

## **Vorstellungsaufbau in der Differenzialrechnung**

Die Vermittlung grundlegender mathematischer Konzepte erfordert von Lehrkräften ein tiefgehendes Verständnis der zugrunde liegenden Grundvorstellungen. Dies gilt besonders für die Differenzialrechnung, deren zentrale Begriffe wie die lokale Änderungsrate, die Tangente und die lineare Approximation im schulischen Kontext oftmals als abstrakte Inhalte wahrgenommen werden. Eine verstehensorientierte Herangehensweise in der Differenzialrechnung verfolgt das Ziel, diese Inhalte für Lernende nachvollziehbarer zu durchdringen. Dabei spielen didaktische Konzepte, wie das Verhältnis von Bestand und Änderung als Verstehensgrundlage zum Ableitungsbegriff (Şahin-Gür et al., 2020) sowie der Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate eine entscheidende Rolle (Greefrath et al., 2016).

Die im Rahmen einer Fortbildung für Lehrkräfte des DZLM-Projektes QuaMath erarbeiteten Materialien und Ansätze zielen darauf ab, diese Grundvorstellungen fundiert zu entwickeln. Dabei wird insbesondere auf den Einsatz digitaler Werkzeuge zurückgegriffen. Im Mittelpunkt der Fortbildung steht das Ziel, Lehrkräfte im Fach Mathematik dafür zu gewinnen, den Vorstellungsaufbau in der Differenzialrechnung zu stärken, auch durch Darstellungsvernetzung und kognitiver Aktivierung. Der vorliegende Beitrag fokussiert dabei die Frage, wie Lehrkräfte bzw. Multiplikator\*innen verstehensorientierte Aspekte zur Ableitung wahrnehmen und beurteilen. Dazu werden erste Ergebnisse einer Befragung von 28 Multiplikator\*innen vorgestellt, die im Rahmen einer Fortbildungsqualifizierung erhoben wurden.

### **Aufbau der Fortbildung und Forschungsinteresse**

Im Rahmen des QuaMath-Projektes sind die Fortbildungen für Lehrkräfte strukturell gleich angelegt. Zunächst dienen sechs Bausteine eines Basismoduls der mathematikdidaktischen Fundierung mit fünf Prinzipien als zentralen Leitlinien: Verstehensorientierung, Kognitive Aktivierung, Lernenorientierung, Kommunikationsförderung & Durchgängigkeit. Auf die Basismodule folgen Inhaltsmodule zur Vertiefung der fachlichen Themen in den jeweiligen Schulstufen. Diese Inhaltsmodule umfassen jeweils drei Bausteine, die ihrerseits jeweils eine dreistündige Fortbildung für Lehrkräfte umfassen, die von Multiplikator\*innen durchgeführt werden ([www.quamath.de](http://www.quamath.de)). Das hier fokussierte Inhaltsmodul adressiert die Differenzialrechnung. Dabei steht der Ableitungsbegriff im Zentrum. In Anlehnung an Greefrath et al. (2016) werden dabei die Grundvorstellungen der Ableitung als lokale Änderungsrate, lineare Approximation und

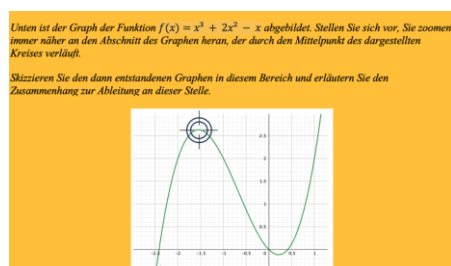
Tangentensteigung adressiert. Der erste Baustein fokussiert den Aufbau dieser Grundvorstellungen und zeigt so exemplarisch, wie Konzepte und Verfahren in der Sekundarstufe II systematisch und verstehensorientiert vermittelt werden können. Verstehensorientierung meint dabei sowohl das Verständnis von Konzepten als auch von Verfahren (Holzäpfel et al. 2024). Im Fall der Differenzialrechnung umfasst dies neben der Orientierung an Grundvorstellungen auch die Nutzung digitaler Medien zur Unterstützung eines vorstellungsorientierten Mathematikunterrichts. Für alle drei Bausteine des Moduls ist im Einklang mit den Bildungsstandards daher der integrative Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge, wie etwa Funktionenplotter, dynamische Visualisierungen und Computeralgebrasysteme, ein zentraler Bestandteil. Im zweiten Baustein liegt der Schwerpunkt auf der qualitativen Kurvendiskussion, die im Sinne von Verstehensorientierung und kognitiver Aktivierung gestaltet wird. Der dritte Baustein richtet den Blick auf das Zentralabitur und thematisiert die Analyse und Optimierung von Prüfungsaufgaben, die Konsequenzen für den Unterricht im Sinne des Constructive Alignment und die Bedeutung lernförderlicher Rückmeldungen in Prüfungen und Unterricht.

