Jan WÖRLER, Würzburg

Konkrete Kunst im Mathematikunterricht: Modellierung und Simulation von Kunstwerken

Bei Modellierungsaufgaben wird häufig von einem Alltagsproblem ausgegangen und versucht, es mit mathematischen Mitteln zu beschreiben und zu lösen. Ihr Ziel ist es etwa, die »optimale« Verpackung zu finden oder die Menge von Fahrzeugen in einem Verkehrsstau sinnvoll abzuschätzen.

Fasst man den Begriff der *Modellierung* etwas allgemeiner, so geht es dabei um die Beschreibung von Systemen, wie etwa beim Aufstellen von Klima- oder Bevölkerungsmodellen. Systeme setzen sich aus Systemelementen und Relationen zwischen ihnen (Wirkungsverknüpfungen) zusammen (Bossel 1992). Ein wesentlicher Schritt des Modellierungsprozesses ist es, diese Größen zu identifizieren und dabei das betrachtete System von störenden Umgebungseinflüssen abzugrenzen.

Auf die Modellierung aufbauende *Simulationen* des Systemverhaltens können zunächst dazu dienen, die Gültigkeit eines gefundenen Modells zu überprüfen und das Modell ggf. zu verbessern. Dazu sucht man einen Satz von Parametern, für den die Simulation das modellierte System in Zustände versetzt, die mit denen des realen Systems übereinstimmen.

Simulationen bieten darüber hinaus aber auch die Möglichkeit des freien Veränderns einzelner Systemparameter oder Relationen. Es können Zustände erzeugt werden, die im Original gar nicht auftreten (können) oder noch nicht aufgetreten sind (etwa bei Bevölkerungs- oder Aktienkursentwicklungen). Lässt man die freie Variation ohne Einschränkungen zu, so kann auf diesem Wege statt des Originals das *Modell* in den Fokus näherer Untersuchungen gerückt werden. Bei der Modellierung von Alltagsproblemen mag dies nicht unbedingt sinnvoll erscheinen; wendet man sich aber anderen Bereichen unserer Welt zu, so können Modellierung und Simulation auch in Wertebereichen erfolgen, die durch den Realitätsbezug sonst stark eingeschränkt wären. Trotzdem kann damit – wie im Folgenden zu sehen sein wird – eine gute Lern- oder Übungsumgebung für die Modellierung von Realsituationen geschaffen werden.

Theorie: Kunst als Ausgangspunkt für Modellierung und Simulation

Beim hier vorgestellten Ansatz dienen Werke der Konkreten Kunst als Ausgangspunkte der Untersuchungen. Jedes ihrer streng geometrischen Bilder basiert auf einem exakten, vom Künstler vorgegebenen Konstruktionsschema, das sich – betrachtet man das Werk durch eine »mathematische Brille« – auch auffinden lässt. Das Suchen, Finden und Beschreiben solcher Regelmäßigkeiten erfordert ähnliche Fähigkeiten wie die, die beim Modellieren von Alltagsproblemen angesprochen werden. Das Herausarbeiten der bildbestimmenden Größen ist aber häufig einfacher, als die Modellierung von Realsituationen, da sie von den Künstlern fest vorgegeben und von der Umwelt isoliert sind. Da i. d. R. bereits ein inhaltlicher Bezug zur Mathematik besteht, gestalten sich Übersetzungsprozesse aus der realen in die mathematische Welt vergleichsweise leicht.

Im Unterricht kann sich an die Modellierung eine zweite Phase anschließen, in der die gefundenen Zusammenhänge mit mathematischen Mittel beschrieben und zur Grundlage einer Simulation gemacht werden (siehe »2-Phasen-Schema«, Wörler 2009). Bei der entsprechenden Parameterwahl liefert die Simulation zunächst ein (u. U. vereinfachtes) Abbild des Kunstwerkes. Der Bezug zum Ausgangsobjekt kann aber auch gänzlich fallen gelassen werden und eine freie Variation der Parameter und Wirkzusammenhänge erfolgen; Resultate lassen sich direkt am Bildschirm ablesen und untersuchen. Durch die Simulation einer Vielzahl von Systemzuständen werden die Eigenschaften des Modells und der relationalen Zusammenhänge im Modell aufgedeckt. Häufig können sie als Ausgangspunkte für weitergehende Fragen dienen.

