Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG, Frankfurt

Wege zu theoretisch fundierten Testaufgaben zur Modellierungskompetenz

Angestoßen durch internationale Vergleichsstudien wie PISA (Programme for International Student Assessment) oder TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) hat sich die Kompetenzmessung als Evaluationsinstrument der Entwicklung von Fähigkeiten der Schüler und Schülerinnen in verschiedensten Anforderungsbereichen im deutschen Bildungssystem etabliert (Klieme, Leutner, & Kenk, 2010). Allerdings stellt die theoretische, als auch die methodische Erfassung gerade des mathematischen Modellierens, das aus mehreren Teilkompetenzen besteht, immer noch eine große Herausforderung dar. Auch im Bereich der mathematikdidaktischen Forschung wurden und werden die Begriffe „mathematisches Modellieren“ und „Modellierungskompetenz“ häufig und kontrovers diskutiert. Unter anderem stand dabei die Frage wie man Modellierungskompetenz messen kann und, als eine Folge daraus, wie man sie verbessern kann, oft im Fokus des Interesses (z.B. Blomhøj & Jensen, 2003; Kaiser, Blum, Borromeo Ferri, & Stillman, 2011). In verschiedensten Studien wurden die Auswirkungen der jeweils entwickelten Lernumgebungen auf das mathematische Modellieren zumeist durch Multiple-Choice Fragen getestet, die allzu oft nur bestimmte Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens abdecken (z.B. Zöttl, Ufer, & Reiss, 2011). In Folge dessen, ist das Instrument zur Evaluation der Modellierungskompetenz stark auf die vom Treatment geförderten Teilkompetenzen reduziert, was eine globale und unabhängige Anwendung des jeweiligen Tests unmöglich macht.

1. Projektdesign

Das Ziel des Projekts MokiMaS (Modellierungskompetenz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe) ist die Entwicklung eines Modellierungskompetenztests für Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe. Als Theoriebasis soll dabei ein Kompetenzmodell fungieren, das der holistischen Struktur des mathematischen Modellierens Rechnung trägt. Dazu werden Modellierungsaufgaben nach folgenden Kriterien entwickelt:

- Authentischer Kontext (Maaß, 2007)
- Realistische Zahlenwerte (Müller, Leiß, Schukajlow, Blum, & Messner, 2007)
- Problemlösecharakter (Maaß, 2007)
- Lebensnahes Frageformat

– Offenheit im Sinne einer Anwendbarkeit verschiedener mathematischer Modelle → großer Lösungsraum

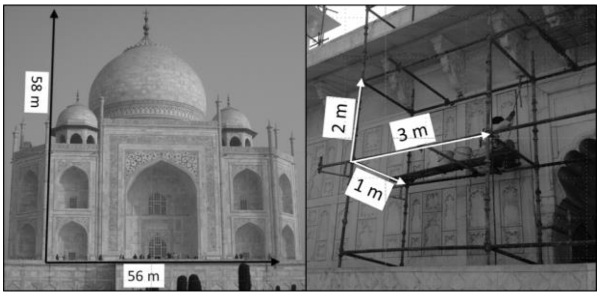
Neben der Vorgabe authentische Kontexte zu verwenden, soll auch die Fragestellung nah an der Lebenswirklichkeit der Schüler sein oder zumindest eine realistische Frage aufgreifen, wie sie so auch in der Realität auftreten könnte. Die Offenheit der Modellierungsaufgaben soll weniger in fehlenden Daten, also im Abschätzen von Größen, begründet sein, als vielmehr in der Auswahlmöglichkeit verschiedener mathematischer Modelle. Damit sollen die Schülerinnen und Schüler breite Möglichkeiten haben die Aufgabe zu lösen. Das trägt einerseits dem eigentlichen Sinn von Modellierungsaufgaben Rechnung, als auch der Tatsache einer eindeutigeren Bewertungsmöglichkeit im Sinne eines kleineren Ergebnisintervalls. Schlussendlich sollen so drei bis vier Booklets mit je drei Modellierungsaufgaben entwickelt werden, mit denen es dann möglich ist die mathematische Modellierungsfähigkeit zu evaluieren.