Das QuaMath-Projekt umfasst neben der Materialentwicklung insbesondere die Qualifizierung der Multiplikator:innen. Damit werden drei Ebenen vernetzt: Die Unterrichtsebene, da das Lernen der Schüler:innen in den Fortbildungen adressiert wird, die Fortbildungsebene die das Ziel der Professionalisierung der Lehrkräfte verfolgt und die Qualifizierungsebene, bei der Multiplizierende ausgebildet werden mit dem Ziel, eine Sensibilität für das Lernen der Lehrkräfte zu gewinnen. Die hier vorgestellte Begleitforschung fokussiert alle drei Ebenen: Auf Unterrichts- und Fortbildungsebene geht es um eine Schülerinnenlösung zu einer diagnostischen Aufgabe mit Blick auf Vorstellungsaufbau zur Ableitung als lineare Approximation, die in der Fortbildung von Lehrkräften kommentiert wird. Auf Qualifizierungsebene analysieren die zukünftigen Multiplikator\*innen diese Lehreräußerungen. Die leitende Forschungsfrage adressiert die diagnostische Kompetenz in der Differenzialrechnung im Spannungsfeld von Konzepten und Kalkül sowie den jeweiligen Umgang mit der wahrgenommenen (Fehl-)Vorstellung.

### **Beschreibung des Erhebungsinstruments**

Um diese Frage zu beantworten, wird im Rahmen der Fortbildung ein Erhebungsinstrument zur Verstehensorientierung im Kontext der Ableitung eingesetzt. Im Rahmen einer Multiplikator:innenqualifizierung haben ca. 30 Personen dieses Item bearbeitet. Das folgende Item (Abb. 1) zeigt links eine Aufgabe für Lernende (in Anlehnung an Klinger, 2018) und rechts die Lernendenlösung sowie die Äußerung einer Lehrkraft, die diese Lösung

kommentiert. Die Lernendenlösung ist so gestaltet, dass das Ableitungskalkül zwar korrekt angewendet wird, aber entsprechende Vorstellungen nicht vollständig bzw. nicht korrekt ausgebildet sind.



#### Teil 2:

Aufgabe für Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe II (s.o.)

Lösung einer Schülerin/eines Schülers:

Der Graph würde etwa so aussehen:

Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei ca.  $-1,6$ . Die Ableitung der Funktion lautet  $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ , also ist  $f'(-1,6) = 0,28$ . Die Ableitung an der Stelle ist also  $0,28$ .

Eine Lehrkraft sagt zu der Lösung: „Die Ableitung wurde gut verstanden: Die Schülerin/der Schüler beherrscht den Ableitungskalkül korrekt und hat deshalb eine gute Vorstellung von der Ableitung.“

Begründen Sie, inwiefern Sie der Einschätzung zustimmen oder nicht.

### Abb. 1: Verstehensorientierung im Spannungsfeld von Konzepten und Verfahren

Die Äußerung der Lehrkraft geht dabei ausschließlich auf die Beherrschung des Kalküls ein, entsprechende Bezüge zu Vorstellungen wie etwa der linearen Approximation werden nicht genannt.

