Schnelle Simulationsmethoden zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Dortmund

von
Dipl.-Ing. Markus Plura MSc.

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Edgar Voges
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Reinhold Pregla
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Dezember 2004

17. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Mein außerordentlicher Dank gilt Herrn Professor Voges für die interessante und abwechslungsreiche Aufgabenstellung. Durch die sehr guten Möglichkeiten, die angenehme Arbeitsatmosphäre und durch stete Diskussionsbereitschaft hat er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Professor Pregla möchte ich für die Übernahme des Koreferats danken.

An dieser Stelle danke ich auch meinen Kollegen, vor allem Dr. Dirk Schulz, Dr. Jens Kissing, Jens Lenge und Ansgar Steinkamp, die durch anregende Diskussionen über Simulationsalgorithmen, numerische Mathematik und deren praktische Umsetzung wesentlichen Einfluss auf das Gelingen hatten. Für die kritische Durchsicht meines Manuskripts möchte ich Dr. Jens Kissing und Marco Wiedenhaus danken.

Eine Durchführung dieser Arbeit wäre ohne die finanzielle Unterstützung der DFG nicht möglich gewesen. Für die Finanzierung eines Großteils der Projektdauer bedanke ich mich.

Nicht unerwähnt bleiben soll der Einfluss zahlreicher Studenten und Diplomarbeiter am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Dank gilt hier besonders Thorsten Balslink für interessante Diskussionen und hohes Engagement.

Mein größter Dank gilt jedoch meiner Frau Petra und meiner Tochter Nele, die meine Arbeit mit großem Verständnis und viel Geduld begleitet haben, sowie meinen Eltern, die mir meine Ausbildung ermöglichten.

Kapitel 1

Einleitung

Durch ihre hohen Übertragungsbandbreiten und ihre geringe Streckendämpfung haben sich faseroptische Übertragungssysteme als fester Bestandteil in der digitalen Übertragungstechnik etabliert. Die zu Anfang der Entwicklung eingesetzten Punkt-zu-Punkt Verbindungen wurden im Zuge der rasanten Weiterentwicklung der optischen Übertragungstechnik durch Systeme höherer Komplexität ersetzt. Aktuelle Systemkonzepte erlauben neben wesentlich höheren Übertragungsbandbreiten durch Mehrkanal-Übertragungen im Wellenlängenmultiplex (DWDM: Dense Wavelength Division Multiplex) auch eine flexiblere Nutzung der Netze. Hier ist vor allem die Entwicklung von transparenten geschalteten optischen Netzen zu erwähnen.

Die eigentliche Faserstrecke wird im Weitverkehrssystem aus kaskadierten Faserabschnitten aufgebaut, wobei in jedem Abschnitt Dämpfung und Dispersion kompensiert wird. In jedem Abschnitt wird deshalb ein Erbium-dotierter Faserverstärker (EDFA) vor der Standardeinmodenfaser eingesetzt, welcher die Faserdämpfung ausgleicht. Am Ende des Faserabschnitts wird die Dispersion durch eine aufgetrommelte dipersionskompensierende Faser ausgeglichen (Kapitel 2.3).

Für die Übertragung werden derzeit Datenraten von bis zu 40 GBit/s pro Kanal genutzt. Die Entwicklung solcher Netze verlangt zunehmend nach Entwurfswerkzeugen, die eine Analyse des Systemverhaltens zulassen und Rückschlüsse auf allgemeine Kenngrößen wie Bitfehlerraten oder die Verschlechterung der Augenöffnung (EOP: Eye Opening Penalty) ermöglichen.

Durch den Einsatz von Simulationsprogrammen kann diesen Forderungen entsprochen werden. Bei der Simulation wird das Verhalten unterschiedlicher Systemkomponenten durch mathematische Modelle, meist Differentialgleichungen, beschrieben. Je genauer die Modelle gewählt, d.h. je mehr physikalische Effekte in die Modellierung eingebracht werden, desto aufwändiger werden die Modellgleichungen und ihre Lösungsalgorithmen. Mit steigender Güte der optischen Übertragungssysteme werden die einzelnen Komponenten in zunehmendem Maße an der Grenze des physikalisch Machbaren betrieben. Für die Simulation bedeutet dies, dass die Modellgleichungen aufwändiger werden. Die steigende Systemkomplexität verlangt damit auch nach leistungsfähigeren Simulationsprogrammen und schnelleren Lösungsalgorithmen, mit denen sich diese Arbeit befasst, um einen Systementwurf schneller und kostengünstiger durchführen zu können.

Diese Arbeit gliedert sich in die folgenden Abschnitte:

In Kapitel 2 wird zunächst die Entwicklung in der optischen Nachrichtentechnik kurz vorgestellt. Verschiedene Generationen von optischen Übertragungssystemen werden mit ihren charakteristischen Eigenschaften erläutert. Nachfolgend wird der Aufbau einer optischen Übertragungsstrecke, wie sie aktuell eingesetzt wird, skizziert und auf die einzelnen Komponenten kurz eingegangen.

Kapitel 3 geht dann auf die grundlegenden Eigenschaften der zentralen Komponente in jedem optischen Übertragungssystem, der Einmodenfaser, ein. Es werden die Modellgleichungen der Einmodenfaser eingeführt, die möglichst effizient zu lösen sind. Die bei der Signalübertragung auftretenden Fasereffekte werden kurz in ihrer Wirkungsweise und ihrem Wirkungsbereich vorgestellt.

Für die spätere Bewertung der Lösungsalgorithmen der Modellgleichungen werden nachfolgend (Kapitel 4) unterschiedliche Signalgütemaße vorgestellt. Sie bilden die Grundlage, um später unterschiedliche Algorithmen miteinander vergleichen zu können.

Das Kapitel 5 gibt einen Überblick über Algorithmen zur Lösung der Ausbreitungsgleichungen. Diese Algorithmen werden hier ausführlich vorgestellt und bewertet.

Der derzeit meistverwendete Simulationsansatz, der so genannte Split-Step-Ansatz wird in Kapitel 6 eingeführt. Die unterschiedlichen Varianten dieses Verfahrens werden erläutert und bewertet. Einige Sonderformen werden in den nachfolgenden Kapiteln weiter vertieft.

So auch die Modellierung des linearen Split-Step Operators durch IIR-Filter. In Kapitel 7 wird diese Variante des Split-Step-Verfahrens eingeführt, die eine Lösung der Modellgleichung ohne die Verwendung von aufwändigen Fourier-Transformationen generiert.

Kapitel 8 führt die so genannte Kollokations-Methode ein, welche ebenfalls auf dem Split-Step-Prinzip beruht. Die Signalverläufe werden hier anhand orthogonaler Basisfunktionen entwickelt. Abhängig von der Wahl der Basisfunktionen kann die zweifache Zeitableitung in der Modellgleichung auch analytisch angegeben werden, was eine schnelle Berechnung ermöglicht.

Die Wahl der Schrittweiten für die verschiedenen Simulationsmethoden werden in Kapitel 9 behandelt. Diese Verteilungen werden basierend auf unterschiedlichen Kriterien ermittelt und anhand ihres Aufwands und der Berechnungsgenauigkeit beurteilt.

Abschließend wird die Simulation der Signalausbreitung in optischen Glasfasern durch neuronale Netze behandelt (Kapitel 10). Neuronale Netze sind in der Lage, jeden linearen und nichtlinearen Zusammenhang zu 'erlernen'. Diese Grundeigenschaft wird hier genutzt, um die nichtlineare Übertragungsfunktion der Glasfasern nachzubilden.

Kapitel 2

Aufbau von faseroptischen Übertragungssystemen

2.1 Entwicklung der Nachrichtenübermittlung

Die Evolution der Nachrichtenübertragungssysteme ist in den letzten 150 Jahren rasant vorangeschritten. Die Anfänge der Nachrichtenübermittlung sind in der Übersendung von Feuer- und Rauchzeichen zu sehen, wie sie in vielen Zivilisationen eingesetzt wurden. Dieser Ansatz wurde später im 18. Jahrhundert durch die Verwendung von Lampen und anderem Signalisierungsgerät weiter verwendet.

Einen entscheidenden Entwicklungssprung brachte die Einführung der Telegraphie etwa um 1830. Dies war die Einführung der elektrischen Telekommunikation, mit der nun auch große Distanzen überbrückt werden konnten. 1876 wurde mit der Telefonie ein weiterer Meilenstein in der analogen Übertragung von Signalen gelegt.

Diese Technologie wurde 1940 durch die Einführung von Koaxialkabeln weiter verbessert. Jedoch stieß auch diese Technik aufgrund des stark frequenzabhängigen Verlustes der Koaxialleitungen bald an ihre Grenzen. Es folgte 1948 die Einführung der Mikrowellentechnik, bei der nun ein hochfrequenter Träger genutzt wurde, um auf diesen mit verschiedenen Modulationstechniken die Nutzinformation aufzuprägen.

Die Erfindung und Demonstration des Lasers 1960 setzte die Entwicklung hin zu optischen Übertragungssystemen in Gang. Anfangs fehlte noch ein geeignetes Übertragungsmedium, welches dann jedoch 1966 mit dem Vorschlag der optischen Faser gefunden war. Diese Fasern hatten anfangs mit der enormen Dämpfung von etwa 1000 dB/km noch keine geeigneten Eigenschaften für eine Übertragung. Jedoch schon um 1970 konnte die Dämpfung bei einer Wellenlänge von 1 μm auf etwa 20 dB/km gesenkt werden. Zeitgleich wurden GaAs-Halbleiterlaser vorgestellt, die bei Raumtemperatur operierten. Mit dieser Kombination war der Grundstein für die weitergehende Entwicklung der optischen Nachrichtentechnik gelegt.

2.2 Generationen optischer Übertragungssysteme

Nach einer Entwicklungszeit von etwa 10 Jahren war 1980 die erste Generation bei 0,8 μm arbeitender optischer Übertragungssystem vorgestellt. Diese Systeme erreichten eine Datenrate von 45 MB/s und einen Regeneratorabstand von 10 km.

Schon in den 70er Jahren war klar, dass der Regeneratorabstand erheblich erhöht werden konnte, indem eine Übertragung bei einer Wellenlänge von 1,3 μm eingeführt würde. Hier beträgt die Faserdämpfung weniger als 1 dB/km. Darüber hinaus liegt der Dispersionsnulldurchgang der optischen Fasern in diesem Bereich. Aus diesem Grund wurde die Entwicklung von InGaAsP-Halbleiterlasern und Detektoren für diese Wellenlänge mit größtem Einsatz vorangetrieben. 1980 war dann das erste System bei 1,3 μm kommerziell verfügbar, welches jedoch noch an der hohen Dispersion der verwendeten Mehrmodenfaser krankte und Datenraten kleiner gleich 100 MB/s erreichte.

1981 wurde in einem Laborexperiment erstmalig eine Einmodenfaser in einer Übertragung von 44 km Länge eingesetzt, und es wurde eine Datenrate von 2 GB/s erreicht. Diese Systeme der zweiten Generation erlangten dann 1987 die Marktreife, jedoch konnte ein Regeneratorabstand von etwa 50 km aufgrund der Faserdämpfung von etwa 0,5 dB/km nicht überschritten werden.

Schon 1979 wurde eine Faser realisiert, die mit nur 0,2 dB/km ihr Dämpfungsminimum bei 1,55 μm aufwies. Durch die bei dieser Wellenlänge hohe Dispersion und die fehlenden Laser konnte die dritte Generation der optischen Übertragungssysteme lange nicht eingeführt werden. Erst 1990 war ein System mit einer Datenrate von 10 GB/s und einem Regeneratorabstand von 100 km möglich. Dem Dispersionsproblem wurde mit dispersionsverschobenen Fasern und Einmodenlasern begegnet. Das Signal musste etwa alle 60-70 km elektrisch regeneriert werden. Durch die Verwendung von homodynen bzw. heterodynen Detektoren konnte zu diesem Zeitpunkt die Empfindlichkeit der Empfänger und die Faserlänge erhöht werden.

Die Einführung von optischen Verstärkern kennzeichnete die vierte Generation der optischen Übertragungssysteme. Hier konnte nun anstatt einer periodischen elektrischen Regeneration eine optische Signalverstärkung mittels Erbium-dotierter Faserverstärker vorgenommen werden. Ab dem Jahr 1991 wurde im Labor an diesen Systemen gearbeitet und 1996 wurden mit dieser Technik die ersten transozeanischen Übertragungsstrecken implementiert. Im Labor wurde diese Technik um das Wellenlängenmultiplex (WDM) erweitert, welches die gleichzeitige Übertragung mehrerer Wellenlängen über die gleiche Übertragungsfaser ermöglichte. Im Jahr 2000 ist das erste Unterseeübertragungssystem mit dieser Technik in Betrieb gegangen.

Die Einführung der Dispersionskompensation kennzeichnet die fünfte Generation der optischen Übertragungssysteme. Nachdem das Problem der Dämpfung durch die EDFAs gelöst war, wurde nun nach Lösungen gesucht, die Dispersion zu kompensieren. Hier wurden zahlreiche Ansätze verfolgt, durchgesetzt hat sich die Verwendung von dispersionskompensierende Fasern (DCF). Die Fasern weisen ein höhere Dispersion umgekehrten Vorzeichens auf, so dass durch die Nachschaltung dieser Fasern Dispersion kompensiert wird.

2.3 Aufbau heutiger Übertragungssysteme

Der Systemaufbau heutiger Übertragungsysteme und ihrer Einzelkomponenten wird in diesem Abschnitt vorgestellt.

Abbildung 2.1 zeigt den schematischen Aufbau derartiger Systeme. Die kohärenten CW-Signale (Continous Wave) werden durch DFB-Laser (Distributed Feedback Laser) erzeugt, die auf der Basis von InGaAsP (Indium Gallium Arsenid Phosphid) hergestellt werden. Für die Übertragung werden auf dieses CW-Laserlicht Signale mit einer Kanaldatenrate von bis zu 40 GBit/s moduliert. Hierzu wird ein Pulsgenerator zur Signalgenerierung eingesetzt, der das Signal speziell bei hohen Datenrate durch Zeitmultiplex (TDM) erzeugt. Um dies zu erreichen, werden mehrere Signale geringer Datenrate ineinander verschachtelt, um die hohen Datenraten zu erlangen. Bis zu einer Kanaldatenrate von etwa 40 GBit/s kann das Signal durch elektrisches TDM (ETDM) generiert werden. Für Datenraten größer 40 GBit/s wird hierzu ein optisches TDM (OTDM) eingesetzt. Direktmodulierte Laser ohne nachgeschalteten Modulator werden bei Datenraten größer als 10 GBit/s aufgrund der dann auftretenden Schwankungen der Laseremissionswellenlänge nicht eingesetzt.

Für die Modulation werden in der Regel Intensitätsmodulationen verwendet, bei denen die Intensität des übertragenen Laserlichts variiert wird. Als Modulationsformat haben sich NRZ (Non Return To Zero) und RZ (Return To Zero) durchgesetzt. Die NRZ-Signale müssen aufgrund der durchgehenden Einsen elektrisch verarbeitet werden. Da hiermit nur Datenraten bis etwa 40 GBit/s bearbeitet werden können, werden Signale mit höherer Datenrate im RZ-Verfahren moduliert, welches sich durch optisches Multiplex auch für diese Datenraten eignet.

Die eigentliche Modulation erfolgt mittels externer Mach-Zehnder-Modulatoren. Alternativ können auch Elektroabsorptions-Modulatoren zum Einsatz kommen, um dem CW-Signal die Bitfolge aufzumodulieren. Die Laserdiode in Verbindung mit dem Pulsgenerator sowie dem Modulator bildet den Sender des Systems.

Die hohe zur Verfügung stehende Übertragungsbandbreite der optischen Fasern wird durch das so genannte Wellenlängenmultiplex (WDM) besser ausgenutzt. Hierbei wird eine große Anzahl von Sendern, die bei unterschiedlichen Wellenlängen arbeiten, eingesetzt, um die Bandbreite zu füllen. In aktuellen Feld- und Laborversuchen konnten Gesamtübertragungskapazitäten von 3,2 TBit/s unter Einsatz von Forward Error Correction (FEC) [1] bzw. 10 TBit/s bei einer Nutzung von teilweise über 200 Kanälen und einer Datenrate von 40GHz/s erreicht werden [2, 3].

Um die verschiedenen Sender in eine Faser einspeisen zu können, sind Multiplexer notwendig. Hier stehen zwei verschiedene Ausführungen zur Verfügung. Die erste ist die Verwendung von kaskadierten 3 dB-Kopplern. Diese Variate führt jedoch zu hohen Koppelverlusten von 3 dB plus einer zusätzlichen technologieabhängigen Dämpfung pro Kopplerstufe. Derartig hohe Verluste treten bei Arrayed Waveguide Gratings (AWGs) nicht auf. Aus diesem Grund werden diese Bauelemente in heutigen Systemen bevorzugt eingesetzt.

Das Kernstück jeder optischen Übertragungsstrecke, die Faserübertragungsstrecke, wird häufig aus kaskadierten Faserabschnitten aufgebaut, wobei in jedem Abschnitt Dämpfung

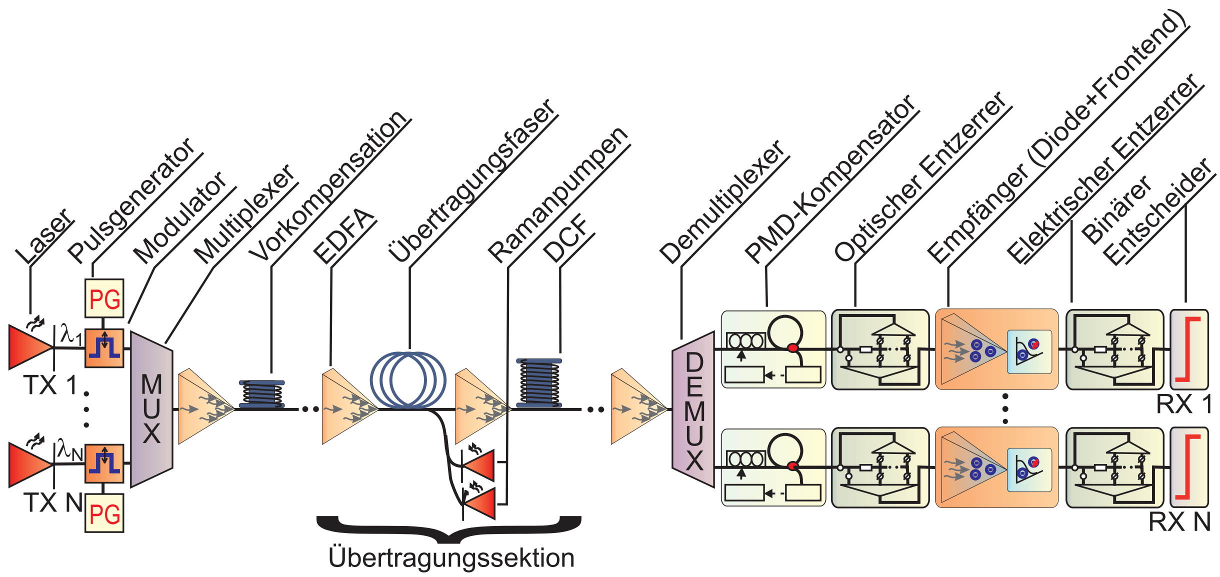


Abbildung 2.1: Aufbau eines modernen optischen Übertragungssystems.

und Dispersion kompensiert werden. Am Ende des Faserabschnitts wird die Dispersion durch eine aufgetrommelte dipersionskompensierenden Faser kompensiert. Häufig wird die Dispersion, wie in der Abbildung gezeigt, durch eine geteilte Vor- und Nachkompensation ausgeglichen, da hierdurch der Einfluss von nichtlinearen Effekten auf der Übertragungsfaser geringer gehalten werden kann. Die Länge der einzelnen Faserabschnitte oder auch Sektionen beträgt etwa 40 bis 120 km.

Typische Verstärkerabschnitte bei terrestrischen Systemen liegen bei bis zu 120 km Länge, in welchen eine Kanaleingangsleistung von etwa 10 mW erforderlich ist. Bei Transozeanstrecken werden Verstärkerfeldlängen von 30-40 km bei einer Eingangsleistung von ca. 5 mW realisiert, um den Einfluss nichtlinearer Effekte gering zu halten.

Die Verstärkung in jedem Faserabschnitt wird durch den Einsatz von Erbium dotierten Faserverstärkern (EDFAs) und vorwärts- oder rückwärtsgerichterten Raman-Pumplasern erzielt. In den EDFAs werden in den einige zehn Meter langen Erbium-dotierten Fasern die Elektronen der Erbium-Ionen durch Pumplaser mit einer höheren Frequenz als das Signal in einen höheren Energiezustand angehoben. Die Signalphotonen stimulieren den Rückfall der Elektronen in den Grundzustand. Hierbei wird das Signalphoton dupliziert und somit verstärkt.

Der Einsatz der Ramanverstärkung erfolgt in der Regel rückwärtsgerichtet, da in Vorwärtsrichtung häufiger EDFAs zum Einsatz kommen. Unter der Ausnutzung des Raman-Effektes wird die Energie der Pumpkanäle zu den niederfrequenteren Signalkanälen transferiert. Die Leistung der Pumpen muss sehr hoch gewählt sein, da die Effizienz dieser Verstärkung nur gering im Vergleich zu EDFAs ist. Zudem unterliegen die Pumpkanäle ebenfalls der Faserdämpfung.

Am Ende der kaskadierten Faserabschnitte werden die verschiedenen Kanäle wieder mittels Demultiplexern getrennt. Hier kommen ebenfalls AWGs zum Einsatz, die baugleich zu den Multiplexern sind.

Der Empfänger setzt sich aus verschiedenen zum Teil optionalen Einheiten zusammen. Als erstes ist ein PMD-Kompensator in Abbildung 2.1 dargestellt. Dieser wird speziell bei hohen Datenraten benötigt, um in Systemen mit Datenraten größer als 10 GBit/s die Degradation durch PMD zu kompensieren. Zusätzlich ist ein optischer Entzerrerfilter zur Restdispersionskompensation, wie sie in massiven WDM-Systemen auftritt, möglich. In einer Photodiode wird das optische Signal in ein elektrisches Signal gewandelt. Nachfolgend können elektrische Entzerrerschaltungen meistens auf FIR- und IIR-Filtern beruhend, eingesetzt werden. In einem binären Entscheider wird die gesendete Bitfolge detektiert.

Kapitel 3

Modellierung und Simulation der Signalausbreitung in Einmodenfasern

In diesem Abschnitt werden die für die Propagation von optischen Wellen grundlegenden Modellgleichungen und deren Charakteristika vorgestellt. Hierzu wird die nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLSG) herangezogen und näher erläutert. Nachfolgend werden für eine Propagation von optischen Wellen bedeutende lineare und nichtlineare Effekte vorgestellt und mit diesen Effekten verbundene Längenskalen eingeführt.

3.1 Eigenschaften der Einmodenfaser

Die wichtigste Komponente optischer Übertragungsstrecken ist die Glasfaser als Übertragungsmedium. Zum Einsatz kommt hier im Weitverkehrsbereich, den Metropolitan Area Networks (MANs) und zunehmend auch auf kürzeren innerstädtischen Strecken, den Wide Area Networks (WANs) die Einmodenfaser. Vor der Einführung der Modellgleichungen der Einmodenfaser werden die grundlegenden Eigenschaften der Glasfaser vorgestellt. Eine der wichtigsten Eigenschaften der Faser ist die hohe Bandbreite, die durch sie für eine Übertragung zur Verfügung gestellt wird. Durch die zuvor schon erläuterte Nutzung von WDM mit vielen Übertragungskanälen kann diese Bandbreite auch nahezu vollständig ausgenutzt werden.

Der Dämpfungsverlauf ist in Abbildung 3.1 für eine Vielzahl von zur Verfügung stehenden Einmodenfasertypen über der Frequenz aufgetragen. Das für die Übertragung in heutigen Übertragungssystemen genutzte Fenster um 1550 nm besitzt eine Breite von 210 nm, entsprechend 26 THz. In diesem Bereich wird eine Dämpfung kleiner 0,25 dB/km erreicht. Zusätzlich existiert um 1300 nm das in der Vergangenheit zuerst benutzte Übertragungsfenster mit einer erhöhten Dämpfung von 0,4 dB/km und einer Breite von 100 nm. Diese beiden Übertragungsfenster sind durch eine erhöhte Dämpfung bei 1400 nm, hervorgerufen durch OH–Absorption, getrennt. Einige Spezialfasern reduzieren diesen Effekt, so dass auch dieser Frequenzbereich dann für eine WDM-Übertragung nutzbar ist.

Der gesamte Frequenzbereich wird in verschiedene Übertragungsbänder unterteilt, die durch historische Entwicklung bedingt sind. So liegt das C-Band (Conventional Band)

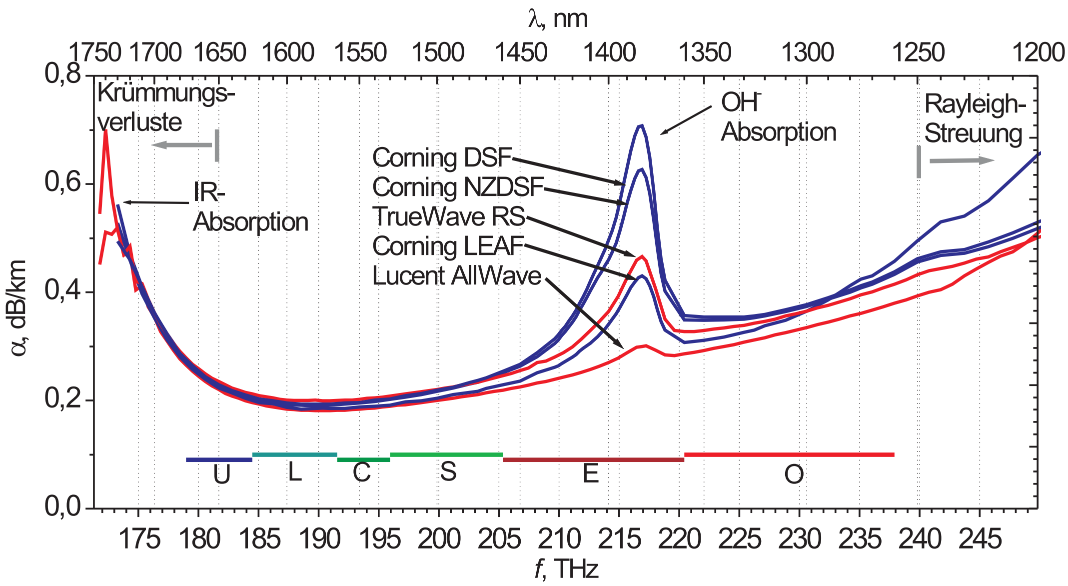


Abbildung 3.1: Dämpfungsverläufe für einige zur Verfügung stehende Einmodenfasertypen über der Frequenz [5].

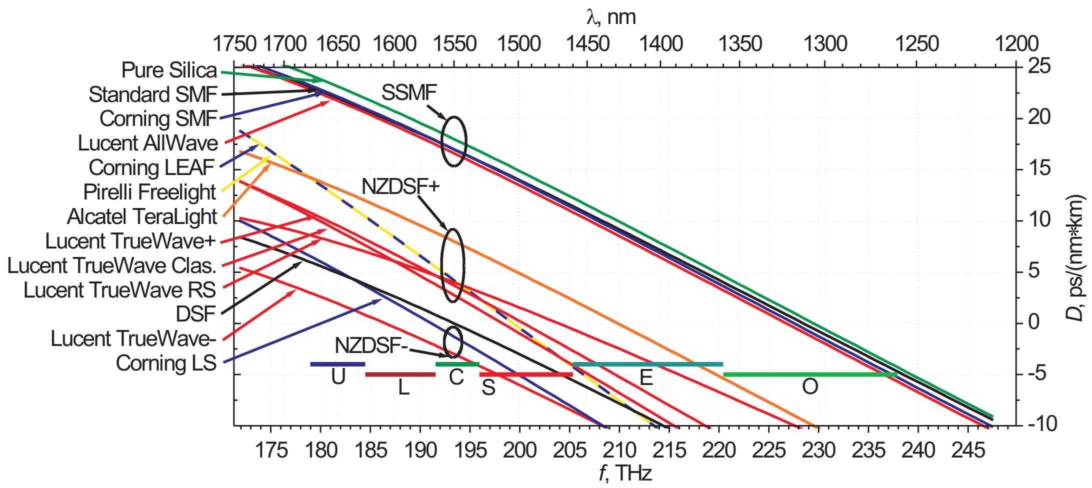


Abbildung 3.2: Dispersionsverläufe für einige zur Verfügung stehende Einmodenfasertypen über der Frequenz [5].

Abkürzung	Name	Wellenlängenbereich, nm	Frequenzbereich, THz	Bandbreite, THz
O	Original	1260-1360	220-238	18
E	Extended	1360-1460	205-220	15
S	Short Wavelength	1460-1530	196-205	9
C	Conventional	1530-1565	196-192	4
L	Long Wavelength	1565-1625	184-192	8
U / XL	Ultra / Extra Long Wavelength	1625-1675	179-184	5

Tabelle 3.1: Frequenzbänder in der optischen Übertragungstechnik.

Fasertyp	α,dB/km	D,ps/(nm*km)	S,ps/(nm^2*km)	n$_2$,m^2/W	A$_{eff}$,μ m^2	γ,(W*km)$^{-1}$
SSMF						
Standard SMF	0,2	17	0,056	$2,7\cdot10^{-20}$	80	1,37
Corning SMF	0,21	17	0,058	$2,7\cdot10^{-20}$	86	1,27
Lucent AllWave	0,23	16,6	0,058	$2,7\cdot10^{-20}$	87	1,26
Pure Silica	0,19	18	0,058	$2,7\cdot10^{-20}$	75	1,46
NZDSF+						
Alcatel TeraLight	0,23	8	0,058	$2,7\cdot10^{-20}$	65	1,68
Corning LEAF	0,23	4,2	0,088	$2,3\cdot10^{-20}$	72	1,29
Lucent TrueWave RS	0,23	4	0,045	$2,7\cdot10^{-20}$	55	1,46
Lucent TrueWave+	0,23	3,7	0,065	$2,7\cdot10^{-20}$	55	1,46
Lucent TrueWave		2,75	0,07			
Pirelli Freelight	0,23	4,2	0,088	$2,7\cdot10^{-20}$	72	1,52
NZDSF-						
Lucent TrueWave-	0,23	-3	0,056	$2,7\cdot10^{-20}$	55	1,99
Corning LS	0,25	-1,3	0,071	$2,7\cdot10^{-20}$	55	1,99
DSF						
DSF	0,23	0	0,056	$2,7\cdot10^{-20}$	55	1,99
DCF						
Lycom DK	0,5	-102	-0,23			
Lycom WBDK	0,5	-102	-0,35			
Lycom HSDK	0,5	-102	-1,1			
Corning SC	0,5	-111	-2,335			

Tabelle 3.2: Typische Parameter für verschiedene Fasertypen.

bei 1530-1565 nm. Dieses Übertragungsband ist wie schon zuvor erläutert durch die Verfügbarkeit von optischen Verstärkern in diesem Bereich entstanden. Für zukünftige Systeme wird auch das S-Band (Short Wavelength Band), das L-Band (Long Wavelength Band) und das U-Band oder XL-Band (Ultra Long Wavelength Band oder Extra Long Wavelength Band) mit einbezogen, um die WDM-Bandbreite zu vergrößern. Die Daten der verschiedenen Bänder sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Eine weitere charakteristische Grundeigenschaft der optischen Fasern ist ihre spektrale Gruppenlaufzeitstreuung. Die Gruppenlaufzeitstreuung wird durch den Dispersionsparameter D und die Dispersionssteigung S charakterisiert. Durch eine unterschiedliche Dimensionierung der Faserquerschnitte und des verwendeten Materials lassen sich die in Tabelle 3.2 aufgeführten Fasern herstellen. Hier sind die Faserparameter bei $\lambda = 1,55\,\mu$m für Einmodenfasern verschiedener Hersteller und Einsatzgebiete aufgelistet.

Die Fasern werden ihren Charakteristika nach in unterschiedlichen Gruppen zusammengefasst. Abbildung 3.2 zeigt die Dispersionsverläufe für die unterschiedlichen oben aufgelisteten Fasertypen über der Frequenz. Die Standard Single Mode Fibers (SSMFs) weisen im Bereich von 1550 nm mit 17 ps/(nm·km) die höchste Dispersion und einen Dispersionsnulldurchgang bei 1300 nm auf. Hieraus ist zu ersehen, dass diese Fasern vor der Entwicklung des EDFAs im O-Band genutzt wurden und hier die geringe Dispersion ausgenutzt wurde. Diese Fasern werden auch in heutigen Systemen bei 1550 nm betrieben, jedoch wird hier eine Dispersionskompensation unumgänglich. Dabei kommen dispersionkompensierende Fasern (DCFs) zum Einsatz. Diese Fasern weisen einen höheren Dispersionsparameter mit umgekehrtem Vorzeichen auf, wodurch die Kompensation erfolgt. Weitere Fasertypen sind die dispersionverschobene Faser (DSF) und die Non Zero Dispersion Shifted Fiber (NZDSF). Bei diesen Fasern sind die Dispersionsgänge verschoben, so dass die Dispersionsnulldurchgänge bei 1550 nm bzw. in der Nähe von 1550 nm liegen. Dies kann in hochbitratigen Systemen mit hohen Kanalleistungen den Vorteil des begrenzten Einflusses der Nichtlinearität bringen. Jedoch hat sich bei DSFs gezeigt, dass diese eine hohe Degradation durch Vierwellenmischung im Bereich des Dispersionsnulldurchganges zur Folge haben. Somit werden DSF heute kaum noch eingesetzt.

3.2 Modellgleichungen

Nach der Darstellung der Grundeigenschaften der Faser werden im folgenden Kapitel nun die Grundgleichungen für die Ausbreitung von optischen Wellen in Glasfasern eingeführt. Diese Gleichung hat die mathematische Form entsprechend der nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLSG) und wird im weiteren als solche bezeichnet. Da sich diese Arbeit mit der Lösung der NLSG befasst wird diese hier nicht detailliert hergeleitet, sondern es wird auf [6] verwiesen. Eine sehr genaue Form dieser Gleichung wird als verallgemeinerte Form der NLSG bezeichnet

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_i}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A_i + (3-2i)\frac{1}{2}\Delta\beta_1 \frac{\partial A_i}{\partial T} - \frac{\mathrm{j}}{2}\beta_{2_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial T^2} - \frac{1}{6}\beta_{3_i}\frac{\partial^3 A_i}{\partial T^3} = \\
&\quad -\mathrm{j}\kappa_\mathrm{i}(\mathrm{z}) \exp\left(\mathrm{j}\,(3-2\mathrm{i}\,)\Delta\beta_{(0)}\,\mathrm{z}\right) \mathrm{A}_{3-\mathrm{i}} \\
&-\mathrm{j}\,\gamma\left(1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\right)\left\{\delta\left|\mathrm{A_i}\right|^2 \mathrm{A_i} + \frac{2}{3}\delta\left|\mathrm{A}_{3-\mathrm{i}}\right|^2 \mathrm{A_i} + \frac{1}{3}\delta \exp\left(\mathrm{j}\,2\,(3-2\mathrm{i})\,\Delta\beta_{(0)}\,\mathrm{z}\right) \mathrm{A_i^*}\mathrm{A}_{3-\mathrm{i}}^2\right. \\
&+(1+\delta)A_i\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[h_a(T-\tau)+h_b(T-\tau)]\left|A_i(\tau)\right|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(T-\tau)\left|A_{3-i}(\tau)\right|^2 d\tau\right) \\
&+\frac{1}{2}(1-\delta)A_{3-i}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_b(T-\tau)A_i(\tau)A_{3-i}^*(\tau)\,d\tau + \exp\left(\mathrm{j}2(3-2\mathrm{i})\,\Delta\beta_{(0)}\,\mathrm{z}\right)\right. \\
&\qquad\left.\left.\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h_b(T-\tau)A_i^*(\tau)A_{3-i}(\tau)\,d\tau\right)\right\} .
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

z beschreibt den Ort und T die Zeit. Die komplexen Signaleinhüllenden $A_i(z,T) = A_i$ beider Polarisationen sind auf die Einheit $\sqrt{\mathrm{W}}$ normiert. Mit $i = 1,2$ werden hier die zwei unterschiedlichen Polarisationen gekennzeichnet [18]. In den ersten beiden Zeilen der Gleichung sind die linearen Fasereffekte, Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten α, Doppelbrechung $\Delta\beta_1$, chromatische Dispersion β_{2_i} und β_{3_i}, sowie lineare Modenkopplung $\Delta\beta_0$ beschrieben. $\kappa_i(z)$ beschreibt formal eine ortsabhängige Modenkopplung. In der dritten Zeile wird der nichtlineare Kerr-Effekt modelliert. γ ist der nichtlineare Koeffizient, $\delta = 0,82$ gibt die relative Stärke von elektronischem und molekularem Anteil an der Polarisation an und ω_0 ist die Simulationsmittenfrequenz. Die stimulierte Raman-Streuung

(SRS) wird in den letzten Zeilen durch die Faltungsterme beschrieben. $h_{a,b}(T-\tau)$ sind die die Raman-Streuung charakteristisch beschreibenden Funktionen bzw. Impulsantworten.

Bei der chromatischen Dispersion erster und zweiter Ordnung wird fortan davon ausgegangen, dass die mit i unterschiedenen Werte für beide Polarisationen gleich groß sind. Die modale Doppelbrechung errechnet sich aus $\Delta\beta_0 = \beta_{0_1} - \beta_{0_2}$. $\Delta\beta_1 = \beta_{1_1} - \beta_{1_2}$ beschreibt die Gruppenlaufzeitdifferenz zwischen den beiden orthogonalen Moden und verursacht hierdurch Polarisationsmodendispersion (PMD). Gl. (3.1) ist mit Hilfe der Transformation $T \to t - (\beta_{1_1} + \beta_{1_2})\, z/2$ auf die mittlere Gruppenlaufzeit normiert worden (Retardierung).

Der nichtlineare Koeffizient in $[1/(\mathrm{W} \cdot \mathrm{km})]$ wird bestimmt als

$$\gamma = \frac{n_2\, \omega_0}{c_0 A_{\mathrm{eff}}}. \tag{3.2}$$

n_2 bezeichnet den intensitätsbezogenen nichtlinearen Brechungsindex in $[\mathrm{m}^2/\mathrm{W}]$. Gl. (3.1) ist für Pulsdauern bis herab zu 20 fs oder analogen Bandbreiten von bis zu 50 THz gültig [19, 20].

Zur Diskussion einzelner Effekte ist es aufgrund der Komplexität der verallgemeinerten nichtlinearen Schrödinger-Gleichung sinnvoll, einige Vereinfachungen durch Näherungen durchzuführen. Für Impulsdauern größer 0,1 ps lassen sich die mit den Impulsantworten korrespondierenden Raman-Gewinnfunktionen durch Geraden approximieren. Werden nur Ableitungen der nichtlinearen Terme bis zur ersten Ordnung berücksichtigt, so resultiert die folgende deutlich vereinfachte Ausbreitungsgleichung für eine Polarisation der komplexen Einhüllenden der Signalamplitude A

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A - \frac{\mathrm{j}}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = \\ -\mathrm{j}\gamma &\left\{ |\mathrm{A}|^2 \mathrm{A} - \frac{\mathrm{j}}{\omega_0} \frac{\partial\, |\mathrm{A}|^2 \mathrm{A}}{\partial \mathrm{T}} - \tau_{\mathrm{SRS}} \mathrm{A} \frac{\partial\, |\mathrm{A}|^2}{\partial \mathrm{T}} \right\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit der Raman-Zeitkonstante τ_{SRS} [26]

$$\tau_{\mathrm{SRS}} = \int_{-\infty}^{+\infty} T\, [h_a(T) + h_b(T)]\; dT = \frac{g_R(\Delta\omega_{\mathrm{max}})}{\gamma\, \Delta\omega_{\mathrm{max}} A_{\mathrm{eff}}}. \tag{3.4}$$

Ein typischer Wert ist $\tau_{\mathrm{SRS}} = 5\, fs$. $g_R(\Delta\omega_{\mathrm{max}})$ ist der Raman-Gewinnkoeffizient in m/W bezogen auf die Pumpfrequenz ω_0 und die Frequenzverschiebung $\Delta\, \omega_{\mathrm{max}}$. Der vorletzte Term in Gl. (3.3) bewirkt eine Selbstversteilerung der Impulsflanken (Self-Steepening-Effekt) [27, 20], der letzte beschreibt approximativ SRS. Bei Impulsdauern größer als 1 ps führt die Vernachlässigung der zeitlichen Ableitungen der nichtlinearen Terme und der Dispersion zweiter Ordnung auf die nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLSG) in der Form

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A - \frac{\mathrm{j}}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = -\,\mathrm{j}\gamma\, |\mathrm{A}|^2\, \mathrm{A}. \tag{3.5}$$

Die bisher behandelten Ausbreitungsgleichungen sind sowohl für die Modellierung von Ein-, als auch von Mehrwellenlängensystemen geeignet, wenn die Beschreibung auf den gesamten betrachteten Frequenzbereich ausgedehnt wird (Total Field Approach). Für typische Systeme mit Impulsdauern größer 1 ps und Gesamtbandbreiten kleiner 10 THz kann dann mit der vereinfachten Gl. (3.3) gearbeitet werden. Wird darüber hinaus auch SRS vernachlässigt, genügt Gl. (3.5). Diese Gleichung wird bei den Untersuchungen der verschiedenen Lösungsverfahren der NLSG als zu lösende Referenzgleichung verwendet.