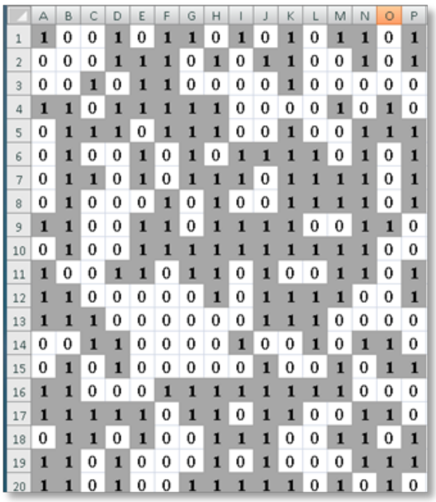
Praxis: Wie arbeiten SchülerInnen mit Konkreter Kunst?

Im Rahmen der Projekttage 2009 an der Universität Würzburg wurden Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe mit Kunstwerken der Konkreten Kunst konfrontiert. Unter der Leitfrage »Was steckt an Mathematik in diesen Werken?« versuchten sie, den mathematischen Gehalt der Bilder herauszuarbeiten und zu beschreiben. Die Übertragung der gefundenen Zusammenhänge auf den Rechner und das Experimentieren an den Simulationen, führte zur Optimierung der Modelle und brachte tiefere Einblicke in die modellierten Zusammenhänge. Anhand zweier Werke aus verschiedenen Bereichen der Mathematik werden im Folgenden einige (Teil-) ergebnisse des Projekts beleuchtet.

Stochastik: François Morellets Werk »*Zufällige Verteilung von 40.000 Quadraten, den graden und ungeraden Zahlen eines Telefonbuchs folgend, 50% grau, 50% gelb*« (1962) ist ein Rasterbild, bei dem $200 \cdot 200$ quadratische Kästchen teils gelb, teils grau gefärbt sind. Der Künstler gibt mit dem Werkstitel auch einen Hinweis auf die Methode an, nach der er die Verteilung der Kästchen festgelegt hat.

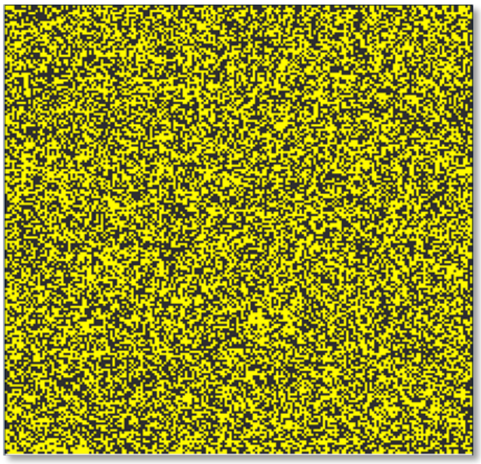
Doch wie hängen die Kästchen mit den Telefonnummern zusammen? Geht es um das Gerade- oder Ungeradesein bestimmter Ziffern der Telefonnummern? Darf man davon ausgehen, dass es gleichviele gerade wie unge-

rade Ziffern in einem Telefonbuch gibt? Und wie nahe an das Verhältnis 50:50 kommt man, wenn 40.000 Zufallszahlen auf ihre Teilbarkeit durch 2 untersucht? Solche Fragen werden in der Projektgruppe diskutiert. Eine Teilgruppe nimmt ein echtes Telefonbuch zur Hand und wertet eine Stichprobe aus. Schnell wird klar: für ein ausgeglichenes Verhältnis müsste die Stichprobe sehr groß sein. *Ist 40.000 wirklich groß genug?* Während die einen weiterzählen, begeben sich die anderen an den Rechner und erzeugen mit Hilfe eines TKP eine entsprechende Menge Zufallszahlen; bedingte Formatierung der Zellen stellt dabei den Bezug zum Kunstwerk her. Eine Zählfunktion ermittelt den Anteil der gelben Kästchen. Das Ergebnis: Wiederholt man die Berechnung des Tabellenblattes häufig, so tritt in rund 5% der Fälle eine Abweichung auf, bei deren Größe die Aussage »50% gelb, 50%« grau falsch ist.

