

STRÄSSER, Rudolf & ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen
Münster/Gießen/Brisbane; Korschenbroich

Handeln im Dreidimensionalen

Wenn man – wie die Autoren – den Geometrie-Unterricht als Vorbereitung auf das Leben ansieht, so muss man akzeptieren, dass wir in einem drei-dimensionalen Raum leben, der mindestens lokal im Wesentlichen die Struktur eines euklidischen drei-dimensionalen Vektorraumes hat. In der Folge langer Diskussionen schon im vorigen Jahrhundert gehen wir davon aus, dass eine axiomatische Fundierung des Geometrie-Unterrichtes in allgemeinbildenden Schulen mindestens für die Lernenden nicht geeignet ist. Stattdessen schließen wir uns dem Diktum von Hans Freudenthal an: „Geometrie auf der niedrigsten, der nullten Stufe ist [...] die Erfassung des Raumes, [...] in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennenlernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können“ (siehe Freudenthal 1973, S. 376 f.).

In einem gewissen Kontrast zu dieser Einschätzung steht allerdings der übliche Geometrie-Unterricht in den allgemeinbildenden deutschen Schulen, insbesondere die räumliche Geometrie betreffend: „Hier beschränkt sich in der Sekundarstufe I die Raumgeometrie weitgehend auf das Rechnen mit Formeln (insbesondere für Oberfläche und Volumen), während in der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II das vektorielle Rechnen mit Geraden und Ebenen, die „Hieb-und-Stich-Aufgaben“, dominieren“ (vgl. Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 2). Ein fachlicher Hintergrund dieses Zustandes dürfte auch die Tatsache sein, dass die Probleme in der Ebene oft einfacher als im Raum sind und die Handhabung entsprechender Werkzeuge einfacher ist. Man denke nur an den Einsatz von Zirkel und Lineal in der ebenen Geometrie verglichen mit den oft komplexen Verfahren der Darstellenden Geometrie für 3D-Probleme – sei es auch nur die Feststellung der wahren Länge einer Strecke (vgl. Elschenbroich & Sträßer, 2024a, S. 8). Räumliche Probleme mussten lange in der Ebene mit ebenen Werkzeugen bearbeitet und gelöst werden, indem Projektionen der räumlichen Objekte zeichnerisch konstruiert wurden. Es sei aber angemerkt, dass sich Vorstellungen, Handlungsweisen und sogar Sätze oft nicht ohne Brüche von 2D nach 3D übertragen lassen (vgl. Bender, Hattermann & Sträßer, 2021). Dies gilt auch für den Zugmodus.

Was ändert sich nun mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge in der räumlichen Geometrie? Bisher war eine Erschließung des Raumes auf das Basteln von „Modellen“ oder auf die Verfahren des Technischen Zeichnens angewiesen, also die Unterscheidung von „Zeichnung“ und „Modell“ im Sinne Parzys (1988, vgl. auch Elschenbroich & Sträßer, 2024a, S. 5). Ein Unterricht in

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

räumlicher Geometrie konnte diese Grenze lange Zeit nur schwer überwinden. Heutzutage können allerdings digitale Werkzeuge beide Aspekte miteinander verbinden, weil sie intern mit einem virtuellen dreidimensionalen Modell arbeiten, das sie dann wiederum automatisiert in eine Zeichnung auf dem Bildschirm übersetzen. Der 3D-Druck baut somit eine Brücke, indem er aus dem digitalen virtuellen Modell heraus ein statisches dreidimensionales Modell erzeugt.

Bei der Software für die Raumgeometrie kann man aufgrund ihrer Herkunft zwei Software-Typen unterscheiden:

Programme wie Cabri-3D oder GeoGebra sind Fortentwicklungen von zweidimensionaler Dynamischer Geometrie Software und legen so einen Schwerpunkt auf das raumbezogene Zeichnen und Konstruieren nach Art des traditionellen Zeichnens in der Ebene. Objekte wie Quader, Pyramide, Zylinder, Kegel werden ausgehend von Punkten konstruiert. Dadurch können Sie dann auch durch Ziehen an diesen Punkten dynamisch variiert werden.

Dem stehen Abkömmlinge von professioneller Software zum technischen Zeichnen gegenüber, die Computer-Aided-Design Programme (3D-CAD). Diese legen einen Schwerpunkt auf das Hantieren mit einem dreidimensionalen Modell und haben einen Katalog von Grundkörpern, die dann bearbeitet werden können. Damit kommt man schnell zu Ergebnissen, hat aber nur statische Modelle.

So entstehen bei diesen zwei Software-Typen wesentliche Unterschiede sowohl bei den Basis-Elementen wie auch bei der Art der Manipulation während des Konstruktionsprozesses. Bei Nutzung beider Programmtypen wird manche schwierige Problemstellung wesentlich einfacher bzw. entfällt ganz. Die Feststellung der wahren Länge eines Objekts in einem Schrägbild wird aufgrund des dreidimensionalen internen Modells völlig trivialisiert. Als wichtigsten Unterschied zwischen den Software-Typen sehen wir die Tatsache, dass die Konstruktion in 3D-DGS aufwändiger ist, weil sie wesentlich punktweise von Statten geht. Dafür eröffnet sie die Möglichkeit der dynamischen Variation im Zugmodus, während die Konstruktion nach Art des 3D-CAD oft schneller geht, weil dort direkt ein Katalog von Objekten zur Verfügung steht. Man „bezahlt“ allerdings diese Erleichterung mit einer gewissen Statik der Konstruktion.