Neben den voranstehend aufgeführten Vereinfachungen sind jedoch auch von anderen Ansätzen ausgehende Modifikationen der Gleichung denkbar. Für Mehrkanalsysteme ist es möglich, ein nichtlineares gekoppeltes Differenzialgleichungssystem aufzustellen. Jede einzelne nichtlineare Differenzialgleichung beschreibt genau einen Kanal, daher wird der Ansatz auch als Single Channel Approach bezeichnet. Untenstehend findet sich die Gleichung für Impulsdauern im Bereich größer 1 ps [20] für eine Polarisation. Intrakanal-SRS ist vernachlässigt worden und n bezeichnet die Kanalnummer. Die Kanäle sind in der Frequenz aufsteigend sortiert

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A_n + (\beta_{1_n} - \beta_{1_{\mathrm{ref}}}) \frac{\partial A_n}{\partial T} - \frac{\mathrm{j}}{2} \beta_{2_\mathrm{n}} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_{3_n} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = \\
&-\mathrm{j}\gamma \left\{ |\mathrm{A_n}|^2 + 2 \sum_{\mathrm{i=1,i\neq n}}^{\mathrm{N}} |\mathrm{A_i}|^2 \right\} \mathrm{A_n} - \mathrm{j}\gamma \sum_{\mathrm{n=i+j-k;i,j\neq k}} \mathrm{A_i A_j A_k^*} \exp(-\mathrm{j}\Delta \mathrm{kz}) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_n}{\omega_i} \frac{g_{\mathrm{ni}}}{2} |A_i|^2 + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{g_{\mathrm{ni}}}{2} |A_i|^2 ,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\Delta k &= k_i + k_j - k_k - k_n \\
&= -\beta_{2_n} (\omega_i - \omega_k)(\omega_j - \omega_k) \\
&\quad -\beta_{3_n} (\omega_i - \omega_k)(\omega_j - \omega_k) \left[\frac{(\omega_i + \omega_j)}{2} - \omega_0 \right].
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Die Terme der rechten Seite von Gl. (3.6) lassen sich den einzelnen nichtlinearen Effekten zuordnen. Der erste Term beschreibt die Selbstphasenmodulation (SPM), der zweite die Kreuzphasenmodulation (XPM) und der dritte Term die Vierwellenmischung (FWM). Die beiden letzten Terme modellieren die stimulierte Raman-Streuung (SRS). Der Raman-Gewinn g_{ni} ist bei linearer Approximation gegeben durch

$$
g_{\mathrm{ni}} = g_{\mathrm{max}} \left| \frac{\Delta\omega_{\mathrm{ni}}}{\Delta\omega_{\mathrm{max}}} \right| . \tag{3.8}
$$

Hierbei ist $\Delta\omega_{ni}$ der Frequenzversatz zwischen den Kanälen n und i und $\Delta\omega_{\mathrm{max}}$ der Abstand zwischen Pumpwelle und der g_{max} zugeordneten Frequenzverschiebung. Der Term ω_n/ω_i sorgt bei SRS für einen Erhalt der Photonenzahl.

Um den Einfluss der einzelnen Fasereffekte gegeneinander abschätzen zu können, werden hier verschiedene Längenskalen definiert [20].

- L_{eff}: Die effektive Wechselwirkungslänge oder auch effektive Länge gibt bezüglich der Dämpfung ein Maß für den Einfluss der nichtlinearen Effekte an. Wird anstatt mit einer dämpfungsbehafteten mit einer dämpfungsfreien Faser der Länge L_{eff} gerechnet, so zeigt sie eine identische Degradation durch Nichtlinearitäten. L_{eff} ist definiert als

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{P_0} \int_0^{\mathrm{L}} P_0\, e^{-\alpha z}\, dz = \frac{1 - e^{-\alpha\, L}}{\alpha} \approx \frac{1}{\alpha}. \tag{3.9}$$

  P_0 ist die Fasereingangsleistung und L die Faserlänge. Für $\alpha L \ll 1$ gilt $L_{\text{eff}} \approx L$, für $\alpha L \gg 1$ lässt sich $L_{\text{eff}} \approx 1/\alpha$ (Dämpfungslänge) setzen. Für Standardeinmodenfasern ($\alpha = 0,21\,\text{dB/km}$ bei $\lambda = 1,55\,\mu\text{m}$) ist die Dämpfungslänge $L_{\text{eff}} \approx 21\,\text{km}$.

- L_{nl}: Die nichtlineare Länge L_{nl}

$$L_{\text{nl}} = \frac{1}{\gamma P_0} \tag{3.10}$$

  gibt die Länge an, bei der ein gaußförmiger Impuls eine spektrale Verbreiterung um den Faktor 1,33 erfahren hat. Diese Verbreiterung entspricht etwa einer Degradation der Augenöffnung (EOP) des optischen Signals um 1 dB durch Nichtlinearitäten. Für $L \ll L_{\text{nl}}$ spielt die Fasernichtlinearität des Systems keine signifikante Rolle und kann vernachlässigt werden. In einer Standardeinmodenfaser beträgt L_{nl} bei 12 mW Eingangsleistung 57 km bzw. bei 5 mW Eingangsleistung 138 km.

- $L_{\text{GVD},1}$: Die Dispersionslänge erster Ordnung $L_{\text{GVD},1}$

$$L_{\text{GVD},1} = \frac{1}{\beta_2} \cdot \left(\frac{d}{DR}\right)^2 \tag{3.11}$$

  korrespondiert mit einer zeitlichen Verbreiterung durch Dispersion erster Ordnung um den Faktor $\sqrt{2}$. d (NRZ: $d = 1$, RZ: $d = 0,5$) bezeichnet das Tastverhältnis und DR gibt die Datenrate an. Diese Verbreiterung entspricht etwa einer Degradation der Augenöffnung (EOP) des optischen Signals um 1 dB durch Dispersion erster Ordnung β_2. In Standardeinmodenfasern und einer Datenrate von 10 GBit/s liegt $L_{\text{GVD},1}$ bei 80 km.

- $L_{\text{GVD},2}$: Analog lässt sich die Dispersionslänge zweiter Ordnung $L_{\text{GVD},2}$

$$L_{\text{GVD},2} = \frac{1}{\beta_3} \cdot \left(\frac{d}{DR}\right)^3 \tag{3.12}$$

  festlegen als eine zeitliche Verbreiterung durch Dispersion zweiter Ordnung um den Faktor $\sqrt{5}/2$, bei welchem eine ähnliche Degradation des Signals wie bei $L_{\text{GVD},1}$ auftritt. In Standardeinmodenfasern und einer Datenrate von 10 GBit/s liegt $L_{\text{GVD},2}$ bei > 1 Mkm.

- L_W: L_W ist die Walk-Off-Länge

$$L_\mathrm{W} = T_0/|d_{12}|. \tag{3.13}$$

Sie bezeichnet die Strecke, in der zwei zeitsynchrone Impulse, die sich mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten bewegen, einen Zeitversatz von genau einer Pulsbreite T_0 aufweisen. Häufig wird hier zur Definition der Walk-Off-Parameter $d_{12} = 1/v_{g1} - 1/v_{g2} = \beta_1(\omega_1) - \beta_1(\omega_2)$ verwendet, der die Differenz der längenbezogenen Gruppenlaufzeiten angibt. Ist $L \ll L_\mathrm{W}$, so hat Dispersion keinen signifikanten Einfluss bei der Berechnung von XPM und FWM.

3.3 Lineare Effekte

3.3.1 Dämpfung

Die Dämpfung elektromagnetischer Wellen reduziert den für die optische Nachrichtentechnik nutzbaren Wellenlängenbereich. Im technisch wichtigen Wellenlängenbereich von $0,5\,\mu$m - $1,6\,\mu$m wird die Dämpfung im wesentlichen durch die Rayleigh-Streuung sowie die IR- und die UV-Absorption bestimmt. Die minimale Dämpfung liegt bei heutigen Standardeinmodenfasern typischerweise bei der Wellenlänge von $1,55\,\mu$m und beträgt ca. $0,2\,$dB/km [28, 29].

Bei der Rayleigh-Streuung handelt es sich im betrachteten Wellenlängenbereich um den vorherrschenden Dämpfungsmechanismus. Sie tritt aufgrund von mikroskopischen Brechzahlschwankungen in der Glasfaser auf, an denen Teile des einfallenden Lichts gestreut werden. Die Größe der durch die Rayleigh-Streuung verursachten Dämpfung ist gemäß der Beziehung

$$\alpha \sim \frac{1}{\lambda^4} \tag{3.14}$$

wellenlängenabhängig. Für die Absorptionsprozesse sind zwei unterschiedliche Effekte maßgeblich. Die UV-Absorption resultiert aus der Anregung von Elektronenübergängen der O^{2-}-Ionen. Bei der IR-Absorption werden durch die einfallende Welle hingegen Molekülschwingungen des SiO_2 Moleküls angeregt.

3.3.2 Chromatische Dispersion

Jede spektrale Komponente einer Welle breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{3.15}$$

aus, ihre Energie propagiert mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \tag{3.16}$$

wobei β die Ausbreitungskonstante und ω die Kreisfrequenz der betrachteten Mode angibt. In einem dispersiven Medium sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit frequenzabhängig und nehmen unterschiedliche Werte an. Verschiedene spektrale Komponenten haben dann unterschiedliche Laufzeiten. Es liegt dann chromatische Dispersion vor, wodurch Signalverzerrungen bei der Übertragung auftreten.

In Einmodenfasern setzt sich die chromatische Dispersion aus der Materialdispersion und der Wellenleiterdispersion zusammen. Die Materialdispersion entsteht durch die Frequenzabhängigkeit der Brechzahl des Übertragungsmediums. Die Wellenleiterdispersion entsteht durch den Führungsmechanismus der Welle in der Faser. Beide Dispersionseffekte können sich gegenseitig kompensieren. Heutige Standardeinmodenfasern sind so ausgelegt, dass sich die beiden Disperisonseffekte bei der Wellenlänge $1,3\,\mu$m kompensieren. Die beiden Dispersionseffekte werden in dem linearen Dispersionskoeffizienten D mit der Einheit [ps/(nm km)] zusammengefasst [28]. Mit D kann die Verbreiterung eines Impulses zu

$$\Delta t = |D|\, L\, \Delta\lambda \tag{3.17}$$

angegeben werden, wobei L die Faserlänge und $\Delta\lambda$ die spektrale Breite des Eingangsimpulses angibt. Typische Werte für D in Standardeinmodenfasern bei der Wellenlänge $\lambda = 1,55\,\mu$m liegen bei etwa 16 ps/(nm km). Dispersion höherer Ordnung wird durch die Dispersionssteigung S mit der Einheit [ps/(nm^2 km)] angegeben. Diese Koeffizienten können über die Zusammenhänge

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2, \tag{3.18}$$

$$S = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi c}{\lambda^3}\beta_2 + \frac{2\pi c^2}{\lambda^2}\beta_3, \tag{3.19}$$

aus den in der Schrödinger-Gleichung auftretenden Werten für β_2 und β_3 errechnet werden. Dispersion wird in dem linearen Gleichungsanteil der Schrödinger-Gl. (3.3) berücksichtigt

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,T) = \frac{j}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial T^2}A(z,T) + \frac{1}{6}\beta_3\frac{\partial^3}{\partial T^3}A(z,T). \tag{3.20}$$

Die Lösung der Gleichung im Frequenzbereich mit

$$A(z+\Delta z,\omega) = \mathrm{e}^{(-\frac{j}{2}\beta_2\omega^2 - \frac{j}{6}\beta_3\omega^3)\Delta z}A(z,\omega) \tag{3.21}$$

zeigt, dass die Dispersion eine Phasendrehung des Signalspektrums und damit eine Aufweitung des Zeitsignals verursacht.

3.3.3 Polarisationsmodendispersion (PMD)

Durch Asymmetrien in der Fasergeometrie oder mechanische Einflüsse wie Biegungen, Verdrillungen oder Spannungen auf die Glasfaser kann die Entartung der beiden orthogonalen Eigenmoden der Einmodenfaser aufgehoben werden [32, 33, 34, 35]. Die beiden Eigenmoden besitzen dann unterschiedliche Ausbreitungskonstanten $\beta_x \neq \beta_y$, so dass sich Signale auf den beiden Achsen unterschiedlich schnell ausbreiten. Das wiederholte Auftreten der Faserstörungen führt zu einer Kopplung der Moden und damit zu einem stetigen Energieaustausch zwischen den beiden Polarisationen. In dieser Arbeit wird PMD im Hinblick auf die Modellierung von optischen Fasern nicht weiter betrachtet.

3.4 Nichtlineare Effekte

3.4.1 Kerr-Effekt

Der Kerr-Effekt tritt aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit der Brechzahl eines Mediums von der elektrischen Feldstärke auf. Er verursacht die Selbstphasenmodulation (SPM), die Kreuzphasenmodulation (XPM) und die Vierwellenmischung (FWM) [30, 31]. Bei dem Kerr-Effekt handelt es sich um einen elastischen Prozeß, d.h. es wird keine Energie an das Übertragungsmedium abgegeben. Die unterschiedlichen linearen und nichtlinearen Fasereffekte sind in Abbildung 3.3 zusammenfassend dargestellt.

Selbstphasenmodulation (SPM)

Die Selbstphasenmodulation tritt aufgrund der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Intensität auf. Anhand der Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung unter Vernachlässigung des linearen Gleichungsanteils nach

$$A(z+\Delta z, T) = \mathrm{e}^{-j\gamma|A(z,T)|^2\Delta z} \cdot A(z,T) \tag{3.22}$$

wird das Verhalten deutlich. Der Betrag eines Impulses wird durch die SPM offensichtlich nicht verändert, durch die Phasendrehung im Zeitbereich verbreitert sich allerdings das Spektrum des betrachteten Signals (Abbildung 3.3).

Self-Steepening-Effekt (SST)

Der Self-Steepening-Effekt oder auch Selbstversteilerung tritt auf sobald nicht nur die kleinste Ordnung von SPM in der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung betrachtet wird. Verursacht wird sie ebenfalls durch die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Signalintensität. In Gleichung (3.3) ist dieser Effekt berücksichtigt. Hier ist zu erkennen, dass dieser Effekt zu einer unsymmetrischen Pulsverformung führt, die für den Fall von vernachlässigbarer Dispersion zum Aufbau von Schockfronten führt (Abbildung 3.3.

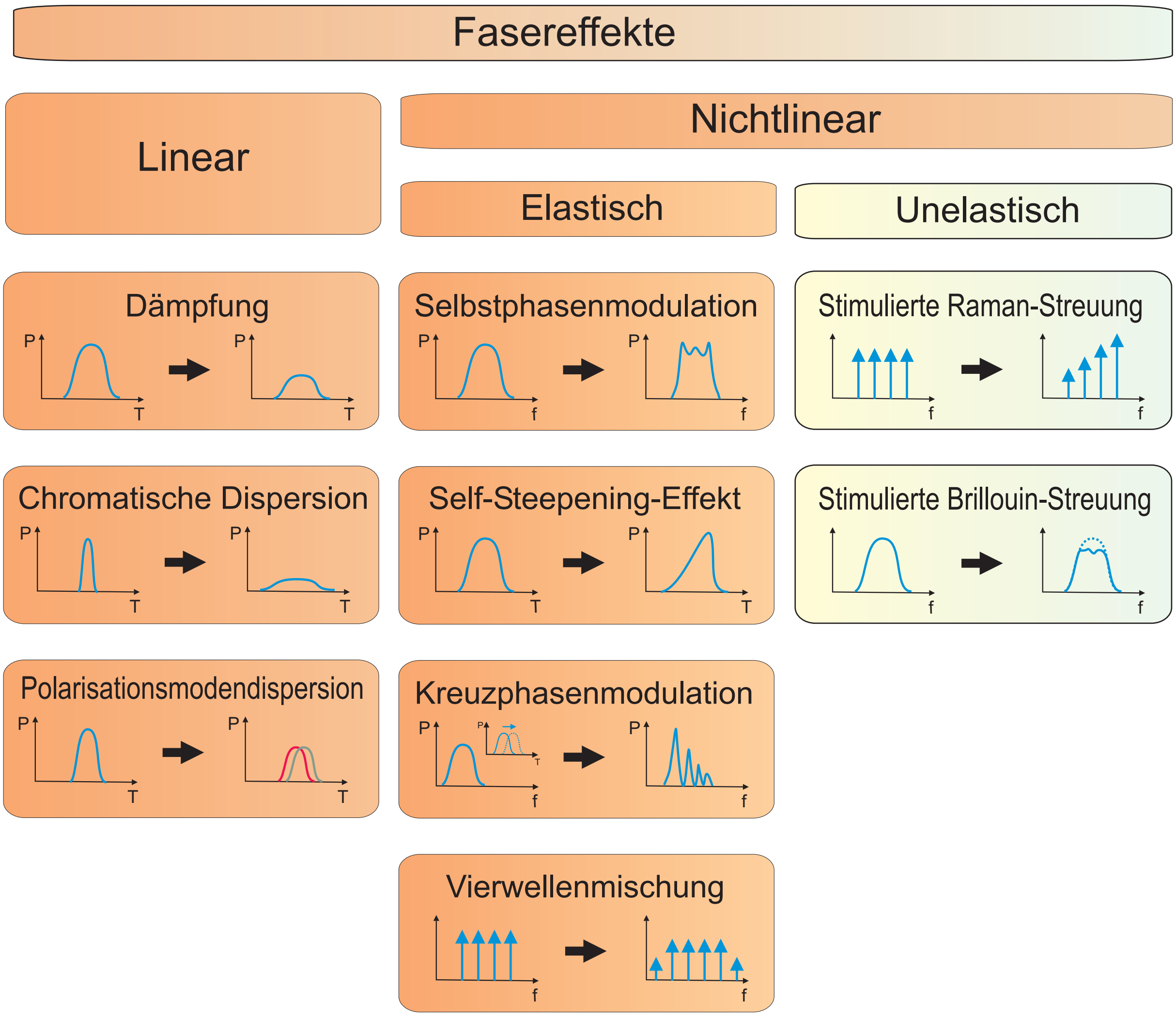


Abbildung 3.3: Fasereffekte in Einmodenfasern und deren Auswirkungen auf die Signalausbreitung.

Kreuzphasenmodulation (XPM)

Die Kreuzphasenmodulation (XPM) kann auftreten, wenn gleichzeitig mehrere Wellen bei unterschiedlichen Frequenzen oder Polarisationen propagieren und gegenseitig ihre Phase modulieren. Wird nur eine Polarisation betrachtet, so kann der Effekt anhand der Lösung der nichtlinearen Schrödinger Gleichung unter Vernachlässigung der linearen Effekte in Gl. (3.22) abgelesen werden (vgl. Kapitel 6.2). Da sich die Zeitsignale zweier im Frequenzbereich separaten Kanäle überlagern können, nehmen die einzelnen Signale bei der Lösung der Gl. (3.22) im Zeitbereich aufeinander Einfluss (vgl. Abbildung 3.3).

Vierwellenmischung (FWM)

Aufgrund der Fasernichtlinearität können drei unterschiedliche Moden mit den Frequenzen ω_1, ω_2 und ω_3 in Wechselwirkung treten und eine vierte Mode bei der Frequenz

$$\omega_4 = \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \tag{3.23}$$

erzeugen. Anhand der Gleichung wird deutlich, dass eine Reihe von Kombinationen möglich ist. Allerdings muss für einen effizienten Mischprozess die Bedingung der Phasenanpassung [20] erfüllt sein. Für übliche Mehrkanal-Übertragungssysteme mit einem betrachteten Frequenzbereich je Kanal im GHz-Bereich ist der Fall $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ bedeutsam. Hier ist die Bedingung der Phasenanpassung nahezu erfüllt. Da Signalleistung zu anderen Frequenzen transferiert wird, tritt durch den Mischprozess ein Energieverlust in den einzelnen Kanälen auf. Zusätzlich entsteht ein in Abbildung 3.3 verdeutlichtes Übersprechen zwischen den einzelnen Kanälen.

3.4.2 Unelastische Streuprozesse

Zu diesen Prozessen zählen die stimulierte Raman-Streuung (SRS) und die stimulierte Brillouin-Streuung (SBS). In beiden Fällen handelt es sich um unelastische Streuprozesse, bei denen die Welle Energie in Form von Molekülschwingungen (SRS), bzw. Schallwellen (SBS) an das Übertragungsmedium abgibt. Diese Effekte sind ebenfalls in Abbildung 3.3 illustriert, werden jedoch in dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

Kapitel 4

Kriterien zur Bewertung der numerischen Verfahren

In den folgenden Kapiteln werden unterschiedliche Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung vorgestellt und diskutiert. Zum Vergleich der vorgestellten Verfahren ist es sinnvoll, Kriterien aufzustellen, die einen quantitativen Vergleich ermöglichen. Zu diesem Zweck werden Stabilitätsmaße, die numerische Dispersion und verschiedene Testsignale definiert die zur Bewertung der klassischen numerischen Methoden [36] im nachfolgenden Kapitel verwendet werden.

Zusätzlich wird eine Reihe unterschiedlicher Bewertungskriterien der Simulationsgenauigkeit, wie die Eye Opening Penalty (EOP), die relative Leistungsabweichung (RPP), oder der relative Durchschnittsfehler eingeführt, die in den nachfolgenden Kapiteln angewandt werden. Ein einheitliches Maß für den Rechenaufwand der Simulationen wird eingeführt, um die Methoden auch in dieser Beziehung besser vergleichen zu können.

4.1 Stabilität

Die Stabilität eines numerischen Verfahrens ist in dieser Arbeit im Sinne der BIBO (Bounded Input-Bounded Output)-Stabilität definiert [37, 38]. Ist der Anfangswert (Eingangssignal) eines stabilen numerischen Verfahrens beschränkt, so ist auch sein Ergebnis (Ausgangssignal) beschränkt. Die Stabilitätsbedingung ist also im mathematischen Sinne eine Konvergenzbedingung. Sie macht keine Aussage über die Güte der numerischen Lösung.

Die Stabilität wird anhand der Eigenwertgleichung

$$A(z + \Delta z) = a \cdot A(z) \tag{4.1}$$

mit dem Skalar a untersucht, wobei der Faktor a als Dämpfungs- bzw. Wachstumsfaktor und z als der Ort interpretiert wird. Für ein stabiles Iterationsverfahren muss offensichtlich $|a| \leq 1$ gelten. Völlig äquivalent zu dieser Aussage ist die Forderung, dass die Nullstellen der z-Transformierten von Gleichung (4.1) im Einheitskreis der komplexen Ebene liegen müssen [39]. Für die Nullstellenbestimmung müssen oftmals Gleichungssysteme mit Polynomen höherer Ordnung gelöst werden. Dies kann umgangen werden, indem z. B. das Lagekriterium von Cohn angewendet wird [40]. Mit einem einfachen Algorithmus wird festgestellt, ob sich die Nullstellen innerhalb oder außerhalb des Einheitskreises befinden, ohne ihren genauen Wert zu ermitteln.

4.2 Numerische Dispersion

Bei der numerischen Simulation von Wellenausbreitungen wird neben der Amplitude auch die Phase jeder betrachteten Mode berechnet. Weicht die numerisch bestimmte Phase der einzelnen Moden von der im realen System auftretenden Phase ab, so tritt ein durch das numerische Verfahren verursachter Dispersionseffekt auf [41]. Zur Untersuchung dieses Effekts wird mit dem Ansatz

$$A(z+\Delta z, t+\Delta T) = A(z,T) \cdot \mathrm{e}^{-j\omega\Delta T} \cdot \mathrm{e}^{jk_{num}\Delta z} \tag{4.2}$$

die numerische Wellenzahl k_{num} bestimmt [42]. Diese kann dann mit der tatsächlichen Wellenzahl k des physikalischen Systems verglichen werden. Es wird hier der relative Phasenfehler Φ definiert

$$\Phi = \frac{k - k_{num}}{k}. \tag{4.3}$$

In der NLSG modelliert der lineare Gleichungsanteil den Dispersionseffekt des physikalischen Systems. Aus der Transformation des Operators in den Frequenzbereich lässt sich die physikalische Phasendrehung zu

$$k = -\frac{1}{2}\beta_2\omega^2, \tag{4.4}$$

ablesen.

4.3 Testsignale für die numerische Simulation

Zur Fehleranalyse dieser Untersuchungen muss die exakte Lösung A_{exakt} der Testsignale bekannt sein. Bei der linearen Schrödinger-Gleichung kann für jede beliebige Signalform $A(z=0,T)$ die exakte Lösung $A(z,T)$ berechnet werden. Für die nichtlineare Gleichung ist eine exakte analytische Lösung nur für den Sonderfall der Solitonen möglich. Bei den anderen Signalen wurden die Referenzsignale mit einem Split-Step-Verfahren bei sehr kleinen Schrittweiten berechnet. Als Parameter wurden für die Simulation stets die Größen $\beta_2 = -20\,\mathrm{ps^2km^{-1}}$ und $\gamma = 2\,\mathrm{W^{-1}km^{-1}}$ gewählt.

Folgende Testsignale werden betrachtet:

- Zur Untersuchung der nichtlinearen Gleichung werden fundamentale Solitonen

$$A_{Soliton}(z,T) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{\frac{\gamma P_0}{|\beta_2|}}\cdot T\right)\exp\left(\mathrm{j}\frac{1}{2}\gamma P_0 z\right), \qquad (4.5)$$

  mit Spitzenleistungen von $P_0 = 100,\mathrm{mW}$ und $P_0 = 400,\mathrm{mW}$ betrachtet. Die Pulsform und das zugehörige Spektrum sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

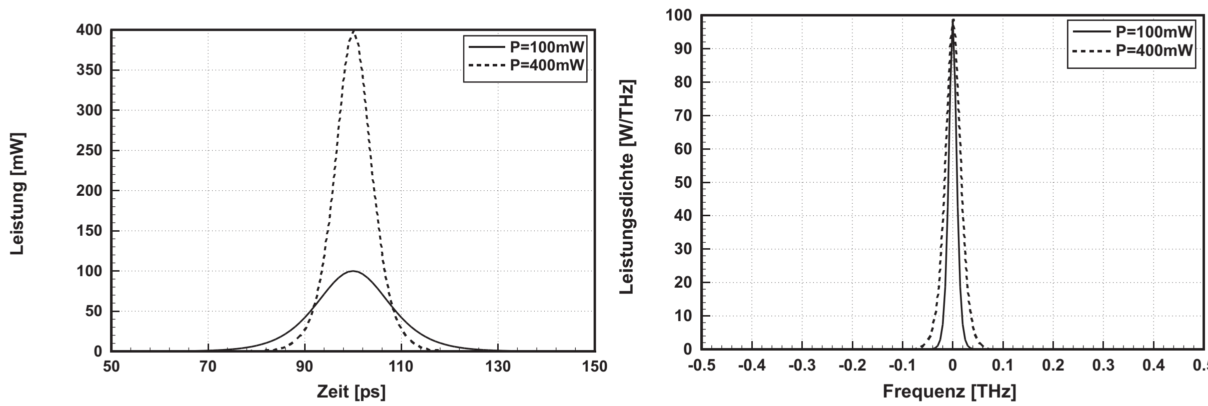


Abbildung 4.1: Testsignal "Soliton" mit einer Spitzenleistung von $P_0 = 100,\mathrm{mW}$ und $P_0 = 400,\mathrm{mW}$: Zeitsignal (links) und spektrale Leistungsdichte (rechts) [36].

- Zur Untersuchung des Verhaltens bei *schmalbandigen Signalen* werden die in Abbildung 4.2 gezeigte Impulsfolge gewählt. Die Flanken des dargestellten Signals sind $\cos^2$-förmig. Die Impulsbreite beträgt 50 ps, was einem Übertragungssystem mit einer Bitrate von 20 GBit/s entspricht.

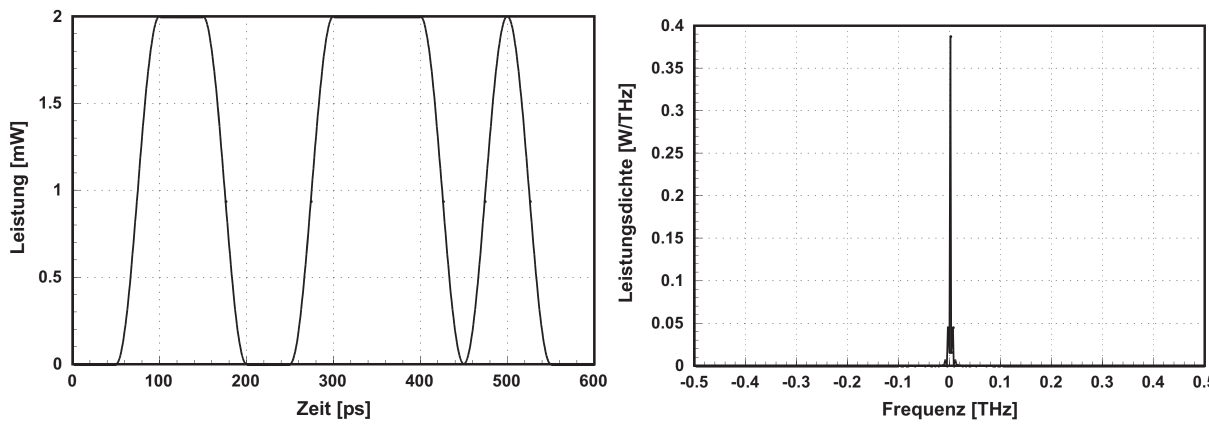


Abbildung 4.2: NRZ-Impulsfolge mit 20 GBit/s und zugehörige spektrale Leistungsdichte [36].

- Im Hinblick auf die Untersuchung der numerischen Dispersion und numerischer Resonanzeffekte ist die Untersuchung breitbandiger Signale von Interesse. Dazu kann entweder ein einzelnes, *breitbandiges Signal* oder ein aus vielen einzelnen, schmalbandigen Kanälen zusammengesetztes System (WDM-System) untersucht werden.

Um auftretende numerische Fehler in Abhängigkeit von der Frequenz analysieren zu können, wird hier ein Zweikanal-WDM-System gewählt. Das Signal ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Jeder Kanal überträgt dabei die aus Abbildung 4.2 bekannte Bitfolge. Bei der Untersuchung werden auch höhere Leistungen und andere Kanalabstände betrachtet.

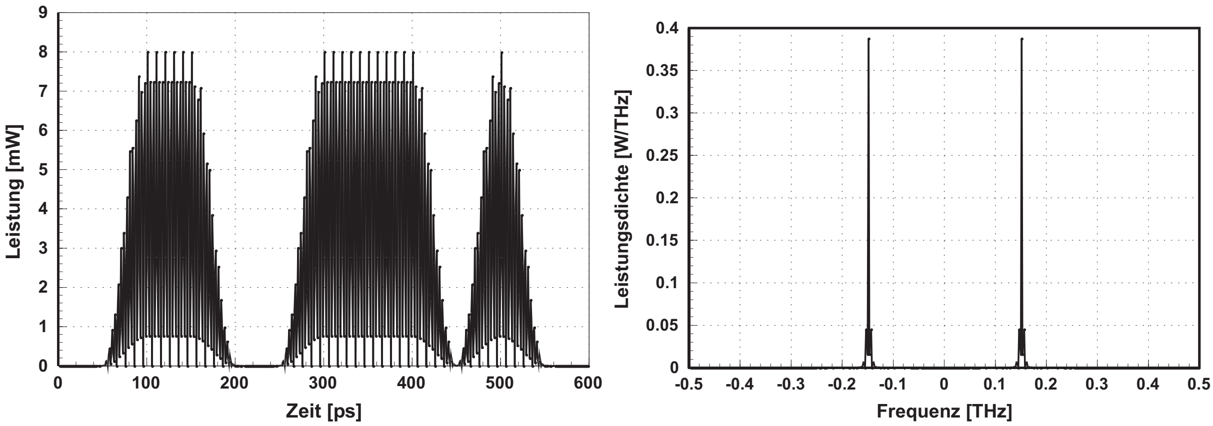


Abbildung 4.3: Zweikanal WDM-System mit 300, GHz Kanalabstand im Zeitbereich und zugehörige spektrale Leistungsdichte [36].

Zur Untersuchung frequenzabhängiger numerischer Fehler können die Kanäle nach der Propagation des Gesamtsignals wieder getrennt (Demultiplex) und einzeln mit einem Referenzsignal verglichen werden.

4.4 Bewertungskriterien der Simulationsgenauigkeit

4.4.1 Bewertungskriterien der klassischen numerischen Verfahren

In den im nächsten Kapitel folgenden Untersuchungen von [36] werden die berechneten Impulsformen mit den Referenzsignalen anhand der folgenden Fehlerkriterien verglichen:

Durch den Ausdruck

$$\mathrm{GES} = \left(\int |A_{Ref} - A_{Test}|^2 \, dT \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\Delta T \cdot \sum_N |A_{Ref} - A_{Test}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.6}$$

wird sowohl Betrag als auch Phase des numerisch berechneten Signals bewertet. Das zweite Gleichheitszeichen gilt bei der Diskretisierung der Zeitkoordinate mit der Schrittweite ΔT.

Neben diesem Fehler wird auch die maximale Abweichung in der Amplitude

$$\mathrm{MAX} = \max|A_{exakt} - A_{num}|, \tag{4.7}$$

bestimmt. Durch den Vergleich der Fehler GES und MAX kann untersucht werden, ob sich ein Fehler im Wesentlichen auf eine Stelle konzentriert oder über das Intervall verteilt ist.

Der letzte Fehlerterm untersucht die Unitarität eines Propagationsschemas, indem die Energie des Eingangssignals mit der Energie des Ausgangssignals bzw. der "exakten" Lösung verglichen wird. Da in dieser Arbeit die Dämpfung der Standardeinmodenfaser nicht betrachtet wird, wird der Ausdruck

$$\mathrm{ENG} = \frac{\int |A_{Ref}|^2 dT - \int |A_{Test}|^2 dT}{\int |A_{Ref}|^2 \partial T} = \frac{\sum_N |A_{Test}|^2 - \sum_N |A_{Test}|^2}{\sum_N |A_{Ref}|^2}, \tag{4.8}$$

berechnet.

4.4.2 Eye Opening Penalty (EOP)

Die Eye Opening Penalty (EOP) oder auch Verschlechterung der Augenöffnung wird aus dem Augendiagramm berechnet. Dieses Augendiagramm ergibt sich durch ein bitweises Übereinanderlegen des Amplitudenverlaufes der Signaleinhüllenden. Ein solches Bild ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

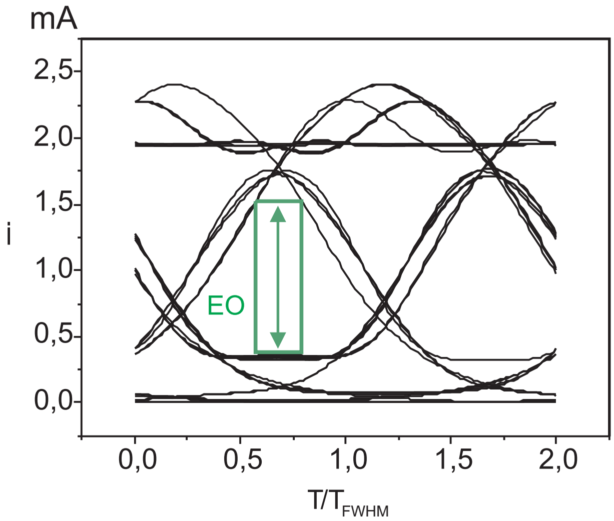


Abbildung 4.4: Augendiagramm eines 40 GBit/s NRZ-Signals nach 20 km NZDSF.

Die Augenöffnung (EO) wird bestimmt indem ein Rechteck von 20 % der Bitbreite in das Augendiagramm platziert und der Maximal- mit dem Minimalwert in Beziehung gesetzt wird. Somit ergibt sich EOP als ein Maß für die Signalgüte als

$$EOP = 10 \cdot log\left(\frac{EO_{Ref}}{EO_{Test}} \cdot K_\alpha\right), \tag{4.9}$$

wobei EO_x die innere Augenöffnung des empfangenen Signals ist. Diese in dB skalierte Größe gibt somit ein Maß für die Signalverschlechterung des Testsignals gegenüber einem

Referenzsignal an. Als Referenzsignal wird hier das unverzerrte Eingangsignal herangezogen. Mit dem Faktor K_α wird zusätzlich berücksichtigt, dass eine Signalverschlechterung durch Signalverzerrungen nicht aber durch Dämpfung entsteht. Mit K_α

$$K_\alpha = 10 \cdot log \left(\frac{< i_{Test} >}{< i_{Ref} >} \right), \tag{4.10}$$

wird dieser Dämpfungseinfluß für die EOP eleminiert.

4.4.3 Relativer Durchschnittsfehler (RAE)

Die zuvor vorgestellt EOP ist ein für die Signaldetektion relevantes Fehlermaß an. Neben diesem wird hier mit dem relativen Durchschnittsfehler (RAE: Relative Average Error) ein Fehlermaß eingeführt, dass die gemittelte Amplitudenabweichung eines Testsignals von einem Referenzsignal angibt. Der RAE ist

$$RAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|(|A_{Ref}(z,T_i)| + 1) - (|A_{Test}(z,T_i)| + 1)|}{(|A_{Ref}(z,T_i)| + 1)}, \tag{4.11}$$

mit $n = 1, ..., K$. $|A_x(z,T_i)|$ ist der Amplitudenwert am Ort z und dem i-ten Zeitabtastwert. Die Addition des Wertes 1 zu $|A_{Ref}(z,T_i)|$ wird benötigt, um numerische Probleme an Diskretisierungspunkten mit dem Amplitudenwert 0 zu vermeiden. N bezeichnet die Anzahl der Zeitabtastwerte des zu propagierenden Signals.

4.4.4 Relative Leistungsabweichung (RPP)

Die relative Leistungsabweichung (RPP: Relative Power Penalty) gibt wie der RAE eine gemittelte Signalabweichung an. Bei der RPP wird hierbei jedoch die Leistungsabweichung des Testsignals mit der Leistung des Referenzsignals in Beziehung gesetzt. Dies führt zur Fehlerdefinition für die RPP

$$RPP = \frac{\sqrt{\sum_n \left(|A_{Ref}(n)|^2 - |A_{Test}(n)|^2\right)^2}}{\sum_n |A_{Ref}(n)|^2}. \tag{4.12}$$

A_{Ref} und A_{Test} sind die Amplituden des Referenz- und des Testsignal. Die mit n gekennzeichnete Summierung erfolgt über die Zeitabtastwerte des Signals.

4.5 Bewertung des Rechenaufwands

Der Aufwand der einzelnen numerischen Methoden wird anhand der notwendigen komplexen Multiplikationen bei der Propagation bewertet. Reelle Multiplikationen entsprechen hierbei dem Faktor 1/4, Additionen werden bei dieser Abschätzung vernachlässigt. Die Auswertung des Ausdrucks e^{ja} mit dem Skalar a wird hingegen mit 2 Multiplikationen veranschlagt. Die Anzahl der Diskretisierungspunkte in Zeitrichtung ist im Folgenden mit N bezeichnet.

Um die unterschiedlichen numerischen Verfahren bzgl. ihres Aufwands vergleichen zu können, wird der Aufwand betrachtet, der zur Erlangung einer bestimmten Lösungsgüte nötig ist. In den meisten Fällen ist für den Fehler der Wert $\mathrm{MAX} < 10^{-3}$ als obere Fehlerschranke gefordert. Da viele der einzelnen Verfahren unterschiedliche Propagationsschrittweiten Δz verwenden, wird die Anzahl der komplexen Multiplikationen M auf Δz bezogen. Mit dem Maß

$$NORM = \frac{M}{\Delta z \cdot N} \tag{4.13}$$

ist die Aufwandsabschätzung zudem von der tatsächlich betrachteten Propagationslänge unabhängig. In Untersuchungen, welche eine feste, auf dem Split-Step-Verfahren beruhende Schrittweitenverteilung voraussetzen und bei denen lediglich die Lösung der Signalausbreitungsgleichung für einen Diskretisierungsschritt analysiert wird, ist eine etwas andere $NORM$ definiert

$$NORM = \frac{M}{\Delta z}. \tag{4.14}$$

Kapitel 5

Klassische numerische Methoden

Für die Lösung von numerischen Problemen sind eine Reihe von Lösungsverfahren bekannt. Der Einsatz dieser klassischen Verfahren für die Lösung der NLSG wurde von [36] untersucht. Unter anderem diese Ergebnisse bilden die Grundlage und Motivation für eine weitergehende Untersuchung anderer Lösungswege in den nachfolgenden Kapiteln. Die NLSG sei an dieser Stelle noch einmal wiederholt

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,T) = \frac{j}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial T^2}A(z,T) - j\gamma\,|A(z,T)|^2\,A(z,T), \tag{5.1}$$

wobei das Fasereingangssignal durch $A(z=0,T) = A_0$ gegeben ist. Die gesuchte Feldverteilung wird hier mit $A(z,T)$ bezeichnet. Zur einfacheren Handhabung der Gleichung werden die beiden Operatoren

$$\mathcal{L} = \frac{j}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial T^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{N} = -j\gamma\,|A(z,T)|^2\,, \tag{5.2}$$

eingeführt, die den linearen (Operator $\mathcal{L}$) bzw. nichtlinearen (Operator $\mathcal{N}$) Gleichungsanteil beschreiben.