### Ergebnisse und Ausblick

Die folgenden Reaktionen der Multiplikator:innen M1 und M2 zur Aussage der Lehrkraft (Abb.1) zeigen eine differenzierte, jedoch noch eine oberflächliche Wahrnehmung der Lehrkräfteeinschätzung. Beide betonen, dass die Beherrschung des Kalküls allein nicht mit einem umfassenden Verständnis des Ableitungsbegriffs gleichzusetzen ist. Dies verdeutlicht eine zentrale Herausforderung: Die themenbezogene Vermittlung und Überprüfung eines tiefgehenden Verstehens des Konzepts im Unterricht bleibt oft hinter der Fokussierung auf die korrekte Anwendung des Kalküls zurück.

Multiplikator\*in M1: Ich stimme dem nicht zu, da nur das Verständnis des Kalküls nichts über das Verständnis des Ableitungsbegriffs aussagt.

Multiplikator\*in M2: Die Schülerin/der Schüler beherrscht das Kalkül, hat jedoch keine gute Vorstellung von der Ableitung. Es wird die Ableitungsfunktion bestimmt und die Ableitung an der betreffenden Stelle richtig berechnet. Aus dem Graphen des Schülers wird die Steigung des Graphen an einer Stelle nicht ersichtlich.

Die Multiplikator:innen benennen zwar wichtige Aspekte der Grundvorstellungen, insbesondere die lokale Änderungsrate, dies bleibt jedoch noch recht undifferenziert. So erwähnt keine der Personen explizit die lineare Approximation als zentrales Konzept der Ableitung, obwohl diese ein Schlüsselaspekt für das Verständnis des Ableitungsbegriffs ist und im Rahmen der Aufgabe adressiert wird (Abb. 1). M2 beschreibt ansatzweise, dass aus der Lernendenlösung die Steigung des Graphen an einer Stelle nicht klar hervorgeht,

was auf eine Lücke im Vorstellungsaufbau hinweist. Dennoch bleibt auch diese Einschätzung eher auf der Ebene der Defizitbeschreibung und liefert keine konkreten Hinweise darauf, wie diese Lücke durch fachdidaktische Maßnahmen adressiert werden könnte. Besonders auffällig ist die oberflächliche Bemerkung in M2, dass die Schülerin/der Schüler das Kalkül beherrscht, jedoch keine gute Vorstellung von der Ableitung hat. Diese Aussage verweist insbesondere auf das Spannungsfeld des Verständnisses von Konzepten und Verfahren, gerade im Kontext der Differenzialrechnung.

Die diskutierten Äußerungen der Multiplikator:innen verdeutlichen den Bedarf für eine vorstellungsorientierte Fortbildung, die Lehrkräfte und Multiplikator:innen in die Lage versetzt, die Grundvorstellungen der Ableitung differenzierter wahrzunehmen, zu analysieren und gezielt zu fördern. Besonders wichtig wäre es, die verschiedenen Grundvorstellungen der Ableitung explizit zu thematisieren, da sie für das Verständnis der Ableitung als lokales Konzept unverzichtbar sind. Darüber hinaus wird der Bedarf deutlich, dass die Fortbildung darauf abzielen sollte, das Zusammenspiel von Konzept und Kalkül stärker in den Fokus zu rücken, da dies eine zentrale Herausforderung im Analysisunterricht darstellt. Ein weiterer wichtiger Schritt besteht darin, Multiplikator:innen für die Bedeutung einer treffsicheren Diagnose zu sensibilisieren. Dabei spielen insbesondere auch digitale Werkzeuge eine wichtige Rolle, um dynamische Visualisierungen und Darstellungsvernetzungen zur Förderung des Vorstellungsaufbaus einzusetzen und das Verständnis der Ableitung über den Kalkül hinaus fördern.

## Literatur

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3>
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B. & Selter, Ch. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. In *Mathematik Lehren*, 242, (pp. 2-9)
- Şahin-Gür, D., Rüwald, J., & Prediger, S. (2020). Sprachbildender Vorstellungsaufbau zur qualitativen Analysis in Klasse 10-12. In S. Prediger (Eds.) (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch* (pp. 186–191). Cornelsen.