BRADTKE, Niclas D.

Mathematische Templates - Eine Verknüpfung von inhaltsbezogenen Wissensarten

In der Fehleranalyse wird häufig nur dual zwischen konzeptionellen und prozessualen Fehlern unterschieden, woraus ungenaue Diagnosen und Förderempfehlungen resultieren können (z.B. Lestiana, 2021). So gibt es Studien, die zeigen, dass Schüler:innenfehler auch im situativen Wissen verortet werden können. Aus einer anderen Diagnose der Fehlerquelle ergeben sich dadurch substanziell verschiedene Förderempfehlungen. Dieser Artikel vernetzt die Wissensarten konzeptionelles, prozessuales und situatives Wissen (in Anlehnung an Jong & Ferguson-Hessler, 1996) mittels mathematischer Templates aus der Expert:innenforschung und liefert somit einen neuen Rahmen für die Diagnose von Schüler:innenfehlern. Insbesondere zwei jüngere Studien zeigen auf, welche Auswirkungen ein unzureichendes situatives Wissen auf das Lösungsverhalten hat. In der ersten Studie von Götz et al. (2020) sollten 212 Schüler:innen einer 3. Jahrgangsstufe bei verschiedenen Figuren Symmetrieachsen einzeichnen. Das Erkennen der Achsensymmetrie war abhängig von der Ausrichtung der Achse und Form der Figur. Ergänzend zeigte eine zweite Studie zur Prozentrechnung, dass angehende Wirtschaftspädagog:innen den verminderten Grundwert $G^{-} = \frac{pw}{(1-p)}$ abhängig von der Situationsbeschreibung der Textaufgabe lösen konnten (bei vergleichbarer sprachlicher Komplexität). So konnte über ein Viertel der Teilnehmer:innen nur eine der beiden Aufgaben lösen (Bradtke & Borromeo Ferri, im Druck). Das zur Lösung der Aufgaben notwendige konzeptionelle und prozessuale Wissen zur Achsensymmetrie oder zum verminderten Grundwert muss bei diesen Untersuchungen bei Teilnehmer:innen vorhanden gewesen sein. Jedoch war der Abruf abhängig von der Darstellung dieses Wissens. Folglich können hohe Leistungen in einem Inhaltsgebiet nur dann erreicht werden, wenn ein situatives Wissen darüber besteht, wann ein Konzept angewandt werden kann. Dazu genügt konzeptionelles Wissen nicht, welches seine Eigenschaften beschreibt. Situatives Wissen ist nicht nur für Schüler:innen, sondern auch insbesondere für ein professionelles Handeln von Lehrkräften relevant. Schon Ball et al. hob die Bedeutung des situativen Wissens für das eigene Inhaltswissen hervor. So operationalisierten sie ihr Konzept des specializied content knowledge (SCK) für Lehrkräfte auf eine Weise, welche diese Wissensfacette sogar fokussierte (2008, S. 213). Darin wurde die Fertigkeit abfragten, indem ein und derselben Term in unterschiedlichen Situationsbeschreibungen wiederzuerkennen war. Neuweg beschreibt diese Fertigkeit als die "Urteilskraft" oder auch "Könnerschaft“ (2019). So ist es eine eigene Qualität, den Fall x als X erkennen zu