Numerische Verfahren operieren nicht mit kontinuierlichen Funktionen, sondern nur mit diskreten Werten, auf die die realen Funktionen abgebildet werden. Die kontinuierliche Funktion muss also abgetastet werden. Wird das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten, so stellt die Abtastung eine eindeutige und umkehrbare Operation dar [18]. Bei der hier betrachteten Gleichung wird zunächst die Zeitachse diskretisiert, wodurch Gl. (5.1) in eine Vektorgleichung für A übergeht. Auf die Form des nichtlinearen Operators hat diese Transformation keinen Einfluss, für den linearen Operator muss jedoch die doppelte Zeitableitung durch eine diskrete Operation ersetzt werden. Formal wird diese durch ein Matrix-Vektor Produkt ausgedrückt, es wird also im Operator $\mathcal{L}$ die zweifache partielle Zeitableitung durch die Matrix $\mathbf{B}$ ersetzt. Damit ergibt sich das mit den numerischen Verfahren zu lösende System von gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z) = \frac{j}{2}\beta_2\frac{\mathbf{B}}{\Delta T^2}A(z) - j\gamma\,|A(z)|^2\,A(z). \tag{5.3}$$

Bei den in diesem Kapitel betrachteten Verfahren wird die Matrix **B** durch das Verfahren der Finiten Differenzen bestimmt.

Mit der Methode der Finiten Differenzen wird der Differenzialquotient im Operator $\mathcal{L}$ durch einen Differenzenquotienten approximiert. Auf dieses System können nun Methoden zur Lösung gewöhnlicher gekoppelter Differentialgleichungen angewendet werden. Dies soll in den folgenden Unterkapiteln betrachtet werden. An manchen Stellen wird teilweise auf die formale Beschreibung der Differenzialgleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z) = f(z, A), \tag{5.4}$$

mit der Abkürzung

$$f(z, A) = \frac{j}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial T^2}A(z, T) - j\gamma\,|A(z, T)|^2\,A(z, T), \tag{5.5}$$

zurückgegriffen.

5.1 Finite Differenzen

Wird auch der in Gl. (5.3) verbliebene Differentialoperator durch ein Differenzenschema ersetzt, so ergibt sich das Verfahren der Finiten Differenzen (Verlet-Schema) [37]. In Zeitrichtung lässt sich mit diesem Verfahren kein stabiler expliziter Propagationsalgorithmus aufstellen, für die Propagation in Richtung der Ortskoordinate kann hingegen ein stabiles Gleichungssystem angeben werden. Je nach der gewählten Diskretisierung des Zeitoperators ergibt sich ein implizites oder explizites Verfahren. Zuerst wird nur der lineare Gleichungsanteil betrachtet, dann die vollständige nichtlineare Gleichung.

5.1.1 Lineare Gleichung

Zunächst soll nur der lineare Gleichungsanteil der NLSG betrachtet werden. In Gl. (5.6) ist beispielhaft eine der möglichen Diskretisierungen angegeben

$$\frac{A^{z+1} - A^z}{\Delta z} = \frac{j}{2}\beta_2\frac{1}{\Delta T^2}\mathbf{B}\left[\alpha A^{z+1} + (1-\alpha)A^z\right]. \tag{5.6}$$

Die Größe Δz bezeichnet die Schrittweite im Ortsbereich, ΔT die Diskretisierungsweite im Zeitbereich und die Matrix **B** ist je nach Differenzenschema nur auf ihren Haupt- und Nebendiagonalen besetzt. Anhand des Parameters α kann die Art des Diskretisierungsschemas gewählt werden. Für $\alpha = 0$ ergibt sich ein explizites und für $\alpha = 1$ ein rein implizites Schema. Durch die Wahl einer unsymmetrischen Diskretisierung im Ortsbereich und $\alpha = 0,5$ ist das Crank-Nicolson-Schema angegeben. Bei expliziten Propagationsschemata führt die unsymmetrische Diskretisierung im Ortsbereich zu keinem stabilen Algorithmus.

Fehlerordnung	Stabilitätsgrenze $\Delta T = 1\,ps$	Stabilitätsgrenze $\Delta T = 0.5\,ps$
$\mathcal{O}(\Delta T^2)$	$\Delta z = 25\,m$	$\Delta z \simeq 6\,m$
$\mathcal{O}(\Delta T^4)$	$\Delta z \simeq 18\,m$	$\Delta z \simeq 4.6\,m$
$\mathcal{O}(\Delta T^6)$	$\Delta z \simeq 16\,m$	$\Delta z \simeq 4.1\,m$

Tabelle 5.1: Stabilitätsgrenze der expliziten FD-Gleichungen in Abhängigkeit von Ordnungen der FD-Approximationen sowie verschiedenen Diskretisierungsweiten ΔT ($\beta_2 = -20\,\mathrm{ps}^2/\mathrm{km}$).

Mit den Ausführungen in Abschnitt 4.1 kann die Stabilitätsbedingung für die lineare Gl. (5.6) formuliert werden. Es ergibt sich eine Beschränkung für die maximal zulässige Propagationsschrittweite Δz

$$\Delta z \leq \left| \frac{2}{\beta_2 \lambda_{max}} \right| \Delta T^2. \tag{5.7}$$

Die Auswertung der Stabilitätsbedingung erfordert die Abschätzung des maximalen Eigenwerts λ_{max} der Matrix $\mathbf{B}$. Der Einsatz der Operatoren mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta z^{2k})$ liefert beispielsweise

$$\lambda_{max}|_{k=1} = 4 \quad \lambda_{max}|_{k=2} = 16/3 \quad \lambda_{max}|_{k=3} = 544/90. \tag{5.8}$$

Wird also für eine bessere Approximation der Zeitableitung ein Differenzenschema höherer Ordnung gewählt, so reduziert sich die maximal zulässige Propagationsschrittweite Δz. Weiterhin erweist sich die quadratische Abhängigkeit zwischen Δz und ΔT als sehr ungünstig, denn für die Simulation faseroptischer Übertragungssysteme ist insbesondere bei der Betrachtung von WDM-Systemen die Diskretisierung eines großen Spektralbereichs von Interesse. Die dazu erforderlichen Diskretisierungsweiten von $\Delta T \leq 1\,\mathrm{ps}$ erzwingen die Wahl sehr kleiner Schrittweiten Δz. In der Tabelle 5.1 ist die Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von der Fehlerordnung der Diskretisierung $\mathcal{O}(\Delta T^k)$ und der Größe von ΔT angegeben.

Bei der Untersuchung der numerischen Dispersion, die durch die Approximation mit dem Finite Differenzen Schema auftritt, wird der Ansatz (4.2) auf die lineare Gl. (5.6) angewendet, so dass die numerische Wellenzahl k_{num} berechnet werden kann

$$k_{num} = \frac{1}{\Delta z} \arcsin\left(\frac{\beta_2 \Delta z}{\Delta T^2} \cdot (\cos(\omega \Delta T) - 1)\right). \tag{5.9}$$

Diese Gleichung gilt bei der Verwendung eines Differenzenoperators der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta T^2)$ zur Approximation der doppelten Zeitableitung. Mit der physikalischen Wellenzahl $k = -\frac{1}{2}\beta_2 \cdot \omega^2$ aus Gl. (4.4) und der Definitionsgl. (4.3) kann der relative Phasenfehler in Abbildung 5.1 aufgetragen werden.

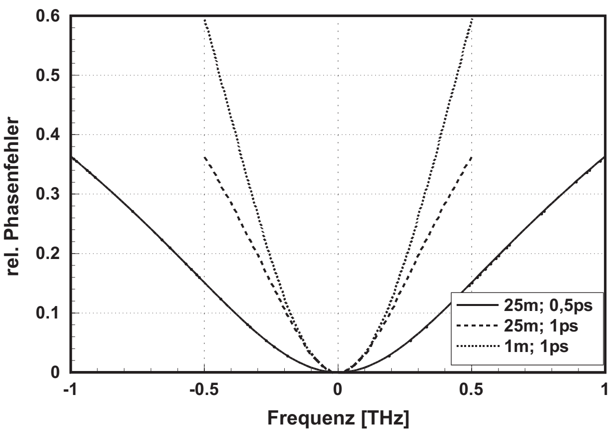


Abbildung 5.1: Relativer Phasenfehler des linearen Operators für das explizite FD-Verfahren (Drei-Punkte Operator) bei verschiedenen Weiten für die Zeit- und Ortsdiskretisierung.

Anhand der Abbildung wird deutlich, dass sich die beste numerische Approximation ergibt, wenn die Schrittweite Δz nahe der Stabilitätsgrenze gewählt wird. Mit dem betrachteten FD-Schema kann also selbst bei der Wahl einer beliebig kleinen Schrittweite Δz nur ein sehr kleiner Spektralbereich korrekt approximiert werden. Da das FD-Schema im Grenzfall $\lim_{\Delta z \to 0}$ in Propagationsrichtung exakt ist, tritt dieser Fehler bei allen numerischen Methoden auf, die eine FD-Approximation für den linearen Operator $\mathcal{L}$ verwenden.

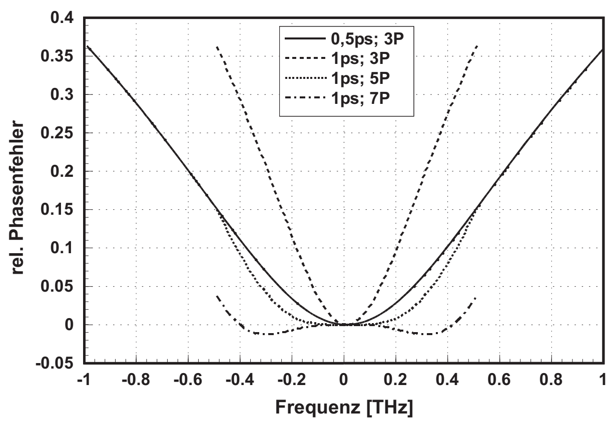
Zwei Möglichkeiten bieten sich an, einen möglichst breiten spektralen Bereich ohne Phasenfehler zu approximieren:

- Durch die Reduktion von ΔT kann der diskretisierte Spektralbereich größer als benötigt gewählt werden. Damit wird im interessierenden Spektralbereich das Produkt $\omega \Delta T$ klein und gemäß Gl. (5.9) wird die Approximation der numerischen Wellenzahl besser. Dieses Verhalten kann auch in Abbildung 5.1 (mit $\Delta T = 0.5\,\mathrm{ps}$) beobachtet werden.

  Der Nachteil dieses Vorgehens liegt in der quadratischen Abhängigkeit zwischen ΔT und Δz der Stabilitätsbedingung (5.7). Bei einer Reduktion von ΔT muss die Propagationsschrittweite Δz stark reduziert werden. Soll bei kleinerer Diskretisierungsweite ΔT der gleiche zeitliche Bereich diskretisiert werden, so muss zusätzlich noch die Anzahl der Abtastwerte erhöht werden. Dieses Vorgehen erhöht den Berechnungsaufwand stark und ist damit ungeeignet.

- Die Approximation der Zeitableitung kann durch ein Differenzenschema höherer Ordnung berechnet werden. In der Diskretisierungsmatrix $\mathbf{B}$ treten in diesem Fall allerdings betragsmäßig größere Eigenwerte auf. Mit der Stabilitätsbedingung (5.7) muss also auch hier die Propagationsschrittweite reduziert werden, was neben den zusätzlichen Berechnungen zur Auswertung des Differenzenschemas höherer Ordnung den Berechnungsaufwand ebenfalls erhöht.

Der relative Phasenfehler verbessert sich durch den Einsatz eines Diskretisierungsschemas höherer Ordnung über das gesamte Intervall, vor allem aber vergrössert sich der Bereich



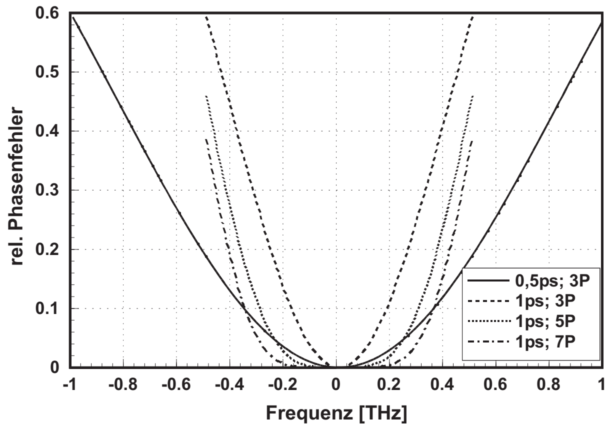


Abbildung 5.2: Relativer Phasenfehler bei unterschiedlichen Diskretisierungsweiten ΔT für das Drei-, Fünf- und Sieben-Punkte Schema zur Approximation der Zeitableitung im linearen Gleichungsanteil: maximale Schrittweite Δz (links) und Schrittweite von $\Delta z = 1\,\mathrm{m}$ (rechts)

eines Phasenfehlers von nahezu null aus. Damit wird die nutzbare Bandbreite des Propagationsschemas größer. Problematisch ist allerdings der Randbereich des diskretisierten Intervalls, in dem der Fehler erst bei Einsatz eines sieben Punkte Schemas einen relativen Fehler kleiner 5% und damit brauchbare Werte erreicht. Abbildung 5.2 (rechts) zeigt die gleichen Verläufe der numerischen Dispersion wie Abbildung 5.2 (links), allerdings wurde hier die Schrittweite zu $\Delta z = 1\,\mathrm{m}$ gewählt. Ein Vergleich der beiden Bilder verdeutlicht die Notwendigkeit, die Schrittweite Δz nahe der Stabilitätsgrenze zu wählen. Dabei reagieren die Verläufe schon auf kleine Abweichungen der Schrittweite von dieser Grenze sehr empfindlich.

In diesem Sinne ist die Stabilitätsbedingung nicht nur als obere Grenze für die Schrittweite Δz zu verstehen, sondern als genaue Empfehlung für die Wahl von Δz. Hierdurch ist eine konstante Ortsschrittweite mit sehr feiner Diskretisierung in Ausbreitungsrichtung erforderlich.

5.1.2 Nichtlineare Gleichung

Die Betrachtung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung erfolgt analog zu der Formulierung in Gl. (5.6)

$$\begin{aligned}\frac{A^{z+1} - A^{z-1}}{2\Delta z} &= \frac{j}{2}\beta_2 \frac{1}{\Delta T^2}\mathbf{B}[\alpha A^{z+1} + (1-\alpha)A^z] \\ &\quad -j\gamma \left|\alpha A^{z+1} + (1-\alpha)A^z\right|^2 [\alpha A^{z+1} + (1-\alpha)A^z].\end{aligned} \tag{5.10}$$

Simulationen zeigen, dass der nichtlineare Term bei den betrachteten Eingangsleistungen bis zu einigen hundert mW keinen Einfluss auf die Stabilität des Propagationsschemas hat. Damit gelten die für das lineare Schema ermittelten Stabilitätsgrenzen.

Für den nichtlinearen Fall wird zur Lösung das Crank-Nicolson-Schema herangezogen

$$\left(I - \frac{j}{2}\beta_2 \frac{\Delta z}{2\Delta T^2}\mathbf{B}\right) A^{z+1} = \left(I + \frac{j}{2}\beta_2 \frac{\Delta z}{2\Delta T^2}\mathbf{B}\right) A^{z} - j\frac{\Delta z}{8}\gamma \left|A^{z+1} + A^{z}\right|^2 \left(A^{z+1} + A^{z}\right). \tag{5.11}$$

Da sich diese Gleichung nicht nach A^{z+1} auflösen lässt, wird sie durch einen iterativen Algorithmus gelöst. Simulationen zeigen, dass auch hier die Stabilität wiederum im Wesentlichen durch den linearen Gleichungsanteil bestimmt ist. Bei zwei Iterationsschritten können z.B. Schrittweiten bis ca. 2 km gewählt werden. Brauchbare Ergebnisse werden dann allerdings nur bis zu Schrittweiten von ca. 0.5 - 1 km erzielt. Eine Erhöhung der Iterationsanzahl erhöht neben der Stabilität auch die Güte der numerischen Lösung. Da in jedem Iterationsschritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss, ist das Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung der NLSG zu aufwändig.

Aufwandsabschätzung

Im folgenden bezeichnet der Parameter k_{diag} die Anzahl der besetzten Diagonalen in der Diskretisierungsmatrix $\mathbf{B}$. Der Berechnungsaufwand der FD-Schemata ist prinzipiell von der Ordnung $\mathcal{O}(N)$. N gibt hierbei die Abtastwerte im Zeitbereich an. Eine genaue Analyse ergibt, dass zur Berechnung des linearen Operators $\frac{k_{diag}+1}{4}N$ komplexe Multiplikationen notwendig sind. Im Vorfaktor ist die Symmetrie der Matrix $\mathbf{B}$ und ihre Besetzung mit rein reellen bzw. imaginären Zahlen berücksichtigt. Zur Berechnung des nichtlinearen Gleichungsanteils sind $1,25N$ komplexe Multiplikationen notwendig. Der Gesamtaufwand des expliziten Verfahrens beträgt damit in jedem Propagationsschritt

$$NORM = \left(\frac{k_{diag}+1}{4} + 1,25\right) N. \tag{5.12}$$

Der Aufwand für die iterative Lösung des Crank-Nicolson-Schemas ist in jedem Iterationsschritt genauso hoch wie der des expliziten Verfahrens. Bei K Iterationen beträgt dieser in jedem Propagationsschritt

$$NORM = \left(\frac{k_{diag}+1}{4} + 1,25\right) KN, \tag{5.13}$$

komplexe Multiplikationen.

5.2 Mehrschrittverfahren nach Adams-Moulton

Bei dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren nach Adams-Moulton handelt es sich um ein Mehrschrittverfahren, d.h. es werden mehrere zuvor berechnete Werte für die Approximation eines neuen Funktionswertes herangezogen [43, 44]. Dadurch müssen in jedem Iterationsschritt nur wenige Auswertungen der Differenzialgleichung vorgenommen werden.

Die Formeln des hier betrachteten Prädiktor-Korrektor-Verfahrens lassen sich ableiten, indem die Differenzialgleichung in Integralform umgeschrieben und der Integrand durch ein Polynom dritten Grades ersetzt wird. Dieses Polynom extrapoliert anhand der zuvor bestimmten Funktionswerte den Lösungsverlauf und lässt damit nach seiner Integration eine Prädiktion für den nächsten Funktionswert zu. Als Prädiktor wird die Formel von Adams-Bashford basierend auf der Beschreibung (5.4) mit der Schrittweite Δz herangezogen

$$\tilde{A}_{n+1} = A_n + \frac{\Delta z}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right) + \mathcal{O}(\Delta z^5). \tag{5.14}$$

Mit dem so berechneten Wert kann eine erste Näherung $\tilde{f}_{n+1}$ für f_{n+1} angegeben werden. Zur Verbesserung der Approximation wird der Korrektor-Schritt durchgeführt

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\Delta z}{24}\left(9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right) + \mathcal{O}(\Delta z^5). \tag{5.15}$$

Die Prädiktor-Korrektor-Verfahren sind auch mit anderen Fehlerordnungen durchführbar je nach dem, wie viele bereits bekannte Werte zur Bestimmung des Extrapolationspolynoms herangezogen werden.

Die Prädiktor-Korrektor-Methode bietet eine einfache Möglichkeit, den in jedem Iterationsschritt verursachten numerischen Fehler abzuschätzen. Als Fehlermaß gilt die Differenz zwischen dem prädizierten und dem korrigierten Wert. Dieses Fehlermaß kann auch für die Implementierung einer adaptiven Schrittweitenregelung herangezogen werden. Allerdings sind Mehrschrittverfahren für eine solche Regelung prinzipiell ungeeignet, da in jedem Iterationsschritt mehrere zurückliegende Werte benötigt werden. Die Modifikation der Schrittweite führt zu einer unregelmäßigen Diskretisierung in Ortsrichtung, an die die Prädiktor-Korrektor-Formeln dann angepasst werden müssen. Die Schrittweitensteuerung ist prinzipiell möglich, ihr Aufwand rechtfertigt jedoch meist nicht ihren Nutzen [43]. Zudem ist der Einsatz der Prädiktor-Korrektor-Methode nur bei der numerischen Behandlung glatt verlaufender Funktionen sinnvoll, bei sehr hohen Leistungen trifft dies auf die Lösungsfunktionen der NLSG nicht mehr zu.

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren wurde auf die nichtlineare Schrödinger-Gleichung in der Form (5.3) mit unterschiedlichen Fehlerordnungen angewendet. Dabei wurden Differenzenoperatoren mit Drei- und Fünf-Punkte Schema implementiert.

Aufwandsabschätzung

Unabhängig von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta z^M)$ des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens wird für den Prädiktionsschritt und den Korrekturschritt jeweils eine Auswertung der Differenzialgleichung benötigt. Hinzu kommen $(M-1)/2$ komplexe Multiplikationen für die Gewichtungsfaktoren in Gl. (5.14) und (5.15). Wird ein k-Punkte FD-Schema verwendet, so ergibt sich ein Gesamtaufwand von

$$NORM = \left(\frac{k+1}{2} + 2,5 + (M-1)/2\right)N. \tag{5.16}$$

Ordnung	Koeffizienten	Ergebnis
$\mathcal{O}(\Delta z^2)$	$k_1 = \Delta z f(z_n, A_n)$	$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$
	$k_2 = \Delta z f(z_n + \Delta z, A_n + k_1)$	
$\mathcal{O}(\Delta z^3)$	$k_1 = \Delta z f(z_n, A_n)$	$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$
	$k_2 = \Delta z f(z_n + \frac{1}{3}\Delta z, A_n + \frac{1}{3}k_1)$	
	$k_3 = \Delta z f(z_n + \frac{2}{3}\Delta z, A_n + \frac{2}{3}k_2)$	
$\mathcal{O}(\Delta z^4)$	$k_1 = \Delta z f(z_n, A_n)$	$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
	$k_2 = \Delta z f(z_n + \frac{1}{2}\Delta z, A_n + \frac{1}{2}k_1)$	
	$k_3 = \Delta z f(z_n + \frac{1}{2}\Delta z, A_n + \frac{1}{2}k_2)$	
	$k_4 = \Delta z f(z_n + \Delta z, A_n + k_3)$	

Tabelle 5.2: Formeln der Runge-Kutta-Verfahren mit unterschiedlicher Fehlerordnung.

5.3 Einschrittverfahren nach Runge-Kutta

Es wurden drei Verfahren vom Runge-Kutta-Typ mit den Fehlerordnungen $\mathcal{O}(\Delta z^2)$, $\mathcal{O}(\Delta z^3)$ und $\mathcal{O}(\Delta z^4)$ sowie ein implizites Verfahren dritter Ordnung implementiert. Die Gleichungen dieser Verfahren sind für die Schrittweite Δz in Tabelle 5.2 zusammengefasst, wobei $f(z, A)$ durch Gl. (5.4) gegeben ist [43, 45].

Bei den Verfahren nach Runge-Kutta handelt es sich um Einschrittverfahren, da in jedem Propagationsschritt zur Berechnung von A_{n+1} nur der Funktionswert an der Stelle A_n benötigt wird. Der Vorteil der Einschrittverfahren gegenüber den Mehrschrittverfahren ist die einfache Realisierbarkeit einer adaptiven Schrittweitenregelung. Nachteilig bei der Schrittweitenregelung ist allerdings, dass die Differenzialgleichung in jedem Propagationsschritt mehrfach ausgewertet werden muss.

Die Verfahren des Runge-Kutta-Typ wurden bei unterschiedlichen Fehlerordnungen jeweils mit einem Drei-, Fünf- und Sieben-Punkte Operator im Zeitbereich implementiert. Die maximal erlaubte Schrittweite Δz ist durch eine Stabilitätsgrenze gegeben, in der wiederum die quadratische Beziehung zwischen der Propagationsschrittweite Δz und der Zeitdiskretisierung ΔT auftritt.

Aufwandsabschätzung

Für ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta z^M)$ ergibt sich bei der Verwendung eines k-Punkte-FD-Schemas ein Aufwand von

$$NORM = ((1,75 + (k+1)/4)M - 0,5)N \tag{5.17}$$

komplexen Multiplikationen.

Die Implementierung einer Schrittweitensteuerung erfordert die Durchführung jedes Propagationsschritts mit einfacher und doppelter Schrittweite. Im Falle eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung müssen somit insgesamt drei Propagationsschritte berechnet werden, die jeweils vier Auswertungen von $f(x, A)$ erfordern. Dabei ist die Berechnung der Variablen k_1 (vgl. Tabelle 5.2) bei zwei Schritten identisch, so dass insgesamt elf

Auswertungen anfallen. Demgegenüber stehen acht Auswertungen, wenn nur die beiden einzelnen Schritte vorgenommen werden. Im Vergleich zu einem Verfahren ohne adaptive Schrittweitenregelung steigt der Berechnungsaufwand um den Faktor $1,375$.

Im zweiten Fall werden für die Auswertung der Runge-Kutta-Formel fünfter Ordnung sechs Auswertungen der Differenzialgleichung benötigt. Damit steigt der Rechenaufwand des gesamten Verfahrens nur um den Faktor $1,2$.

Ob der zusätzliche Aufwand durch eine größere mittlere Schrittweite kompensiert wird, kann nur durch Testberechnungen überprüft werden.

5.4 Testberechnungen zur Bewertung der Verfahren

Nach der Vorstellung der einzelnen Verfahren und den theoretischen Betrachtungen zu ihren numerischen Eigenschaften wird nun eine Bewertung ihrer Güte anhand von Testproblemen durchgeführt. Dazu werden unterschiedliche Testsignale betrachtet.

Zur Veranschaulichung der Auswirkungen der numerischen Dispersion sei auf die Abbildung 5.3 verwiesen. Es wurde das Testsignal aus Abbildung 4.3 bei einem Kanalabstand von 300 GHz über L = 10 km Faser mit einem FD-Schema propagiert. Die Schrittweite wurde zu $\Delta z = 2$ m gewählt. Das linke Bild zeigt jeweils das Ergebnis bei der Anwendung eines Verfahrens mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta T^2)$ (Drei-Punkte-Schema), im rechten Bild ist das Ergebnis für ein Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta T^4)$ (Fünf-Punkte-Schema) dargestellt.

Das Referenzsignal wurde mit einem Split-Step-Fourier-Verfahren berechnet 6. Die Abbildung 5.3 (links) zeigt deutlich den Einfluss der numerischen Dispersion bei der Verwendung des Drei-Punkte-FD-Schemas. Das berechnete Signal bleibt im Zeitbereich deutlich hinter dem Referenzsignal zurück, d.h. die tatsächlich vorliegende Dispersion der Einmodenfaser wird unterschätzt. Der Einsatz des Fünf-Punkte-Schemas liefert hier schon wesentlich bessere Ergebnisse. Bei der Simulation von Signalen mit hoher Leistung (Abbildung 5.3) zeigt sich weiterhin, dass mit dem FD-Schema die tatsächliche Pulshöhe unterschätzt wird.

Da sich die verschiedenen in diesem Kapitel betrachteten Propagationsschemata lediglich in der Approximationsgüte in Ausbreitungsrichtung (z-Koordinate) unterscheiden, sind alle Verfahren von der numerischen Dispersion betroffen.

Numerische Dispersion des FD-Verfahrens

Bei den theoretischen Betrachtungen zum FD-Verfahren stellt sich heraus, dass sich die Wahl einer Schrittweite Δz nahe der Stabilitätsgrenze positiv auf die numerische Dispersion auswirkt. Da die Disperisonseffekte allein durch die lineare Gleichung bestimmt sind, wird das Verhalten anhand der linearen Schrödinger-Gleichung weiter untersucht.

- Sowohl bei *schmalbandigen als auch breitbandigen Testsignalen* aus Abbildung 4.2

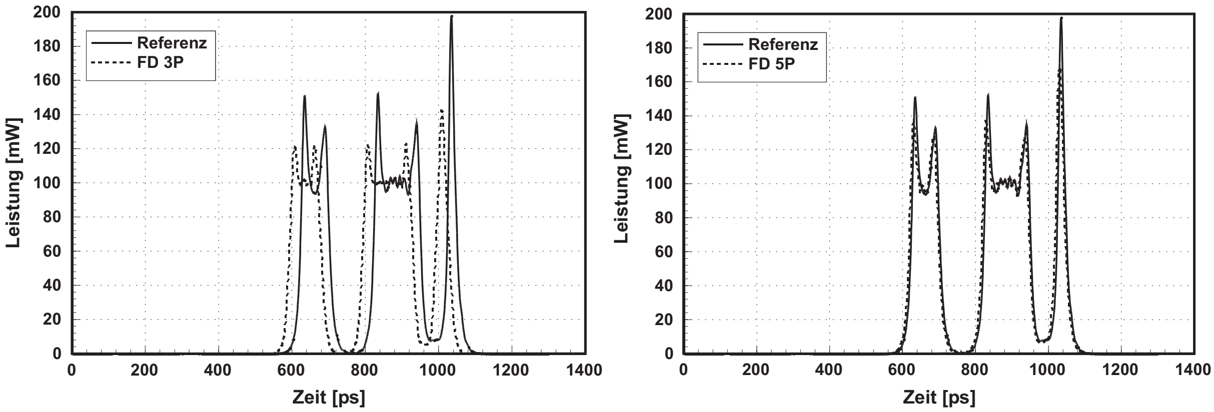


Abbildung 5.3: Kanal mit 150 GHz Abstand von der Mittenfrequenz eines WDM-System , gesamte mittlere Leistung von 100 mW, berechnet mit Drei-Punkte-Schema (links) und Fünf-Punkte- Schema (rechts).

wurde mit der mittleren Leistung P = 1 mW über eine Faserlänge von L = 10 km propagiert.

In Abbildung 5.4 ist das Ergebnis der FD-Approximation zweiter Ordnung (schmalbandiges Testsignal) und vierter Ordnung (breitbandiges Testsignal) dargestellt, wenn die Schrittweite Δz genau auf bzw. leicht unter der Stabilitätsgrenze liegt. Wird die Schrittweite Δz gleich der Stabilitätsgrenze gewählt, so treten in beiden Fällen hochfrequente Signalanteile in der Lösung auf. (Anm.: In der Abbildung werden die Oszillationen nicht mehr grafisch aufgelöst und erscheinen daher als grauer Fleck.) Schon eine geringe Reduzierung von Δz beseitigt dieses Problem.

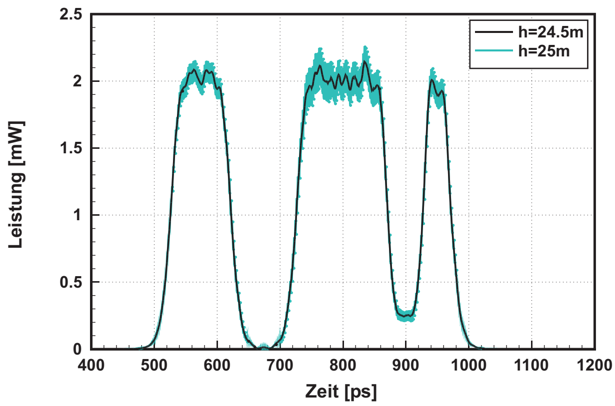


Abbildung 5.4: Wahl der Schrittweite Δz auf und leicht unterhalb der Stabilitätsgrenze für ein drei Punkte FD-Schema.

Die Schrittweite des FD-Verfahrens sollte also, entgegen den Vorhersagen aus der theoretischen Betrachtung, nicht unmittelbar in der Nähe Stabilitätsgrenze gewählt werden. Damit kann das vorteilhafte Verhalten der numerischen Dispersion bei großen Schrittweiten Δz nicht zur Propagation breitbandiger Signale genutzt werden.

Im Rahmen dieser Vorgaben wurden die einzelnen Propagationsschemata anhand unterschiedlicher Testsignale miteinander verglichen. Die Ergebnisse einer Vielzahl von Vergleichsrechnungen werden in einer zusammenfassenden Bewertung dargestellt.

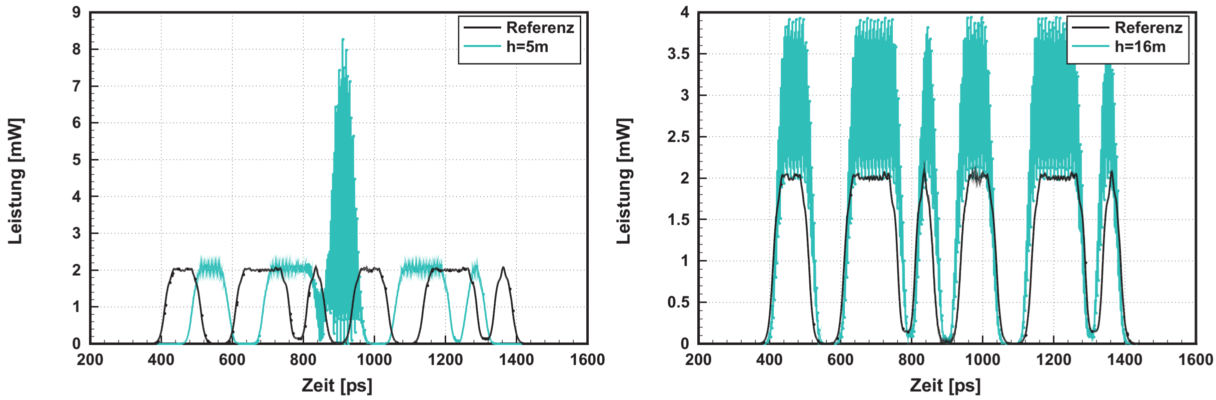


Abbildung 5.5: FD-Approximation bei der Schrittweite Δz weit unterhalb (links) und nahe (rechts) der Stabilitätsgrenze im Vergleich zur tatsächlichen Lösung.

Bewertung

Alle betrachteten Verfahren liefern Ergebnisse, deren Güte in der gleichen Größenordnung liegt. Die Größe der Schrittweite Δz wurde bei keinem der Verfahren durch die Bedingung $\mathrm{MAX} \leq 10^{-3}$ beschränkt. Der limitierende Faktor ist vielmehr die Stabilitätsbedingung der einzelnen numerischen Verfahren. Innerhalb dieser Stabilitätsgrenze ist die Güte der einzelnen numerischen Verfahren durch eine untere Schranke begrenzt, die auch bei der Wahl sehr kleiner Schrittweite von keinem der Verfahren unterschritten werden kann. Offensichtlich begrenzt hier wieder die FD-Approximation der Zeitableitung die Güte der einzelnen Verfahren. Erst durch die Wahl eines Schemas mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta T^4)$ kann diese Schranke unterschritten werden.

Alle in diesem Kapitel betrachteten Verfahren setzten ein FD-Schema zur Approximation der Zeitableitung im linearen Gleichungsanteil der NLSG ein. Die Güte dieser Approximation ist für die Ausprägung der numerischen Dispersion und damit für die nutzbare Bandbreite verantwortlich, in der eine brauchbare Lösung berechnet werden kann. Der Einsatz einer Approximation höherer Ordnung in Zeitrichtung steigert den Rechenaufwand in jedem Iterationsschritt und erzwingt zudem durch die Stabilitätsbedingung eine Reduktion der Propagationsschrittweite Δz. Aufgrund der FD-Approximation existiert weiterhin ein quadratischer Zusammenhang $\Delta z_{max} \sim \Delta T^2$ zwischen der Größe des diskretisierten Spektralbereichs und der maximal möglichen Schrittweite Δz_{max}. Bei $\Delta T = 1\,\mathrm{ps}$ kann Δz bis zu 50 m (Runge-Kutta) bzw. 25 m (FD) gewählt werden. Bei einer weiteren Reduktion von ΔT werden die Schrittweiten jedoch bei allen Verfahren inakzeptabel klein.

Im Rahmen dieser Vorgaben zeichnen sich die einzelnen Verfahren durch die folgenden Eigenschaften aus:

- Die *Methode der Finiten Differenzen* stellt das aufwandsgünstigste Verfahren der in diesem Abschnitt betrachteten Methoden dar. Die mit einem Fünf-Punkte-Operator erzielten Ergebnisse liegen für schmalbandige Signale im Bereich ausreichender Genauigkeit. Werden die FD-Verfahren mit Schrittweiten nahe ihrer Stabilitätsgrenze betrieben, so verbessert sich zwar die Approximation der numerischen Dispersion, es treten jedoch auch hochfrequente Singnalanteile in dem propagierten Signal auf. Damit kann die positive Eigenschaft der FD-Verfahren nicht genutzt werden.

- Die *Prädiktor-Korrektor-Verfahren* verbessern die Stabilitätseigenschaften gegenüber den aufwandsgünstigeren FD-Verfahren nur unwesentlich. Bei der Verwendung eines Drei-Punkte-Operators ergeben sich gegenüber dem FD-Verfahren unabhängig von der Ordnung der Adams-Moulton-Formel keine Verbesserungen der numerischen Lösung. Die Güte wird offensichtlich wieder durch die unzureichende FD-Approximation des linearen Operators $\mathcal{L}$ beschränkt. Der Einsatz eines Fünf-Punkte-Schemas führt bei dem schmalbandigen Testsignal zu einer um mehr als eine Größenordnung genaueren Lösung. Hier zeigt sich der Vorteil der in Propagationsrichtung eingesetzten Polynomapproximation gegenüber der linearen FD-Approximation. Trotz der besseren Approximationseigenschaften sind die Prädiktor-Korrektor-Verfahren wesentlich aufwändiger als die FD-Methode, da in jedem Propagationsschritt zwei Auswertungen der Differentialgleichung durchgeführt werden müssen. Die Prädiktor Korrektor Verfahren sind damit nicht zur schnellen Lösung der NLSG geeignet.

- Die *Runge-Kutta-Verfahren* ermöglichen eine im Vergleich zu der Adams-Moulton-Methode nochmals verbesserte Approximationsgüte und Stabilität. Damit ist der normierte Aufwand $NORM$ der Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung besser als der des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens. Die Verfahren vom *Runge-Kutta* Typ erzielen bei Schrittweiten von bis zu $\Delta z = 0,07\,\mathrm{km}$ bessere Ergebnisse als das Verfahren der Finiten Differenzen. Da allerdings der Aufwand der Runge-Kutta-Verfahren höher ist, können sie nicht mit den FD-Verfahren konkurrieren.

- Anhand der Runge-Kutta-Methode wurde weiterhin die Wirksamkeit einer *adaptiven Schrittweitensteuerung* erprobt. Diese wirkte sich allerdings negativ auf das Verhalten der numerischen Methode aus, da die geregelte Schrittweite deutlich unterhalb der Stabilitätsgrenze lag. Die Regelung der Schrittweite versagt, weil die Güte der numerischen Verfahren innerhalb des stabilen Bereiches nahezu konstant ist und abrupt aus dem stabilen in den instabilen Bereich übergeht. Da der Fehler also entweder sehr klein oder sehr groß ist und es keinen "weichen" Übergangsbereich gibt, existiert kein Variationsbereich für eine adaptive Schrittweitenregelung. Damit ergibt sich kein Variationsbereich, in dem eine Regelung der Approximationsgüte in Abhängigkeit von der Schrittweite Δz möglich ist. Es ist daher effizienter, die Schrittweite unabhängig von der propagierten Signalform ohne eine Regelung nahe der Stabilitätsgrenze zu wählen.

Zur Propagation schmalbandiger Signale wäre also das Verfahren der Finiten Differenzen zu favorisieren. In der Praxis ist aber die Propagation breitbandiger Signale zwingend erforderlich, um die hohe Anzahl (siehe Einleitung) der in komplexen WDM-Systemen auftretenden Kanäle ausreichend erfassen zu können. Das Finite-Differenzen-Verfahren kann aber nur bei sehr kleinen Schrittweiten breitbandige Signale beschreiben und ist damit im Vergleich zu dem nachfolgend beschriebenen Standard-FFT-Split-Step-Verfahren hinsichtlich der Rechenzeit nicht effizient. Damit ist ein Verfahren, welches sowohl im Hinblick auf den linearen als auch nichtlinearen Gleichungsanteil der nichtlinearen Schödinger-Gleichung vollständig auf dem Finite Differenzen-Verfahren basiert, zur Analyse nicht geeignet.

Kapitel 6

Split-Step-Verfahren

Die Split-Step-Verfahren verfolgen den Ansatz, die NLSG in ihren linearen und nichtlinearen Teil aufzuspalten [20, 46, 47]. Es ergeben sich mit den in Gl. (5.2) eingeführten Operatoren $\mathcal{L}$ und $\mathcal{N}$ die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,T) = \mathcal{L}A(z,T) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z}A(z,T) = \mathcal{N}A(z,T). \tag{6.1}$$

Beide Differenzialgleichungen werden nun unabhängig voneinander auf dem Intervall der Länge Δz gelöst. Dadurch kann eine Approximation der tatsächlichen Lösung berechnet werden, deren Güte von der Schrittweite Δz abhängig ist. Als Gesamtlösung ergibt sich durch Integration

$$A(z+\Delta z, T) = \exp\left(\mathcal{L}\Delta z\right) \exp\left(\int_z^{z+\Delta z} \mathcal{N}(\tilde{z}) d\tilde{z}\right) \cdot A(z,T). \tag{6.2}$$

Da der lineare und der nichtlineare Operation nicht miteinander kommutieren, handelt es sich nur um eine Näherungslösung [20]. Grundsätzlich kann der lineare Teil der NLSG alleine für beliebige Δz exakt gelöst werden. Ebenso kann der nichtlineare Teil alleine exakt gelöst werden. Der Fehler entsteht erst durch die Vernachlässigung des jeweils anderen Operators, wenn ein Operator über der Länge des Diskretisierungschrittes Δz alleine gelöst wird. In [48] wird gezeigt, dass sich die Wahl eines symmetrischen Split-Step-Schemas gemäß

$$A(z+\Delta z, T) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}\Delta z\right) \exp\left(\int_z^{z+\Delta z} \mathcal{N}(\tilde{z}) d\tilde{z}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}\Delta z\right) \cdot A(z,T). \tag{6.3}$$

positiv auf den Approximationsfehler auswirkt. Der Fehler dieser Approximation lässt sich durch eine Potenzreihe nähern, welche nur ungerade Potenzen von Δz enthält

$$A(z+\Delta z) = \tilde{A}(z+\Delta z) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta z^{2k+1} + \mathcal{O}(\Delta z^{2n+3}). \tag{6.4}$$

Dabei bezeichnet $A(z + \Delta z)$ die exakte und $\tilde{A}(z + \Delta z)$ die durch das numerische Verfahren ermittelte Lösung. Die Fehlerordnung hat damit in jedem Propagationsschritt die Ordnung drei, so dass sich eine globale Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta z^2)$ ergibt. Auf dem Split-Step-Verfahren basieren zahlreiche Methoden zur Lösung der NLSG. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Methode, mit der linearer und nichtlinearer Operator behandelt werden, und damit auch in ihrer Fehlerordnung in Zeitrichtung $\mathcal{O}(\Delta T^n)$.