2. Ergebnisse einer ersten Pilotierung

Die ersten drei Modellierungsaufgaben (siehe Fig. 1) wurden mit 54 Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Jahrgangsstufe 9 getestet.

Das Zähneputzen lernt man schon im Kleinkindalter und gehört zu den alltäglichen Dingen eines Jeden. Doch für wie viele Tage reicht die Zahnpasta in einer Tube eigentlich?
Stelle eine allgemeine Formel auf, mit der sich berechnen lässt, für wie viele Tage eine Zahnpastatube reicht!

Im Stadtgebiet soll ein neues Stadion (ein reines Fußballstadion) gebaut werden, was ca. 75.000 sitzende Zuschauer aufnehmen kann. Bei der Planung muss eine Sitzfläche mit einer Breite und Länge von 60cm berücksichtigt werden. In einem weiteren Schritt muss jetzt geklärt werden, wie groß das Stadion sein muss um die geforderte Zuschauerkapazität aufnehmen zu können, unter der Berücksichtigung, dass das Spielfeld eine Länge von 105m und eine Breite von 68m hat. Wie sieht dein Stadion aus und welche Außenmaße muss das Stadion haben?



Das Mausoleum des Taj Mahal wurde von einem Großmogul zum Gedenken an seine Ehefrau in Indien erbaut. Es besitzt im Wesentlichen ein quaderförmiges Hauptgebäude mit abgeschrägten Ecken und eine Kuppel. Seine weiße Marmorfassade verfärbt sich durch Luftverschmutzung mit der Zeit gelb weshalb die Außenfassade in regelmäßigen Abständen aufwendig per Hand gereinigt wird. Dazu werden in Indien traditionell Baugerüste aus Bambusrohr verwendet. In einem ersten Schritt soll zunächst nur das Hauptgebäude gereinigt werden. Doch wie viel Meter Bambusrohr ist nötig um das Hauptgebäude komplett mit einem Gerüst zu umgeben?
Versuche deine Lösung und Ideen möglichst verständlich zu erklären!

Fig. 1: Aufgabe „Zahnpasta“, Aufgabe „Stadion“, Aufgabe „Taj Mahal“

Bei diesem ersten Vortest ging es nicht um die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler und folglich deren Abschneiden beim Test, sondern um die Eignung der Aufgaben im Sinne einer adäquaten Lösbarkeit bzw. Bearbeitungszeit und der tatsächlichen Größe des Lösungsraums, also der Vielfältigkeit der mathematischen Modelle. Im Einzelnen wurden mit dieser Pilotierung folgende Fragestellungen verfolgt:

- Wie ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben einzuschätzen?
- Ist die Bearbeitungszeit angemessen?
- Wie ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben untereinander?

Um den Schwierigkeitsgrad jeder Aufgabe einschätzen zu können wurden die einzelnen Simplex- bzw. Komplexstrukturen (Breidenbach, 1969) der prominentesten Lösungsansätze je Aufgabe ausgewertet (Fig. 2). Dabei fällt auf, dass bei der Zahnpasta- als auch bei der Taj Mahal-Aufgabe jeweils zwei Lösungsansätze vorherrschend sind. Untersucht man diese Lösungsansätze, lassen sich die einzelnen kognitiven Schritte offen legen und die einzelnen Simplexstrukturen können in einer Art Rechenbaum verdeutlicht werden, der exemplarisch für den jeweiligen Lösungsansatz steht. So konnte gezeigt werden, dass Tiefe und Breite der verschiedenen Lösungsansätze je Aufgabe (Zahnpasta und Taj Mahal) gleich sind, was zu dem Schluss führt, dass der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben unabhängig vom gewählten Lösungsansatz als gleich anzusehen ist. Ein Unterscheid, der sich in einer zusätzlichen Simplexstruktur bei einem Lösungsansatz der Taj Mahal-Aufgabe zeigte, ist bezogen auf die Schwierigkeit als gering einzuschätzen, da es sich dabei um eine Tiefenstruktur handelt. In Anlehnung an die Cognitive Load Theory (Sweller, 2003) ist nämlich anzunehmen, dass der ausschlaggebender Faktor die Breite des Lösungsansatzes ist, die Aussagen darüber liefert wie viele kognitive Schritte gleichzeitig ausgeführt werden müssen.

