

BAUER, Thomas; MÜLLER-HILL, Eva; NEUHAUS-ECKHARDT, Silke
& RACH, Stefanie

Marburg, Rostock, Würzburg, Magdeburg

Semiotische Aspekte der Strategie Illustrieren am Beispiel beim Beweisverstehen

Wir berichten über Ergebnisse einer semiotischen Prozessanalyse von Interviewdaten mit Blick auf diagrammatische Tätigkeit und sprachliche Begleitaktivitäten Studierender bei der eigentätigen Illustration von Beweisschritten an gegebenen und selbst konstruierten Beispielen.

Einleitung und Rahmung

Beweisen gilt für viele Studierende als herausfordernd, weshalb vielseitige Unterstützungsmöglichkeiten für verschiedene Beweisaktivitäten beforscht werden. Strategien wie das Illustrieren an einem Beispiel könnten das Beweisverstehen unterstützen (Weber, 2015). In einer quantitativen Studie (Bauer et al., 2021) konnten wir nicht zeigen, dass beim Einsetzen von Beispielen zur zeilenweisen Illustration eines Beweises für Studierende das aktive Konstruieren eines Beispiels dem passiven Nachvollziehen mit Blick auf das spätere Beweisverständnis überlegen ist. Gleiches gilt für den Vergleich der Darstellungsebenen “ikonisch-grafisch” und “symbolisch-algebraisch” beim Beispiel. Die möglichen Erklärungsansätze dieser zunächst überraschenden Ergebnisse wurden auf der Basis qualitativer Prozessanalysen etwa mit Blick auf Metakognition (Bauer et al., 2022) und auf semiotische Aspekte weiterverfolgt. In diesem Beitrag fokussieren wir unter den semiotischen Aspekten die Rolle des *diagrammatic reasoning* im Peirceschen Sinne, insbesondere mit Blick auf unterschiedliche Qualitäten diagrammatischer Tätigkeit in den Beispielkonstruktions- und Nutzungsprozessen. Den engeren theoretischen Rahmen für die vorgestellte Analyse liefern Arbeiten von und im Anschluss an Dörfler (2005) zu diagrammatischer Tätigkeit und der Rolle von Metaphern (ibid. und auch Lakoff & Nunez, 2013) sowie die Unterscheidung verschiedener Qualitäten von diagrammatischer Tätigkeit: diagrammatisches Arbeiten vs. Schließen (Giardino, 2007). Ausgehend von diesem Rahmen untersuchen wir zunächst folgende Forschungsfragen:

1. Welche Qualitäten diagrammatischer Tätigkeit kommen an welchen Stellen beim Illustrieren der Beweiszeilen anhand der Beispiele vor?
2. Welche begleitenden sprachlichen Aktivitäten treten auf, insbesondere mit Blick auf den Gebrauch von Metaphern?

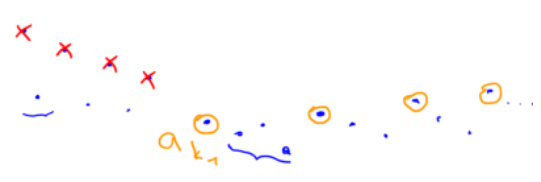


Methode

Die Stichprobe der Interviewstudie bestand aus elf Studierenden aus Mathematikstudiengängen an drei Universitäten, die alle bereits eine Fachvorlesung zur Analysis 1 gehört hatten. Den Studierenden wurde ein Beweis zum Satz über monotone Teilfolgen einer reellwertigen Folge vorgelegt, der u.a. eine Fallunterscheidung enthält (vgl. Bauer et al., 2021). Für den ersten Fall des Beweises wurde den Studierenden zeilenweise ein Beispiel vorgelegt, an welchem sie die zugehörigen Beweisschritte für sich illustrieren sollten. Für den zweiten Fall sollten sie ein eigenes Beispiel zur Illustration der einzelnen Beweisschritte konstruieren. Um die Denkprozesse der Studierenden bei der Beispielkonstruktion und der zeilenweisen Illustration zu erfassen, wurden sie gebeten, laut zu denken.

Ergebnisse

Wir stellen bei einigen Studierenden fest, dass sie während der Konstruktion von Beispielen und der Illustration diagrammatisch schließend tätig sind. Dabei können wir in verschiedenen Interviews ähnliche *Schlussfiguren* rekonstruieren. Tabelle 1 zeigt exemplarisch diagrammatische Tätigkeiten (aus vier Interviews), in denen wir die Schlussfigur „relevanter Folgenausschnitt“ identifizieren.