6.1 Verfahren für den linearen Operator

Die Lösung des linearen Gleichungsanteils erfordert die Berechnung der zweifachen Zeitableitung im Operator $\mathcal{L}$ (vgl. Gl. (5.2)). Im Kapitel 5 wurde die Zeitableitung durch ein FD-Schema approximiert, was allerdings zu unbefriedigenden Lösungen führte. Im Folgenden werden verschiedene Methoden untersucht, die den linearen Gleichungsanteil der NLSG durch andere Ansätze exakt oder approximativ bestimmen. Dabei wird auch die FD-Approximation des linearen Operators $\mathcal{L}$ erneut untersucht. Das Augenmerk soll dabei auf den Berechnungsaufwand und die Approximationsgüte der unterschiedlichen Methoden gerichtet werden.

6.1.1 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation bildet durch die Korrespondenz [45]

$$\frac{\partial}{\partial T} A(z, T) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j\omega A(z, \omega), \tag{6.5}$$

die doppelte Zeitableitung des linearen Operators $\mathcal{L}$ auf eine Multiplikation mit $(j\omega)^2$ ab. Im diskreten Fall entspricht dies der Multiplikation mit der Diagonalmatix $\Omega_{FFT}^2 = \operatorname{diag}(\omega_k^2)$, wobei

$$\omega_k = \frac{1}{N\Delta T} \left\{ \begin{array}{cc} j2\pi k & k = 0, \dots, N/2 - 1 \\ -j2\pi(N-k) & k = N/2, \dots, N-1 \end{array} \right\} \tag{6.6}$$

gilt und N die Anzahl der Diskretisierungspunkte auf der Zeitachse bezeichnet. Wird die lineare Gleichung aus (6.1) in den Frequenzbereich transformiert, dort gelöst und das Ergebnis schließlich rücktransformiert, so resultiert für das propagierte Feld

$$A(z + \Delta z, T) = \mathrm{IFFT}\left[\exp\left(\frac{j}{2}\beta_2 \Omega_{FFT}^2 \Delta z\right) \mathrm{FFT}\left[A(z, T)\right]\right], \tag{6.7}$$

mit den Bezeichnungen FFT bzw. IFFT für den in der Praxis eingesetzten Algorithmus der schnellen (inversen) Fouriertransformation [43].

Aufwandsabschätzung

Die FFT bzw. IFFT benötigt $\frac{N}{2}\mathrm{ld}(N)$ komplexe Multiplikationen für eine Transformation. Da der Exponentialterm nur einmal vor Beginn der Propagation ausgewertet werden muss, kann die Anzahl der komplexen Multiplikationen zur Lösung von Gl. (6.7) abgeschätzt werden als $N\mathrm{ld}(N) + N$. Dies ist allerdings nur bei einer Betrachtung mit äquidistanter Schrittweite möglich.

6.1.2 Exakte Lösung im Zeitbereich

In diesem und den folgenden Unterpunkten wird der Fall betrachtet, dass die Zeitableitung durch einen Differenzenoperator substituiert wird. Die Lösung des linearen Gleichungsteils ergibt sich mit der Diskretisierungsmatrix $\mathbf{B}$ zu

$$A(z + \Delta z) = \exp\left(\frac{j}{2}\frac{\beta_2}{\Delta T^2}\mathbf{B}\Delta z\right) A(z). \tag{6.8}$$

Zur exakten Lösung dieser Gleichung muss die Matrix $\mathbf{B}$ diagonalisiert werden. Dazu müssen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Originalmatrix $\mathbf{B}$ der Ordnung $N \times N$ bestimmt werden. Die Entwicklung im Eigenraum liefert das Ergebnis

$$A(z + \Delta z) = \mathbf{V}\exp\left(\frac{j}{2}\beta_2\mathbf{D}h\right)\mathbf{V}^{-1}A(z), \tag{6.9}$$

wobei die Matrix $\mathbf{V}$ in ihren Spalten die Eigenvektoren und die Matrix $\mathbf{D}$ auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte von $\mathbf{B}$ enthält. Das Verfahren ist für beliebige Schrittweiten stabil, da sowohl die Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{V}^{-1}$ als auch die Exponentialfunktion in Gl. (6.9) die Norm 1 besitzen.

Da die Matrix $\mathbf{B}$ durch einen Differenzenoperator bestimmt wird, tritt hier wieder numerische Dispersion auf. Mit dem Ansatz (4.2) ergibt sich bei der Verwendung eines Drei-Punkte-Schemas die Gleichung

$$k_{num} = \frac{\beta_2}{\Delta T^2} \cdot (\cos(\omega\Delta T) - 1). \tag{6.10}$$

In erster Näherung tritt dieser Fehler auch beim FD-Verfahren unter der Annahme einer infinitesimal kleinen Schrittweite Δz auf. Das identische Verhalten wird verständlich, wenn man beachtet, dass beide Ansätze die Differenzengleichung in Propagationsrichtung exakt lösen. Der Fehler resultiert also ausschließlich aus der Approximation des linearen Operators $\mathcal{L}$.

In Abbildung 6.1 ist der Verlauf der numerischen Dispersion für unterschiedliche Differenzenschemata und Diskretisierungsweiten ΔT angegeben.

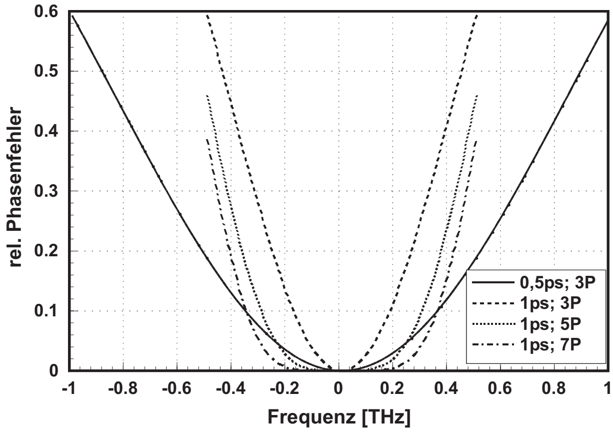


Abbildung 6.1: Relativer Phasenfehler bei unterschiedlichen Diskretisierungsweiten ΔT und Drei-, Fünf- und Sieben-Punkte-Schema zur Approximation der Zeitableitung.

Aufwandsabschätzung

Die Matrix $\mathbf{V}$ enthält in ihren Spalten die Eigenvektoren von $\mathbf{B}$, die Matrix $\mathbf{D}$ die Eigenwerte von $\mathbf{B}$. $\mathbf{D}$ besitzt Diagonalstruktur. Die Matritzen $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^{-1}$ und $\mathbf{D}$ müssen nur einmal vor Beginn der Propagationsschleife durch ein Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}(N^3)$ berechnet werden. Damit fällt in jedem Iterationsschritt noch die Multiplikation des Vektors $A(z)$ mit einer voll besetzten $N \times N$ Matrix an. Das Verfahren ist so von der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$.

6.1.3 Taylor-Approximation

Auch bei diesem Ansatz ist der Ausgangspunkt der Betrachtungen Gl. (6.8). Da der Aufwand für die Berechnung der exakten Lösung der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$ ist, wird hier eine aufwandsgünstigere Näherungslösung betrachtet. Dazu wird der Exponentialterm in eine Taylorreihe entwickelt [45, 50]

$$A(z+\Delta z) = \sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{j} \frac{\beta_2}{2\Delta T^2} \mathbf{B} \Delta z \right)^i A(z). \tag{6.11}$$

Die Stabilitätsanalyse dieses Ausdrucks erfolgt ähnlich wie bei den anderen Verfahren mit dem Ansatz aus Gl. (4.1). Es muss für alle Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{B}$

$$|a| - 1 = \left| \sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{j} \frac{\beta_2}{2\Delta T^2} \lambda \Delta z \right)^i \right| - 1 \leq 0 \tag{6.12}$$

gelten. Der Summenterm gibt den skalaren Wachstumsfaktor a aus der Stabilitätsbedingung in Gl. (4.1) an. Für den maximalen Eigenwert λ_{max} ist der Verlauf dieses Ausdrucks in Abbildung 6.2 (rechts) beispielhaft für $M = 10$ und $M = 11$ angegeben. In der Abbildung ist deutlich zu erkennen, daß der Wachstumsfaktor a rechts von der äußersten Nullstelle stark anwächst. Die Nullstelle bestimmt also die Grenze zwischen dem stabilen und dem instabilen Bereich und begrenzt die maximale Schrittweite Δz. In der linken Abbildung ist die Lage der Nullstelle (hier gilt $a = 1$) in Abhängigkeit vom Grad der Entwicklung M berechnet worden.

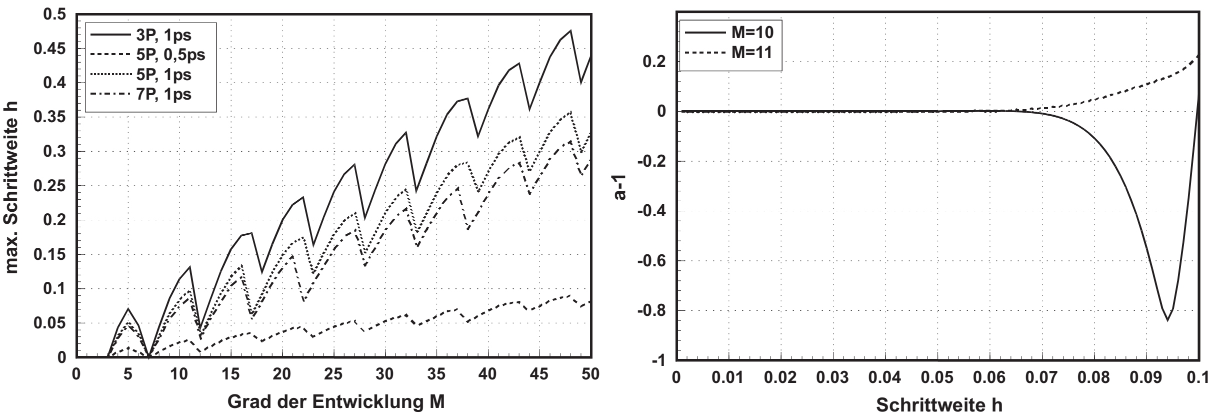


Abbildung 6.2: Maximal mögliche Schrittweite Δz in Abhängigkeit vom Grad der Taylor-Entwicklung M (links) und Verlauf des Ausdrucks $a - 1$ in Gleichung 6.12 für $M = 10$ und $M = 11$ (rechts).

In den übrigen Bereichen schwankt der Wachstumsfaktor um den Wert $a = 1$. Er liegt um so näher bei $a = 1$, je kleiner die Schrittweite Δz gewählt wird. Da der betrachtete Ausdruck von dem Produkt $\lambda \cdot \Delta z$ abhängig ist, ergeben sich für die anderen Eigenwerte qualitativ die gleichen, jedoch anders skalierte Kurvenverläufe. Die Betrachtung für λ_{max} stellt den schlechtesten Fall dar, bei dem die äußerste Nullstelle bei der kleinsten Schrittweite Δz auftritt. Der maximale Eigenwert kann im Frequenzbereich mit der höchsten Frequenz identifiziert werden, so dass die Taylor-Entwicklung für niederfrequente Signale stabiler als für hochfrequente Signale ist. Weiterhin gibt es keinen Punkt, an dem der betrachtete Ausdruck für alle Eigenwerte λ eine gemeinsame Nullstelle hat. Es kann also in jedem Fall nur eine approximative Lösung des Exponentialausdrucks berechnet werden. Genauere Betrachtungen zeigen, dass die Taylor-Entwicklung nicht unitär ist und zu keinem stabilen Propagationsschema führt [51]. Trotzdem soll hier die Schrittweite Δz angegeben werden, bis zu der die Taylor-Approximation das Fehlerintervall $a = 1 \pm 10^{-7}$ nicht verläßt. Die Wahl dieser Fehlerschranke ist willkürlich, sie wird hier eingeführt, um die Konvergenzgeschwindigkeit unterschiedlicher Entwicklungsverfahren vergleichen zu können. Zur Bestimmung der Fehlerschranke wird der schlechteste Fall für λ_{max} untersucht. Die numerische Auswertung dieser Bedingung ist in Abbildung 6.3 gezeigt. Das Taylor-Verfahren kann in der Praxis trotz seiner Instabilität zur numerischen Berechnung des $\exp(j\mathbf{B}\Delta z)$-Operators eingesetzt werden. Dazu muss die Fehlerschranke niedrig genug gewählt werden, im Extremfall unterhalb des Rundungsfehlers des Computers.

Zur Untersuchung der numerischen Dispersion sei auf Abbildung 6.2 (rechts) verwiesen. Im glatt verlaufenden Bereich der Kurve ist die numerische Dispersion nahezu konstant und entspricht dem Verlauf bei der exakten Lösung im Zeitbereich bzw. dem bei einem FD-Schema mit kleiner Schrittweite Δz (vgl. Abbildung 6.1). Wird eine Schrittweite Δz aus dem Bereich der Überschwinger gewählt, so verschlechtert sich der relative Phasenfehler. Dieser Fehler wirkt sich allerdings nicht auf den Spektralbereich um die Mittenfrequenz,

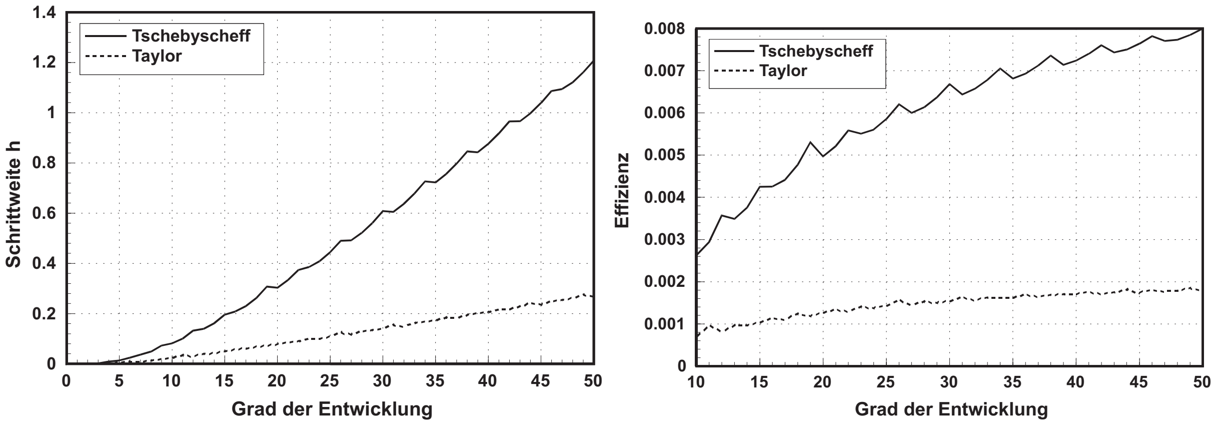


Abbildung 6.3: Maximale Schrittweite Δz für die Taylor- und Tschebyscheff-Approximation (Fünf-Punkte-FD-Schema), bei der a im Fehlerschlauch $1 - 10^{-7} \leq a \leq 1 + 10^{-7}$ liegt (links) und Verhältnis dieser Schrittweite zum Berechnungsaufwand (rechts).

sondern nur auf die Randbereiche aus: für $M = 10$ verschlechtert sich der relative Phasenfehler von $\phi = 46\%$ bei kleinen Schrittweiten auf $\phi = 80\%$ bei einer Schrittweite Δz nahe der Stabilitätsgrenze (vgl. Abbildung 6.4). Im Bereich um die Mittenfrequenz bleibt die Breite des Plateaus unberührt. Für $M = 11$ tritt dieses Verhalten nicht auf. In diesem Fall ergeben sich auch in Abbildung 6.2 (rechts) keine Überschwinger.

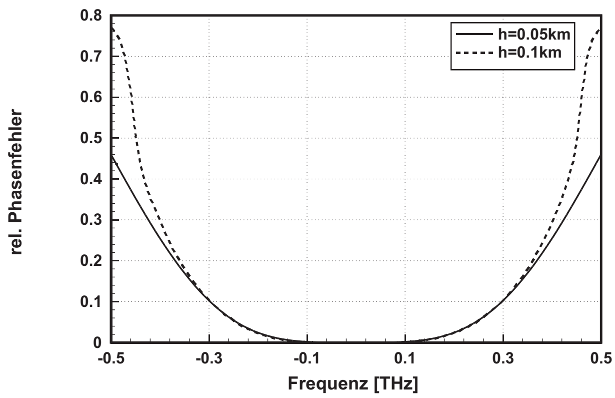


Abbildung 6.4: Numerische Dispersion der Taylorentwicklung im Fall $M = 10$ für eine Schrittweite nahe ($\Delta z = 0,1\,\mathrm{km}$) und fern ($\Delta z = 0,05\,\mathrm{km}$) der Stabilitätsgrenze.

Aufwandsabschätzung

Die symmetrische $N \times N$ Matrix $\mathbf{B}$ enthält k besetzte Diagonalen. Bei der Entwicklung bis zum Grad M entsteht eine ebenfalls symmetrische Matrix, bei der $k + (k-1)(M-1)$ Diagonalen besetzt sind. Aufgrund der Symmetrie muss nach der Entwicklung ein Matrix-Vektor-Produkt mit $\left(\frac{(k-1)}{2} M + 1\right) N$ komplexen Multiplikationen gebildet werden.

Im Folgenden wird das Verhältnis aus der Schrittweite $\Delta z(M)$ aus Abbildung 6.3 (links) zum dazu notwendigen Berechnungsaufwand betrachtet. Dieser Ausdruck wird hier Effizienz genannt und beschreibt die inverse $NORM$

$$\text{Effizienz} = \frac{N \cdot \Delta z(M)}{(1 + M(k-1)/2)N} = \frac{1}{NORM}. \tag{6.13}$$

In dem betrachteten Bereich von $M = 1, \ldots, 50$ ergibt sich der in Abbildung 6.3 (rechts) gezeigte Verlauf. Da die beiden Kurven ansteigen, steigt die Schrittweite $\Delta z(M)$ offensichtlich schneller als der Aufwand an. *Daher wird das Taylorverfahren mit steigender Schrittweite* Δz *aufwandsgünstiger.*

6.1.4 Tschebyscheff-Approximation

Die Tschebyscheff-Entwicklung liefert bzgl. der Maximum-Norm die beste Polynomapproximation für den Exponentialausdruck in Gl. (6.8) [40]. Hier werden komplexe Tschebyscheff-Polynome verwendet [51, 52], die durch eine Substitution

$$\varphi_k(\omega) = T_k(-j\zeta), \quad \zeta \in [-j, j] \tag{6.14}$$

aus den reellen Tschebyscheff-Polynomen T_k abgeleitet werden [51]. Die φ_k sind bzgl. des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle = -j \int_{-j}^{j} \frac{f(\zeta) g^*(\zeta)}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}} d\zeta \tag{6.15}$$

auf dem Intervall $[-j, j]$ orthogonal. Wie beim Taylor-Ansatz kann die Herleitung der Entwicklung von Gl. (6.8) auf die Entwicklung der skalaren Funktion e^z zurückgeführt werden, wobei sich z im Wertebereich zwischen minimalem λ_{min} und maximalem λ_{max} Eigenwert des Operators $\frac{1}{2} j \beta_2 \mathbf{B} \Delta z$ bewegt. Die Eigenwerte können beispielsweise mit Hilfe der Gerschgorinschen Kreise abgeschätzt werden [45]. Mit den Größen

$$R = \frac{\Delta z(\lambda_{max} - \lambda_{min})}{2}, \qquad G = \Delta z \lambda_{min} \tag{6.16}$$

wird die auf das Intervall $[-j, j]$ normierte Funktion

$$\zeta(z) = \frac{z - j(R + G)}{R} \tag{6.17}$$

abgeleitet. Damit kann e^z in eine Tschebyscheff-Reihe entwickelt werden

$$e^z = e^{j(R+G)} e^{R\zeta} \approx \sum_{k=0}^{M} \alpha_k \varphi_k(\omega). \tag{6.18}$$

Über das innere Produkt (6.15) werden die Koeffizienten α_k zu

$$\alpha_k = -je^{j(R+G)} \int_{-j}^{j} \frac{e^{R\zeta}\varphi_k(\zeta)}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} d\zeta = e^{j(R+G)} C_k J_k(R), \tag{6.19}$$

mit der Konstanten $C_k = 1$ für $k = 0$ bzw. $C_k = 2$ für $k > 0$ und den Bessel-Funktionen J_k erster Art und k-ter Ordnung, bestimmt. Da es sich bei den Tschebyscheff-Polynomen um orthogonale Funktionen handelt, erfolgt die Ableitung der Koeffizienten in Gl. (6.19) durch die Verwendung des inneren Produkts. Anhand der α_k wird die gute Approximationseigenschaft des Tschebyscheff-Ansatzes deutlich. Die Besselfunktionen $J_k(R)$ konvergieren mit exponentiell gegen Null, sobald $k > R$ gilt, d.h. sobald der Grad der Entwicklung M größer als R wird [51].

Zur Bestimmung der endgültigen Form der Approximation wird in Gl. (6.17) z durch den Operator $X = \frac{j}{R}\beta_2 \mathbf{B} \Delta z$ substituiert und schließlich in Gl. (6.18) eingesetzt

$$A(z + \Delta z) = \sum_{k=0}^{M} \alpha_k \varphi_k(X) A(z). \tag{6.20}$$

In den bekannten Rekursionsformeln zur Bestimmung der Tschebyscheff-Polynome erster Art wird ebenfalls eine Substitution mit X durchgeführt

$$\varphi_k(X) = 2X\varphi_{k-1}(X) + \varphi_{k-2}(X), \tag{6.21}$$

wobei $\varphi_0(X) = 1$ und $\varphi_1(X) = X$ gilt.

Bei der Untersuchung der Stabilität ergeben sich die gleichen Probleme wie beim Ansatz nach Taylor, da auch die Tschebyscheff-Entwicklung streng genommen nicht stabil ist. Es gelten die gleichen Betrachtungen wie bei der Taylor-Approximation. Daher wird wieder das Fehlerintervall für a mit $a \leq 1 \pm 10^{-7}$ als Konvergenzkriterium für den maximalen Eigenwert λ_{max} der Matrix $\mathbf{B}$ betrachtet. Die maximal mögliche Schrittweite Δz, bis zu der a im Fehlerintervall liegt, ist ebenfalls in Abbildung 6.3 dargestellt.

Durch einen Vergleich der beiden Kurven zeigen sich die wesentlich besseren Konvergenzeigenschaften der Tschebyscheff-Approximation. Sie ist daher in praktischen Anwendungen der Taylor-Entwicklung vorzuziehen.

Da auch die Tschebyscheff Approximation auf einer FD-Approximation für den linearen Operator $\mathcal{L}$ beruht, gelten auch hier dieselben Betrachtungen zur numerischen Dispersion wie beim Taylor-Verfahren bzw. der exakten Lösung im Zeitbereich aus Abschnitt 6.1.2.

Aufwandsabschätzung

Der Aufwand der Tschebyscheff-Approximation ist mit $\left(\frac{(k-1)}{2}M + 1\right) N$ komplexen Multiplikationen mit dem der Taylor Entwicklung identisch. Somit ergibt sich dieselbe Effizienz. Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass sich die Wahl einer großen Schrittweite Δz bei großem M vorteilhaft auf die Effizienz des Schemas auswirkt.

6.1.5 Transformation nach Lanczos

Bei der in Gl. (6.11) betrachteten Entwicklung des Exponentialterms trat die sog. Krylowsequenz (q, $\mathbf{B}q$, $\mathbf{B}^2q$,...) mit dem Startvektor $q \in C$ und der Matrix $\mathbf{B}$ auf. Die Vektoren bilden die nicht orthogonale Basis eines Krylow-Unterraums [53].

Der Lanczos-Algorithmus [54, 55, 64] generiert aus einer hermiteschen Matrix eine Sequenz orthogonaler Basisvektoren v_i, die denselben Unterraum aufspannen wie die Krylowsequenz. Die Vektoren lassen sich aus der Rekursionsformel

$$\mathbf{B}v_i = \beta_i v_{i-1} + \alpha_i v_i + \beta_{i+1} v_i, \tag{6.22}$$

mit den Startwerten $v_0 = 0$ und $\beta_1 v_1 = q$ berechnen. Mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (hier euklidisches Skalarprodukt) werden die einzelnen Elemente der Formel für $i \geq 1$ berechnet

$$\begin{aligned} r_i &= \mathbf{B}v_i - \beta_i v_{i-1} \\ \alpha_i &= \langle v_i, r_i \rangle \\ \beta_{i+1} v_{i+1} &= r_i - \alpha_i v_i. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Mit der Beziehung $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ können schließlich β_{i+1} und v_{i+1} berechnet werden. Bei der Bestimmung von m Vektoren bildet

$$\mathbf{V}_m = [v_1, v_2, ..., v_m] \tag{6.24}$$

die Transformationsmatrix in den m-dimensionalen Unterraum. Die Matrix $\mathbf{B}$ wird im Unterraum auf

$$\mathbf{T}_m = \text{tridiag}(\beta_i, \alpha_i, \beta_{i+1}) \tag{6.25}$$

abgebildet, der Startvektor nimmt in diesem Unterraum die Form

$$\mathbf{c}_0 = (1, 0, 0, ...) \tag{6.26}$$

an. Aus der Anwendung des Lanczos-Algorithmus auf den linearen Teil der Wellengleichung resultiert

$$A(z + \Delta z) = \left(\mathbf{V}_m \exp\left(\frac{j}{2} \beta_2 \mathbf{T}_m \Delta z \right) \mathbf{c}_0 \right) A(z). \tag{6.27}$$

Da die reelle Matrix $\mathbf{T}_m$ gegenüber $\mathbf{B}$ i.A. stark reduziert ist, kann die resultierende Gleichung gemäß Kapitel 6.1.2 exakt gelöst werden.

Die Entwicklung nach Lanczos erfasst mit dem ersten Basisvektor die vollständige Signalenergie und transformiert sie damit vollständig in den Unterraum. Wird das reduzierte

Problem mit einem ernergieerhaltenden Propagationsschema gelöst, so ist der gesamte Algorithmus unitär. Numerische Ungenauigkeiten treten dann auf, wenn das propagierte Signal nicht mehr durch die Basisvektoren v_1, ..., v_m dargestellt werden kann, sondern das Signal in den Bereich der unbekannten Basisvektoren v_{m+1}, ... läuft. Das Propagationsschema startet stets mit dem in Gl. (6.26) angegebenen Vektor. Bei der Propagation im Unterraum werden immer mehr Elemente in diesem Vektor ungleich null, bis auch die letzte Komponente des Vektors besetzt ist. Bei der Verwendung von unitären Propagationsschemata treten nun im nächsten Iterationsschritt Reflexionen an den Fenstergrenzen auf. Um diese zu vermeiden, sollte die letzte Komponente im Vektor $\mathbf{c}$ (dies ist der Fensterrand) sehr klein sein. Mit diesem Kriterium kann die maximal zulässige Schrittweite Δz bei einer gegebenen Zahl von Basisvektoren m abgeschätzt werden [54].

Die durch den Basisvektor v_m dargestellte Energie sei nach der Propagationsweite Δz durch die Bedingung

$$|\mathbf{c}(h)_m|^2 \leq \epsilon \tag{6.28}$$

beschränkt, wobei der Index die m-te Komponente des Vektors bezeichnet und ϵ einen Genauigkeitsparameter darstellt. Der Vektor $\mathbf{c}(h)$ wird mit einer Taylorentwicklung analog Gl. (6.11) abgeschätzt

$$\mathbf{c}(h) \simeq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{j}{2} \beta_2 \mathbf{T}_m \Delta z \right)^k \cdot \mathbf{c}_0. \tag{6.29}$$

Da $\mathbf{T}_m$ tridiagonal ist, kann $\mathbf{c}(h)_m$ durch eine Störungsrechnung [54] zu

$$\mathbf{c}(h)_m \simeq \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{j}{2} \beta_2 \Delta z \right)^{m-1} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} \beta_k \tag{6.30}$$

abgeschätzt werden. Die β_k geben das $(k+1)$-te Element der Nebendiagonale von $\mathbf{T}_m$ aus Gl. (6.25) an. Mit Gl. (6.28) folgt schließlich

$$\Delta z \simeq \frac{2}{\beta_2} \left(\sqrt{\epsilon} \frac{(m-1)!}{\prod_{k=0}^{m-1} \beta_k} \right)^{1/(m-1)}. \tag{6.31}$$

Die Schrittweite Δz ist also neben der Anzahl von Basisvektoren m auch von der vorliegenden Signalform abhängig. Die Anzahl der Basisvektoren m sollte daher durch den Propagationsalgorithmus adaptiv eingestellt werden.

Aufwandsabschätzung

Im Folgenden wird mit M die Dimension der Basis bezeichnet, k gibt die Anzahl der besetzten Diagonalen in der Matrix $\mathbf{B}$ an. Die Berechnung der neuen Basisvektoren erfordert $(4 + (k+1)/4)MN$ komplexe Multiplikationen. Bei der Rücktransformation fallen MN Operationen an. Hinzu kommen die Multiplikationen bei der exakten Lösung im

Unterraum. Diese werden hier mit M veranschlagt, was eine sehr positive Abschätzung darstellt. Insgesamt ergibt sich der Aufwand also zu

$$NORM = (6 + (k+1)/4)M \cdot N \tag{6.32}$$

komplexen Multiplikationen.

6.1.6 Wavelet-Transformation

Im nächsten Abschnitt wird die Lösung des linearen Operators durch eine Transformation durch Wavelets untersucht. Die mathematischen Grundlagen für die Anwendung dieser Transformation werden in [65, 66, 49, 67] näher beschrieben. Grundlage für die Transformation und spätere Transformationen bilden die so genannten Wavelets, welche als eine Art kleine, d. h. in ihrer Ausbreitungsrichtung begrenzte Welle verstanden werden können.

Aus einem Mutterwavelet $h(T) = h_{0,0}(T)$ wird eine Gruppe von Wavelets $\{h_{m,n},\ m, n \in \mathbf{Z}\}$ nach der Formel

$$h_{m,n}(T) = a_0^{-m/2} h(a_0^{-m} T - n b_0) \tag{6.33}$$

mit den Parametern a_0 und b_0 abgeleitet. Nach dieser Vorschrift entstehen die Wavelets durch Verschieben und Skalieren des Mutterwavelets. Der Parameter a_0 ist dabei für die Stärke der Skalierung, b_0 für die Größe der Verschiebung in Abhängigkeit von m und n verantwortlich. Die Wavelets bilden einen Frame, so dass die korrespondierenden Transformationsvorschriften für Frames angewendet werden können. Die zur Rekonstruktion notwendigen dualen Wavelets $\tilde{h}_{m,n}$ werden mit der Formel

$$\tilde{h}_{m,n}(T) = a_0^{-m/2} \tilde{h}_{0,m}(a_0^{-m} T) \tag{6.34}$$

ermittelt, wobei $\tilde{h}_{0,m} = \mathcal{T}^{-1} h_{0n}$ gilt.

Anwendung der Wavelet-Transformation

Die Berechnung der Signalausbreitung in der linearen Einmodenfaser erfolgt, indem das Eingangssignal mit den Funktionen $h_{mn}(T)$ transformiert wird. Kann nun für die zur Rücktransformation benötigten dualen Wavelets $\tilde{h}_{mn}$ der lineare Teil der NLSG analytisch gelöst werden, so kann die Impulsform jedes einzelnen Wavelets $\tilde{h}_{mn}(z, T)$ an der Ortskoordinate z angegeben werden. Werden diese propagierten Wavelets für die Rücktransformation eingesetzt, so ergibt sich als Linearkombination der einzelnen $\tilde{h}_{mn}(z, T)$ das propagierte Eingangssignal.

Hier wird das Mutterwavelet

$$h(T) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-T^2)\exp\left(-T^2/2\right), \tag{6.35}$$

gewählt, aus dem die Wavelets $h_{mn}(T)$ gemäß Gl. (6.33) mit den Parametern $a_0 = 2$ und $b_0 = 0,5$ abgeleitet werden.

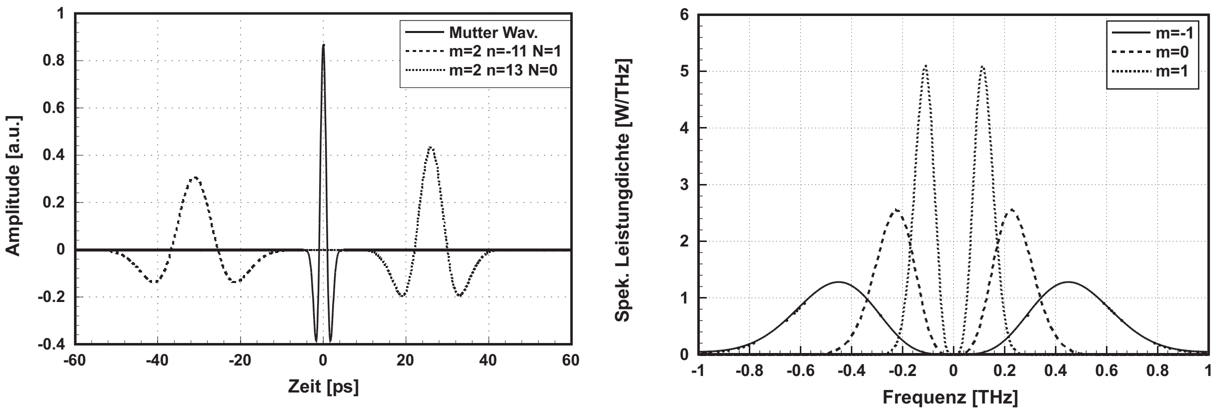


Abbildung 6.5: Mutterwavelet $h(T)$ und Wavelets h_{mn}, die durch Translation und Skalierung aus $h(T)$ abgeleitet werden (links) sowie Spektren von Wavelets mit unterschiedlicher Skalierung h_{m0} (rechts).

Anhand von Abbildung 6.5 wird deutlich, dass durch die Transformation auch eine Information über die Frequenzverteilung der betrachteten Funktion gewonnen wird. Die schmalen Wavelets erfassen hochfrequente, die breiten Wavelets niederfrequente Anteile der transformierten Funktion. Da die Wavelets im Zeitbereich nicht unendlich ausgedehnt sind, erhält man im Gegensatz zur Fourier-Transformation (Basisfunktionen sin und cos erstrecken sich über den gesamten diskretisierten Bereich) eine Information über die lokal vorliegende Frequenzverteilung.

Um den dualen Frame zu den h_{mn} herzuleiten, werden zunächst die Frame-Grenzen bei $a = 2$ und $b = 0,5$ zu A=6,546 und B=7,092 bestimmt [66]. Da das Verhältnis $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 1,083$ nahe bei dem Wert 1 liegt, ist nahezu die Bedingung für einen engen Frame erfüllt und die Reihe zur Bestimmung des dualen Frame kann schon nach einem Glied abgebrochen werden. Die so bestimmte Approximation für $\tilde{h}_{mn}(T)$ führt bei der Rücktransformation natürlich auch nur zu einer approximativen Lösung. Die Genauigkeit der Lösung kann durch die Verwendung von N Mutterwavelets h^0,..., h^{N_1} gesteigert werden, wobei

$$h^j(T) = 2^{-j/N}h(2^{-j/N}T) \tag{6.36}$$

gilt. Bei dem hier betrachteten Problem werden die Konstanten $a = 2$, $b = 0,5$ und $N = 2$ gewählt, womit sich $\mathcal{A} = 13,637$ und $\mathcal{B} = 13,639$ mit dem verbesserten Verhältnis $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 1,0002$ ergibt [66].

Im Folgenden werden die propagierten Wavelets $h_{mn}(z,T)$ berechnet. An der Stelle $z = 0$ gilt $h_{mn}(z = 0, T) = h_{mn}$. Die Fourier-Transformierte H_{mn} von h_{mn} ergibt sich zu

$$H_{mn}(0,\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}a^{5m/2}\omega^2 \exp\left(\frac{-(a^m\omega)}{2}\right) \exp\left(ja^m nb\omega\right). \tag{6.37}$$

Die lineare Schrödinger-Gleichung wird nun für dieses Eingangssignal im Frequenzbereich gelöst. Es ergibt sich für das propagierte Wavelet $h_{mn}(z,T)$ gemäß [65] im Zeitbereich schließlich die Lösung

$$\begin{aligned} h_{mn}(z,T) \quad &= \quad a^{-m/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\left(\frac{a^{2m}}{a^{2m}-j\beta_2 z}\right)^{3/2} \cdot \\ &\left(1-\frac{(T-nba^m)^2}{a^{2m}-j\beta_2 z}\right)\exp\left(\frac{-(T-nba^m)^2}{2(a^{2m}-j\beta_2 z)}\right). \end{aligned} \tag{6.38}$$

Um ein komplexes Eingangssignal $A(z=0,T) = A_R(z=0,T) + jA_I(z=0,T)$ in der Faser propagieren zu können, wird es in seinen Real- und Imaginärteil zerlegt. Für beide Teile werden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{mnR} &= \langle h_{mn}(z=0,T), A_R(z=0,T)\rangle, \\ c_{mnI} &= -\langle h_{mn}(z=0,T), A_I(z=0,T)\rangle \end{aligned} \tag{6.39}$$

berechnet. Das Ausgangssignal $A(z,T) = A_R(z,T) + jA_I(z,T)$ wird durch die Rücktransformation

$$\begin{aligned} A_R(z,T) &= \frac{2}{\mathcal{A}+\mathcal{B}}\sum_{m,n} c_{mnR}h_{mn}(z,T) \\ A_I(z,T) &= \frac{2}{\mathcal{A}+\mathcal{B}}\sum_{m,n} c_{mnI}h_{mn}(z,T), \end{aligned} \tag{6.40}$$

bestimmt.

Ein wesentlicher Vorteil der Wavelet-Transformation gegenüber der Fourier-Transformation besteht darin, dass die Wavelet-Transformation nicht unendlich ausgedehnte Basisfunktionen verwendet. Durch diese Eigenschaft wird das Zeitsignal bzw. Spektrum nicht als periodisch fortgesetzt behandelt. Unerwünschte Effekte wie Unstetigkeiten von Betrag und Phase einer betrachteten Funktion an den Fenstergrenzen bleiben dadurch aus [67].

Eine weitere Untersuchung des Verfahrens wurde hier nicht durchgeführt. Zu dieser Entscheidung haben die folgenden Fragen geführt:

Zum einen ist es für die Nutzung der Lokalität der Wavelet-Transformation wichtig zu wissen, wo die einzelnen Wavelets im Zeit- bzw. im Frequenzbereich liegen müssen, um einen möglichst effizienten Einsatz zu garantieren. Eine Berechnung der vollbesetzten Transformationsmatrix würde keinen Vorteil gegenüber der FFT bringen. Darüber hinaus können aus den Mutterwavelets, wie in Gleichung (6.33) beschrieben, neben der Translation auch durch eine Skalierung neue Wavelets als Basisfunktionen für die Transformation erzeugt werden. Wie die Skalierung der Wavelets für eine Signaldarstellung aufwandsgünstig eingesetzt werden kann, ist ebenfalls unklar, da eine globale Translation und Skalierung des Mutterwavelets über die gesamte zu approximierende Bitfolge eher zu einem erhöhten Rechenaufwand gegenüber der exakten Lösung des linearen Operators im Zeitbereich führt.