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

können. Einer der bedeutendsten Vorteile von Expert:innen ist deren Wahrnehmung – die Fähigkeit, die relevanten Merkmale einer Situation schnell zu erfassen und mit Lösungsansätzen zu verbinden (Dreyfus, 1992; Gobet, 2016). Das situative Wissen als Grundlage für eine zielführende Wahrnehmung gewinnt zunehmend auch in Kompetenzmodellen der Lehrer:inenbildung an Bedeutung (Blömeke et al., 2015). Einen theoretischen Rahmen zur Verknüpfung der verschiedenen Wissensarten eines Inhalts ermöglicht ein Konzept der Expert:innenforschung. Expert:innen zeichnen sich dabei durch überlegene Leistungen in einem speziellen Bereich wie z.B. der Prozentrechnung aus (Johnson, 1988). Als Lehrmeinung der Expert:innenforschung kann die Template-Theorie angesehen werden (Gobet & Simon, 1996), welche nach Jahrzehnten kritischen Diskurses aus der Chunking-Theorie erwachsen ist (Chase & Simon, 1973). Die Template-Theorie wurde in der Computersimulation CHREST (Chunk Hierarchy and REtrieval STructures) umgesetzt, womit bereits empirische Belege für diese Theorie gesammelt wurden. Mit CHREST ist es möglich, regelbasiert die Wahrnehmungs- und Lernprozesse von Schachspieler:innen aller Niveaustufungen in ihren wesentlichen Merkmalen zu erklären. Dabei wurde CHREST bereits auf andere Bereiche erfolgreich ausgeweitet (Gobet & Simon, 2000). Der enge Zusammenhang zwischen dem Grad mathematischer Expertise und der Wahrnehmungsleistung wurde im Einklang mit der Template-Theorie bereits empirisch belegt (Meier et al., 2023). Reduziert können Templates als eine Synthese von Chunks beschrieben werden, welche wiederum rekurrieren aus der Auseinandersetzung mit Handlungssituationen, ohne jedoch ihre antizipatorische Struktur gänzlich aufzugeben. Damit ähneln Templates den Schemata (Bartlett, 1932). Chunks sind Muster, welche Bedingungen oder auch Merkmale beschreiben, die nötig sind zu deren Aktivierung. Werden die Merkmale in der Umwelt wiedererkannt, lösen sie ein gewisses (Handlungs-)Wissen aus. Ändern sich die Merkmale in der Umwelt, wird ein neuer Chunk kreiert. Überschneiden sich Chunks in mehreren Merkmalen, werden sie unter Templates subsumiert. In der Folge, transformieren sich Merkmale von Chunks in Templates zu Variablen und bilden Hierarchien. Jedoch wird die Anzahl der Variablen auf ein Minimum reduziert, da jede Belegung von Variablen mit Zeit verbunden ist und Expertise sich durch eine schnellstmögliche Reaktion auszeichnet (Gobet, 2016). Expert:innen weisen sich daher darüber aus, dass sie große und auch viele Chunks und Templates besitzen. Es wird folgendes Beispiel diskutiert, um eine mögliche Verknüpfung zwischen der Template-Theorie und den benannten Wissensarten zu verdeutlichen:

Eine Bohrmaschine sank im Preis um 25 %. Jetzt kostet sie noch 192 €.

Berechnen Sie den Preis der Bohrmaschine vor der Senkung in €.

Eine stoffdidaktischen Analyse des vorliegenden Aufgabentypus „verminderter Grundwert“ (G^{-}) kann zu folgenden konzeptionellen Merkmalen führen: es ist eine Prozentrechnungsaufgabe (%: Nutzung der Maßeinheit $\frac{1}{100}$), die gesuchte Größe ist der Grundwert (G) und es findet eine Verminderung $(1-p)$ statt (Arbeiter et al., 1979). Diese Elemente können als konzeptionelles Wissen angenommen werden, welches die Slots des Templates zu G^{-} darstellen. Die wahrgenommenen situativen Merkmale werden mit den Slots „gematscht“. Die Passung mit den Slots führt dazu, dass nach einer Übereinstimmung zu den darunter subsumierten Chunks gesucht wird, andernfalls wird darunter ein neuer Chunk erstellt. Anschließend wird das zum Chunk gehörende prozessuale Wissen ausgelöst $\left(G^{-}=\frac{PW}{(1-p)}\right)$. Anhand der oben beschriebenen Aufgabe können die folgenden Zeichen als situative Merkmale in die Slots eingesetzt werden: „%“, „vor der Senkung“ und „sank“. Diese Elemente können zusammen einen Chunk bilden. Die Elemente werden in die Slots eines Templates eingesetzt. Eine Verwechslung zweier Templates kann die meisten Fehler aller Schüler:innen der Studie von Berger zur Prozentrechnung bei G^{-} erklären (1989, S. 468). Dort ist aus den Antworten der Schüler:innen zu erkennen, dass der häufigste Fehler war, dass sie $PW^{-}=G\cdot(1+p)$ und nicht G^{-} berechneten. Das heißt, es ist wahrscheinlich, dass einige die situativen Elemente in Slots einfügten, zu denen sie nicht passten. Rechnen die Prozentrechner:innen folglich 240 € anstatt 256 €, muss also entgegen mancher Behauptungen der Fehler nicht im konzeptionellen Wissen liegen (z.B. Lestiana, 2021). Andersformuliert, matchen die Prozentrechner:innen die situativen Elemente der obigen Aufgabe mit den Slots von PW^{-}, dann resultiert nicht daraus, dass das konzeptionelle Wissen zu G^{-} falsch ist. Es treten vielmehr Fehler darin auf, dass die Situation fehlerhaft dem konzeptionellen Wissenselement zugeordnet wurde. In der Folge, wäre es nicht zielführend, ihnen den verminderten Grundwert zu erklären, also die konzeptionellen Elemente dazu erneut zu verdeutlichen. Es ist in diesem Fall eine passende Förderung den Definitionsbereich des korrekten von jenem des verwechselten Slots abzugrenzen. Mit Neuwegs Worten kann konstatiert werden, dass es eine der wichtigsten Fähigkeiten des professionellen Inhaltswissen ist, den Fall x als X zu erkennen.

