Silvia BECHER, Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH, Juliane PÜSCHL, Stephan SCHREIBER, Paderborn/ Lüneburg

Von Zahlenmustern zur vollständigen Induktion – Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester

Das vom BMBF geförderte Projekt LIMA[1] (Lehrinnovationen in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium" – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation, www.lima-pb-ks.de) ist ein kürzlich zu Ende gegangenes Kooperationsprojekt von Fachmathematikern, Fachdidaktikern und Psychologen der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg. Zugleich ist es ein assoziiertes Projekt des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik. Ziel des Projektes war es, Übergangsschwierigkeiten an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule im Studiengang Lehramt Mathematik für Haupt- und Realschule zu verringern. Dazu wurden eine Reihe von Lehrinnovationen innerhalb der zentralen Fachveranstaltung des ersten Semesters („Grundzüge der Mathematik I") entwickelt, implementiert und teilweise auch evaluiert. Zu den Lehrinnovationen gehörte die Einführung einer Präsenzphase in den Übungen, überarbeitete Übungsaufgaben, die Einführung eines „Mathe-Treffs" und eine intensive, semesterbegleitende Betreuung der Tutoren inklusive einer Tutorenschulung. Zur Evaluation der Lehrinnovationen wurde ein quasiexperimentelles Design gewählt. Dabei bildeten die Studienanfänger des WS 09/10 die Kontrollgruppe und die Studienanfänger des WS 10/11 die Experimentalgruppe. In beiden Kohorten wurden identische Klausuren geschrieben. Die „übliche" Klausurbepunktung wurde als ein ökologisch valides Leistungsmaß angesehen. Unsere Erwartung, dass die Lehrinnovationen zu signifikant besseren Klausurergebnissen führen, bestätigte sich allerdings nicht. Da die Lehrinnovationen jedoch möglicherweise Dimensionen (u.a. Argumentations- und Darstellungsqualität) beeinflusst haben, die sich nicht oder nicht hinreichend in der Klausurbewertung abbildeten, wurden die Klausurbearbeitungen unter diesem Gesichtspunkt erneut analysiert.

1. Design der Studie

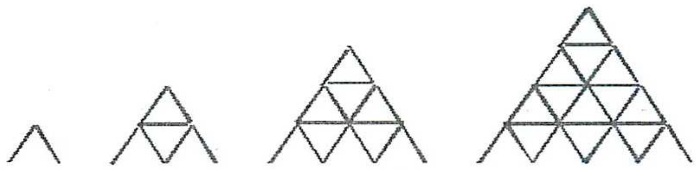
Insgesamt wurden drei der sechs Klausuraufgaben erneut analysiert, ein Kategoriensystem erstellt und dessen Objektivität durch zwei Rater überprüft. Dieser Beitrag wird nur auf Ergebnisse zu einer Aufgabe eingehen. Für die Auswahl dieser Aufgabe sprach, dass hier neben der formalen Kor-

[1] Förderkennzeichen: 01PH08028B, 01PH08028A

rektheit der Lösung auch weitere Facetten wie beispielsweise die Darstellung- oder Argumentationsqualität bei anschaulichen (geometrischen) Beweisen analysiert und Vergleiche zwischen den Beweisformen (anschaulich und formal) gezogen werden können (Leuders, 2010).

Die Aufgabe bestand aus drei Teilaufgaben. Auf die Teilaufgabe a) wird im Folgenden nicht näher eingegangen. Sie lässt aufgrund der Kürze keine tiefere Analyse zu. In Teilaufgabe b) wird von den Studierenden ein Darstellungswechsel von einer algebraischen Formel zu einem geometrischen Muster und somit eine anschaulich (geometrische) Begründung gefordert. Im dritten Teil der Aufgabe soll eine explizite Folge zur Berechnung der Kartenanzahl mit Hilfe der in Aufgabenteil b) zuvor begründeten rekursiven Folge und dem bekannten Beweisschema der vollständigen Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Als Kartenhauszahlen K_1, K_2, K_3, K_4 ... bezeichnet man die Anzahlen von Karten in den folgenden verschieden hohen Kartenhäusern.



(a) Wie viele Karten brauchen Sie für ein Kartenhaus mit 8 Stockwerken?

(b) Begründen Sie anschaulich (geometrisch) für $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$K_{n+1} = K_n + 3n + 2, \quad K_1 = 2.$$

(c) Begründen Sie unter Verwendung von (b) mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$K_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

2. Kategoriensystem

Für die Analyse des anschaulich (geometrischen) Beweises haben wir die folgenden Kategorien verwendet:

i) „Auffinden der geometrischen Entsprechung der drei Summanden“, ii) „Argumentationsqualität“, iii) „die Begründung des Terms 3n“, iv) „Sprachliche Qualität der schriftlichen Darstellung“

Im Folgenden gehen wir genauer auf die Kategorie ii) „Argumentationsqualität“ d.h. die Güte der Argumentationen ein. In dieser Kategorie werden Bearbeitungen, bei denen kein vollständiges Muster gefunden wurde, das heißt, man nicht alle drei Summanden wiederfinden kann, in Stufe 1 eingeordnet. Stufe 2 erhält alle Lösungen, bei denen ein Muster gefunden wurde, dieses aber nur anhand eines Beispiels aufgezeigt und nicht verallgemeinert wird. In Stufe 3 wurden Bearbeitungen eingeordnet, bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet, beispielsweise durch eine allgemeine Beschriftung der Skizze, die Erläuterungen dazu jedoch unzureichend sind. Bearbeitungen bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet und auch die Argumentation vollständig und gut ist, werden in Stufe 4 eingeordnet.