Die zweite Frage ist, ob eine höhere Genauigkeit erreicht werden kann, was aufgrund der obigen Überlegungen ebenfalls zweifelhaft ist. Aus diesem Grund wird dieser Ansatz in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Zeitgleich wurde diese Simulationsmethode in der Arbeit [68] näher untersucht. In einem ersten Ansatz, der hier Split-step wavelet collocation method (SSWCM) genannt wird, wurden Wavelets derselben Skalierung äquidistant im zu approximierenden Zeitfenster platziert. Durch eine Vernachlässigung von allen Werten in der den linearen Operator beschreibenden Matrix, die einen Modulo kleiner als den Schwellwertparameter s des größten Modulo haben, wird eine Diagonalisierung auf die Bandbreite S erreicht. S ist hier empirisch gefunden als

$$S \; q \; s \log p \leq N. \tag{6.41}$$

q ist hierbei ein Komplexitätsfaktor, s ist die Unterstützung und p ist der Schwellwert. Abbildung 6.6 zeigt den Fehler der Berechnungen mit SSWCM und Split-step Fourier method (SSFM) für ein festes Zeitfenster, sowie die relative Rechenzeit pro Diskretisierungsschritt. Propagiert wurde hier ein Soliton zweiter Ordnung über 5 Solitonperioden. Hieraus ist zu ersehen, dass die Berechnungsgenauigkeit der beiden Verfahren sich nur unwesentlich unterscheidet, die Berechnungsdauer jedoch variiert. Für eine geringe Anzahl an Diskretisierungspunkten ist die SSWCM schneller. Bei einer hohen Anzahl Diskretisierungspunkte hingegen ist die SSFM schneller. Bei 16384 Diskretisierungspunkten, wie sie für eine WDM-Simulation im Total Field Approach nötig sind, ist die SSFM vorzuziehen.

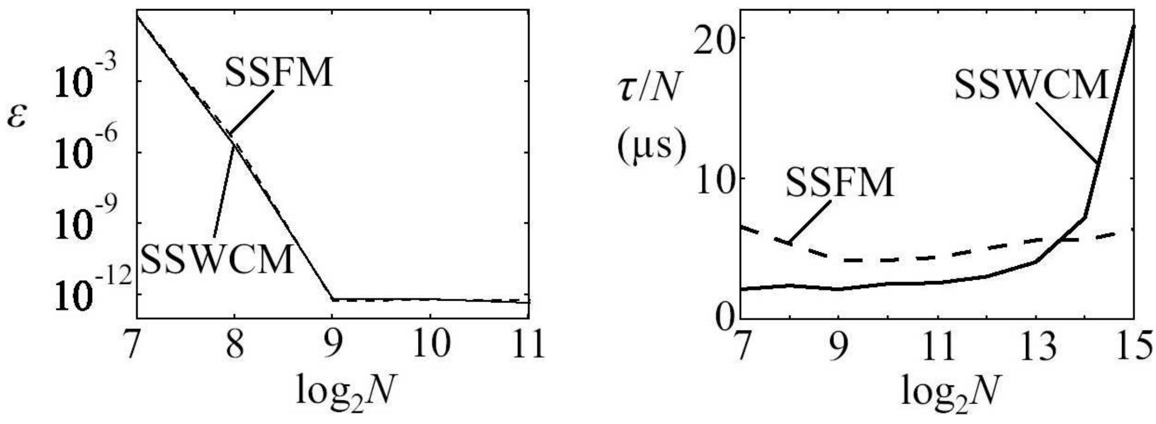


Abbildung 6.6: Fehler ϵ (links) nach einer Propagation über eine Strecke L und die relative Berechnungsdauer τ/N (rechts) für einen Propagationsschritt als Funktion der Anzahl der Diskretisierungspunkte N (Fenstergröße $W = 40\ T_0$, $s = 29$, $p = 10^{-12}$, $L/\Delta z$=50000 Diskretisierungsschritte) [68].

Hierzu wurde die Propagation eines Einzelpulses betrachtet. Für reale Systeme ist jedoch die Simulation von Bitfolgen interessant. Diese Untersuchungen erfolgten im Zusammenhang mit WDM-Simulationen, die ebenfalls im Total Field Approach durchgeführt wurden. Es wurde eine 1024 Bit 40 GBit/s NRZ Signalfolge pro Kanal entlang einer SSMF der Länge 43,75 km und einer 7 km langen DCF propagiert [68]. Die Anzahl der propagierten Kanäle wurde in den Simulationen variiert. Für die SSWCM wurden hierbei doppelt so viele Stützstellen N angesetzt wie für die SSFM. Abbildung 6.7 zeigt, dass bei einer steigenden Anzahl an Kanälen die SSFM eine größere Berechnungsdauer benötigt, jedoch auch eine höhere Genauigkeit erzielt als die SSWCM. Ein genauer Vergleich der beiden Methoden für eine Simulation eines Einkanal NRZ-Signals ist leider nicht möglich. Welcher Algorithmus für eine Kanalzahl größer 16 bei gleicher Berechnungsdauer die genaueren Ergenisse liefert, ist nicht klar zu erkennen, jedoch scheinen beide Algorithmen vergleichbare Ergebnisse zu liefern.

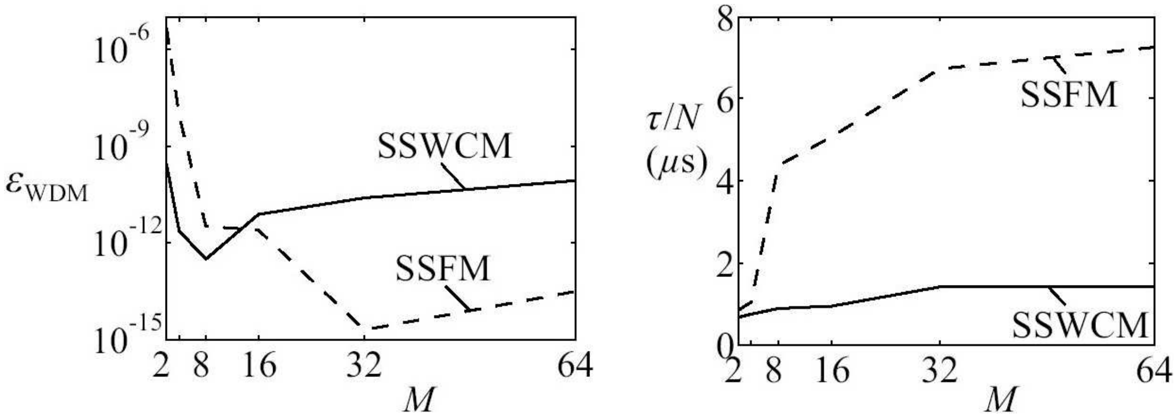


Abbildung 6.7: Fehler ϵ_{WDM} (links) nach einer Propagation über eine Strecke L und die relative Berechnungsdauer τ/N (rechts) für einen Propagationsschritt als Funktion der Anzahl der Kanäle M ($s = 39$, $p = 10^{-9}$) [68].

Ein nächster Ansatz ist die Split-step multi resolution wavelet collocation method (SSMRWCM). Hier werden alle Wavelet-Koeffizienten, die kleiner als ein Wert η sind, in der Propagationsmatrix für den linearen Operator vernachlässigt. Hierdurch können in Bereichen, in denen das Signal einen hohe Flankensteilheit besitzt, viele Koeffizienten in der Matrix auftreten, wohingegen in Bereichen eines wenig variierenden Signals nur wenige Koeffizienten auftreten. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abbildung 6.8 zu sehen. Es wurde ein identisches WDM-System wie in der vorangegangenen Untersuchung simuliert. Hierbei zeigt sich, dass die SSMRWCM geringe Berechnungszeitvorteile gegenüber der SSFM aufweist. Speziell wenn Teile des Signals konstant sind, wird dieser Vorteil deutlich.

Um dies zu zeigen, wurde eine zweite Untersuchung durchgeführt, bei der nur 7% des Simulationsfensters mit einer Bitfolge gefüllt sind und der restliche Bereich einem konstanten Wert enthält. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.9 dargestellt. Hier zeigt sich, dass die Lokalität der Wavelets für derartige Spezialfälle durchaus Vorteile bietet.

Die Skalierbarkeit der Wavelet-Basisfunktionen ist in den Untersuchung nicht eingeflossen.

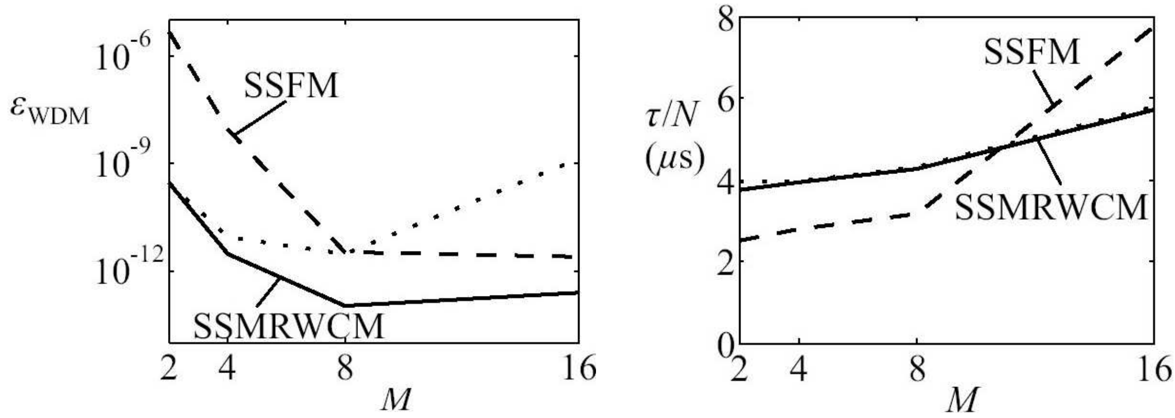


Abbildung 6.8: Fehler ϵ_{WDM} (links) nach einer Propagation über eine Strecke L und die relative Berechnungsdauer τ/N (rechts) für einen Propagationsschritt als Funktion der Anzahl der Kanäle M ($s = 35$, $p = 10^{-10}$, $\eta = 10^{-11}$ (—); $s = 35$, $p = 10^{-9}$, $\eta = 10^{-9}$ (...); SSFM (- -)) [68].

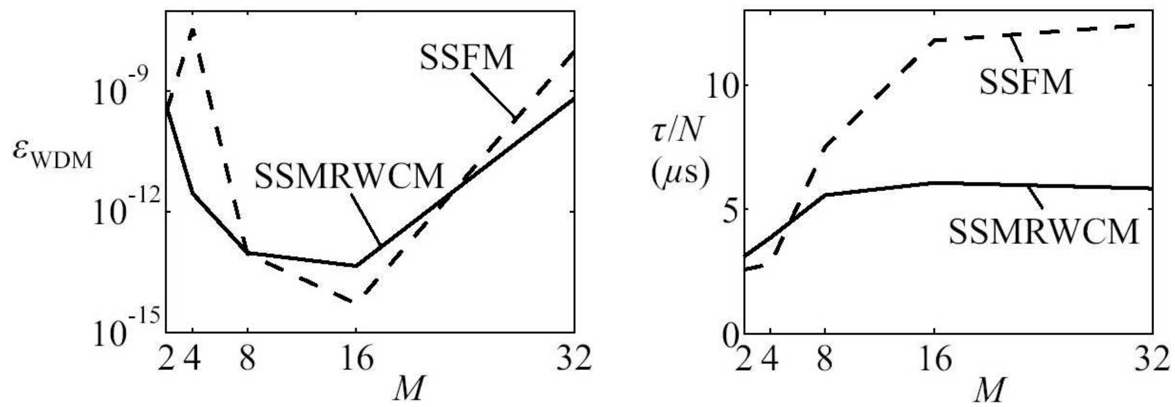


Abbildung 6.9: Fehler ϵ_{WDM} (links) nach einer Propagation über eine Strecke L und die relative Berechnungsdauer τ/N (rechts) für einen Propagationsschritt als Funktion der Anzahl der Kanäle M ($s = 35$, $p = 10^{-10}$, $\eta = 10^{-11}$, 7% des Simulationsfensters mit Signal gefüllt) [68].

Aufwandsabschätzung

Die SSWCM ist mit ihrem Berechnungaufwand

$$NORM = q\ s\ \log p \leq N, \tag{6.42}$$

aufwandsgünstiger als die SSFM, jedoch führt sie nicht zwangsläufig zu einer gleichen Genauigkeit. Für den Fall eines Mehrkanalsystems mit M Kanälen erhöht sich der Aufwand auf

$$NORM = M\ s\ \log p. \tag{6.43}$$

Der Berechnungsaufwand der SSMRWCM ist nicht klar voraussagbar, da er in hohem Maß von dem zu propagierenden Signal und den gewählten Schwellwertparametern abhängt.

6.1.7 IIR-Filter Approximation

Für einige der zuvor erläuterten Verfahren wird eine Fourier-Transformation des optischen Signals in den Frequenzbereich benötigt, um den linearen Operator im Bildbereich zu berechnen. Diese Transformation verursacht hier den Hauptteil des Rechenaufwandes. Um ihn einzusparen, ist es möglich den Einfluss der Dispersion direkt im Zeitbereich über ein IIR-Filter (Infinite Impulse Response) einzubeziehen. Diese Art der Berechnung des linearen Operators wird in Kapitel 7 gesondert und ausführlich behandelt.

6.2 Verfahren für den nichtlinearen Operator

Exakte Lösung

Der durch den nichtlinearen Operator $\mathcal{N}$ beschriebene Gleichungsteil

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z,T) = -j\gamma \left|A(z,T)\right|^2 A(z,T) \tag{6.44}$$

der NLSG kann exakt gelöst werden. Mit den reellen Funktionen Ψ und Φ wird die Lösung gemäß

$$A(z,T) = \Psi(z,T) e^{j\Phi(z,T)} \tag{6.45}$$

angesetzt. Die Trennung nach Real- und Imaginärteil liefert die Konstanz der Amplitudenfunktion $\Psi(z,T)$ in Ortsrichtung und damit eine analytisch lösbare Beziehung für die Phase $\Phi(z,T)$. Die Beziehung

$$A(z + \Delta z, T) = \mathrm{e}^{-j\gamma|A(z,T)|^2\Delta z} \cdot A(z, T) \tag{6.46}$$

fasst die beiden Ergebnisse zusammen.

Approximationen

In Kapitel 5.3 werden Runge-Kutta-Verfahren [44] mit den Fehlerordnungen $\mathcal{O}(\Delta z^2)$ bis $\mathcal{O}(\Delta z^4)$ im Zusammenhang mit dem linearen Gleichungsanteil untersucht. Agrawal löst den nichtlinearen Gleichungsanteil auf einem anderen Weg [20, 69]. Das zu lösende Integral in der nichtlinearen Gleichung wird mit der Trapezregel approximiert

$$A(z + \Delta z, T) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(z) + \mathcal{N}(z + \Delta z)\right)\right) A(z, T). \tag{6.47}$$

Diese implizite Approximationsformel entsteht durch die Anwendung der Trapezregel auf den Integralausdruck in Gl. (6.2). Sie wird durch ein iteratives Verfahren gelöst. Zunächst wird der erste lineare Halbschritt gemäß Gl. (6.3) durchgeführt. Im nächsten Schritt muss die implizite Gl. (6.47) gelöst werden. Im ersten Schritt wird die Gleichung mit der Identität $\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}(z + \Delta z)$ gelöst. Dann wird der zweite lineare Halbschritt durchgeführt und damit in erster Näherung die Lösung $\tilde{A}(z + \Delta z)$ ermittelt. Mit $\tilde{A}(z + \Delta z)$ wird nun erneut Gl. (6.47) gelöst und der lineare Halbschritt durchgeführt, usw. Die notwendige Anzahl der Iterationen M ist von der gewählten Schrittweite abhängig. Im Allgemeinen sind jedoch zwei Iterationen ausreichend.

Aufwandsabschätzung

Die exakte Lösung der nichtlinearen Gleichung wird mit $3,75N$ komplexen Multiplikationen veranschlagt. Die Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta z^2)$, $\mathcal{O}(\Delta z^3)$ und $\mathcal{O}(\Delta z^4)$ benötigen zum Vergleich $3,5N$, $5,25N$ und $7N$ komplexe Multiplikationen.

Bei dem Verfahren nach Agrawal muss in jedem Iterationsschritt neben einem linearen Vollschritt auch ein linearer Halbschritt durchgeführt werden. Dabei fallen jeweils zwei Fourier-Transformationen an, was den Aufwand des gesamten Propagationsverfahrens (Lösung der vollständigen NLSG) stark erhöht. Die gewonnene zusätzlich Genauigkeit muss im Einzelfall gegen diesen erhöhten Aufwand abgewogen werden.

6.3 Analyse des Split-Step-Verfahrens

Mit den Betrachtungen zum linearen und nichtlinearen Operator kann die NLSG nun gelöst werden. Dazu wird das symmetrische Split-Step-Schema angewendet werden und unterschiedliche Verfahren zur Lösung des linearen und nichtlinearen Operators kombiniert. Zunächst wird jedoch der durch das Split-Step-Verfahren verursachte Fehler untersucht.

6.3.1 Split-Step-Schema mit exakter Operatorzerlegung

Hier werden die Split-Step-Methoden untersucht, die sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Operator ein exaktes Lösungsverfahren einsetzen. Es wird also die Fourier-Methode mit der exakten Lösung des nichtlinearen Operators kombiniert. Anhand dieser Verfahren kann dann der Fehler untersucht werden, der allein durch den Einsatz der Split-Step-Methode verursacht wird.

Zur Fehleranalyse wird die Propagation eines fundamentalen Solitons mit einer Signal-Spitzenleistung von $P_{max} = 100$ mW und $P_{max} = 400$ mW bei unterschiedlichen Schrittweiten Δz, wie in Kapitel 4.3 beschrieben, betrachtet. Die Faserlänge beträgt $L = 50$ km die Bandbreite des Impulses beträgt ca. 150 GHz (die spektrale Leistungsdichte liegt außerhalb dieses Frequenzbandes unterhalb von 10^{-5}W/THz).

In beiden Fällen ist das Propagationsschema energieerhaltend. Bis zu einer Schrittweite von $\Delta z = 0,5$ km bleibt der maximale Fehler MAX unterhalb von 10^{-3}. Bei einer konstanten Schrittweite von $\Delta z = 10$ m liegt der Fehler nahezu unterhalb der Genauigkeit der Fehlerkriterien. In der Abbildung 6.10 (links) ist das exakte Spektrum eines Solitons mit dem Spektrum des numerisch berechneten Solitons bei einer Schrittweite von $\Delta z = 5$ km bzw. $\Delta z = 10$ km verglichen. Im Randbereich der numerisch bestimmten Spektren sind deutlich zusätzliche Peaks zu sehen, die durch numerische Resonanzeffekte entstehen.

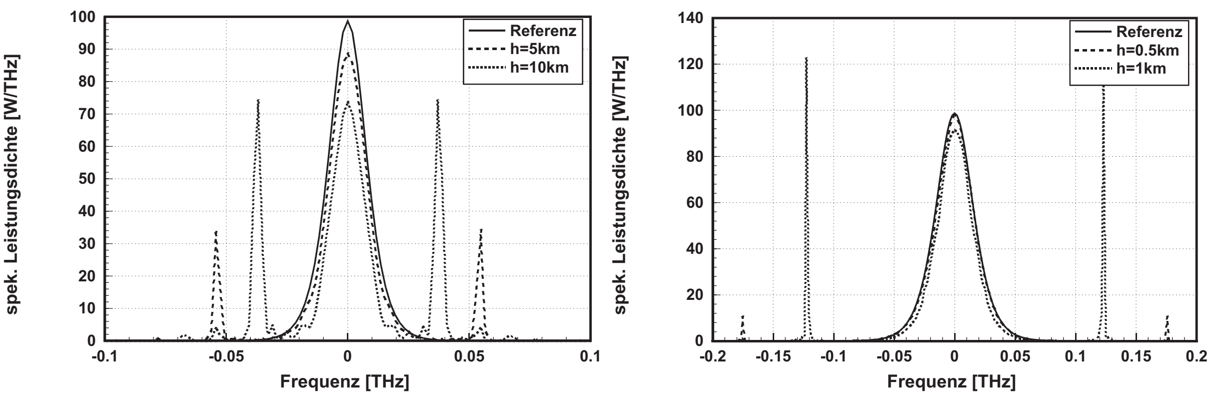


Abbildung 6.10: Spektrum eines fundamentalen Solitons nach der Propagation über 50km bei unterschiedlichen Schrittweiten Δz bei einer Spitzenleistung von $P_0 = 100\,\mathrm{mW}$ (links) bzw. $P_0 = 400\,\mathrm{mW}$ (rechts).

Die gleiche Untersuchung wird hier für ein Soliton mit der Spitzenleistung $P_0 = 400$ mW durchgeführt (Abbildung 6.10 (rechts)). Neben der höheren Leistung ist das Signal vor allem spektral breitbandiger als das zuvor betrachtete Soliton (vgl. Abbildungen 4.1). Dies folgt aus der Solitonbedingung, die für eine höhere Leistung P_0 eine eine kleinere Pulsbreite T_0, bzw. eine größeres Δf fordert.

Bei diesem Signal müssen für gleichwertige Ergebnisse wie im ersten Fall kleinere Schrittweiten gewählt werden. Abbildung 6.10 (rechts) bestätigt dies, da die Resonanzeffekte offensichtlich schon bei kleineren Schrittweiten auftreten. Offensichtlich sind im Wesentlichen die Resonanzeffekte für die geringe Genauigkeit des Split-Step Verfahrens bei großen Schrittweiten verantwortlich. Das Auftreten der Resonanzeffekte ist wiederum sowohl an

Schrittweite Δz als auch an die Leistung und die spektrale Breite des betrachteten Signals gekoppelt. Für eine hohe Leistung P, eine kleine Pulsbreite T und eine kleine Schrittweite liegen die Resonanzen weit außerhalb des betrachteten Frequenzbereiches und weisen eine kleine Amplitude auf. Dies kann durch die Propagation eines Solitons mit sehr niedriger Leistung und damit auch mit einem sehr schmalen Spektrum bestätigt werden. In diesem Fall werden auch bei Schrittweiten von einigen Kilometern noch resonanzfreie Signale mit hoher Genauigkeit erreicht.

Zur Entwicklung effizienter Propagationsalgorithmen muss damit die Reduktion der Resonanzartefakte das primäre Ziel sein. Ein Ansatz zur Unterdrückung dieser Resonanzartefakte wird in Kapitel 9 vorgestellt.

Aufwandsabschätzung

Der Aufwand dieses Verfahrens kann reduziert werden, indem bei der Berechnung von zwei aufeinander folgenden Halbschritten eine Fourier-Transformation eingespart wird. Damit ergibt sich der Gesamtaufwand für die Lösung der Gl. (6.3)zu

$$NORM = \frac{3}{2}N\mathrm{ld}(N) + 5,75N \tag{6.48}$$

komplexen Multiplikationen. N gibt hierbei die Anzahl der Diskretisierungspunkte für die Fourier-Transformationen an.

6.3.2 Reduziertes Split-Step-Schema

Eine Abwandlung des symmetrischen Split-Step-Schemas ermöglicht eine aufwandsgünstigere Implementierung. Als Anfangswert bei der Berechnung des nichtlinearen Operators dient nun nicht mehr $A(n \cdot \Delta z)$, $n \in N$, sondern der Wert $A(n \cdot \Delta z + \Delta z/2)$. Es ergibt sich dann die folgende Form

$$A(z + \Delta z, T) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}\Delta z\right) \mathcal{T} \exp\left(\int_{z+\Delta z/2}^{z+3\Delta z/2} \mathcal{N}(\tilde{z}) d\tilde{z}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}\Delta z\right) \cdot A(z,T). \tag{6.49}$$

In dieser Form können jeweils die linearen Halbschritte zweier aufeinander folgender Propagationsschritte zu einem linearen Vollschritt zusammengefasst werden. Der Aufwand reduziert sich nun zu $N\mathrm{ld}(N) + 4,75N$.

Testrechnungen von Impulsen mit einer maximalen Leistung von $P_{max} = 100\mathrm{mW}$ zeigen, dass die Abweichung zwischen der exakten und dem aufwandsreduzierten Methode erheblich sein kann. So kann beispielsweise mit dem exakten Verfahren bei einer Schrittweite von $\Delta z = 0,25\mathrm{km}$ eine Lösung mit der gleichen Güte berechnet werden, wie sie im anderen Fall erst bei $\Delta z = 0,1\mathrm{km}$ erreicht wird.

Bei Impulsen mit einer Spitzenleistung $P_0 = 400\mathrm{mW}$ zeigen sich ebenfalls große Abweichungen zwischen den unterschiedlichen Verfahren. Bei der Betrachtung der Spektren in

Abbildung 6.11 ergibt sich jedoch ein überraschendes Ergebnis. Offensichtlich liefert das reduzierte Spektrum eine bessere Approximation der Signalamplitude. Die Resonanzen erscheinen erst bei größeren Schrittweiten als beim exakten Schema. Dass die Fehlerkriterien trotz der besseren Approximation der Amplitude schlechtere Werte anzeigen, hängt offensichtlich mit der ungenauen Approximation der Phase bei dem reduzierten Schema zusammen.

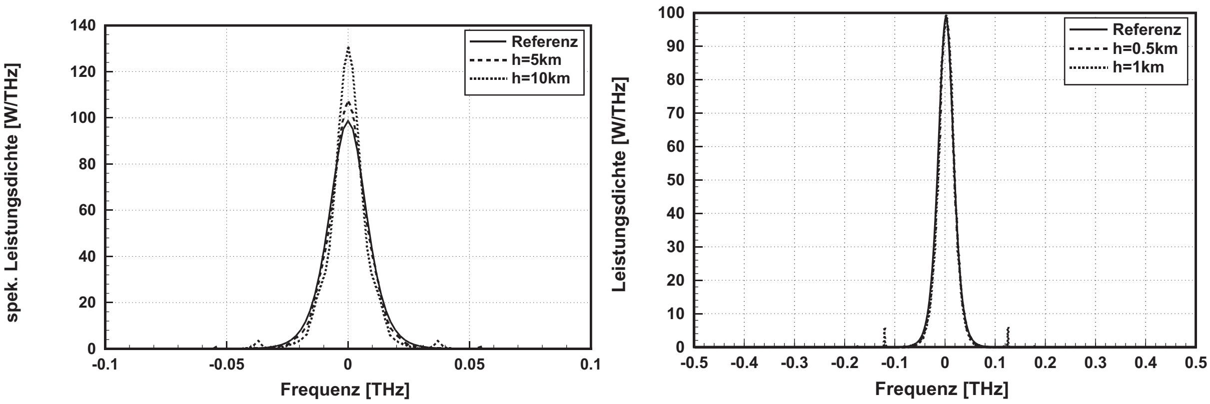


Abbildung 6.11: Spektrum eines fundamentalen Solitons nach der Propagation über 50 km mit dem reduzierten Split-Step Schema bei unterschiedlichen Schrittweiten Δz bei einer Spitzenleistung von $P_0 = 100\text{mW}$ (links) bzw. $P_0 = 400\text{mW}$ (rechts).

Bei der Betrachtung anderer Testsignale (z.B. schmalbandiges und breitbandiges Testsignal aus Kapitel 4.3) belegen die Fehlerkriterien ein besseres Approximationsverhalten der klassischen Split-Step-Verfahren. Keines der beiden Verfahren liefert bei beliebigen Testsignalen die bessere Approximation. Da aber das exakte Verfahren nur beim Sonderfall der Solitonen bessere Ergebnisse liefert, ist im allgemeinen Fall, nicht zuletzt wegen des geringeren Aufwands, das reduzierte Schema vorzuziehen.

Aufwandsabschätzung

Der Gesamtaufwand zur Lösung der NLSG ergibt sich bei diesem Schema nun zu

$$NORM = N\text{ld}(N) + 4,75N \tag{6.50}$$

komplexen Multiplikationen in jedem Propagationsschritt. N gibt hierbei die Anzahl der Diskretisierungspunkte für die Fourier-Transformationen an.

6.4 Bewertung der Split-Step-Verfahren

Die untersuchten Split-Step-Verfahren lassen sich anhand der Methode, die zur Berechnung des linearen Gleichungsanteils der NLSG eingesetzt wird, in zwei Kategorien einteilen. Die erste Gruppe löst die NLSG vollständig im Zeitbereich, indem die Zeitableitung im linearen Operator $\mathcal{L}$ durch ein FD-Schema approximiert wird. Die Verfahren der zweiten Kategorie greifen auf Methoden der Transformation zurück und lösen den linearen Gleichungsanteil im Bildbereich.

Verfahren mit FD-Approximation

Die auf der FD-Approximation basierenden Verfahren weisen einige Gemeinsamkeiten auf:

- Ein großer Nachteil der FD-Verfahren ist ihre *beschränkte Bandbreite*. Abhängig von der Ordnung des FD-Schemas wird nur ein Teilgebiet des gesamten diskretisierten Spektralbereichs korrekt approximiert. Im anderen Bereich wird die tatsächlich vorliegende Dispersion unterschätzt. Aus diesem Grund sind die FD-Verfahren nur zur Approximation schmalbandiger Signale geeignet.
- Die Stabilität der Verfahren ist von dem Produkt $\lambda_{max}\Delta z/\Delta T^2$ mit dem maximalen Eigenwert λ_{max} der Diskretisierungmatrix abhängig. Wird die Propagationsschrittweite Δz erhöht, ein Diskretisierungschema höherer Ordnung gewählt oder ein größerer Spektralbereich diskretisiert, so muss dem Verlust an Stabilität durch einen höheren Grad der Entwicklung M entgegen gewirkt werden. Dies bedeutet wiederum einen höheren Rechenaufwand des Propagationsschemas. Aufgrund der quadratischen Abhängigkeit des Ausdrucks von ΔT wirkt sich eine Reduktion dieses Parameters besonders negativ aus.
- Eine Erhöhung der Schrittweite Δz wirkt sich bei allen Verfahren positiv auf das Verhältnis aus Aufwand und Schrittweite (vgl. Kriterium NORM) aus.

Auf Basis dieser Vorgaben können die einzelnen Verfahren untereinander verglichen werden:

- Die exakte Berechnung des Exponentialausdrucks gemäß Gl. (6.9) erfordert die Bestimmung der Eigenvektoren mit einem Verfahren der Aufwandsordnung $\mathcal{O}(N^3)$. Diese Berechnung muss allerdings nur einmal durchgeführt werden und fällt daher nicht ins Gewicht. Es muss dann allerdings für jeden linearen Propagationsschritt ein Matrix-Vektorprodukt mit einer $N \times N$ Matrix bestimmt werden, was bei großen Matrizen zu aufwändig ist. Diese Variante der Aufwandsordnung $\mathcal{O}(N^2)$ wurde daher nicht implementiert.
- Die Taylor-Entwicklung des Exponentialterms gemäß Gl. (6.11) liefert in Kombination mit einem exakten Verfahren oder einem Runge-Kutta-Verfahren zweiter bzw. dritter Ordnung zur Behandlung des nichtlinearen Gleichungsanteils sehr gute Ergebnisse. Beim Einsatz eines Fünf-Punkte-Differenzenoperators und der Betrachtung schmalbandiger Signale liegt die Genauigkeit in der gleichen Größenordnung wie bei der Verwendung der Fouriertransformation für den linearen Operator. Bei kleinen Schrittweiten von z.B. $\Delta z = 0,05\,km$ ist das Taylor-Verfahren das Verfahren mit dem geringsten Aufwand. Für größere Schrittweiten Δz oder kleinere Diskretisierungsweiten ΔT steigt der mindestens notwendige Grad der Entwicklung stark

an. In diesem Fall sind die anderen FD-basierten Verfahren aufwandsgünstiger. Eine Entwicklung über den notwendigen Grad (Stabilitätsbedingung) hinaus bringt keinen weiteren Gewinn in der Güte der numerischen Lösung. Um die Lösungsgüte bei großen Schrittweiten Δz zu steigern, muss der Propagationsschritt in mehrere Zwischenschritte zerlegt werden. Bei der Verwendung von kleinen Schrittweiten und einer großen Anzahl von Diskretisierungspunkten N ist dieser Ansatz auch effizienter als die Berechnung im Fourierbereich.

- Die Tschebyscheff-Approximation des Exponentialterms liefert je nach Grad der Entwicklung beliebig genaue Ergebnisse, d.h. im Gegensatz zur Taylor-Entwicklung kann durch die Steigerung des Grades der Entwicklung M die Genauigkeit verbessert werden. Es bestimmt dann nur noch der Fehler der FD-Approximation in Zeitrichtung den Fehler des gesamten Schemas. Bei Schrittweiten von $\Delta z = 0,05\,km$ muss der Grad der Entwicklung bis zum Erreichen akzeptabler Ergebnisse allerdings schon $M = 8$ betragen. Bei kleinen Schrittweiten ist die Taylor-Entwicklung also günstiger. Bei großen Schrittweiten von z.B. $\Delta z = 0,5$km benötigt die Tschebyscheff-Entwicklung jedoch mit Abstand die geringste Rechenzeit.

- Auch die Verwendung des Lanczos-Algorithmus liefert bei schmalbandigen Signalen die für Split-Step-Verfahren üblichen guten Ergebnisse. Das Verfahren reagiert auf eine Reduktion von ΔT bzw. Steigerung von Δz wesentlich unempfindlicher als die Entwicklung des Exponentialterms nach Taylor oder Tschebyscheff. Der Aufwand der Entwicklung ist sowohl bei großen als auch bei kleinen Schrittweiten Δz hoch. Im Falle kleiner Schrittweiten liegt er im Bereich der Taylor-Approximation, bei großen Schrittweiten ist er wesentlich höher als bei den anderen beiden Verfahren. Der Vorteil des Lanczos-Algorithmus ist seine Unitarität. Weiterhin kann im Gegensatz zum Taylor-Verfahren durch eine höhere Dimension des Unterraums die Güte der numerischen Lösung gesteigert werden.

- Das Verfahren der Finiten Differenzen wurde bereits in Kapitel 5.4 untersucht und wird an dieser Stelle mit den anderen FD-basierten Verfahren verglichen. Bei der Betrachtung schmalbandiger Signale liegt der Aufwand dieser Methode zwar deutlich über dem der Tschebyscheff-Approximation, er kann die anderen beiden Verfahren jedoch bzgl. des Aufwands deutlich unterbieten. Bei der Betrachtung von Signalen mit mittlerer Bandbreite und hoher Leistung versagt die FD-Approximation und liefert nur bei sehr kleinen Schrittweiten und damit hohem Aufwand brauchbare Ergebnisse. Dieses Verhalten ist auf die schlechte Approximation des nichtlinearen Gleichungsanteils und die lediglich lineare Approximation in Ausbreitungsrichtung zurückzuführen.

Transformations-Verfahren

Hier wurde neben dem FFT-Verfahren (Fast Fourier Transformation) auch der Einsatz der Wavelet-Transformation betrachet. Zusammenfassend können folgende Punkte aufgeführt werden:

- Durch den Einsatz der Fourier-Transformation wird der lineare Gleichungsanteil exakt gelöst. Wird auch der nichtlineare Operator korrekt berechnet, so ist der numerische Fehler des gesamten Propagationsschemas durch die Fehlerterme der Split-Step-Approximation beschränkt. Die Fehlerterme beschränken vor allem bei breitbandigen Signalen die maximale Schrittweite Δz und erhöhen damit den Berechnungsaufwand beträchtlich. Die Fehler äußern sich dabei im Auftreten von Resonanzpeaks. Bei der exakten Lösung der nichtlinearen Gleichung ist das Split-Step-Verfahren unitär.

- Da der Aufwand in jedem Propagationsschritt unabhängig von der Schrittweite Δz gleich ist, ist der Einsatz der *Fourier-Verfahren* vor allem dann sinnvoll, wenn schmalbandige Signale betrachtet werden. Hier lassen die Fehlerterme der Split-Step-Methoden die Wahl großer Schrittweiten zu.
- Es wurden zwei unterschiedliche Split-Step-Verfahren untersucht. Das reduzierte Split-Step-Schema schneidet nur im Sonderfall der Propagation von Solitonen schlechter bzgl. des Berechnungsaufwands ab. Bei der Propagation anderer Signalformen treten die Resonanzartefakte bei dem exakten Split-Step-Schema bereits bei kleineren Schrittweiten Δz auf.
- Das Verfahren nach Agrawal liefert bei der Propagation breitbandiger Signale die besten Ergebnisse, diese Eigenschaft rechtfertigt jedoch nicht den zusätzlichen Aufwand dieses Verfahrens.
- Die Wavelet-Transformation liefert bei spektral begrenzten Signalen gute Approximationsergebnisse, in Verbindung mit breitbandigen Signalen können allerdings keine brauchbaren Resultate erzielt werden. Dies hängt mit dem Alias bei der Abtastung des betrachteten Signals zusammen. Abhilfe schafft hier nur die Wahl einer kleineren Diskretisierungsweite ΔT. Eine Wavelet-Kollokations-Methode kann problemabhängig zu einer effizienten Lösung der Ausbreitungsgleichung führen. Eine generelle Aussage kann hier aber nicht getroffen werden.

Bewertungen

Bei den FD-Verfahren steigt der Aufwand für die lineare Propagation bei der Wahl großer Schrittweiten Δz an, bei den Transformations-Verfahren bleibt er hingegen unabhängig von der Schrittweite konstant. Daher sind die FD-Verfahren bei großen Schrittweiten deutlich unterlegen. Lediglich wenn die Fehlerterme des Split-Step-Schemas durch das Auftreten von Resonanzpeaks die Wahl kleiner Schrittweiten erzwingen, werden die FD Verfahren aufwandsgünstiger.

Es handelt sich hier allerdings um zwei gegenläufige Forderungen. Schmalbandigen Signalen, die aufgrund ihrer Bandbegrenzung sehr gut mit den FD-Verfahren propagiert werden können, erlauben dem Split-Step-Schema die Wahl großer Schrittweiten Δz. Bei großen Schrittweiten kann jedoch ein Transformations-Verfahren aufwandsgünstiger eingesetzt werden. Im anderen Fall soll ein breitbandiges Signal propagiert werden, wobei die Fehlerterme des Split-Step-Schemas kleine Schrittweiten Δz erzwingen. Für kleine Schrittweiten werden die FD-Verfahren aufwandsgünstiger, sie können allerdings breitbandige Signale aufgrund der numerischen Dispersion nicht korrekt propagieren. Bei Signalen mit mittlerer Bandbreite, die ihr Spektrum bei der Propagation durch Mischprozesse nicht verbreitern, findet sich ein kleiner Zwischenbereich, in dem die FD-basierten Verfahren den Split-Step-Verfahren überlegen sind. Es handelt sich jedoch stets um Sonderfälle, so dass keine generelle Aussage getroffen werden kann und im Einzelfall abgewogen werden (vgl. experimentelle Untersuchung zum Soliton) muss, welches Schema am besten geeignet ist.

Die meisten aller Systeme arbeiten mit schwacher Nichtlinearität. Für diese Systeme muss das verwendete Verfahren also in erster Linie geeignet sein. Ein gutes Verfahren ist darüber hinaus auch noch robust genug, um für andere Systeme anwendbar zu sein.

Aufgrund der Tatsache, dass bis auf die klassischen Split-Step-Verfahren basierend auf einer Fast-Fourier-Transformation (FFT) alle anderen Verfahren nur in Sonderfällen schneller und hinsichtlich der Güte der Lösung besser sind sowie keine allgemein gültigen Kriterien für die Wahl des einen oder anderen alternativen Ansatzes aufgestellt werden können, ist das reduzierte Split-Step-Verfahren auf Basis der FFT unter den bislang betrachteten Verfahren am besten zur allgemeinen Lösung der NLSG geeignet.

Um auch bei der Approximation schmalbandiger Signale große Schrittweiten wählen zu können, sollte der nichtlineare Gleichungsanteil exakt gelöst werden.

Die Entwicklung effizienterer Algorithmen ist nur möglich, wenn die Reduzierung der durch die Fehlerterme des Split-Step-Schemas auftretenden Resonanzpeaks gelingt (siehe Kapitel 9).

Kapitel 7

Approximation des linearen Operators durch IIR-Filter

In diesem Kapitel wird der Standard-Split-Step-Algorithmus für die Signalberechnung in optischen Fasern modifiziert, um durch den Einsatz von IIR-Filterstrukturen (Infinite Impulse Response) oder Fourier-Transformationen für die Berechnung des linearen Operators wesentlich zu beschleunigen [70, 71, 72, 73, 74, 75]. Abhängig von dem Systemaufbau können durch den Wechsel zwischen einer Zeit- und Bildbereichsberechnung des linearen Operators hohe Beschleunigungen der numerischen Berechnung erreicht werden. Durch die Berechnung im Zeitbereich werden die zeitaufwändigen Fourier-Transformationen eingespart. Es sind für die Berechnung der Dispersion erster und zweiter Ordnung zwei unterschiedliche Filter nötig.

Das hier implementierte IIR-Filter-Verfahren ist ausschließlich für die Berechnung des linearen Operators im Rahmen eines Split-Step-Verfahrens einsetzbar.

Die Filterkoeffizienten werden so angepasst, dass der Fehler zwischen dem Propagationsoperator und dem diskreten Filter einen Maximalfehler nicht überschreitet. Die Anpassung wird anhand der Gruppenlaufzeitverzögerung durchgeführt. Der resultierende Simulationsfehler dieser Methode wird sowohl analytisch als auch simulatorisch angegeben und diskutiert.

7.1 Filterstruktur

Um die lineare Gruppenlaufzeitverzögerung $\tau_g = \beta_2 \cdot \Delta z \cdot \Omega$ der Faser für eine gegebene Ortsschrittweite Δz und eine Frequenzabweichung $\Omega = \omega - \omega_0$ von der Trägerfrequenz ω_0 zu approximieren, kann ein einfaches IIR-Filter mit nur fünf Koeffizienten implementiert werden, wie der linke Teil von Abbildung 7.1 illustriert.