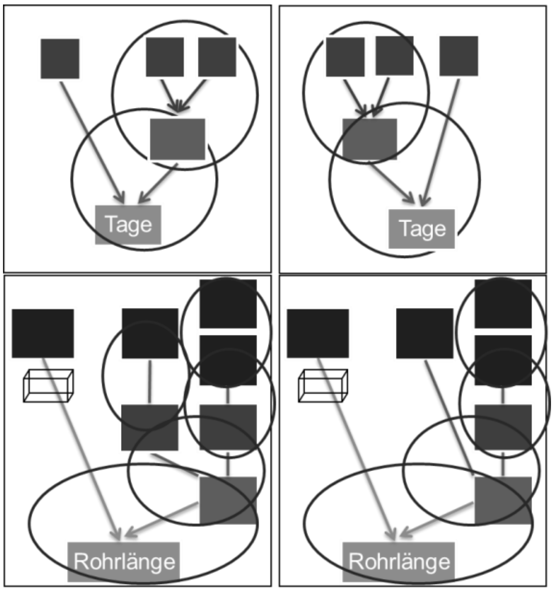


Fig. 2 Simplex- bzw. Komplexstrukturen von Zahnpasta- und Taj Mahal-Aufgabe

Obwohl die Stadionaufgabe in einer Expertenvoreinschätzung als vergleichbar schwierig eingeschätzt wurde, war die Lösungshäufigkeit sehr gering. Dies ist womöglich durch eine gesteigerte Komplexität aufgrund vieler möglicher Nebenbedingungen erklärbar. Dadurch, dass Schülerinnen und Schüler eine bildliche Vorstellung von Fußballstadien haben, sind sie sich auch deren durchaus komplexen Struktur bewusst (Form des Stadions als Oval, Notausgänge, usw.). Zwar sind die Lösungsansätze an sich, bezogen auf die Anzahl verwendeter Simplexstrukturen, vergleichbar mit den anderen zwei Aufgaben, allerdings scheint die bloße Möglichkeit der Berücksichtigung fast beliebig vieler Nebenbedingungen zu einer Blockade, im Sinne einer unüberbrückbaren Verkomplizierung des Sachverhalts zu führen. Vermutlich fehlt auch die nötige Erfahrung im Umgang mit Approximationen, was zur Folge hat, dass die Aufgabe als unlösbar erscheint.

Neben der Entwicklung und Pilotierung weiterer Modellierungsaufgaben, wird nun ein fundiertes Kompetenzmodell erstellt, um darauf aufbauend einen Bewertungskatalog formulieren zu können und die Modellierungsaufgaben entsprechend anzupassen. Somit soll schließlich ein valides Instrument entstehen um mathematisches Modellieren mit einem holistischen Ansatz erfassen zu können.

Literatur

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications Vol. 22(3)*, S. 123-138.

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen.* Hannover: Schroedel.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14.* New York: Springer.

Klieme, E., Leutner, D., & Kenk, M. (2010). Kompetenzmodellierung - Eine aktuelle Zwischenbilanz des DFG Schwerpunktprogramms. *Zeitschrift für Pädagogik 56*, 9-11.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Müller, M., Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., & Messner, R. (2007). Auswendiggelernt - Abgehackt - Abgefragt? In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 723-726). Hildesheim: Franzbecker.

Sweller, J. (2003). Evolution of human cognitive architecture. *The Psychology of Learning and Motivation 43*, 215-266.

Zöttl, L., Ufer, S., & Reiss, K. (2011). Assessing Modelling Competencies Using a Multidimensional IRT Approach. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA 14* (S. 427-437). Heidelberg: Springer.