multirepräsentative Auseinandersetzung am Beispiel enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungen im Rahmen eines algorithmisch geprägten Lerngegenstands liefert nach Lambert (2015) für Schülerinnen und Schüler tätigkeitsorientierte Lernanlässe. In diesem Zusammenhang spricht Duval (2006, S. 128) von Registern: „Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of curriculum. It depends on coordination of several representation registers and it is only in mathematics that such a register coordination is strongly needed.“ Er betont, dass durch Darstellungswechsel unterschiedliche Eigenschaften des zu Beschreibenden explizit werden (Duval, 2006). Lernende sollten folglich in der Lage sein, adäquate Repräsentationen zu wählen.

Um algorithmisches Denken vor dem Hintergrund unterschiedlicher Repräsentationsebenen zu beschreiben, wurde die in Abb. 1 dargestellte und aus der Theorie hergeleitete Konzeptualisierung entwickelt. Da der Euklidische Algorithmus nicht ausschließlich in Unplugged-Darstellungen abgebildet werden kann, sondern auch im Blockcode, wurden zusätzlich zum algorithmischen Denken sowohl Definitionsansätze zum informatischen Denken im

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Mathematikunterricht (Oldenburg, 2022) als auch zum Computational Thinking (Wing, 2006) berücksichtigt. Bestehende Frameworks wurden herangezogen und adaptiert (u. a. Brennan & Resnick, 2012; Angeli et al., 2016). Die *Perspektiven* aus Abb. 1 beschreiben unmittelbar auf den Algorithmus bezogene Tätigkeiten der Lernenden, z. B. ob dieser konkret oder allgemein ausgeführt werden kann. *Konzepte* sind definierte Bausteine zum Ausführen und Beschreiben von Algorithmen, z. B. ob Wiederholungsschleifen genutzt werden. *Strategien* beschreiben den Umgang der Lernenden mit der Lernumgebung, z. B. inwiefern Scaffolding-Elemente (u. a. Bezug zu alternativen Darstellungen oder Gebrauch von Metaphern) verwendet werden.

	KATEGORIE	BESCHREIBUNG	ANKERBEISPIEL
Perspektiven	Entwurf	(Weiter-)Entwicklung des konkreten Algorithmus	Hinzufügen einer Zählvariable zur Ausgabe der Schrittzahl
	Ausführung	Konkrete bzw. allgemeine Ausführung des Algorithmus	„Jetzt haben wir 44 minus 12. Dann ist 32 minus 12 gleich 20. Dann ...“
	Ausdruck	Konkrete bzw. allgemeine Beschreibung des Algorithmus	„Hier ist 6 größer als 2. Deshalb rechnen wir 6 minus 2.“
	Transfer	Bearbeitung von auf den Algorithmus aufbauender Frage- und Problemstellungen	„Die Schrittzahl lässt sich an zwei Stellen im Programm berechnen.“
Konzepte	Variable	Nutzung von Variablen zum Beschreiben bzw. Ausführen von Algorithmen	„Bei a ändert sich nichts, b wird aber kleiner.“
	Sequenz	Beschreiben bzw. Ausführen von Algorithmen durch eine lineare Folge von Anweisungen	„Dann werden die Zahlen subtrahiert, dann verglichen und dann stopp.“
	Schleife	Nutzung von Wiederholungen zum Beschreiben bzw. Ausführen von Algorithmen	„Hier kommt wiederhole fortlaufend oder wiederhole bis.“
	Bedingung	Beschreiben bzw. Ausführen von Algorithmen durch bedingte Anweisungen	„Weil 24 größer als 16 ist, wird 24 minus 16 gerechnet.“
	Operation	Rechenoperationen beim Beschreiben bzw. Ausführen von Algorithmen nutzen	„12 minus 8 gleich 4.“
Strategien	Material	Nutzung des bereitgestellten Materials	Nutzung des Parson-Puzzles zur Entwicklung des Programmablaufplans
	Kooperation	Interaktion und Austausch untereinander	A: „Minuend minus Subtrahend ist?“ B: „Na Differenz.“
	Scaffolding	Nutzung von Scaffolding-Elementen	„Die Wiederholungsschleife ist so etwas wie ein Kreislauf.“

Abb. 1: Komponenten algorithmischen Denkens in der Projektaufassung

Lernumgebung zum Euklidischen Algorithmus

Abb. 2 stellt einen zeitlichen Verlauf einer entwickelten Lernumgebung zum Euklidischen Algorithmus dar. Der Kern zur Auseinandersetzung fußt hierbei auf Basis der oben angegebenen Definition algorithmischen Denkens von Weber (2024). „Thinking about algorithms“ (Maurer, 1998, S. 24) steht im Fokus und weniger ein prozessorientierter Entwurf, wie ihn z. B. Platz (2022) beschreibt. Je nach Phase der Lernumgebung stehen unterschiedliche

Darstellungen im Vordergrund. In (A) und (B) sind mit Würfelketten bzw. Quadratstreifen enaktive Tätigkeiten im Fokus, in (C) eine von den Lernenden entwickelte ikonische Repräsentation und in (D) eine tabellarische Visualisierung. Eine diagrammatische Darstellung in Form eines Programmablaufplans ist in (E) zu finden, auf die eine in (F) dargestellte Implementation via Blockprogrammierungsumgebung aufbaut.