Eine weitere wichtige Forderung an das zu realisierende Filter ist ein konstanter Betrag im Durchlassbereich (Allpass-Filter), welche ebenfalls durch folgende IIR-Filterstruktur erfüllt wird:

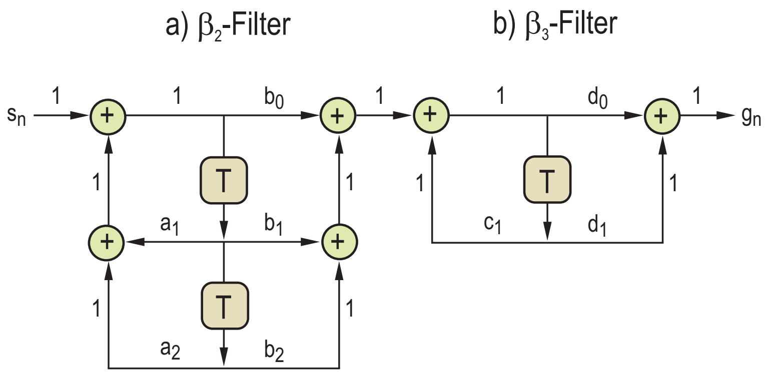


Abbildung 7.1: IIR-Filter Repräsentation der Dispersion der optischen Faser a) β_2-Filter (lineare Dispersion) b) β_3-Filter (parabolische Dispersion).

$$H_{lin} = u \cdot v \cdot \frac{z - j\frac{1}{u}}{z - ju} \cdot \frac{z - \frac{1}{v}}{z - v}. \tag{7.1}$$

u und v sind hierbei die reellen Pol- und $1/u$ und $1/v$ die Nullstellen des Allpass-Filters. Es gilt $z = e^{-j\omega T_s}$.

Die Übertragungsfunktion H_{lin} kann äquivalent ausgedrückt werden

$$H_{lin} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}, \tag{7.2}$$

wobei die 5 Koeffizienten b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 mit u und v verknüpft sind (Abbildung 7.1).

Die durch dieses Modell nachgebildete Gruppenlaufzeitverzögerung beträgt

$$\tau_{H_{lin}} = T_s \cdot \left[\frac{1 - u^2}{1 + u^2 - 2u\sin(\Omega T_s)} + \frac{1 - v^2}{1 + v^2 - 2v\sin(\Omega T_s)} \right]. \tag{7.3}$$

Für die Betrachtung von schmalbandigen Signalen reicht in den meisten Fällen eine Modellierung der linearen Dispersion.

Für breitbandige Signale, wie sie in DWDM-Systemen auftreten, ist jedoch auf eine Modellierung der parabolischen Dispersion (β_3) nicht zu verzichten.

Für die parabolische Gruppenlaufzeitverzögerung $\tau_g = (\beta_3/2) \cdot \Delta z \cdot \Omega^2$ der Faser können dem zuletzt vorgestellten Filter wahlweise zwei Filterkoeffizienten hinzugefügt werden oder es kann ein separates Filter mit zwei Koeffizienten implementiert werden. Die Lösung eines separaten Filters bietet bei der Berechnung von Dispersion nur einer bestimmten Ordnung Effizienzvorteile, weshalb hier diese Implementierung vorgezogen wird.

Die Struktur ist in Abbildung 7.1 auf der rechten Seite zu sehen. Das Filter realisiert ebenfalls eine ideale Allpass-Charakteristik

$$H_{par}(z) = p \cdot \frac{z - \frac{1}{p}}{z - p}. \tag{7.4}$$

p ist hierbei die reelle Pol- und $1/p$ die Nullstellen des Allpass-Filters.

Die Übertragungsfunktion H_{par} kann äquivalent ausgedrückt werden

$$H_{par} = \frac{d_0 + d_1 \cdot z^{-1}}{1 + c_1 \cdot z^{-1}}, \tag{7.5}$$

wobei sich für die 3 Koeffizienten nun Verknüpfungen mit d_0, d_1, c_1 ergeben (Abbildung 7.1).

Die nachgebildete Gruppenlaufzeitverzögerung beträgt

$$\tau_{H_{par}} = T_s \cdot \left[\frac{1 - p\cos(\Omega T_s)}{1 + p^2 - 2p\cos(\Omega T_s)} - \frac{1 - \frac{1}{p}\cos(\Omega T_s)}{1 + \frac{1}{p}^2 - 2\frac{1}{p}\cos(\Omega T_s)} \right]. \tag{7.6}$$

Derartig aufgebaute IIR-Filter-Modelle bieten den Vorteil, dass sie sehr einfach als Schieberegister programmtechnisch umgesetzt werden können. Ein komplexes Zeitsignal kann in diesen Filtern direkt verarbeitet werden.

7.2 Anpassung der Filterkoeffizienten

7.2.1 Dispersion erster Ordnung

Um aus dieser Darstellung der Gruppenlaufzeitverzögerung in Gleichung (7.3) den linearen Anteil zu extrahieren, kann die Beziehung in eine MacLaurin-Reihe entwickelt werden. Hierbei handelt es sich um eine Taylor-Reihe, welch um den Nullpunkt entwickelt wird. Hiermit ergibt sich die Gruppenlaufzeit zu

$$\tau_{lin} = T_s \cdot \left[\frac{1 - u^2}{1 + u^2} + \frac{1 + v}{1 - v} \right] + 2T_s^2 \cdot \frac{u(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \Omega + O(\Omega^3). \tag{7.7}$$

Der erste Anteil ist unabhängig von Ω und führt somit zu einer konstanten Gruppenlaufzeitverzögerung, der zweite Ausdruck ist linear von Ω abhängig und gilt als MacLaurin-Näherung der linearen Gruppenlaufzeitverzögerung. Terme höherer Ordnung können als Maß für den Approximationsfehler herangezogen werden.

Um die Filterparameter u und v zu bestimmen, sind zwei Bestimmungsgleichungen erforderlich. Die erste Gleichung ergibt sich durch die Gleichsetzung des zweiten Terms aus Gleichung (7.7) mit der gewünschten linearen Gruppenlaufzeitverzögerung

$$\beta_2 \cdot \Delta z = T_s^2 \cdot 2u \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}, \tag{7.8}$$

bzw. mit

$$B = \frac{1}{2T_s} \tag{7.9}$$

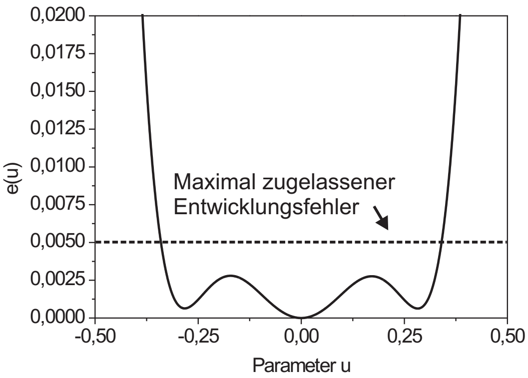


Abbildung 7.2: Modellfehler des Filters für die lineare Dispersion.

$$\beta_2 \cdot \Delta z = \left(\frac{1}{2B}\right)^2 \cdot 2u \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}. \tag{7.10}$$

Als Ergebnis zeigt sich, dass Δz umgekehrt proportional zum Quadrat der Bandbreite des numerisch approximierten Signals ist. Die zweite Gleichung ergibt sich dann weiter durch das Eleminieren des dritten Terms aus Gleichung (7.7), um den Fehler der Reihenentwicklung gering zu halten. Hieraus ergibt sich [70, 71, 72, 73]

$$4 \frac{u^2(1-u^2)(1-v)^3}{v(1+u^2)^3(1+v)} = 1. \tag{7.11}$$

Der Modellfehler ist somit nur durch Terme bestimmt, deren Ordnung größer oder gleich der dritten Potenz in Ω sind. Dieser Approximationsfehler der MacLaurin-Entwicklung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e_{lin}(\Omega) \quad &= \quad T_s \cdot \left\{ \left[\frac{1-u^2}{1+u^2-2u\sin(\Omega T_s)} + \frac{1-v^2}{1+v^2-2v\sin(\Omega T_s)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{1+v}{1-v} \right] - 2T_s \cdot \frac{u^2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\Omega \right\}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergibt sich das Fehlermaß zu

$$e(u) = \frac{1}{T_s^2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} |e_{lin}(\Omega T_s)|^2 dx. \tag{7.13}$$

Unter Einhaltung von Gleichung (7.11) stellt sich eine ausschließliche Abhängigkeit vom Parameter u heraus. Somit kann der Fehler der Reihenentwicklung in Abhängigkeit des

Parameters u dargestellt werden (Abbildung 7.2). Für $u \approx \pm 0,2825$ wird die Abweichung minimal (der Fall $u = 0$ führt zu einer trivialen nicht verwertbaren Lösung der Gleichung (7.1)).

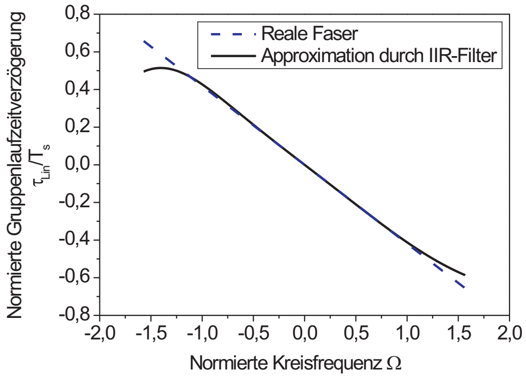


Abbildung 7.3: Lineare Gruppenlaufzeitverzögerung der Filterapproximation im Vergleich zur realen Faser bei $u = -0,253262$.

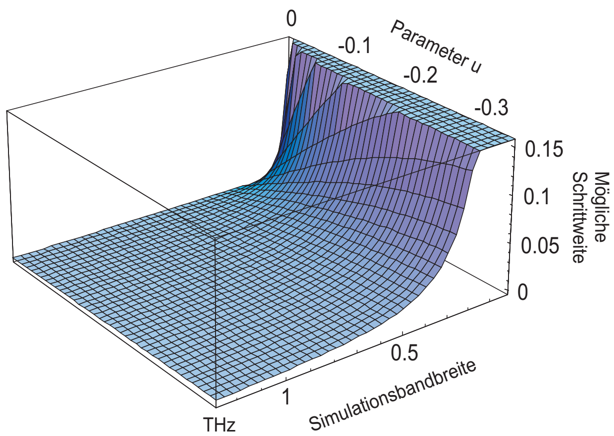


Abbildung 7.4: Maximal mögliche Schrittweite in Abhängigkeit von der Simulationsbandbreite und dem Filterparameter u für $\beta_2 = -20,44\,\mathrm{ps}^2/\mathrm{km}$.

Im Gegensatz zu der in [73] vorgestellten Vorgehensweise wird hier nicht nur der minimale Fehlerwert und das damit verbundene $u \approx \pm 0,2825$ herangezogen, sondern es werden alle Werte für u erlaubt, für die sich ein Fehler kleiner 0,005 ergibt. Der sich für den Wert 0,005 ergebende Wert von u wird im Weiteren als $u_{max} = \pm 0,34$ bezeichnet. Bei Einhaltung dieser Bedingung für u_{max} kann das Filter eingesetzt werden.

Hierdurch können pro Filter jede beliebige Dispersion zwischen 0 und einem von der Simulationsbandbreite und u_{max} abhängigen Oberwert, bzw. bei festem Dispersionskoeffizient β_2 unterschiedliche Diskretisierungsschrittweiten Δz eingestellt werden (Gleichung (7.10)).

Die physikalische und durch das IIR-Filter modellierte Gruppenlaufzeitverzögerungen sind in Abbildung 7.3 für $u = -0,253262$ dargestellt. Hier wird deutlich, dass maximal die halbe Nyquist-Bandbreite (Simulationsbandbreite), d. h. $|\Omega T_s| \leq \pi/2$, mit einem akzeptablen Fehler nutzbar ist, und mit diesem Modell die maximal erreichbare Gruppenlaufzeitverzögerung $\pm 0,5\, T_s^2 \Omega$ beträgt. Größere Werte können nur durch Kaskadierung mehrerer IIR-Filter-Strukturen erzielt werden.

Abbildung 7.4 zeigt die maximal möglich Schrittweite in Abhängigkeit der Simulationsbandbreite und dem Filterparameter u für $\beta_2 = -20,44\,\mathrm{ps}^2/\mathrm{km}$. Dies folgt direkt aus Gleichung (7.10). Beispielsweise beträgt bei einer Simulationsbandbreite von 0,64 THz die Länge eines Fasersegmentes (mit $\beta_2 = -20,44\,\mathrm{ps}^2/\mathrm{km}$) ca. 0,025 km. Damit wird deutlich, dass je nach benötigter Bandbreite die zu modellierende Faser mehr oder weniger fein segmentiert werden muss, so dass eine Verknüpfung mit einer nichtlinearen Betrachtung der Faser nahe liegend ist. Dies begründet den Einsatz des IIR-Filter-Verfahrens für den linearen Operator im Rahmen eines Split-Step-Verfahrens.

Dispersion zweiter Ordnung

Aus der Gruppenlaufzeitverzögerung in Gleichung (7.6) lässt sich der quadratische Anteil durch eine Entwicklung in eine MacLaurin-Reihe extrahieren. Hiermit ergibt sich die Gruppenlaufzeit zu

$$\tau_{par} = -T_s \cdot \frac{1+p}{-1+p} + T_s^3 \cdot \frac{2p(1+p)}{(-1+p)^3}\Omega^2 + O(\Omega^3). \tag{7.14}$$

Der erste Term liefert einen von Ω unabhängigen Anteil und führt somit zu einer konstanten Gruppenlaufzeitverzögerung, der zweite Ausdruck ist quadratisch von Ω abhängig und gilt als MacLaurin-Näherung der parabolischen Gruppenlaufzeitverzögerung. Ein in Ω linearer Term tritt nicht auf. Terme höherer Ordnung bilden das Maß für den Approximationsfehler.

Der Filterparameter p ergibt sich durch die Gleichsetzung des zweiten Terms aus Gleichung (7.14) mit der gewünschten parabolischen Gruppenlaufzeitverzögerung

$$\beta_3/2 \cdot \Delta z = T_s^3 \cdot 2p\frac{1+p}{(-1+p)^3}, \tag{7.15}$$

bzw. mit

$$B = \frac{1}{2T_s}, \tag{7.16}$$

$$\beta_3/2 \cdot \Delta z = \left(\frac{1}{2B}\right)^3 \cdot 2p\frac{1+p}{(-1+p)^3}. \tag{7.17}$$

Hier ist Δz umgekehrt proportional zur dritten Potenz der Bandbreite des numerisch approximierten Signals. Der Approximationsfehler der MacLaurin-Entwicklung ist nun durch

$$e_{par}(\Omega) = T_s \cdot \left\{ \left[\frac{1 - p\cos(\Omega T_s)}{1 + p^2 - 2p\cos(\Omega T_s)} - \frac{1 - \frac{1}{p}\cos(\Omega T_s)}{1 + \frac{1}{p}^2 - 2\frac{1}{p}\cos(\Omega T_s)} \right] - \left[\frac{1+p}{-1+p} \right] - T_s^2 \cdot \frac{2p(1+p)}{(-1+p)^3}\Omega^2 \right\} \quad (7.18)$$

gegeben. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergibt

$$e(u) = \frac{1}{T_s^2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} |e_{par}(\Omega T_s)|^2 dx. \quad (7.19)$$

Der Fehler der Reihenentwicklung in Abhängigkeit des Parameters p ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Im Wesentlichen zeigt sich ein monoton mit dem Parameter p wachsender Approximationsfehler. Wie schon bei dem Filter für die lineare Dispersion werden alle Werte für p erlaubt, für die sich ein Fehler kleiner 0,005 ergibt. Der sich für den Wert 0,005 ergebende Wert von p wird im Weiteren als $p_{max} = 0,1235$ bezeichnet. Nur wenn dieses p_{max} nicht unterschritten wird kann das Filter eingesetzt werden. Hierdurch können pro Filter jede beliebige Dispersion zwischen 0 und einem von der Simulationsbandbreite und p_{max} abhängigen Oberwert, bzw. bei festem Dispersionskoeffizient β_3 unterschiedliche Diskretisierungsschrittweiten Δz eingestellt werden. Die physikalische und durch das IIR-Filter modellierte Gruppenlaufzeitverzögerung sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Auch hier kann maximal die halbe Simulationsbandbreite, d. h. $|\Omega T_s| \leq \pi/2$, mit einem akzeptablen Fehler genutzt werden. Die maximal erreichbare Gruppenlaufzeitverzögerung ist $T_s^3\Omega$. Zusammenfassend können die Koeffizienten des IIR-Filters nach Gl. (7.1) und Gl. (7.4) an eine gegebene Dispersion erster und zweiter Ordnung durch die folgenden Schritte angepasst werden:

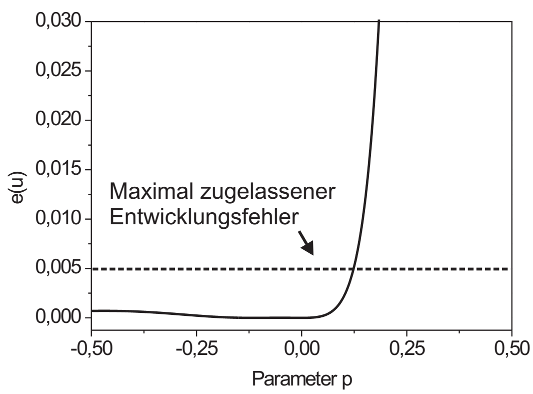


Abbildung 7.5: Modellfehler des Filters für die parabolische Dispersion.

- Ermittlung der maximalen Filterparameter u_{max} und p_{max}:

  Aus den charakteristischen Verläufen des Approximationsfehlers der MacLaurin-Reihenentwicklung der Gruppenlaufzeitverzögerung (Abbildung 7.2 und 7.5) werden

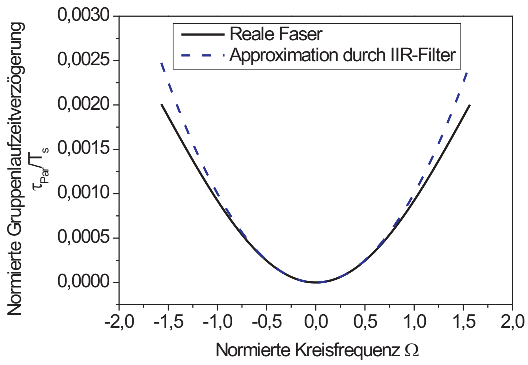


Abbildung 7.6: Parabolische Gruppenlaufzeitverzögerung der Filterapproximation im Vergleich zur realen Faser für $w = -0,00100675$.

durch einen vorzugebenden maximalen Approximationsfehler die maximalen Werte für u und p, u_{max} und p_{max} ermittelt.

- Bestimmung der maximalen IIR-Filter-Schrittweite $\Delta z_{IIR_{max}}$:

  Mit Gleichung (7.10) und (7.15) können mit den Faser- und Simulationsparametern die unter obigen Genauigkeitsaspekten maximal wählbare Schrittweite $\Delta z_{IIR_{max_{lin}}}$ und $\Delta z_{IIR_{max_{par}}}$ bestimmt werden. Im Vergleich mit der durch die Simulation vorgegebenen Schrittweite Δz wird an dieser Stelle entschieden, ob beide maximalen Schrittweiten nicht überschritten werden und somit ein Einsatz des IIR-Filter-Verfahrens möglich ist.

- Berechnung der Filterparameter u, v und p:

  Die Filterparameter u, v und p werden in Abhängigkeit der gewählten Schrittweite Δz und der Dispersionsparameter β_2 und β_3 ermittelt. Für den Parameter u wird hierzu erneut Gleichung (7.10) unter Beachtung von u_{max} herangezogen. Über die feste Beziehung (7.11) wird v aus u bestimmt, womit das IIR-Filter für die lineare Dispersion vollständig bestimmt ist. Die Bestimmung des Parameters p wird mittels Gleichung (7.15) unter Beachtung von p_{max} durchgeführt.

Für den Fall, dass eine Simulation mit konstanter Ortsschrittweite, d. h. ohne Schrittweitensteuerung, durchgeführt wird, müssen diese Berechnungen nur vor dem ersten Schritt durchgeführt werden. Bei einer veränderlichen Schrittweite jedoch (vgl. Kapitel 9) müssen sie vor jedem Schritt durchgeführt werden.

7.3 Aufwandsabschätzung

Abbildung 7.7 zeigt den Rechenaufwand dieser Methode ausgedrückt in komplexen Multiplikationen für den linearen Operator bei Berücksichtigung von β_2 (5N), β_3 (3N) und β_2 & β_3 (8N). Das IIR-Filter zeigt hierbei einen deutlich verringerten Rechenaufwand verglichen mit dem konventionellen FFT-Algorithmus. Der IIR-Filter Ansatz ist in der wählbaren

Anzahl an Stützstellen flexibler als der FFT-Ansatz, der $N = 2^n$ mit $n = 0, 1, 2, ...$ Abtastpunkte benötigt, allerdings ist der IIR-Ansatz auf kleine Schrittweiten beschränkt. Der Rechenaufwand für die Signalprozessierung mit dem FFT-Verfahren liegt pro Faserschritt bei

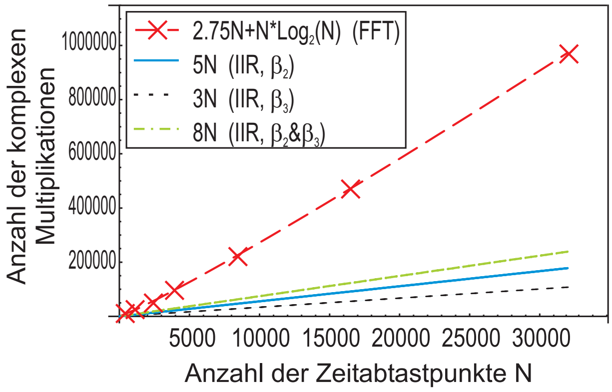


Abbildung 7.7: Erforderliche Anzahl an komplexen Multiplikationen in Abhängigkeit der Anzahl der Zeitabtastwerte N für den IIR- und den FFT-Ansatz.

$$\mathrm{NORM} = 2,75N + N \cdot \mathrm{ld}(N). \tag{7.20}$$

Für den IIR-Filter-Algorithmus ergeben sich, abhängig davon welche Filter eingesetzt werden, $3N$, $5N$ oder $8N$ komplexe Multiplikationen für das Schieberegister. Um die bestmögliche Berechnung zu erreichen, werden beide Ansätze IIR- und FFT-Ansatz angewendet.

Um Polarisationseffekte zu berücksichtigen kann ein zusätzliches IIR-Filter implementiert werden, welches die differenzielle Gruppenlaufzeitdifferenz (DGD) zwischen den Polarisationshauptachsen approximiert. Hierdurch wird allerdings die Zeit für die Berechnung erhöht.

Durch die Implementierung einer Blockverarbeitung [76] müssen alle Filter nur vor dem ersten Blockdurchlauf initialisiert werden. Die Berechnung der Filterkoeffizienten benötigt ohnehin nur einen geringen Teil der gesamten Berechnungsdauer.

7.4 Kombination von IIR- und FFT-Algorithmus

Der Split-Step-Ansatz bildet die Grundlage sowohl für den IIR-Filter Algorithmus als auch für den FFT-Ansatz. Aus diesem Grund kann die Berechnungsart des linearen Operators während der Simulation von Schritt zu Schritt gewechselt werden. Als Voraussetzung für diesen Wechsel der Berechnungsmethode muss die Anzahl der Zeitabtastwerte $N = 2^n$ gewählt werden, da eine FFT dies erfordert.

Ein einfaches Umschaltkriterium zum Wechsel zwischen IIR- und FFT-Ansatz für jeden Schritt ist der Vergleich der maximalen IIR-Schrittweiten $\Delta z_{IIR_{Max_{lin}}}$ und $\Delta z_{IIR_{Max_{par}}}$ mit der durch den Schrittweitenalgorithmus vorgegebenen Schrittweite (vgl. Kapitel 9). Die Bestimmung dieser maximalen Schrittweite wurde zuvor beschrieben.

Die IIR-Filter werden so lange genutzt, bis eine der maximalen Filterschrittweiten überschritten wird. Große IIR-Schrittweiten korrespondieren mit schmalen Simulationsbandbreiten und niedrigen Dispersionen (β_2 and β_3). Für größere Diskretisierungsschritte wird der FFT-Algorithmus verwendet. Veränderungen in der vorgegebenen Schrittweitenverteilung, um den IIR-Algorithmus länger zu verwenden, sind nicht ratsam, da hierdurch die Genauigkeitsanforderungen nicht eingehalten werden können.

Durch Schrittweitenalgorithmen (Kapitel 9) werden im allgemeinen Schrittweitenverteilungen mit zum Faserende ansteigenden Schrittweiten vorgegeben. Aus diesem Grund muss pro Faserschritt entschieden werden, ob die Filter anwendbar sind, und alternativ muss eine Lösung des linearen Operators durch eine FFT erfolgen [72, 71].

Neben diesen Fragen zur Einsetzbarkeit müssen bei der Verwendung der IIR-Filter noch einige Besonderheiten beachtet werden. Bei der Prozessierung des Schieberegisters ist darauf zu achten, dass das IIR-Filter pro Faserschritt erst einschwingt. Aus diesem Grund wird das Filter zyklisch eingesetzt, d. h. die ersten Samples eines Blocks werden bei der Simulation pro Schritt wieder angehängt, um die ersten ungültigen Werte nicht verwenden zu müssen. Es hat sich empirisch gezeigt, dass der Einschwingvorgang sehr schnell abklingt und dass es reicht die ersten 7 Abtastwerte neu zu berechnen. Nach Gleichung (7.7) und (7.14) kommen zusätzlich noch weitere von Ω unabhängige Verzögerungen hinzu. Durch zyklisches Verschieben der Zeitabtastwerte kann diese künstliche Verzögerung nach der Simulation eliminiert werden.

7.5 Numerische Untersuchung des Verfahrens

In diesem Abschnitt wird die oben vorgestellte Methode anhand von Systembeispielen im Vergleich zur Fourier-basierten Methode getestet. Betrachtet wird sowohl ein Einkanal- als auch ein WDM-System.

7.5.1 Systemaufbau

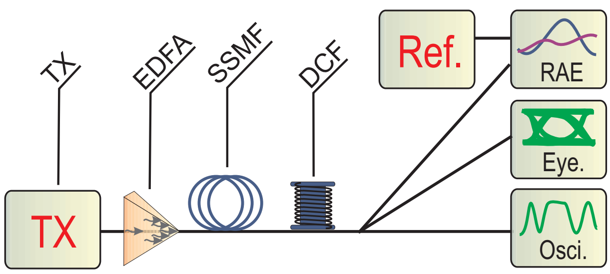


Abbildung 7.8: Systemaufbau: Die IIR- und FFT-propagierten Signal werden durch Oszilloskope und Augenanalysatoren ausgewertet. Der relative Amplitudendurchschnittsfehler (RAE) wird durch den Signalkomparator ermittelt.

Der Systemaufbau für das simulierte Übertragungssystem ist in Abbildung 7.8 gezeigt. Der Sender erzeugt ein optisches 10 GBit/s 64 Bit langes NRZ-Signal mit Kosinus-Roll-Off-förmigen Flanken mit dem Roll-Off-Faktor 0,5. Der Erbium-dotierte Faserverstärker

(EDFA) liefert ein Fasereingangssignal mit der benötigten Durchschnittsleistung für die Übertragung. Nachfolgend wird das Signal über 80 km Standard-Einmodenfaser (SSMF) propagiert. Die SSMF hat ein Dämpfung von $\alpha = 0,2$ dB/km, eine Dispersion erster Ordnung $\beta_2 = -21,75\text{ps}^2/\text{km}$, eine Dispersion zweiter Ordnung $\beta_3 = 0,184\text{ps}^3/\text{km}$ und einen Nichtlinearitätskoeffizienten $\gamma = 1,54/\text{W}/\text{km}$.

Die Dispersionskompensation wird durch 16 km dispersionskompensierende Faser (DCF) mit einer Dämpfung $\alpha = 0,5\text{dB}/\text{km}$, einer Dispersion erster Ordnung $\beta_2 = 102,4\text{ps}^2/\text{km}$, einer Dispersion zweiter Ordnung $\beta_3 = -0,415\text{ps}^3/\text{km}$ und einem Nichtlinearitätskoeffizienten $\gamma = 5,24/\text{W}/\text{km}$ vorgenommen. Ein optisches Filter mit einem Roll-Off-Faktor 0,5 und einer 100 GHz FWHM-Bandbreite selektiert den zu beobachtenden Kanal. Zuletzt wird dieses Signal entsprechend den oben vorgestellten Bewertungskriterien analysiert.

Das Referenzsignal zur Bestimmung des *RAE* ist für die IIR-Propagation das FFT-propagierte Signal.

7.5.2 Einkanalübertragung

Zuerst wird der kombinierte FFT-IIR-Algorithmus im Vergleich zum herkömmlichen FFT-Algorithmus für die Simulation von Einkanal-Übertragungssystemen getestet. Abbildung 7.8 zeigt den Systemaufbau. Der Sender emittiert ein 10 GBit/s-Signal bei 193,1 THz. Die durchschnittliche optische Signalleistung nach dem EDFA beträgt 15 dBm. Das optische Empfängerfilter ist bei 193,1 THz zentriert. Für diese Einkanal-Übertragung wird eine Simulationsbandbreite von 640 GHz gewählt, bei 4096 Zeitabtastwerten.

Die Schrittweitenverteilung entlang der SSMF, wie sie bei der Anwendung eines Schrittweitenalgorithmus aus der Gleichung 9.7 folgt, ist in Abbildung 7.9 gezeigt. Am Anfang der Faser sind die Schrittweiten sehr klein aufgrund der lokal hohen optischen Leistung. Hier können die IIR-Filter für den linearen Operator angewendet werden, da die maximale Filterschrittweite nicht erreicht wird.

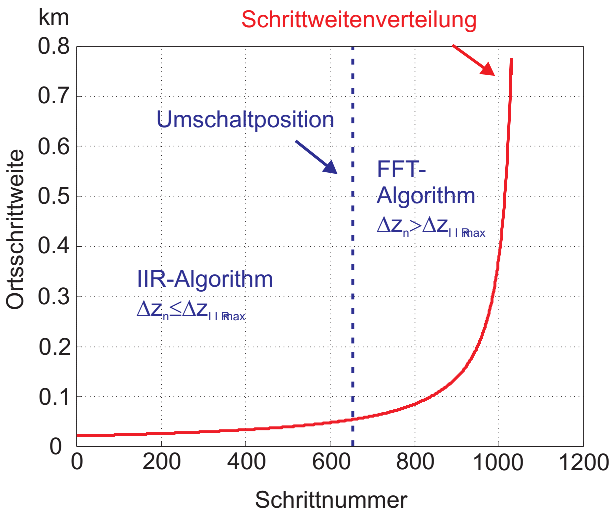


Abbildung 7.9: Schrittweitenverteilung und Umschaltkriterium für ein 80 km Einkanal-Übertragungssystem auf SSMF.

Die Faser wird in 1031 Schritte diskretisiert, was aus einer maximalen nichtlinearen Phasendrehung von $\phi_{NL_{Max}} = 0,002$ rad pro Diskretisierungsschritt resultiert. Wird der kombinierte Algorithmus angewendet, so können in den ersten 657 Schritten die IIR-Filter verwendet werden. In den restlichen Schritten 658-1031 wird die FFT zur Lösung des linearen Operators benutzt. Die DCF wird aufgrund der dort niedrigen Leistung komplett mit dem FFT-Algorithmus gelöst.

Dies führt zu einer Halbierung der Berechnungszeit, wenn der kombinierte Algorithmus eingesetzt wird. Der entstandene Fehler (Gleichung (4.11)) ist mit $RAE = 6,107 \cdot 10^{-6}$ vernachlässigbar. Wird lediglich β_2 in die Simulation einbezogen, was in den meisten Fällen einer Einkanalübertragung ausreichend ist, so erhöht sich der Geschwindigkeitsvorteil auf den Faktor 3.

Die Abbildungen 7.10 zeigen die Augendiagramme des propagierten optischen Signals für beide Algorithmen. Sie stimmen perfekt überein, was auch in der EOP der Signale deutlich wird. Wird der konventionelle Algorithmus angewendet, so ergibt sich $2,918$ dB und $2,917$ dB für den kombinierten Algorithmus. Hier wird die hohe Berechnungsgeschwindigkeit ohne den Verlust von Genauigkeit deutlich.

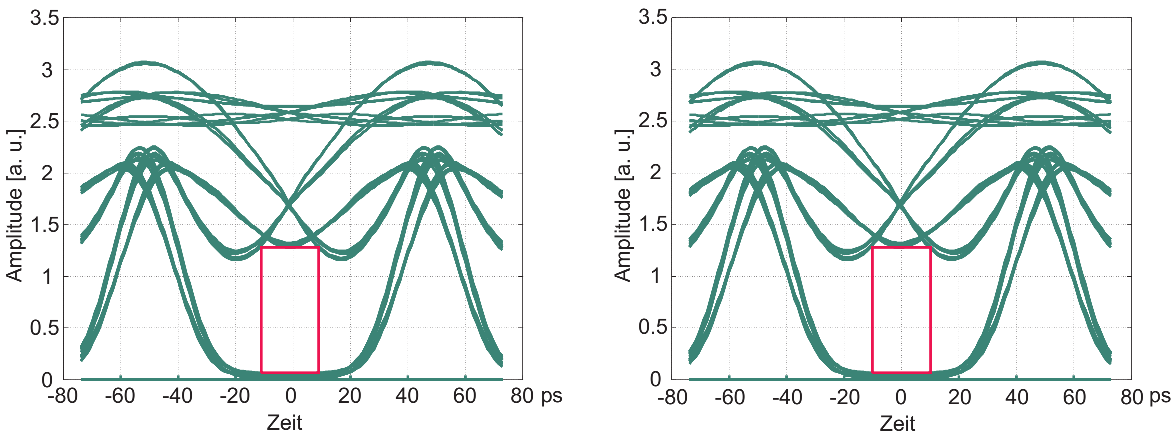


Abbildung 7.10: Augendiagramm nach der Propagation eines Einkanalsystems mit der Fourier-Methode (links), bzw. der IIR-Methode (rechts).

7.5.3 WDM-Übertragung

Nach dieser Betrachtung von Einkanalsystemen werden nun WDM-Systeme analysiert. Hierdurch wird die Approximation der Dispersion über dem Simulationsband näher untersucht.

Der Sender erzeugt 9 x 10 GBit/s Kanäle, die in einem 100 GHz Raster um 193,1 THz zentriert liegen. Die durchschnittliche optische Ausgangsleistung des EDFAs beträgt 18,542 dBm, was einer durchschnittlichen Kanalleistung von 9 dBm pro Kanal entspricht. Die optischen Filter am Empfänger werden so angepasst, dass jeweils ein Kanal herausgefiltert wird. Für diese WDM-Übertragung wird eine Simulationsbandbreite von 2,56 THz mit 16384 Zeitdiskretisierungspunkten gewählt.

Die Faser wird in 12884 Schritte diskretisiert, was aus einer Unterdrückung der künstlichen Vierwellenmischung (Kapitel 9) um 35 dB resultiert. Wird nun der kombinierte Algorithmus eingesetzt, so können die linearen Operatoren in den ersten 9689 Schritten mit den IIR-Filtern approximiert werden, wohingegen die verbleibenden Schritte mit dem FFT-Algorithmus gelöst werden. Die dispersionskompensierende Faser wird komplett mit dem FFT-Algorithmus gelöst. Dies führt zu einer 2,5-mal schnelleren Berechnung der Signalausbreitung mit dem kombinierten Algorithmus.

Abbildung 7.11 zeigen die Augendiagramme des Kanals mit der höchsten Trägerfrequenz nach der Propagation mit beiden Algorithmen. Dadurch dass das WDM-Spektrum bei 193,1 THz zentriert ist, zeigt der Kanal mit der höchsten Frequenz den größten Fehler in der Approximation der Dispersion, wenn die IIR-Filter eingesetzt werden. Wie in den Augendiagrammen zu erkennen ist, stimmen diese Ergebnisse sehr gut überein.

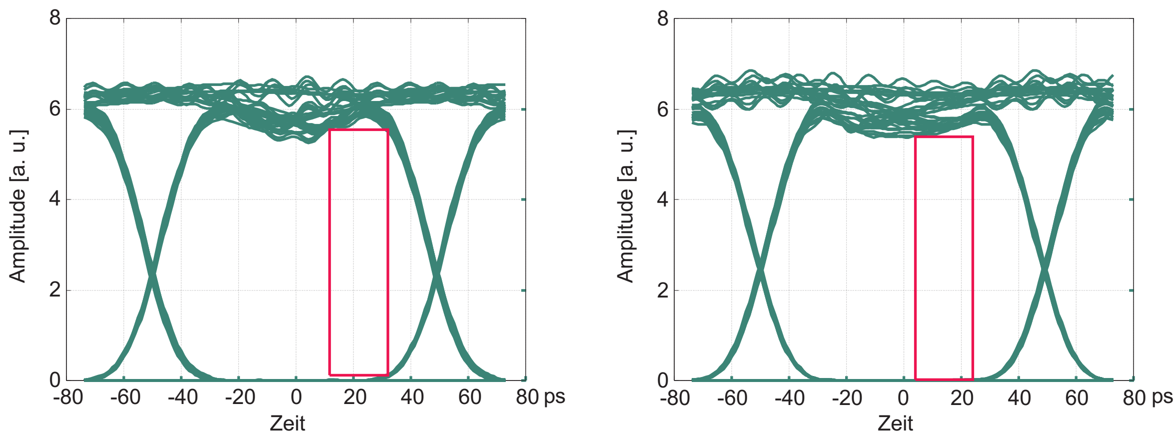


Abbildung 7.11: Augendiagramm des Kanals mit der höchsten Trägerfrequenz nach der Propagation des WDM-Signals mit der Fourier-Methode (links), bzw. der IIR-Methode (rechts).

Der relative Durchschnittsfehler (RAE) der verschiedenen WDM-Kanäle ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Durch die zu den Rändern des Simulationsbandes abnehmende Approximationsgenauigkeit zeigen die Kanäle mit der höchsten und niedrigsten Trägerfrequenz die größten Fehler. Jedoch ist diese Genauigkeit, wie schon in den vorangegangenen Abbildungen gezeigt, für die Simulation vollkommen ausreichend.

Ein großer Geschwindigkeitsvorteil durch den Einsatz von IIR-Filtern ergibt sich vor allem bei der Simulation von Systemen mit hohen Leistungen, da hier lokal sehr kleine Schrittweiten notwendig sind. Dies ist z. B. bei der Simulation von Soliton-Systemen der Fall. In WDM-Systemen verringert sich die Schrittweite aufgrund der höheren lokalen Gesamtleistung, um die künstliche Vierwellenmischung ausreichend zu unterdrücken. Wird eine WDM-Simulation mit dem so genannten Separated-Channels-Ansatz, der auf der gekoppelten nichtlinearen Schrödinger-Gleichung basiert [20], durchgeführt, so existiert keine künstliche Vierwellenmischung und bei der Schrittweitenbestimmung greift ausschließlich die maximale nichtlineare Phasenverschiebung pro Schritt $\phi_{NL_{Max}}$. Somit können dann große Schrittweiten Δz_n erlaubt werden. Bei dieser Simulationsmethode muss die Dispersion immer nur für einen kleinen Teil des gesamten Simulationsbandes beschrieben

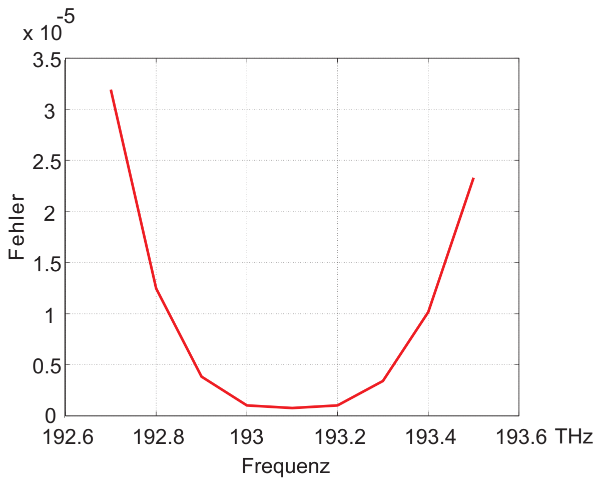


Abbildung 7.12: Relativer Durchschnittsfehler (RAE) der unterschiedlichen WDM-Kanäle in Abhängigkeit von ihrer Trägerfrequenz.

werden, was einen effizienten Einsatz der IIR-Filter ermöglicht.

7.6 Bewertungen

Durch die Verwendung der IIR-Filter zur Approximation des Dispersionsverhaltens der optischen Fasern konnte die Effizienz der Berechnung deutlich erhöht werden. Abhängig von der Systemtopologie werden Beschleunigungen von einem Faktor 3-5 erzielt. Ein schmales Simulationsband begünstigt den Einsatz der IIR-Filter-Approximation. Die lineare Gruppenlaufzeitverzögerung wird jedoch nur über die halbe Simulationsbandbreite korrekt approximiert. Für eine zyklische Signalbehandlung muss das Simulationsband jedoch ohnehin etwa doppelt so breit wie das eigentliche Signal gewählt werden, so dass dies i.A. keine Einschränkung darstellt. Eine Einschränkung ergibt sich jedoch aus der maximal wählbaren Schrittweite. Hierdurch muss für größere Schrittweiten eine andere Methode zur Approximation des linearen Operators verwandt werden. Diese Tatsache impliziert die Kombination beider Berechnungsmethoden bei Verwendung eines Schrittweitenalgorithmus.