Tabelle 1: Diagrammatische Tätigkeiten verschiedener Studierender (#n)

Nr.	Zeile im Beweis	Diagrammatische Tätigkeit	Sprachliche Begleitaktivität
#5	(3) Sei nun angenommen, dass (a_n) nur endlich viele Gipfelstellen hat.	S konstruiert eine Beispielfolge in einem relevanten Ausschnitt 	„et cetera et cetera“
#7	(3) Sei nun angenommen, dass (a_n) nur endlich viele Gipfelstellen hat.	S konstruiert eine Beispielfolge in einem relevanten Ausschnitt 	„es könnte ja jetzt <i>unendlich</i> so weiter gehen“
#9	(2) Falls die Folge (a_n) unendlich viele Gipfelstellen hat, dann definieren diese eine monoton fallende Teilfolge.	S betrachtet die gegebene Folge (im gegebenen Ausschnitt) und symbolisiert Fortsetzung durch Pfeil 	„wenn ich <i>von links anfang</i> e und dann <i>immer wieder</i> [...] nen Wert finde“

#10	(8) Fährt man auf diese Weise fort, so entsteht eine monoton steigende Teilfolge von (a_n) .	<p>S lässt den Indexbereich vor k_1 frei (d.h. konstruiert diesen Teil der Folge nicht explizit.)</p>	„ohne genau zu wissen, was <i>vorher</i> passiert sein könnte“
		<p>S zeichnet Pünktchen im Indexbereich zwischen den ausgewählten Indizes k_1 und k_2 sowie zwischen k_2 und k_3.</p>	„hier <i>dazwischen</i> können Glieder liegen“

Die Studierenden arbeiten dabei jeweils mit einem spezifisch gewählten endlichen Abschnitt der (gegebenen oder selbst konstruierten) Folge, an dem sie die für den jeweiligen Beweisschritt relevanten Eigenschaften oder Prozeduren hinreichend illustrieren können. In der sprachlichen Begleitaktivität, die wir parallel zur diagrammatischen Tätigkeit beobachten, kommen sowohl Äußerungen vor, die auf eine potentiell unendliche Fortsetzbarkeit des Abschnitts hindeuten, als auch Äußerungen, die wir dem semantischen Komplex der Fundierungsmetapher „Folge als räumliche oder zeitliche diskrete Aneinanderreihung von Werten“ zuordnen können. Ein aktual unendlicher Prozess, der als solcher zunächst „kein Diagramm hat“ (Dörfler, 2005, S. 62), wird durch diese Art der Illustration am konkreten Beispiel diagrammatisch handhabbar und mental zugänglich gemacht.

Neben den gezeigten Fällen, in denen sich die diagrammatische Tätigkeit primär auf die „Horizontale“ richtet (Folgenindizes), nutzen die Studierenden bei ihrer diagrammatischen Tätigkeit auch die „Vertikale“ (Folgenwerte): So zeichnet beispielsweise Person 9 eine „Höhenlinie“ ein, die die definierende Eigenschaft einer Gipfelstelle (spätere Folgenwerte bleiben kleiner als der Folgenwert zur Gipfelstelle) zum Ausdruck bringt. Auch diese Eigenschaft kann auf die Folge als aktual unendlichen Prozess bezogen werden und wird durch die „Höhenlinie“ als Teil des Diagramms zum relevanten Folgenausschnitt diagrammatisch handhabbar.

Diskussion und Ausblick

Neben einer ausstehenden tiefergehenden Analyse der sprachlichen Begleitaktivität zu der beobachteten diagrammatischen Tätigkeit stellt sich die

Frage, inwieweit die Erkenntnisse zu vorkommenden Qualitäten diagrammatischer Tätigkeit bei der Beispielkonstruktion und Illustration eine prozessbezogene Neubewertung der selbst konstruierten Beispiele etwa mit Blick auf das Merkmal „hilfreich“ (vgl. Bauer et al., 2021) nach sich ziehen und damit den Blick auf Bedingungen für die Effektivität der Strategie „Illustrieren am Beispiel“ verändern können. Ein zusätzliches Analyseelement für eine solche Neubewertung ist bspw. die Auswertung der im *stimulated recall* erhobenen Beweiszusammenfassungen durch die Studierenden. Eine Limitation unserer Studie stellen dabei jedoch die geringe Stichprobengröße sowie der Fokus auf zunächst einen einzigen Beweis in einem bestimmten mathematischen Gebiet dar. Eingedenk dieser Limitation können wir eine mögliche Konsequenz unserer Ergebnisse für die praktische Nutzung der Strategie „Illustrieren am Beispiel“ in der Lehre formulieren, die durch weitergehende Analysen spezifiziert und durch Folgestudien gestützt werden soll: Die Angabe eines Beispiel allein hat zunächst noch keinen illustrativen Charakter, sondern es sollte diagrammatische Tätigkeit von einer bestimmten Qualität dazukommen, um eine effektive Illustration der Beweisschritte am Beispiel zu erreichen.

Literatur

- Bauer, T., Müller-Hill, E., Neuhaus-Eckhardt, S. & Rach, S. (2021). Beweisverständnis im Mathematikstudium unterstützen: Vergleich unterschiedlicher Varianten der Strategie ‘Illustrieren am Beispiel’. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43, 311–346.
- Bauer, T., Müller-Hill, E., Neuhaus-Eckhardt & Rach, S. (2022). „Illustrieren am Beispiel“ beim Beweisverstehen: Beispielkonstruktionsprozesse von Mathematikstudierenden. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 237-240). WTM.
- Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking: Affordances and constraints. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Hrsg.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (S. 57-66). Springer.
- Giardino, V. (2017). Diagrammatic reasoning in mathematics. In L. Magnani & T. Bertolotti (Hrsg.), *Springer handbook of model-based science* (S. 499-522). Springer.
- Lakoff, G. & Nunez, R. E. (2013). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. English (Hrsg.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (S. 21-89). Routledge.
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 289–314.