Soll man zum Beispiel zu einem gegebenen Würfel das duale Oktaeder konstruieren, so lässt sich in allen räumlichen Konstruktionsprogrammen ein Würfel als Elementarobjekt mit einem Befehl konstruieren. In 3D-DGS (wie etwa Cabri-3D oder GeoGebra 3D) kann man dann auf den sechs

Würfelseiten die Seitenmitten (z.B. als Schnittpunkt der jeweiligen Flächen-diagonalen) konstruieren. Konstruiert man dann die geeigneten acht Dreiecke, so erhält man ein Kanten- oder Flächenmodell des dualen Oktaeders. In GeoGebra ist weiter die Definition des zugehörigen Volumenmodells möglich, aber mit einem gewissen Aufwand verbunden, während Cabri-3D noch mit der Funktionalität „konvexes Polyeder“ einen einfachen Zugang zu einem Volumenmodell bietet.

Dieselbe Aufgabe könnte man unter Nutzung von CAD-Abkömmlingen (wie z.B. GAM, OnShape oder TinkerCAD) lösen, indem man das Oktaeder durch achtmaliges Abschneiden von Prismen mit gleichschenkelig-rechtwinkligen Grundseiten und der Höhe der Kantenlänge des Würfels von dem Ausgangswürfel erzeugt, wobei man den Würfel oder das Prisma durch Drehen und Verschieben geeignet platziert. Das beschriebene dreiseitige Prisma ist in etwas entwickelten CAD-Abkömmlingen schon wieder Elementarobjekt, lediglich die Platzierung des Prismas in Relation zu Würfel erfordert ein gewisses räumliches Vorstellungsvermögen. Jedenfalls führt dieses Verfahren direkt zu einem Volumenmodell des dualen Oktaeders.

Man sieht auch an diesem Beispiel: Das Konstruieren im Raum geschieht heutzutage wesentlich durch den Gebrauch von 3D-Software – und das ist in jedem Fall einfacher als das Konstruieren von zweidimensionalen Projektionen von 3D-Objekten mit Zirkel und Lineal nach Art der Darstellenden Geometrie. Außerdem verfügen wir in den Programmen über virtuelle 3D-Objekte, mit denen und in denen wir auch arbeiten und konstruieren können. Dabei ist es wesentlich, klar zwischen dem Konstruieren mit 3D-DGS (dem Konstruieren aufbauend auf Punkten) und Konstruktion mit 3D-CAD (Bearbeitung von Grundkörpern) zu unterscheiden, weil beide Verfahren Vor- wie Nachteile mit sich bringen.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde die Frage nach einer Begründung für raumgeometrischen Unterricht mit Computer-Unterstützung noch nicht berührt, obwohl sich gerade in einem solchen Unterricht eines der Bildungsziele von Mathematikunterricht besonders gut verfolgen lässt: „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, ... drei Grunderfahrungen ... zu ermöglichen: (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (vgl. Winter, 1995, S. 37).

Der Unterricht in (Raum-)Geometrie kann beim Erschließen der uns umgebenden Welt insbesondere durch den Einsatz der 3D-CAD Abkömmlinge fruchtbar werden, wie sich in Materialien zum geometrischen Zeichnen und zur Darstellenden Geometrie für den österreichischen Mathematikunterricht lernen lässt (wohingegen im deutschen Geometrie-Unterricht eine Lücke

klafft, die durch den Einsatz von CAD im Fach Technik nicht geschlossen werden kann). „Deskriptive Geometrie“ ist in allgemeinbildenden Schulen in Deutschland kein Thema, eher im berufsbildenden Bereich (vgl. z.B. Hattermann u.a. 2023, S. 202). Als Beispiele für diesen woanders als „Deskriptive Geometrie“ bezeichneten Aspekt (vgl. z.B. Hattermann u.a. 2023, S. 202). Die Aufgabensammlung Mick u.a. (o.J.) bietet eine Vielzahl unterrichtlicher Möglichkeiten von deskriptiver räumlicher Geometrie mit Computer-Unterstützung.

Die Raumgeometrie liegt im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen in Deutschland bildlich gesprochen auf der Intensivstation. Der Einsatz von 3D-CAD und 3D-DGS bietet eine Chance zur Wiederbelebung, zur Regeometrisierung der Raumgeometrie. Ohne Software-Nutzung wird dies nicht gelingen können.

Literatur

- Bender, R., Hattermann, M., & Sträßer, R. (2021). Konstruieren im Raum – plötzlich alles anders? *mathematik lehren*, 228, 14-18.
- Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024). Einleitung. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 2.
- Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024a). RAUM-Geometrie mit digitalen Werkzeugen. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 3-15.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Stuttgart: Ernst Klett.
- Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S., & Sträßer, R. (2015/2023). Geometrie: Raum und Form. In R. Bruder, u.a. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185-219, 2. Aufl. 201-242). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- S. Mick u.a. (o.J.). Arbeitsunterlagen zu einem kompetenzorientierten Unterricht aus Geometrischem Zeichnen.
https://raumgeometrie.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/wg/Handreichung_GZ_Kompetenzen_2013_06_18.pdf
- Parzys, B. (1988). "Knowing" vs. "Seeing". Problems of the plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Sträßer, R., Elschenbroich, H.-J., & Lürßen, P. (2024). Raumgeometrisches Konstruieren von Polyedern – Ein Besuch im Software-Zoo. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 36-45.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (GDM)(61), 37-46.
<https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/69/80>