Kapitel 8

Kollokations-Methode

Auf der Basis eines Split-Step-Ansatzes lassen sich neben der Anwendung von IIR-Filtern weitere Lösungsvarianten für die nichtlineare Schrödinger-Gleichung einführen. Eine Art zur Berechnung der Ausbreitung von optischen Wellen in Glasfasern ist die Kollokations-Methode. Diese Methode beruht auf der Darstellung des Zeitsignals auf der Basis orthogonaler Basisfunktionen unter Hinzunahme eines Point-Matching. In diesem Abschnitt werden als Basis Hermite-Gauß-Funktionen angesetzt. Diese bieten den Vorteil, dass eine doppelte Zeitableitung der Basisfunktionen analytisch angegeben werden kann. Hierdurch kann eine Lösung der NLSG ohne aufwändige Transformation in den Frequenzbereich bestimmt werden. Zuerst wurde diese Methode angewandt [77, 78, 79, 80], um hiermit einzelne, den Solitonen ähnliche Pulse zu propagieren. In diesem Abschnitt wird die Methode bezüglich ihrer Anwendungsgebiete und ihrer Recheneffizienz analysiert.

8.1 Theoretische Grundlagen

8.1.1 Orthogonale Basis-Funktionen

Bei der Approximation der Signale werden Orthogonal-Polynome für die Repräsentation des optischen Signals verwendet. Zuerst definieren wir die hierfür erforderlichen Hermite-Gauss-Funktionen $\Phi_n(T)$ und stellen deren wichtigste Eigenschaften heraus. Die normalisierte Basis ist

$$\Phi_n(T) = G_n \cdot H_n(aT + b) \cdot e^{-(aT+b)^2/2)}, \tag{8.1}$$

mit $n = 0...N - 1$. N gibt die Ordnung der Reihenentwicklung an. Die $H_n(x)$ sind die Hermite-Polynome, wie sie in [81] (Kapitel 22.7.13, Seite 782) definiert sind. Die G_n sorgen für die Normalisierung [81, 84] (Kapitel 22.1.1-2, Seite 773) und $x = aT + b$ transformiert die Abszisse der Basis auf die Zeitachse des zu übertragenden Signals.

Im Unterschied zur Kollokations-Methode verwendet die Fourier-Methode als Basis komplexe Exponential-Funktionen für die Approximation des Signals. Dadurch, dass bei der

Fourier-Methode sehr viel mehr Abtastpunkte verwendet werden, hängt die Approximationsgüte nur sehr wenig von dem verwendeten Signal ab. Eine sehr hilfreiche Eigenschaft der Hermit-Gauss-Polynome ist die analytische Darstellbarkeit der zweiten Zeitableitung [81] (Kapitel 22.6.20, Seite 781). Für die verwendeten Funktionen aus Gl. 8.1 ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2}\Phi_n(T) = a^2\left[(aT+b)^2 - (2n+1)\right]\Phi_n(T). \tag{8.2}$$

Unter Ausnutzung dieser speziellen Eigenschaft kann eine Lösung der NLSG gefunden werden, die ohne die zeitaufwändigen Fourier-Transformationen auskommt. Lineare und nichtlineare Effekte höherer Ordnung sind bei allen nachfolgenden Untersuchungen vernachlässigt worden, da ihre Berücksichtigung in der Kollokations-Methode nicht möglich ist, ohne den Vorteil einer hohen Rechengeschwindigkeit einzubüßen.

8.1.2 Signaldarstellung und Kollokations-Prinzip

Die Kollokations-Methode wurde bereits in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben. Dennoch ist es schwierig, die grundlegenden Zusammenhänge in der Literatur zu finden. Aus diesem Grunde geben wir diese hier mit Schwerpunkt auf die Orthogonalitäts-Relationen an. Die komplexe Signaleinhüllende $A(z,T)$ wird durch eine Reihenentwicklung beschrieben

$$A(z,T) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(z)\cdot\Phi_n(T). \tag{8.3}$$

Die Faktoren $C_n(z)$ der Reihenentwicklung ergeben sich aus Gleichung 8.3, indem beide Seiten mit $\Phi_m(T)$ multipliziert werden und nachfolgend integriert wird. Danach findet die Orthogonalitäts-Relation Anwendung [81] (Kapitel 22.1.1-2, Seite 773). Für die $C_n(z)$ ergibt sich somit

$$C_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(T)A(z,T)dT. \tag{8.4}$$

Für den diskreten Fall kann Gleichung 8.3 geschrieben werden als [79, 77, 82, 68, 83]

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(z,T) &= \begin{bmatrix} A(z,T_0)\\ A(z,T_1)\\ \vdots \\ A(z,T_{N-1})\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \Phi_0(T_0) & \Phi_1(T_0) & \cdots & \Phi_{N-1}(T_0)\\ \Phi_0(T_1) & \Phi_1(T_1) & \cdots & \Phi_{N-1}(T_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_0(T_{N-1}) & \Phi_1(T_{N-1}) & \ldots & \Phi_{N-1}(T_{N-1})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_0(z)\\ C_1(z)\\ \vdots\\ C_{N-1}(z)\end{bmatrix}\\
&= \mathbf{\Phi}(T)\cdot\mathbf{C}(z).
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Hieraus ergibt sich, dass für die N Punkte mindestens N Gleichungen erforderlich sind, um alle Koeffizienten bestimmen zu können. $\mathbf{C}$ ist dann gegeben durch

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{\Phi}^{-1}(T) \cdot \mathbf{A}(z, T). \tag{8.6}$$

Der Vergleich mit Gleichung 8.4 zeigt, dass eine korrekte Lösung nur dann möglich ist, wenn die rechten Seiten beider Gleichungen identisch sind. Im quasi-diskreten Fall heißt das für Gleichung 8.4

$$\mathbf{\Phi}^{-\mathbf{1}}(T) = \mathbf{\Phi}^T(T) \cdot \mathbf{W}. \tag{8.7}$$

Dies ergibt sich, wenn man sich das Integral als eine unendliche Summe vorstellt. $\mathbf{W}$ beschreibt eine Diagonal-Matrix mit Gewichtungsfaktoren, die im Folgenden noch zu berechnen sind.

Um diese Gewichtungsfaktoren zu finden, ist ein fehlerfreies Point-Matching erforderlich. Hierfür dient uns als Grundlage die Gauss-Lobatto-Integrationsformel ([81] (Kapitel 25.4.46, Seite 890), [63] (Seite 13 & 57)). In diese Formel wird nun der Ausdruck $G_n H_n(x) G_m H_m(x)$ eingesetzt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(T)\Phi_m(T)dT &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} G_n H_n(x) G_m H_m(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} w_i G_n H_n(x_i) G_m H_m(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} w_i e^{T_i^2} \Phi_n(T_i)\Phi_m(T_i). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Der Rest in der Ausgangsformel verschwindet, da die 2N-te Ableitung aus dem Produkt zweier Hermite-Polynome gleich Null ist. Wird nun die obige Beziehung benutzt, so müssen die Kollokationspunkte T_n die Bedingung $H_N(aT_n + b) = 0$ mit $n = 0 \dots N-1$ erfüllen. Hierdurch ist die Wahl der Stützstellen festgelegt. Es zeigt sich, dass die Stützstellen nahezu gleichverteilt sind. Die Faktoren w_i ergeben sich zu

$$w_i = \frac{2^{N-1} \cdot N! \cdot \sqrt{\pi}}{N^2 \cdot (H_{N-1}(aT_i + b))^2}. \tag{8.9}$$

Unter Verwendung der Orthogonalitäts-Relation und der Normalisierung der optischen Signalleistung kann Gleichung (8.8) umgeschrieben werden

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i e^{(aT_i+b)^2} \Phi_n(T_i)\Phi_m(T_i) = 1. \tag{8.10}$$

Dieser Ausdruck weicht von dem in [79] vorgestellten ab, jedoch hat sich in unseren Simulationen gezeigt, dass er zu korrekten Ergebnissen führt. Wertet man diesen Ausdruck aus, so ergibt sich in Analogie zu Gleichung (8.7)

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{W}, \tag{8.11}$$

Die Diagonalmatrix $\mathbf{W}$ enthält die Gewichtungsfaktoren W_i

$$W_i = w_n e^{(aT_n+b)^2} = \frac{2^{N-1} \cdot N! \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{(aT_i+b)^2}}{N^2 \cdot (H_{N-1}(aT_n+b))^2} \tag{8.12}$$

für unsere Wahl von Basisfunktionen mit $n = 0...N-1$. Bei der Berechnung der Nullstellen des N-ten Hermite-Polynoms hat sich gezeigt, dass hierbei numerische Probleme bei Polynomen hoher Ordnung auftreten. Aus diesem Grund können wir den Algorithmus nur für etwa 80 Kollokationspunkte anwenden, welche mit der Laguerre-Methode bestimmt werden [43]. Durch die Verwendung anderer Algorithmen zur Nullstellenbestimmung kann diese Beschränkung möglicherweise aufgehoben werden. Damit kann Gleichung (3.5) in Matrixform geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{A}(z) = j\left[\mathbf{B}\mathbf{\Phi}^{-1} + \mathbf{P}(z)\right]\mathbf{A}(z). \tag{8.13}$$

Mit der Matrix $\mathbf{B}$ wird die zweite Zeitableitung im Zeitbereich beschrieben. Sie ergibt sich mit Gleichung (8.2) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= -\frac{\beta_2}{2}\left(\mathbf{D}_1\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}\mathbf{D}_2\right)\\ &= -\frac{\beta_2}{2}\left(a^2\begin{bmatrix} x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{N-1}^2 \end{bmatrix}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2N-1 \end{bmatrix}a^2\right), \end{aligned} \tag{8.14}$$

mit $x_n = aT_n + b$. Die Matrix $\mathbf{P}$ berücksichtigt die Leistungsabhängigkeit im Kerr-Effekt. Die Leistung wird an den $N-1$ Kollokationspunkten bestimmt

$$\mathbf{P}(z) = \gamma \begin{bmatrix} |A(z,T_0)|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A(z,T_1)|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A(z,T_{N-1})|^2 \end{bmatrix}. \tag{8.15}$$

Für die Lösung von Gleichung (8.13) stehen verschieden Algorithmen zur Verfügung. So kann z.B. ein Runge-Kutta-Schema angewendet werden, das aber im Allgemeinen langsamer arbeitet als der weit verbreitete Split-Step-Algorithmus.

8.1.3 Split-Step-Kollokation

Wird das Split-Step-Prinzip angewendet, so kann Gleichung (8.13) ausgedrückt werden als

$$\mathbf{A}(z+\Delta z) = e^{j\left[\mathbf{B}\mathbf{\Phi}^{-1}+\mathbf{P}(z)\right]\Delta z} \cdot \mathbf{A}(z). \tag{8.16}$$

Der Exponent wird aufgespaltet, um Diagonal-Operatoren zu erhalten. Hierdurch wird die Unitarität des Exponential-Operators und eine hohe Rechengeschwindigkeit garantiert. Somit erhält man aus Gleichung (8.16)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(z+\Delta z) &= e^{j\left[\frac{\beta_2}{2}\mathbf{\Phi}\mathbf{D}_2\mathbf{\Phi}^{-1}-\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_1+\mathbf{P}(z)\right]\Delta z}\mathbf{A}(z) \\
&= e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{\Phi}\mathbf{D}_2\mathbf{\Phi}^{-1}\frac{\Delta z}{2}} e^{j\left[-\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_1+\mathbf{P}(z)\right]\Delta z} \\
&\quad \cdot e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{\Phi}\mathbf{D}_2\mathbf{\Phi}^{-1}\frac{\Delta z}{2}}\mathbf{A}(z) \\
&= \mathbf{\Phi} e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_2\frac{\Delta z}{2}}\mathbf{\Phi}^{-1} e^{j\left[-\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_1+\mathbf{P}(z)\right]\Delta z} \\
&\quad \cdot \mathbf{\Phi} e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_2\frac{\Delta z}{2}}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}(z).
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Eine weitere Vereinfachung kann durch die Ersetzung $\mathbf{A}(z) = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{C}(z)$ erreicht werden

$$\mathbf{C}(z+\Delta z) = e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_2\frac{\Delta z}{2}}\mathbf{\Phi}^{-1} \cdot e^{j\left[-\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_1+\mathbf{P}(z)\right]\Delta z} \cdot \mathbf{\Phi} e^{j\frac{\beta_2}{2}\mathbf{D}_2\frac{\Delta z}{2}} \cdot \mathbf{C}(z). \tag{8.18}$$

Somit werden ausschließlich unitäre Operatoren verwendet, wodurch die Leistungserhaltung erfüllt ist. Durch die letzte Umformung werden zusätzlich zwei Matrixmultiplikationen eingespart.

8.1.4 Rechenaufwand

Das Kollokations-Verfahren benötigt bei einer Implementierung nach Gl. (8.18) pro Schritt

$$\mathrm{NORM} = 2 \cdot M^2 + M \tag{8.19}$$

Multiplikationen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass es sich bei der Zahl M nicht um die gleiche Anzahl Diskretisierungpunkte handelt wie bei den bisherigen Aufwandsabschätzungen, sondern M beschreibt hier die Anzahl der Kollokationspunkte. Diese liegt, wie schon zuvor erklärt, um Größenordnungen unterhalb der normalen Zeitdiskretisierung. Dies ist für die Durchführbarkeit des Verfahrens wichtig, da es von der Ordnung $\mathcal{O}(M^2)$ ist und somit nur für wenig Stützstellen einen Vorteil bringen kann. für RZ- und NRZ-Signale reicht es aus, ein Signal mit 4 Kollokationspunkten pro Bit zu beschreiben. Wird eine Bitsequenz aus 12 Bits betrachtet, die für eine Split-Step-Fourier-Darstellung 64 Abtastwerte pro Bit benötigt, so ergibt sich ein Beschleunigungsfaktor von 26. Hierbei wurde, wie oben in Gl. (8.18) vorgestellt, ein symmetrisches Operatorsplitting vorausgesetzt.

Der Anwendbarkeitsbereich dieser Methode ist aufgrund des numerischen Aufwandes der oben genannte Ordnung des Verfahrens begrenzt. Hierdurch kann das Verfahren nur bei einer begrenzten Anzahl Kollokationspunkte eingesetzt werden. Dies ist durch den mit der Systemordnung quadratisch ansteigenden Rechenaufwand begründet. Für eine ausreichend genaue Beschreibung der Signalausbreitung kann eine Mindestanzahl an Kollokationspunkten pro Bit jedoch nicht unterschritten werden, woraus sich eine Begrenzung in der Anzahl simulierbarer Bits ergibt.

8.2 Numerische Untersuchung des Verfahrens

Wie schon zuvor erwähnt besteht der Hauptnachteil der Split-Step-Fourier-Methode in den beiden schnellen Fourier-Transformationen (FFTs), die pro Diskretisierungsschritt benötigt werden. Weiter soll nun anhand von Systemsimulationen geklärt werden, ob die Kollokations-Methode die effizientere Methode für die Berechnung der Signalausbreitung in optischen Fasern darstellt.

8.2.1 Systemaufbau

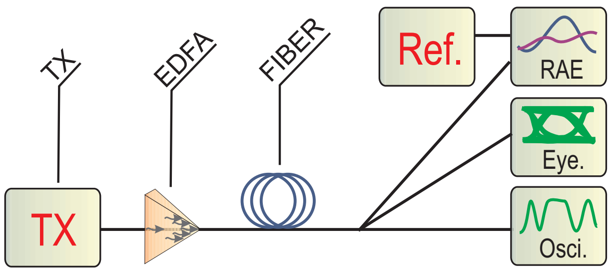


Abbildung 8.1: Systemaufbau. Die mit der Kollokations- und der Fourier-Methode propagierten Signal werden durch Oszilloskope und Augenanalysatoren ausgewertet. Der relative Amplitudendurchschnittsfehler (*RAE*) wird durch den Signalkomparator ermittelt.

Der Systemaufbau für die durchgeführten Simulationen ist in Abbildung 8.1 dargestellt. Ein Sender emittiert das optischen Signal, welches dann nachfolgend durch einen Erbium-dotierten Faserverstärker (EDFA) auf die benötigte Leistung verstärkt wird. Danach wird das Signal über die optischen Fasern propagiert. Dies wird für beide Simulationsverfahren durchgeführt. Nach der Übertragung wird das Signal anhand der vorgestellten Bewertungsregeln im Vergleich zum Referenzsignal bewertet.

Für beide Fehlerdefinitionen wird als Referenz ein Signal mit 32768 Stützstellen, das mit der Split-Step-Fourier-Methode propagiert wurde, verwendet. Die Diskretisierung im Zeitbereich wurde bei veränderter Anzahl von Abtastpunkten konstant gehalten.

8.2.2 Propagation von Einzelpulsen

Als Beispiel für die Propagation von Einzelpulsen wird hier ein Soliton-Übertragungssystem betrachtet. Der Sender erzeugt ein 10 Gbit/s-Sech-Impuls bei 193,1 THz mit dem Tastverhältnis 0,2. Ein nachgeschalteter Erbium-dotierter Faserverstärker (EDFA) verstärkt das Eingangssignal auf eine Leistung von 3,884097 mW, um ein Solitonverhalten erster Ordnung zu erreichen. Danach wird das Signal über eine 1000 km lange dämpfungsfreie, dispersionsverschobene Faser (DSF) übertragen, die eine Faserdämpfung $\alpha = 0$ dB/km, eine lineare Dispersion $\beta_2 = -1$ ps^2/km und eine Nichtlinearität $\gamma = 2$ /W/km aufweist.

In Bild 8.2 ist der Verlauf der optischen Signalleistung nach der Übertragung für die beiden Simulationsmethoden und eine variierte Anzahl von Stützstellen aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass eine hervorragende Berechnung der Signalausbreitung erreicht wird, wenn die Kollokations-Methode mit 63 Stützstellen eingesetzt wird. Im Vergleich zu der Fourier-Methode mit 8192 Diskretisierungspunkten ist die Kollokations-Methode neun mal schneller. Dieser erste Eindruck kann dazu führen, die Kollokations-Methode zu favorisieren.

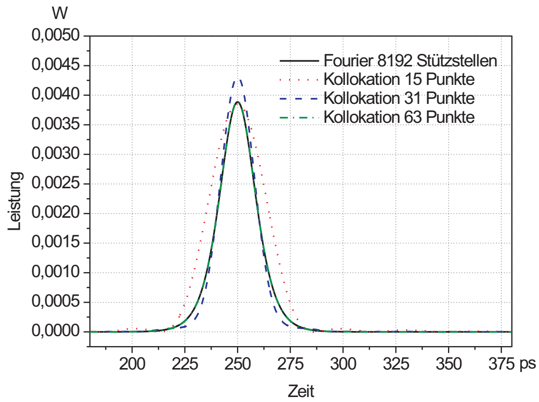


Abbildung 8.2: Soliton-Impuls erster Ordnung nach einer Übertragung über 1000 km DSF bei Anwendung der Fourier- und Kollokations-Methode für eine variierte Anzahl Kollokationspunkte.

Wird das Gütemaß *RAE* einbezogen, so ergibt sich ein etwas anderes Bild. In Bild 8.3 ist der relative Durchschnittsfehler der Signalleistung mit der Fourier- und der Kollokations-Methode berechnet über der normierten Rechenzeit für eine variierte Anzahl von Stützstellen beider Verfahren im Vergleich zum Referenzsignal dargestellt. Hier liegt der Fehler der Kollokations-Methode bei vergleichbarem Rechenaufwand deutlich höher als bei der Fourier-Methode. Mit einer größer werdenden Anzahl von Stützstellen erhöht sich die Genauigkeit beider Verfahren.

Nach dieser Betrachtung ist die Kollokations-Methode zwar die schnellere Methode, aber für die genaue Untersuchung von Soliton-Systemen ungeeignet. Der Offset welcher in Abbildung 8.3 zwischen beiden Kurven zu sehen ist, wird auf den Fehler, der beim Approximieren des Pulses entsteht, zurückgeführt.

8.2.3 Propagation von NRZ-Pulssequenzen

Für die Untersuchung von Pulssequenzen unterscheidet sich der Aufbau in einigen Punkten. Der Sender erzeugt ein 20 Gbit/s-NRZ-Signal bei 193,1 THz, das aus 16 Bits mit

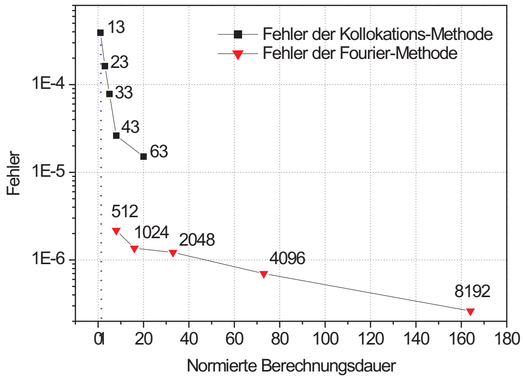


Abbildung 8.3: Relativer Durchschnittsfehler (RAE) der Signalleistung berechnet mit der Fourier- und der Kollokations-Methode für ein Soliton erster Ordnung über der normierten Rechenzeit für eine variierte Anzahl von Stützstellen im Vergleich zu einem Referenzsignal mit 32768 Diskretisierungspunkten.

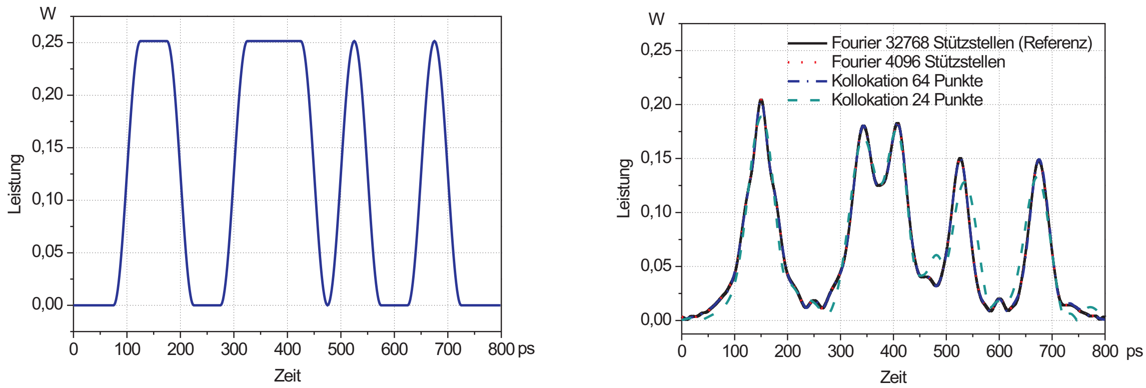


Abbildung 8.4: 16-Bit Sequenz mit Cosinus-Roll-Off-Flanken a) Fasereingangssignal b) nach einer Übertragung über 25 km SSMF bei Anwendung der Fourier- und der Kollokations-Methode für eine variierte Anzahl an Diskretisierung- und Kollokationspunkten.

Cosinus-Roll-Off-Flanken mit dem Roll-Off Faktor 0,5 besteht. Ein nachgeschalteter Erbium-dotierter Faserverstärker (EDFA) hebt die Leistung das Eingangssignal auf 15 dBm an, um auch einen starken Einfluss des nichtlinearen Operators zu garantieren. Danach wird das Signal über eine 25 km lange Standard Einmodenfaser (SSMF) übertragen, die eine Faserdämpfung $\alpha = 0,2$ dB/km, eine lineare Dispersion $\beta_2 = -20,44$ ps^2/km und eine Nichtlinearität $\gamma = 1,54$/W/km aufweist. Vor den Untersuchungen des propagierten Signals ist in Bild 8.4 a) die Leistung der Eingangsbitsequenz dargestellt, bei der die Cosinus-Roll-Off-Flanken gut zu erkennen sind.

Bild 8.4 b) zeigt die Leistung des übertragenen Signals für beide Methoden. Die Diskretisierung der Faser in Ausbreitungsrichtung ist bei der Berechnung für beide Methoden identisch, um eine gute Vergleichbarkeit der Algorithmen zu erreichen. Es wird aus dieser Abbildung deutlich, dass eine gute Darstellung des Signals für mindestens 24 Kollokationspunkte erreicht wird.

Das Genauigkeitsmaß RAE liefert weiteren Aufschluss über die Genauigkeit der Signalpropagation. Bild 8.5 zeigt den RAE über der normierten Rechenzeit. Die Rechenzeit ist hierbei auf die minimal auftretende Zeit für eine Berechnung mit der Kollokations-Methode und 14 Kollokationspunkten normiert. Es ist gut zu erkennen, dass die Rechenzeit sowohl der Kollokations-Methode als auch der Fourier-Methode von der Anzahl der verwendeten Stützstellen abhängt.

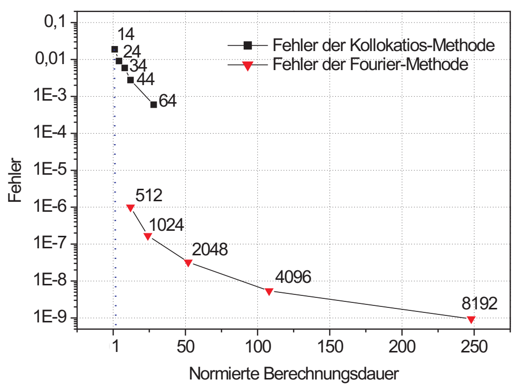


Abbildung 8.5: Relativer Durchschnittsfehler der Signalleistung berechnet mit der Fourier- und der Kollokations-Methode über der normierten Rechenzeit für eine variierte Anzahl von Stützstellen beider Verfahren im Vergleich zu einem Referenzsignal mit 32768 Diskretisierungspunkten.

Entgegen dem Eindruck von Abbildung 8.4 b), zeigt Abbildung 8.5 sehr deutlich, dass die Fourier-Methode bei gleichem Rechenaufwand immer zu genaueren Ergebnissen führt. Beide Methoden zeigen bei Erhöhung der Anzahl der verwendeten Stützstellen eine verbesserte Berechnungsgenauigkeit. Der Fehler der Kollokations-Methode liegt generell höher als derjenige der Fourier-Methode. Da das verwendete Point-Matching absolut fehlerfrei ist, resultiert dieser Fehler aus Abweichungen bei der Ausbreitungsberechnung oder Fehlern bei der Signalinterpolation. Aus diesem Grund ist es wahrscheinlich, dass sich die Fehlerkurve für andere Signale, z. B. RZ-Signale, die sich gut durch die Hermite-Gauss-Funktionen approximieren lassen, der Fourier-Fehlerkurve annähert. Die Fourier-Methode führt unabhängig vom Signal zu guten Ergebnissen, wohingegen bei der Kollokations-Methode eine starke Abhängigkeit vom Signalverlauf gegeben ist. Neben dem schon betrachteten Fehlermaß ist die Eye Opening Penalty (EOP) ein weit verbreitetes Maß zur Systemgütebewertung. Aus diesem Grund wird hier nun auch dieses Maß zur Bewertung beider Algorithmen herangezogen. Die EOP wird aufgrund der Bitlinien von 4 Simulationsblöcken mit jeweils 16 Bit bestimmt, d.h. insgesamt 64 Bit werden im Augendiagramm betrachtet. Die Wortlänge der quasi-zufällige Bitsequenz (PRBS) wurde gleich 6 gewählt. Für die Verwendung der Kollokations-Methode ist es erforderlich, jeweils das erste und letzte Bit des Blocks gleich Null zu setzen. Darüber hinaus wird die PRB-Sequenz durch zyklische Randbedingung in jedem Block gestört.

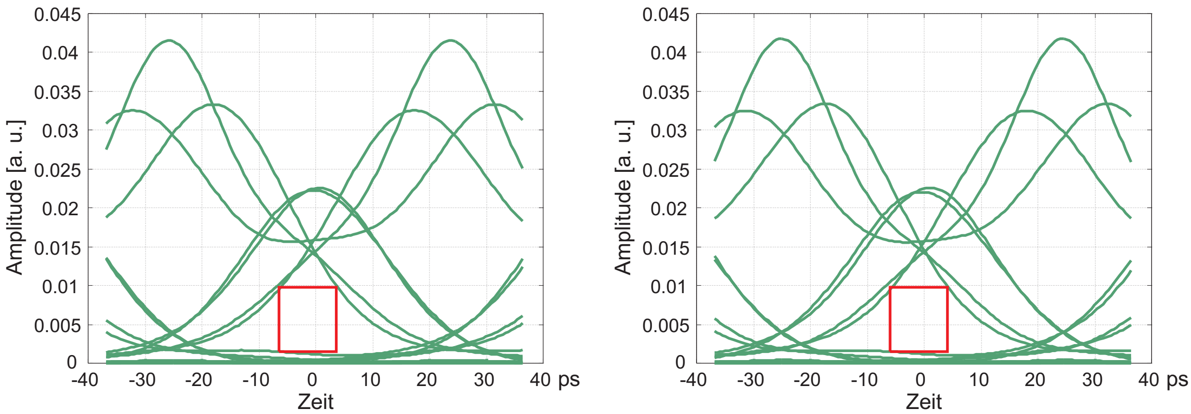


Abbildung 8.6: Augendiagramm nach einer Übertragung über 25 km SSMF mit der a) Kollokations-Methode und 64 Stützstellen b) Fourier-Methode und 4096 Stützstellen.

Nach der Simulation wird die EOP durch Anwendung von Gleichung (4.9) bestimmt. Um einen Eindruck dieses Fehlermaßes zu vermitteln, sind in Bild 8.6 die Augendiagramme nach der Übertragung sowohl für die Kollokations- als auch für die Fourier-Methode dargestellt. Für die FFT-basierte Methode wurden 4096 Stützstellen und für die Kollokations-Methode 64 Stützstellen zugrunde gelegt. Aus diesen Bildern wird deutlich, dass die Kollokations-Methode zu guten Ergebnissen führt, wenn die EOP als Gütemaß herangezogen wird. Um hier verlässliche Ergebnisse zu erhalten, müssen wenigstens 44 Kollokationspunkte für die 16 Bit eingesetzt werden (8.7). Jedoch zeigt sich ebenfalls, dass unter Berücksichtigung der normierten Rechenzeit schon die Fourier-Methode mit nur 512 Stützstellen genauere Ergebnisse liefern als die Kollokations-Methode gleichen Aufwands.

8.3 Bewertungen

Die Eignung der Kollokations-Methode für die Simulation der Signalausbreitung von optischen Signalen in Glasfasern wurde im Hinblick auf die Rechenzeit und -genauigkeit analysiert. Für die Analysen sind sowohl Soliton-Einzelpulse als auch NRZ-Pulssequenzen herangezogen worden. Die Bewertung der Genauigkeit wurde durch den tatsächlichen Signalfehler und anhand der Eye Opening Penalty (EOP) durchgeführt. Diese Untersuchun-

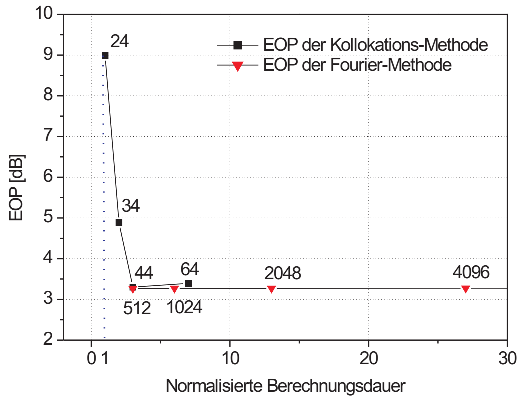


Abbildung 8.7: EOP. Berechnet mit der Fourier- und der Kollokations-Methode, über der normierten Rechenzeit für eine variierte Anzahl von Stützstellen beider Verfahren.

gen haben gezeigt, dass die Kollokations-Methode zu guten und verlässlichen Ergebnissen führt. Jedoch war es möglich, diese Ergebnisse in kürzerer Zeit mit der verbreiteten Split-Step-Fourier-Methode zu gewinnen. Dies deckt sich mit den Ergebnissen in [68].

Aus diesem Grund können wir die Kollokations-Methode mit der von uns gewählten Basis nicht für die Simulation der Propagation von optischen Signalen in Glasfasern empfehlen. Dennoch kann die Methode eingesetzt werden, um einen sehr schnellen Eindruck des grundsätzlichen Systemverhaltens zu erlangen.

Kapitel 9

Schrittweitenalgorithmen

Neben den bisher betrachteten Verfahren zur numerischen Lösung der NLSG haben auch andere Faktoren Einfluss auf die Rechengeschwindigkeit. Wird ein Split-Step-Verfahren als Grundlage für die Berechnung gewählt, so kann die Berechnungsgeschwindigkeit wahlweise durch eine Reduktion der Berechnungsdauer pro Schritt oder durch eine Reduktion der Gesamtschrittanzahl erreicht werden. Schrittweitenalgorithmen tragen dazu bei, dass die zu berechnende Faser mit einer möglichst geringen Anzahl von Schritten berechnet werden kann. In diesem Kapitel werden verschieden Aspekte und Kriterien der Schrittweitenberechnung vorgestellt.

Der erste Teil stellt zwei mögliche Arten der Schrittweitenwahl bei Verwendung eines Runge-Kutta-Schemas zur Lösung der NLSG vor. Nachfolgend wird auf die Schrittweitenberechnung für ein Split-Step-Verfahren eingegangen. Da die von uns favorisierten Verfahren auf einem Operatorsplitting beruhen, können diese Algorithmen somit für alle Verfahren eingesetzt werden.

9.1 Runge-Kutta-Schema

Für die Runge-Kutta-Methoden sind nach [43] zwei unterschiedliche Ansätze realisierbar.

Bei der Methode der Schritt-Verdoppelung (Step Doubling) wird jeder Propagationsschritt zweifach ausgeführt; zunächst als einzelner, dann als zweifacher Schritt mit halber Schrittweite. Das Runge-Kutta-Verfahren liefert nun mit den beiden unterschiedlichen Schrittweiten die unterschiedlichen Ergebnisse A_1 und A_2. Kann der Fehler des Runge-Kutta-Verfahrens durch eine Potenz-Reihe approximiert werden, so ist das tatsächliche Ergebnis $A_1(z + 2\Delta z) = A_2(z + 2\Delta z)$ durch die Entwicklungen

$$A_1(z + 2\Delta z) = A_1 + (2\Delta z)^5\Phi + \mathcal{O}(\Delta z^6) \tag{9.1}$$
$$A_2(z + 2\Delta z) = A_2 + 2(\Delta z)^5\Phi + \mathcal{O}(\Delta z^6), \tag{9.2}$$

gegeben. Als Maß für die Genauigkeit in jedem Iterationsschritt wird die Größe $\Delta_1 =$

$A_2 - A_1$ eingeführt. Da sie proportional zu Δz^5 ist, kann die Schrittweite Δz_0, die einen Fehler der Größe Δ_0 erzeugt hätte, nach

$$\Delta z_0 = \Delta z_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2} \tag{9.3}$$

bestimmt werden. Überschreitet nun der Fehler Δ_1 des Schrittes mit der Weite Δz_1 die zulässige Fehlergrenze, so wird der Schritt mit der berechneten, kleineren Schrittweite Δz_0 wiederholt. Im anderen Fall wird erst der nächste Schritt mit der neuen Schrittweite durchgeführt. Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung als Δz^5 kann Δ_1 weiterhin zur Erhöhung der Fehlerordnung herangezogen werden. Damit ergibt sich

$$A(z + 2\Delta z) = A_2 + \frac{1}{15}\Delta_1 + \mathcal{O}(\Delta z^6). \tag{9.4}$$

Alternativ zum Step Doubling kann eine aufwandsgünstigere Schrittweitenkontrolle nach Fehlberg [43] verwendet werden. Sie basiert auf einer Runge-Kutta-Formel fünfter Ordnung, die sechs Auswertungen der Differenzialgleichungen benötigt. Werden diese sechs Werte in anderer Form kombiniert, so ergibt sich ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Nun kann analog zur Methode des Step-Doubling durch die Subtraktion der beiden Ergebnisse der Fehler Δ_1 in Abhängigkeit von der Schrittweite Δz bestimmt werden. Mit dieser Größe erfolgt die Adaption der Schrittweite wie beim Step Doubling.

Die adaptive Schrittweitensteuerung wurde in Verbindung mit den Runge-Kutta-Verfahren bei unterschiedlichen Fehlerordnungen des linearen Operators implementiert.

9.1.1 Aufwandsabschätzung

Der erste Algorithmus erfordert die Durchführung jedes Propagationsschritts mit einfacher und doppelter Schrittweite. Im Falle eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung müssen somit insgesamt drei Propagationsschritte berechnet werden, die jeweils vier Auswertungen von $f(x, A)$ erfordern (vgl. Tabelle 5.2). Dabei ist die Berechnung der Variablen k_1 bei zwei Schritten identisch, so dass insgesamt elf Auswertungen anfallen. Demgegenüber stehen acht Auswertungen, wenn nur die beiden einzelnen Schritte vorgenommen werden. Im Vergleich zu einem Verfahren ohne adaptive Schrittweitenregelung steigt der Berechnungsaufwand um den Faktor $1,375$.

Im zweiten Fall werden für die Auswertung der Runge-Kutta-Formel fünfter Ordnung sechs Auswertungen der Differenzialgleichung benötigt. Damit steigt der Rechenaufwand des gesamten Verfahrens nur um den Faktor $1,2$.

Ob der zusätzliche Aufwand durch eine größere mittlere Schrittweite kompensiert wird, hängt nun in großem Maße von den wählbaren Schrittweiten ab. Jedoch hat sich gezeigt, dass diese adaptive Schrittweitensteuerung keine Vorteile bringt, da innerhalb des Stabilitätsbereichs des Runge-Kutta-Verfahrens keine Rechenzeitvorteile durch die Wahl größerer Schrittweiten möglich ist. Aus diesem Grund ist es effizienter eine konstante Schrittweite nahe der Stabilitätsgrenze zu wählen.

9.2 Split-Step-Verfahren

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln Verfahren zur Geschwindigkeitssteigerung der Berechnung je Faserschritt diskutiert wurden, werden nun eine Reihe zur Verfügung stehender Schrittweitenalgorithmen untersucht.

Für die Wahl der Schrittweitenverteilung für ein Split-Step-Verfahren entlang der optischen Faser ist es notwendig, den resultierenden Gesamtfehler in der Berechnung gering zu halten.

Ausgehend von den verschiedenen Größen, die für eine Fehlerminimierung herangezogen werden, sind verschiedene Algorithmen denkbar.

9.2.1 Künstliche Vierwellenmischung

Bei der Simulation der Signalpropagation von Pulsen auf optischen Fasern mittels der Split-Step-Methode entsteht zusätzlich zur physikalischen Vierwellenmischung (FWM) eine künstliche, rein numerische Vierwellenmischung, die auch als Geistermoden bezeichnet werden [7]. Dieses Artefakt muss in definierten kleinen Grenzen gehalten werden. Die künstliche Vierwellenmischung tritt auf, weil die Nichtlinearität innerhalb eines Diskretisierungschritts ohne Dispersion gerechnet wird. Hierdurch enstehen nichtlineare Mischprodukte während eines Diskretisierungschrittes. Sind die Diskretisierungsschritte groß, addiert sich zu der realen Nichtlinearität eine künstliche Nichtlinearität. Falls die Schritte die gleiche Länge haben, sind die künstlichen Mischprodukte phasengleich und addieren sich konstruktiv. Bei der Wahl zu großer Schrittweiten übersteigt diese künstliche FWM die reale existierende um Größenordnungen. Abbildung 9.1 zeigt die künstliche FWM für zwei bzw. vier unmodulierte Wellenlängenkanäle mit $\Delta \mathrm{f} = 200\,\mathrm{GHz}$ Kanalabstand. Die hier analytisch mit der UDPA (UDPA: Undepleted pump approximation) berechnete FWM stimmt sehr gut mit den numerischen Ergebnissen überein.

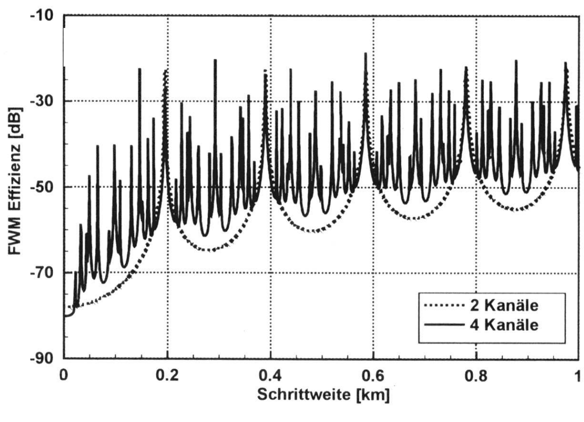


Abbildung 9.1: Analytisch berechnete künstliche Vierwellenmischung als Funktion der Schrittweite für eine Standardeinmodenfaser bei $\lambda \simeq 1,55\,\mu$m.