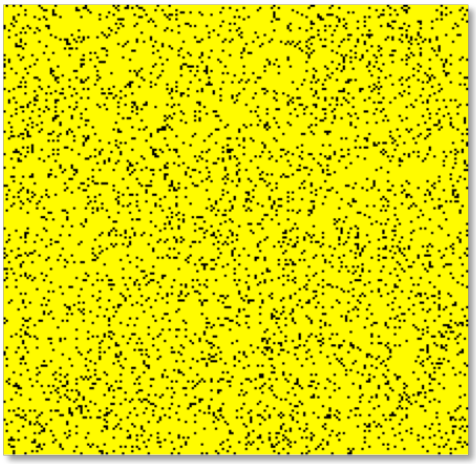


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
7	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
9	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
10	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
11	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
13	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
14	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
16	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
17	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
18	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
19	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
20	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0

Durch die unterschiedliche Qualität der Farben Grau und Gelb und Domänenbildung entsteht zum Teil aber auch bei einem ausgeglichenen Verhältnis der Eindruck, der Anteil einer der Farben würde deutlich überwiegen. Die Projektgruppe erweitert ihr Programm daher um Schieberegler, über die sich festgelegt lässt, ab welcher Grenze ein Kästchen eine bestimmte Farbe erhält. *Und wie sieht denn eigentlich ein Verhältnis 90:10 aus?*

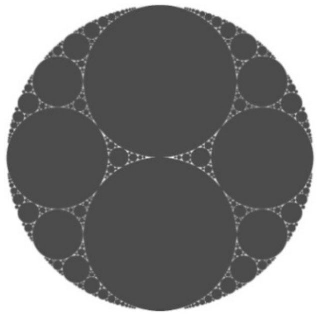


Verhältnis 50:50 (Simulation)

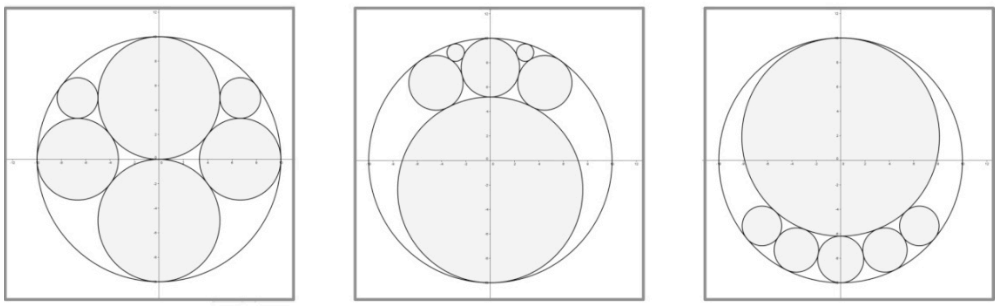


Verhältnis 90:10 (Simulation)

Geometrie: Der Künstler Karl Gerstner legt seinem Werk »*Farbfraktal aus der Serie Hommage an Benoît Mandelbrot*« (1989) eine spezielle inhomogene Kreispackung zu Grunde (Abb. rechts). Ihre mathematische Beschreibung ist im Detail hochkomplex; beschränkt man sich aber auf zunächst auf wesentliche Teile der Konstruktion, so ist sie mit Mitteln der Sek I bzw. Sek II möglich.



Die Projektgruppe wählt zunächst den Satz des Pythagoras als zentrales Hilfsmittel beim Auffinden der Kreisradien. Für die ersten Schritte des Konstruktionsverfahrens liefert er korrekte Werte. Als die SchülerInnen die Kreispackung aber am PC nachkonstruieren und dabei auch eine Variation der Ausgangkonfiguration zulassen, verschwinden die rechten Winkel und damit die Grundlage der Argumentation. Erst die Idee der Einführung von Koordinaten und des Aufstellens eines Gleichungssystems, führt über eine Verschränkung von CAS und DGS zu einem Ergebnis, bei dem die Konstruktion auch unter Variation ihre Gültigkeit behält.



Modellierung und Simulation als Einheit

Modelle können als Simulationsmodelle selber zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht werden. Die Analyse ihrer Zustandsspektren fördert das Verständnis relationaler Zusammenhänge in Modellen und zeigt die Leistungsfähigkeit und die Grenzen der Modellierung auf. Metawissen über Systeme und Modelle, das auf diesem Weg aufgebaut werden kann, kann die Modellierung von Alltagsproblemen vorbereiten und unterstützen. Konkrete Kunst ist dafür ein möglicher Ausgangspunkt.

Literatur

Bossel, H. (1992). *Modellbildung und Simulation*. Braunschweig: Vieweg.

Lauter, M; Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2007). *Ausgerechnet… Mathematik und Konkrete Kunst.* Baunach: Spurbuchverlag.

Wörler, J. (2009). Konkrete Kunst. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 955 - 958). Münster: Martin Stein Verlag.