Literatur

Arbeiter, J., Schröder, J., Lörcher, G.-A., Wissler, G. & Preiß, G. (1979). *HE1: Prozent- und Zinsrechnung Verhältnisrechnen. Mathematik Kurs für Lehrer Sekundarstufe I / Hauptschule*. Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen.

Ball, D. L., Thames, Mark, Hoover & Geoffrey, P. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bartlett, F. C. (1932). *Remembering*. University Press.

Berger, R. (1989). *Prozent- und Zinsrechnen in der Hauptschule: Didaktische Analysen und empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten, Lösungsverfahren und Selbstkorrekturverhalten der Schüler am Ende der Hauptschulzeit*. Zugl.: Freiburg (Breisgau), Pädag. Hochsch., Diss. : 1989. *Theorie und Forschung Pädagogik: Bd. 7*. Roderer.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R., J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, *223*(1), 3–13. https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194

Bradtke, N. D. & Borromeo Ferri, R. (im Druck). Student teachers' errors in word problems for percentage calculation - coherence knowledge as a facet of professional konwledge. In *The 15th International Congress on Mathematical Education*.

Chase, W. G. & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, *4*(1), 55–81. https://doi.org/10.1016/0010-0285(73)90004-2

Dreyfus, H. L. (1992). *What computers still can't do: A critique of artificial reason*. MIT Press.

Gobet, F. (2016). *Understanding Expertise: A Multi-Disciplinary Approach*. Macmillan Education UK.

Gobet, F. & Simon, H. A. (1996). Templates in chess memory: a mechanism for recalling several boards. *Cognitive Psychology*, *31*(1), 1–40. https://doi.org/10.1006/cogp.1996.0011

Gobet, F. & Simon, H. A. (2000). Five Seconds or Sixty? Presentation Time in Expert Memory. *Cognitive Science*, *24*(4), 651–682. https://doi.org/10.1207/s15516709cog2404_4

Götz, D., Gasteiger, H. & Kühnhenrich, M. (2020). Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(2), 523–554. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00163-2

Johnson, E. (1988). Expertise and decision under uncertainty: Performance and process. In M. T. H. Chi, R. Glaser & M. J. Farr (Hrsg.), *The nature of expertise* (209-228). Erlbaum.

Jong, T. de & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist*, *31*(2), 105–113. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3102_2

Lestiana, H. T. (2021). What are The Difficulties in Learning Percentages? An Overview of Prospective Mathematics Teachers' Strategies in Solving Percentage Problems. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(3), 260–273. https://doi.org/10.24042/ijsme.v4i3.10132

Meier, M. A., Gross, F., Vogel, S. E. & Grabner, R. H. (2023). Mathematical expertise: the role of domain-specific knowledge for memory and creativity. *Scientific Reports*, *13*(1), 1–10. https://doi.org/10.1038/s41598-023-39309-w

Neuweg, G. H. (2019). *Könnerschaft und implizites Wissen: Zur lehr-lerntheoretischen Bedeutung der Erkenntnis- und Wissenstheorie Michael Polanyis*. Waxmann.