Für das Kategoriensystem von Aufgabenteil c) wurden die wesentlichen Teile eines Induktionsbeweises genauer betrachtet: i) „Gesamtbehauptung“, ii) „Induktionsanfang“, iii) „Induktionsvoraussetzung“, iv) „Induktionsschritt“.
Die Kategorie iv) „Induktionsschritt“ ist in vier Stufen aufgeteilt. Dabei ist die unterste Stufe, dass der Induktionsschritt nicht oder falsch aufgeschrieben wurde. In Stufe 2 werden Bearbeitungen eingeordnet, welche große Mängel in der Darstellung aufweisen. Wenn es sich um kleine Mängel handelt, so werden die Bearbeitungen eine Stufe besser eingestuft, in Stufe 4 werden Bearbeitungen eingestuft, welche den Induktionsschritt gut darstellen. Bei dieser Einordnung wurde die „0=0“- Problematik mit erfasst (Schichl & Roland, 2012, S. 49), d.h. das Problem, dass von der zu zeigenden Identität ausgegangen und durch Äquivalenzumformungen die wahre Aussage 0=0 hergeleitet wird.

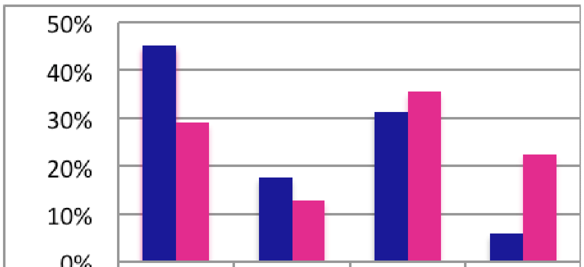
$$K_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$$
$$K_n + 3n + 2 = \frac{3\cdot(n^2+2n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}$$
$$K_n + 3n + 2 = \frac{3(n^2+2n+1)+n+1}{2}$$
$$2K_n + \cancel{6n} + \cancel{4} = 3n^2 + \cancel{6n} + \cancel{3} + n + \cancel{1}$$
$$2K_n = 3n^2 + n$$
$$K_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
$$K_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
qed.

Beispiel einer Aufgabenbe-arbeitung, welche in der Kate-gorie „Induktionsschritt“ in Stufe 2 eingeordnet wurde, da hier von der zu zeigenden Gleichheit ausgegangen wird, Äquivalenzumformungen ge-macht werden, aber die Äquivalenzzeichen fehlen.

3. Ergebnisse

In den Kategorien des geometrisch anschaulichen Beweises konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kohorten festgestellt werden. Bei der sprachlichen Darstellung sieht man jedoch eine deutliche Tendenz, dass die Experimentalgruppe ihre Ergebnisse eher in ganzen Sätzen formuliert. Man erkennt, dass es den Studierenden schwer fällt, ein Muster zu finden und dass sie Probleme mit der Verallgemeinerungsbegründung haben (in der Experimental- sowie in der Kontrollgruppe sind 17% in der obersten Stufe eingeordnet worden).

Bei dem Induktionsbeweis zeigt sich, dass die Experimentalgruppe in der Kategorie „Gesamtbehauptung“ mit p=0,084 signifikant besser abschneidet. Ähnlich gilt dies für die Kategorie „Induktionsanfang“ (p=0,11) und den „Induktionsschritt“ (p=0,1). Bei der Induktionsbehauptung ergab sich ein hochsignifikanter Unterschied (p=0,0): Die Experimentalgruppe hat die Induktionsbehauptung zu 71% gut aufgeschrieben, bei der Kontrollgruppe kamen nur 2% in die beste Kategorie.



	Stufe1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4
KG	45%	18%	31%	6%
EG	29%	13%	35%	23%

Abbildung 1 Kategorie "Induktionsschritt" – Ergebnis

4. Fazit

Insgesamt stellen das Erkennen, Beschreiben und Erläutern eines Musters und schließlich das Aufstellen und Begründen eines darauf bezogenen algebraischen Ausdrucks für die Studierenden eine große Hürde dar. Bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe zeigten sich zwischen den beiden Kohorten im Hinblick auf unsere Analysekategorien keine Unterschiede. Dies spricht dafür, dass die Lehrinnovation bei der Bewältigung der hier auftretenden Hürde keinen Effekt zeigt. Möglicherweise sind hier spezifischere Maßnahmen notwendig. Bei der vollständigen Induktionsaufgabe zeigen sich Unterschiede. Möglicherweise fällt diese Aufgabe den Studierenden leichter, da es sich um eine vorstrukturierte Beweisführung handelt. Eine weitere Erklärung für diesen Unterschied könnte sein, dass dadurch, dass auf den Beweistyp der vollständigen Induktion in der Tutorenschulung (eine Lehrinnovation des Projekts) eingegangen (Biehler et. al, 2011) wurde, dies auch in den Übungen besser vermittelt wurde. Insgesamt kann man daher vielleicht sagen, dass man bei einer Aufgabe, bei der ein festes Beweisschema zu Grunde liegt, schneller Veränderungen feststellen kann, als bei Aufgaben, die mehr Kreativität erfordern. Um Veränderungen auch im Bereich der Mustererkennung feststellen zu können, wird man vermutlich spezifischer auf deren Anforderungen eingehen müssen.

Literatur

Biehler, R. Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S. & Hänze, M. (2011). *Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt.* In: Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schichl H. & Steinbauer R. (2012). *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Berlin, Heidelberg.