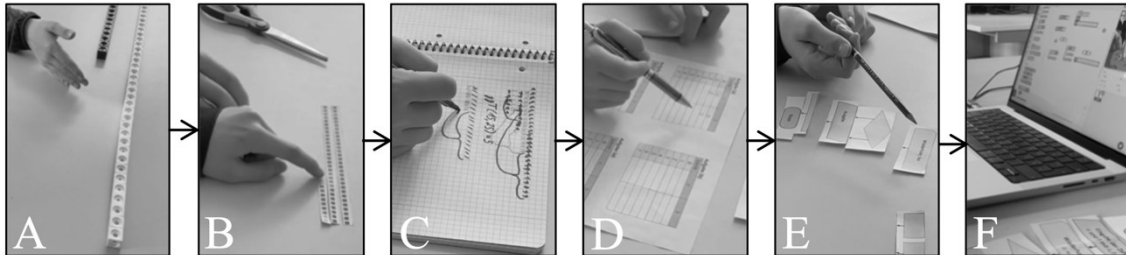


Abb. 2: Kernelemente der entwickelten Lernumgebung zum Euklidischen Algorithmus

Forschungsfrage und Untersuchungsdesign

Eine Forschungsfrage des Projekts ist, wie sich das algorithmische Denken der Kinder im Laufe der Lernumgebung zum Euklidischen Algorithmus entwickelt. Die Pilotierung wurde mit zwei Sechstklässlern aus Essen durchgeführt, die durch das Pflichtfach Informatik in der Erprobungsstufe bereits Vorerfahrung im Programmieren hatten. Deren Bearbeitung der Lernumgebung wurde videografiert und transkribiert. Eine qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) fand mithilfe des Kategoriensystems (Abb. 1) statt.

Ausgewählte Ergebnisse der Pilotstudie und Ausblick

Die beiden Lernenden konnten den Euklidischen Algorithmus in allen zugrundeliegenden Repräsentationsebenen (Abb. 2) ausführen bzw. beschreiben. Je nach Phase (A) bis (F) wurden unterschiedliche Komponenten algorithmischen Denkens schwerpunktmäßig beobachtet. Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse aus je einer Kategorie (Abb. 1) skizziert:

Perspektiven: Obwohl eine Optimierung und Erweiterung des Algorithmus vorrangig in der Blockprogrammierung zu beobachten war, fand bereits in der enaktiven Auseinandersetzung eine Verbesserung statt, indem sich der Vergleich der Quadratstreifen im Prozess vom Zählen hin zum geometrischen Vergleichen ändert, was zu einer Zeitersparnis führte.

Konzepte: Alle Konzepte sind bereits in der tabellarischen Darstellung (D) beobachtbar. Hierzu wurde die verwendete Sprache und Gestik der Jugendlichen rekonstruiert und den in Abb. 1 angegebenen Konzepten zugeordnet. Dass eine *Schleife* notwendig zu sein scheint, wird durch die Schlagworte „wieder“, „nochmal“ und „erneut“, der Metapher „Kreislauf“ oder kreisende Handbewegungen deutlich. Auch für die anderen Konzepte konnten genutzte

Sprachmittel rekonstruiert werden. Das Konzept der *Variable* findet in der Phase (D) erstmals intuitiv Anwendung. In (E) sprechen die Lernenden beim Überschreiben der Variablen vom „alten a“ und „neuen a“, wohingegen in der Programmierumgebung durch die Vorgabe „setze a auf...“ weniger Schwierigkeiten im Ausdruck und der präzisen Beschreibung entstehen.

Strategien: Beobachtete Scaffolding-Maßnahmen sind z.B. konkrete Rückbezüge auf vorangegangene Repräsentationsebenen der Lernumgebung. So sprechen die Lernenden in der ikonischen Ebene sowohl explizit als auch auf Metaebene von „Abschneiden“ statt „Übertragen“. Auch beim Implementieren des Algorithmus (F) ist z. B. der zugrundeliegende Programmablaufplan (E) ein hilfreiches Unterstützungselement.

In der für 2025 geplanten Hauptstudie sollen weitere Erkenntnisse zur Forschungsfrage gewonnen werden. Außerdem soll untersucht werden, auf welche Repräsentationsebenen Lernende bei der Beantwortung vertiefender Fragestellungen zum Euklidischen Algorithmus zurückgreifen.

Literatur

- Angeli, C., Voogt, J., Fluck, A., Webb, M., Cox, M., Malyn-Smith, J. & Zagami, J. (2016). A k-6 computational thinking curriculum framework: Implications for teacher knowledge. *Educational Technology & Society*, 19(3), 47-57.
- Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association, Vol. 1*, Vancouver.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Kortenkamp, U. & Lambert, A. (2015). Wenn ..., dann ... bis ...: Algorithmisches Denken (nicht nur) im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 188, 2-9.
- Lambert, A. (2015). Algorithmen. enaktiv-ikonisch-symbolisch. *mathematik lehren*, 188, 16-18.
- Maurer, S. B. (1998). What is an algorithm? What is an answer? In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Hrsg.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (S. 21-31). National Council of Teachers of Mathematics.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim/Basel: Beltz.
- Oldenburg, R. (2022). Informatisches Denken im Mathematikunterricht. In: Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., Walter, D. (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- Platz, M. (2022). ggT: mit Euklid - oder ohne. Traditionelle Themen im Längsschnitt. *Der Mathematikunterricht*, 1/2022, 4-15.
- Weber, C. (2024, 04.-08. März). *Algorithmen im Mathematikunterricht: Versuch, algorithmisches Denken aufzuwerten*. [Konferenzbeitrag]. Jahrestagung GDM, Essen.
- Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM* 49(3).