Resonanzartige Überhöhungen z. B. bei zwei Kanälen treten auf für Schrittweiten Δz nach

$$\Delta z \cdot |\beta_2| \cdot (\Delta\omega)^2 = m \cdot 2\pi; \qquad m = 1, 2, \cdots. \tag{9.5}$$

Dann liegt eine durch die Diskretisierung hervorgerufene Phasenkohärenz der Wellen vor, was zu einer sehr hohen FWM-Effizienz resultiert. Zur Unterdrückung dieser künstlich überhöhten FWM muss in einem DWDM-System mit N Kanälen die Schrittweite deutlich unter

$$\Delta z = \frac{2\pi}{|\beta_2|(N-1)^2(\Delta\omega)^2} \tag{9.6}$$

liegen. Ungünstig hieran ist, dass gerade bei Standardeinmodenfasern, bei denen durch eine hohe Dispersion ($\beta_2 \simeq -20\,\mathrm{ps}^2/\mathrm{km}$) kaum physikalische FWM vorliegt, extrem geringe Schrittweiten bis herab zu wenigen Metern folgen. Das macht die numerische Simulation von Vielkanal-DWDM-Systemen extrem zeitaufwändig. Eine Unterdrückung der künstlichen FWM ist daher zur effizienten Simulation zwingend erforderlich. Durch die konstanten Schrittweiten wird in jedem Schritt der gleiche Fehler durch künstliche FWM erzeugt, dieser Fehler akkumuliert sich daher konstruktiv über der Faser. Eine deutliche Verringerung der künstlichen FWM lässt sich durch Wahl nichtäquidistanter Schrittweiten erzielen. Dieses kann durch Überlagerung der Schrittweiten mit einem additiven Zufallsprozess erzielt werden. Die Schrittweiten sind dann nicht mehr äquidistant und die entstehenden Fehler summieren sich nicht mehr konstruktiv, sondern löschen sich teilweise aus. In [85, 86] wurde ein Verfahren vorgeschlagen, bei welchem die Schrittweiten Δz_n logarithmisch, entsprechend der fallenden Leistung, erhöht werden

$$\Delta z_n = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left[\frac{1-n\delta}{1-(n-1)\delta}\right]. \tag{9.7}$$

Hierin wird für δ eingesetzt:

$$\delta_{FWM} = (1 - e^{-\alpha L})/K, \tag{9.8}$$

und K ist die Anzahl zu wählender Propagationsschritte ($n = 1, \ldots, K$). K errechnet sich nach [85] als

$$K = \frac{3}{4} N_c^2 \gamma^2 \cdot L_{eff}^2 \cdot P^2 \cdot 10^{x/10}. \tag{9.9}$$

x gibt in dB an, wie weit die $1/K$ Unterdrückung der FWM-Effizienz unter dem maximalen Signalträgerpegel liegen soll. Dies ist in Abbildung 9.2 dargestellt. In diesem Bild ist gezeigt, dass es für eine konstante Schrittweite von 250m zu hohen FWM-Effizienzen kommt. Für eine beliebig kleine Schrittweite würden diese Resonanzen wegfallen, was jedoch nicht realisierbar ist. Mit der Schrittweitenverteilung nach Gl. (9.7) wird die maximale FWM-Effizienz auf $1/K$ begrenzt.

Hierdurch ist es quantitativ möglich, die resonanten Störungen durch ein Split-Step-Verfahren zu erfassen und durch eine geeignete Wahl von x zu unterdrücken. Hierbei muss beachtet werden, dass die künstliche FWM deutlich kleiner sein muss als die physikalische FWM, welches auch schon deutlich kleiner als das Signal ist, so dass Unterdrückungen von etwa 30 − 50dB zu empfehlen sind.

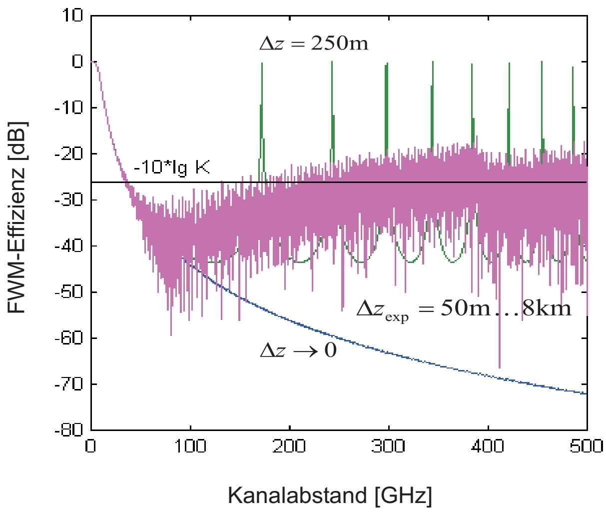


Abbildung 9.2: Effizienz der Vierwellenmischung für ein DWDM-System in Abhängigkeit von der Schrittweite Δz und dem Kanalabstand ($\Delta z \longrightarrow 0$: keine Resonanzüberhöhungen, Δz logarithmisch verteilt: schraffierter Bereich, $\Delta z = 250$ m: Resonanzüberhöhungen) [87].

Die Wahl dieser Schrittweitenbestimmung hat drei Vorteile:

1. Aufgrund der ungleichförmigen Schritte ist der Fehler geringer als bei gleichförmigen Schrittweiten.

2. Durch die logarithmische Erhöhung der Schrittweiten mit der Schrittnummer passt sich die Schrittweite an die verringerten Leistungswerte entlang der Faser an. Somit bleibt der Fehler gering.

3. Der entstehende Fehler durch künstliche FWM ist für ein System mit zwei Kanälen analytisch bestimmbar.

9.2.2 Schrittweitensteuerung aufgrund von Faserdämpfung

Ein weiteres Vorgehen, den Fehler durch ein Split-Step-Verfahren gering zu halten, ist es die maximale nichtlineare Phasendrehung ϕ_{max} zu begrenzen. Wird der nichtlinearen Operator in Gl. (3.5) betrachtet, so ergibt sich diese zu

$$\begin{aligned} \phi_{max} &= \gamma \cdot P_{in}(\Delta z_n) \cdot z_{eff}(\Delta z_n) \\ &= \gamma \cdot P_{in}(0) \cdot e^{-\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta z_i} \cdot z_{eff}(\Delta z_n) = const. \end{aligned} \tag{9.10}$$

$P_{in}(\Delta z_n)$ ist die geschätzte Pulsspitzenleistung vor dem $n$ten Faserschritt, $z_{eff}(\Delta z_n) = (1 - e^{-\alpha \Delta z_n})/\alpha$ die effektive Länge des $n$ten Faserschritts und $P_{in}(0)$ die Fasereingangsleistung. Betrachtet man Gleichung (9.10), so muss $exp(-\alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i) \cdot L_{eff}(\Delta z_n)$ konstant sein. Deshalb muss auch

$$L_{eff}(\Delta z_{n-1}) = e^{-\alpha \cdot \Delta z_{n-1}} \cdot L_{eff}(\Delta z_n) = const, \tag{9.11}$$

erfüllt sein. Durch iteratives Wiedereinsetzen dieser Gleichung in sich selbst und Auflösen der Gleichung nach Δz_n wird eine Schrittweitenverteilung hergeleitet

$$\Delta z_n = -\frac{1}{\alpha} ln \left[1 + \frac{-\delta_{max}}{1 + (1-n)\delta_{max}} \right]. \tag{9.12}$$

Diese Gleichung ist identisch zu der bereits zuvor vorgestellten Gleichung (9.7). Somit sind beide Verfahren ineinander überführbar und identisch. Der Wert für δ ergibt sich nun als

$$\delta_{max} = \frac{\phi_{max} \cdot \alpha}{\gamma \cdot P_n \cdot N}. \tag{9.13}$$

P_n ist die Eingangsleistung in jeden Faserschritt und N die Anzahl der WDM-Kanäle.

Dieses Verfahren führt zu einer identischen Schrittweitenverteilung wie die zuvor erläuterte Methode, jedoch ergibt sich kein direkter Einblick, welchen Einfluss ein gewähltes ϕ_{max} auf die Gesamtberechnungsgenauigkeit hat. Ein Wert von $\phi_{max} = 10\,\mathrm{mrad}$ bewirkt in den meisten Fällen eine ausreichende Genauigkeit.

9.2.3 Schrittweitensteuerung aufgrund von Momentanleistung

Aufbauend auf der zuvor vorgestellten Methode kann eine sehr einfache und auf der tatsächlichen Signalleistung beruhende Methode entwickelt werden. Herangezogen wird wieder die nichtlineare Phasendrehung ϕ_{max} als Fehlermaß. Jedoch wird nicht wie im vorangegangenen Kapitel eine aufgrund der Faserdämpfung exponentiell abklingende Signalspitzenleistung vorausgesetzt. Neben der Faserdämpfung spielen noch zahlreiche andere Effekte eine Rolle für die Signalverformung entlang der optischen Fasern. Diese linearen und nichtlinearen Effekte führen in vielen Fällen zu Signalspitzenleistungen, die über der aufgrund von Faserdämpfung geschätzten liegen.

Diese Methode erfordert jedoch, dass nach jedem Diskretisierungsschritt nach der höchsten Signalleistung gesucht wird, um diese für die Schrittweitenbestimmung zu verwenden. Hierdurch ist eine Bestimmung der Schrittweitenverteilung nicht im Voraus möglich. Die Schrittweiten werden sehr flexibel vor jedem Schritt angepasst.

Abbildung 9.3 zeigt den Verlauf der Signalspitzenleistung entlang eines Faserabschnitts für eine Dispersion Managed Soliton (DMS)-Übertragung. Der genaue Systemaufbau ist in Kapitel 9.3 bei der Untersuchung der Algorithmen erläutert. Der Leistungsverlauf ist

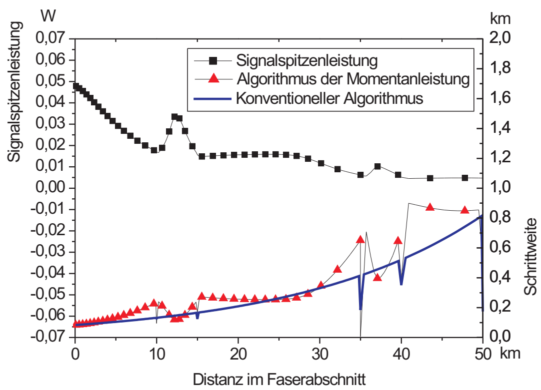


Abbildung 9.3: Signalspitzenleistung und Schrittweitenverteilung bei einer DMS-Übertragung entlang eines Faserabschnitts.

stark durch lineare und nichtlineare Effekte beeinflusst. Die Pulsspitzenleistung nimmt keinesfalls nur exponentiell entlang der Übertragungsfaser ab.

Bedingt durch diesen Leistungsverlauf ergibt sich auch eine variierende Schrittweite, die im Vergleich zum dämpfungsbasierten Algorithmus deutlich besser an den tatsächlichen Leistungsverlauf entlang der optischen Faser angepasst ist.

9.2.4 Linearer Laufzeitunterschied (Walk-Off)

Ein weiterer Einflussfaktor auf die Simulationsgüte ist der pro Diskretisierungschritt erzeugte Laufzeitunterschied zwischen der größten und der kleinsten Signalfrequenz. Hierdurch werden vor allem die Mehrkanal-Effekte XPM und FWM sowie auch SBS beeinflusst, da Pulskollisionen genau genug beschrieben werden müssen. Bei zu groß gewählten Schritten kann es sich ergeben, dass Pulse der äußeren Kanäle komplett aneinander vorbeilaufen und somit deren Wechselwirkung nicht mehr beschrieben wird.

Somit führt die Forderung, dass der maximale Laufzeitunterschied einen festen Anteil einer Pulsbreite nicht unterschreiten darf, zu einer maximalen Schrittweite Δz_W

$$\Delta z_W = \frac{y}{100} \cdot L_W. \tag{9.14}$$

L_W ist die Walk-Off-Länge nach Kapitel 3 und y gibt an, wie viel Prozent einer Pulsbreite die Pulse pro Schritt aneinander vorbeilaufen dürfen.

9.2.5 Kombination der Konzepte

Für ein effizientes Verfahren zur Schrittweitenbestimmung müssen die zuvor beschriebenen Verfahren kombiniert werden. Da die beiden ersten Verfahren zur Unterdrückung von künstlichem FWM und zur Begrenzung der nichtlinearen Phasendrehung in einem identischen Schrittweitenverlauf resultieren, wird für diese beiden Verfahren jeweils der charakteristische Parameter δ bestimmt. Der kleinere Wert, der auch zu kleineren Diskretisierungschritten führt, wird dann für die Schrittweitenberechnung ausgewählt.

Die Berücksichtigung des maximalen Laufzeitunterschiedes ist hierbei sehr problematisch. Wie schon im Kapitel 7 in Abbildung 7.9 gezeigt, führen die erstgenannten Kriterien auf eine ansteigende Schrittweite. Wird nun gefordert, dass der letzte Schritt, bedingt durch den maximalen Laufzeitunterschied, nicht größer als ein fester Wert gewählt werden darf, führt dies zu einem sehr klein zu wählendem δ und somit zu sehr kleinen Schrittweiten. In der Praxis ist dies somit nicht immer realisierbar.

Ein anderer Lösungsansatz ist die Schrittweite ab dort wo $\Delta z_w = \Delta z$ ist die Schrittweite quasi konstant zu halten. Um der zuvor beschriebenen Problematik einer erhöhten künstlichen FWM bei äquidistanten Diskretisierungschritten vorzubeugen, sollten die Längen der Diskretisierungsschritte verrauscht werden.

9.3 Numerische Untersuchung der Verfahrens

Wie schon in dem entsprechenden Abschnitt erläutert bringt die Schrittweitenregelung für das Runge-Kutta-Verfahren keine Geschwindigkeitsvorteile. Dies ist durch eine maximal mögliche Schrittweite aufgrund der Stabilitätsgrenze bedingt. es erweist sich als günstig, eine konstante Schrittweite nahe der Stabilitätsgrenze zu wählen. Somit wird eine Schrittweitenregelung für das Runge-Kutta-Verfahren nicht näher untersucht.

Durch Verwendung der vorgestellten Schrittweitenalgorithmen für die Split-Step-Algorithmen kann vor allem in Hinblick auf künstliche FWM eine deutliche Reduzierung des Rechenaufwandes um einen Faktor > 100 erzielt werden. Die Schrittweiten werden zum Faserende erhöht und somit die Anzahl der erforderlichen Schritte deutlich reduziert, wobei der Fehler in definierten Grenzen bleibt. Somit ist es dem Benutzer des Algorithmus vor der Simulation möglich, den tolerierbaren Fehler zu definieren. Eine effiziente Simulation von DWDM-Systemen ist erst mittels der vorgestellten Schrittweitenalgorithmen möglich.

9.3.1 Unterdrückung der künstlichen Vierwellenmischung

Die Unterdrückung künstlicher Vierwellenmischung führt wie schon beschrieben zu einer identischen Schrittweitenverteilung wie die Festsetzung der maximalen nichtlinearen Phasendrehung bei equivalenten Genauigkeitsforderungen.

Aus diesem Grund werden die beiden Algorithmen verglichen, die auf der nichtlinearen Phasendrehung beruhen.

Als Fehlermaß werden die in Kapitel 4 eingeführten Fehlermaße RPP und EOP verwendet. Als Referenzsignal wurde ein Signal mit dem auf der Faserdämpfung beruhenden Algorithmus mit sehr hoher Genauigkeit und somit einer hohen Diskretisierungsschrittzahl gewählt.

Beide Fehlermaße werden über der normierten Berechnungsdauer aufgetragen und analysiert.

9.3.2 Einkanal-NRZ-Übertragung

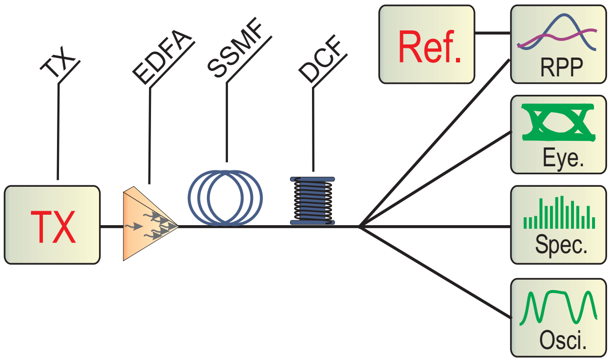


Abbildung 9.4: Systemaufbau für NRZ-Übertragung.

Der Systemaufbau für das simulierte Übertragungssystem ist in Abbildung 9.4 dargestellt. Der Sender generiert ein 40 GBit/s NRZ-Signal bei 193,1 THz mit Cosinus-Roll-Off-förmigen Flanken mit einem Flankenfaktor 0,2 bestehend aus einer 128 Bit-Sequenz. Ein EDFA liefert eine durchschnittliche Ausgangsleistung von 12 dBm. Danach wird das Signal über 100 km SSMF mit einer Dämpfungskonstanten $\alpha = 0,2\text{dB/km}$, einem Dispersionsparameter $\beta_2 = -20,44\text{ps}^2/\text{km}$ und einem nichtlinearen Koeffizienten $\gamma = 1,54/\text{W/km}$ übertragen. Die Dispersion wird durch 20 km DCF mit einer Dämpfungskonstanten $\alpha = 0,5\text{dB/km}$ und den Dispersionsparametern $\beta_2 = 102,4\text{ps}^2/\text{km}$ und $\beta_3 = -0,415\text{ps}^3/\text{km}$ kompensiert. Bei der Simulation der DCF wird die Nichtlinearität aufgrund der sehr niedrigen Leistungspegel am Ende der Übertragungssektion vernachlässigt. Zuletzt wird das Signal anhand der oben vorgestellten Fehlermaße analysiert.

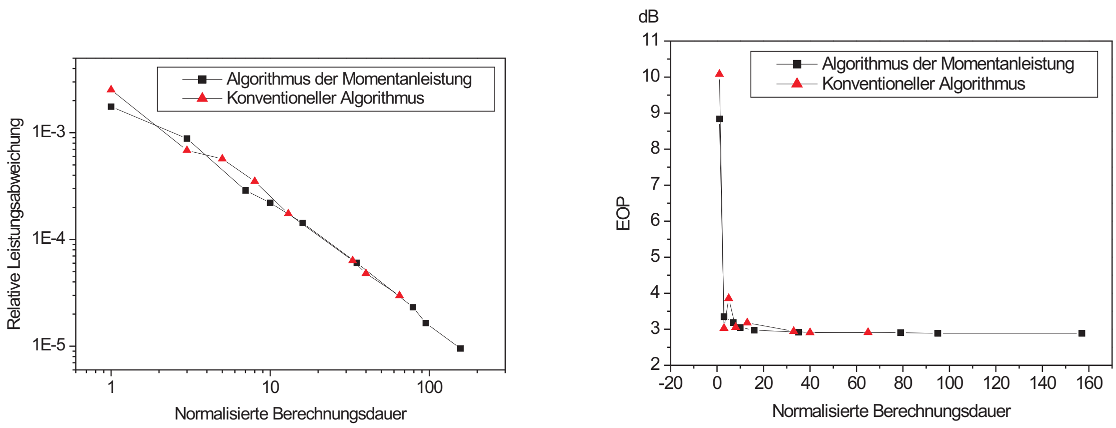


Abbildung 9.5: a) Relativer Leistungsfehler über der normalisierten Berechnungsdauer bei NRZ-Übertragung b) EOP über der normalisierten Berechnungsdauer bei NRZ-Übertragung.

Abbildung 9.5 a) zeigt die *RPP* über der normalisierten Berechnungsdauer in logarithmischer Skalierung für beide Algorithmen. Um die unterschiedlichen Berechnungszeiten gegenüberstellen zu können, wurde die Genauigkeitsanforderung ϕ_{max} für die SSMF bei beiden Algorithmen variiert. Wie deutlich zu erkennen ist, liegt der Verlauf des RPP für die beiden Algorithmen in etwa gleich. Grundsätzlich erfordert der Algorithmus, welcher nur auf der Faserdämpfung basiert, weniger Diskretisierungsschritte, ist aber auch etwas ungenauer, wenn für beide Algorithmen das gleiche ϕ_{max} berücksichtigt wird. Genau hier macht sich der Einfluss der anderen linearen und nichtlinearen Fasereffekte bemerkbar, wo sich Pulsspitzenleistungen durch deren Einfluss auch wieder erhöhen können.

Die EOP zeigt ein sehr ähnliches Ergebnis. Beide Algorithmen erzielen bei der Berechnung die gleiche Genauigkeit (Abbildung 9.5 b)).

9.3.3 Soliton-Kollision

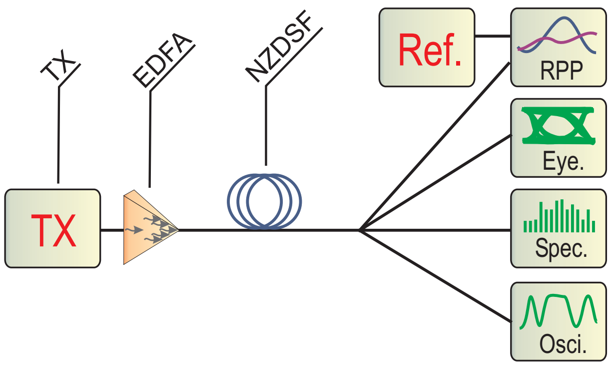


Abbildung 9.6: Systemaufbau für eine Zwei-Solitonen-Übertragung.

In diesem Abschnitt wird nun eine Solitonen-Kollision als Beispiel der Genauigkeitsanalyse herangezogen. In Abbildung 9.6 ist gezeigt, inwieweit der Systemaufbau hierfür zu ändern ist. Der Sender erzeugt zwei 10 GBit/s Soliton-Pulse, die mittig in einer 64 Bit-Sequenz angeordnet liegen. Um das Soliton-Verhalten zu gewährleisten, beträgt die Pulsspitzenleistung 1,782 mW und die Faserdämpfung wird vernachlässigt. Das Signal wird über 32200 km NZDSF mit einem Dispersionsparameter $\beta_2 = -0,5\text{ps}^2/\text{km}$ und einem nichtlinearen Koeffizienten $\gamma = 2.18/\text{W}/\text{km}$ übertragen.

Abbildung 9.7 a) zeigt den RPP nach der Übertragung bei Verwendung beider Schrittweitenalgorithmen. Durch die Vernachlässigung der Dämpfung wird bei Verwendung des konventionellen Algorithmus die Faser mit äquidistanten Diskretisierungsschritten berechnet. Wird die aktuelle Signalspitzenleistung zugrunde gelegt, so variiert diese Schrittweite. Dennoch ergeben sich für beide Algorithmen die gleichen Genauigkeiten, wenn derselbe Rechenaufwand zugrunde gelegt wird. Das gleiche Ergebnis ergibt sich, wenn in Abbildung 9.7 b) die EOP als Fehlermaß herangezogen wird.

9.3.4 Dispersion Managed Soliton (DMS)

Das nächste Beispiel wurde speziell gewählt, um eine entlang der Ausbreitungsrichtung stark variierende Signalspitzenleistung zu erzielen. Es wird ein Dispersion Managed Soliton (DMS) betrachtet, bei dem sich das Signal nur an bestimmten Punkten des gesamten Signalpfades wiederherstellt.

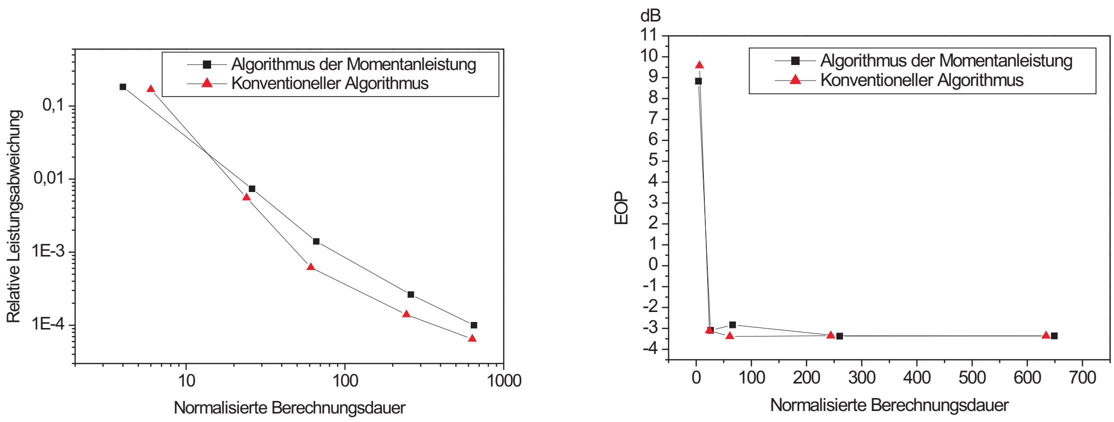


Abbildung 9.7: a) Relativer Leistungsfehler über der normalisierten Berechnungsdauer für eine Zwei-Solitonen-Übertragung b) EOP über der normalisierten Berechnungsdauer für eine Zwei-Solitonen-Übertragung.

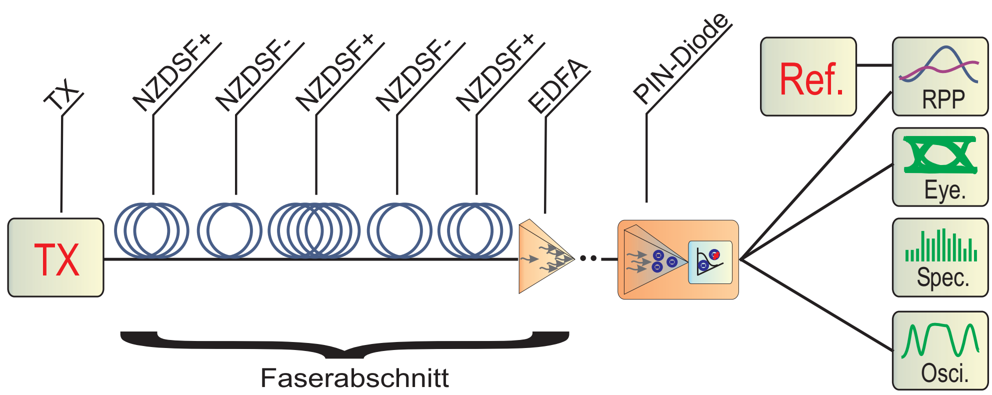


Abbildung 9.8: Systemaufbau für eine DMS-Übertragung

Der Systemaufbau ist in Abbildung 9.8 gegeben. Der Sender erzeugt einen 40 GBit/s Gauß-Puls mit einer Spitzenleistung von 47,8 mW, der zentriert in einer 64 Bit-Sequenz liegt. Nachfolgend wird das Signal über 20 Faserabschnitte von jeweils 50 km Länge übertragen. Die einzelnen Faserabschnitte bestehen aus 5 Glasfasern und einem EDFA, der das Signal auf 10 dBm Durchschnittsleistung verstärkt. Die erste Faser ist eine 10 km lange NZDSF mit $\beta_2 = +1\text{ps}^2/\text{km}$, $\gamma = 2/\text{W/km}$ und $\alpha = 0,2\text{dB/km}$. Die nachfolgende 5 km lange NZDSF hat einen negativen Dispersionsparameter $\beta_2 = -4,5\text{ps}^2/\text{km}$. Die mittig angeordnete Faser hat wieder die positive Dispersion und ist 20 km lang. In dem symmetrischen Aufbau folgt eine 5 km lange NZDSF mit negativer Dispersion und eine 10 km lange NZDSF mit positiver Dispersion. Nach der Übertragung wird das Signal mit den oben eingeführten Fehlermaßen analysiert.

Abbildung 9.3 zeigt die Signalspitzenleistung entlang eines Faserabschnitts. Zusätzlich ist die Schrittweitenverteilung für beide Schrittweitenalgorithmen dargestellt. Die Schrittweitenverteilung aufgrund der wahren Signalspitzenleistung zeigt eine sehr flexible Schrittweitenadaption entlang des Faserabschnitts. Mit dem konventionellen Algorithmus hingegen wird die Schrittweite logarithmisch erhöht.

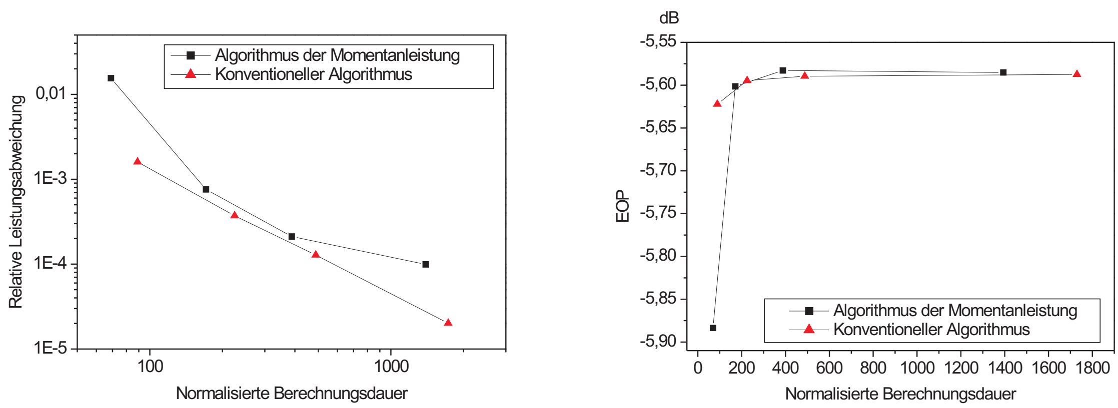


Abbildung 9.9: a) Relativer Leistungsfehler über der normalisierten Berechnungsdauer für eine DMS Übertragung b) EOP über der normalisierten Berechnungsdauer für eine DMS Übertragung.

Abbildung 9.9 zeigt die beiden Genauigkeitsmaße für die DMS-Übertragung unter Verwendung beider Algorithmen. Der *RPP* zeigt hier bei Verwendung des konventionellen Algorithmus sogar ein etwas besseres Ergebnis. Die *EOP*, welche die Augenöffnung des übertragenen Signals bewertet, liefert keine Unterschiede zwischen den Algorithmen.

9.3.5 WDM-Übertragung

Als letztes Systembeispiel für die Genauigkeitsanalyse wird eine WDM-Übertragungsstrecke herangezogen. Der Systemaufbau ist in Abbildung 9.10 dargestellt. Die Faserparameter stimmen mit denen der NRZ-Übertragung überein. Der Sender erzeugt eine 40 Gbit/s NRZ-Bitfolge mit 128 Bit. Die vier WDM-Kanäle liegen in einem 100 GHz-Raster

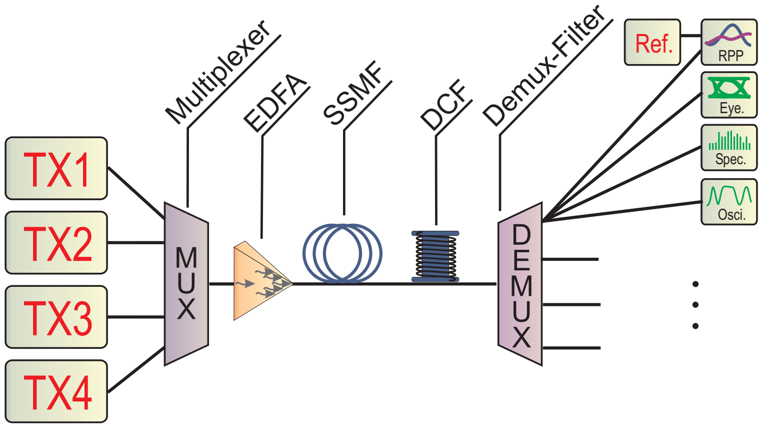


Abbildung 9.10: Systemaufbau für eine WDM-Übertragung.

zentriert um 193,1 THz. Die Kanäle werden vor dem Empfänger durch Gauß-Filter mit 100 GHz Bandbreite getrennt. Zwei Kanäle werden entsprechend der obigen Fehlermaße analysiert.

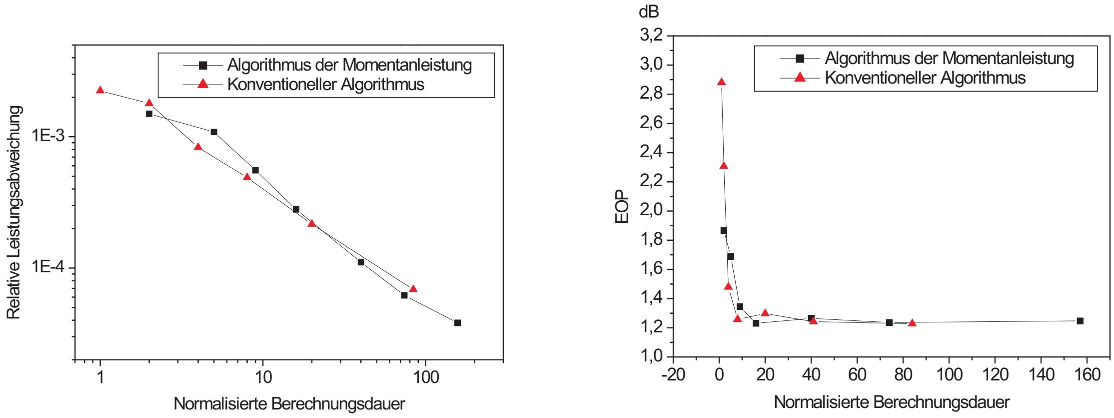


Abbildung 9.11: a) Relativer Leistungsfehler über der normalisierten Berechnungsdauer für einen mittigen WDM-Kanal bei 193,15 THz b) EOP über der normalisierten Berechnungsdauer für einen mittigen WDM-Kanal bei 193,15 THz.

In Bild 9.11 a) ist der relative Leistungsfehler für einen mittigen WDM-Kanal bei 193,15 THz dargestellt. Beide Algorithmen führen hier zu einer identischen Genauigkeit. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei Betrachtung der *EOP* (Abbildung 9.11 b)).

In Abbildung 9.12 ist der gleiche Zusammenhang für einen Randkanal bei 193,25 THz dargestellt. Auch hier ergeben sich keine Unterschiede bei Verwendung der unterschiedlichen Algorithmen.

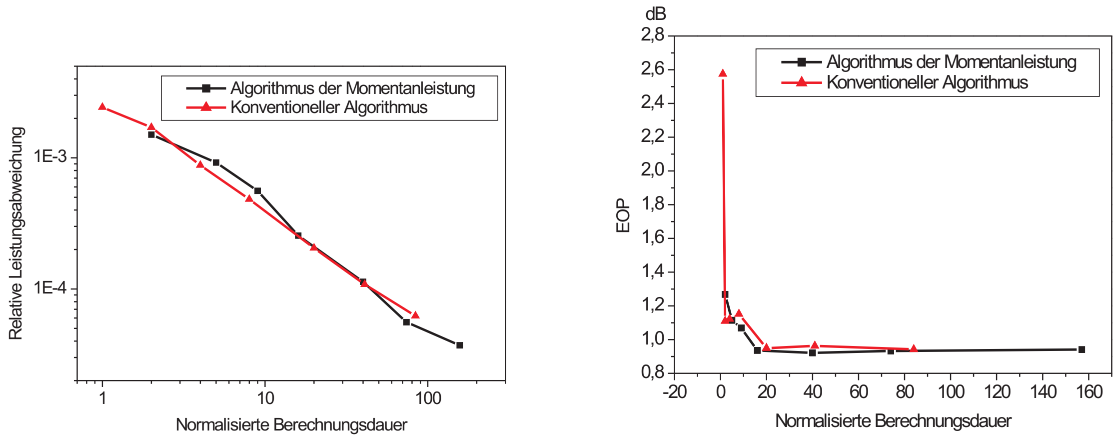


Abbildung 9.12: a) Relativer Leistungsfehler über der normalisierten Berechnungsdauer für einen äußeren WDM-Kanal bei 193,25 THz b) EOP über der normalisierten Berechnungsdauer für einen äußeren WDM-Kanal bei 193,25 THz.

9.4 Bewertungen

Die Analyse der verschiedenen zur Verfügung stehenden Schrittweitenalgorithmen zur Verwendung mit einem Split-Step-Algorithmus haben interessante Erkenntnisse gebracht. Untersucht wurde zum einen der weit verbreitete Algorithmus, welcher basierend auf einer exponentiell abfallenden Signalspitzenleistung aufgrund von Faserdämpfung die Schrittweite logarithmisch erhöht. Ein anderer Ansatz basierend auf der Unterdrückung der künstlichen Vierwellenmischung, wie oben gezeigt kann, in diesen Algorithmus überführt werden. Der zweite Algorithmus basiert auf der tatsächlichen Signalspitzenleistung an jedem Ort entlang der optischen Fasern. Hierdurch wird auch der Einfluss anderer Fasereffekte wie Dispersion und Nichtlinearitäten auf die Signalspitzenleistung und somit auf die Schrittweitenbestimmung direkt einbezogen.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass beide Algorithmen nach der Signalübertragung zu einer vergleichbaren Genauigkeit führen. Dieses Ergebnis ist aufgrund der obigen Annahme, dass eine Schrittweitenberechnung aufgrund der tatsächlichen Signalspitzenleistung genauer ist, zuerst einmal erstaunlich. Jedoch ist hiermit erstmalig bewiesen, dass die Algorithmen zur Unterdrückung der FWM und der zur Berücksichtigung der Faserdämpfung, auch in Systemen mit stark variierender Signalamplitude angewendet werden können und aufgrund ihrer einfachen Berechnungweise auch zu empfehlen sind.

Diese Ergebnisse sind anhand einer Reihe repräsentativer Systembeispiele erzielt worden und damit auch auf andere Systeme übertragbar.

Eine möglich Ausnahme bilden hier die Raman-verstärkten Systeme. Durch den Raman-Effekt wird Leistung aus dem Pump-Kanal in die Signal-Kanäle übertragen und somit die Faserdämpfung zumindest teilweise kompensiert. Somit ergibt sich ein zum Faserende ansteigendes Leistungsbudget. Auf diese Charakteristik können die konventionellen Schrittweitenalgorithmen nicht reagieren. Wird die tatsächliche Signalspitzenleistung herangezogen, ist dieses Problem bereits implizit gelöst.

Kapitel 10

Neuronale Netze

Alle vorangegangenen Kapitel haben sich mit der Nachbildung des physikalischen Verhaltens der Glasfaser bei der Signalausbreitung anhand der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung befasst. Nun wird die Modellierung der optischen Faser einmal von einer etwas anderen Weise betrachtet. Hierzu werden neuronale Netze herangezogen.

Diese sind in der Lage, ein Systemverhalten durch eine 'Black-Box-Modellierung' zu erlernen. Systeme werden durch vorgegebene Trainingsdaten erlernt mit dem Ziel, später auch andere Datensätze als die zum Training verwendeten prozessieren zu können.

10.1 Vorbild und Aufbau neuronaler Netze

Das Vorbild für die neuronalen Netze bildet das menschliche Gehirn, in welchem eine Signalverarbeitung durch die Verknüpfung von Nervenzellen erreicht wird. Näheres zu diesem biologischen Vorbild ist in [88] erklärt. Für die Arbeit ist jedoch die Modellierung, wie sie in Computermodellen gegeben ist, von vorwiegendem Interesse.

In diesen Computermodellen werden die Eigenschaften der Nervenzellen stark vereinfacht nachgebildet. Sie bestehen aus drei Komponenten (Abbildung 10.1). Dies sind Zellkörper oder auch Dendriten, welche die Eingaben des Netzes aufsummieren, Axonen, die die Ausgabe des Zellkörpers weiterleiten und die Ausgabe, auch verzweigt, an die Synapsen, welche die Ausgabe gewichtet weitergeben. Die Gewichtung durch die Synapsen wird als Verbindungsgewicht bezeichnet.

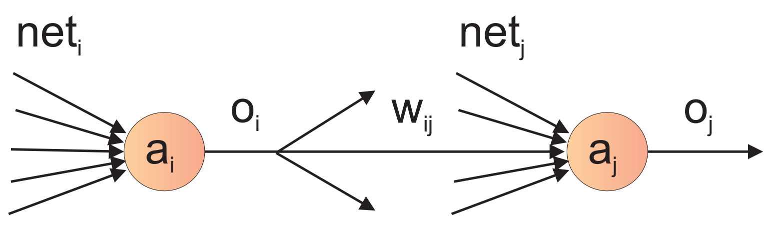


Abbildung 10.1: Zellen eines neuronalen Netzes.

Die klassische Beschreibung nach [91] gliedert das neuronale Netz in folgende Bestandteile:

1. Die Zellen (Neuronen, Elemente): Die einzelnen Zellen gliedern sich ihrerseits in:

   - den Aktivierungszustand $a_j(t)$. Hierdurch wird der Aktivierungsgrad der Zelle beschrieben.
   - die Aktivierungsfunktion f_{act}. Die Aktivierungsfunktion beschreibt, wie der Aktivierungszustand $a_j(t+1)$ des Neurons j aus der Aktivierung $a_j(t)$ und der Netzeingabe $net_j(t)$ errechnet wird

     $$a_j(t+1) = f_{act}(a_j(t), net_j(t), \theta_j), \tag{10.1}$$

     wobei $\theta_j(t)$ den Schwellwert (Bias) des Neurons angibt. f_{act} ist die Aktivierungsfunktion.
   - die Ausgabefunktion f_{out}. Die Ausgabe der Zelle j wird durch eine Ausgabefunktion aus der Zellenaktivierung berechnet

     $$o_j = f_{out}(a_j). \tag{10.2}$$

2. Das Verbindungsnetzwerk der Zellen: Neuronale Netze lassen sich als gerichteter, gewichteter Graph darstellen, wobei die Kanten gewichtete Verbindungen zwischen den Neuronen darstellen. Mit w_{ij} werden Gewichte zwischen den Zellen i und j bezeichnet. Die Matrix zur Beschreibung aller Gewichte wird als Gewichtsmatrix W beschrieben.

3. Die Propagierungsfunktion: Sie gibt an, wie sich die Netzeingabe für ein Neuron aus den Ausgaben anderer Neuronen, sowie den Gewichten errechnet. Hiernach errechnet sich die Netzeingabe $net_j(t)$ der Zelle j nach

   $$net_j(t) = \sum_i o_i(t) w_{ij}. \tag{10.3}$$

   $o_i(t)$ sind hierbei die Ausgaben der Vorgängerzellen, die mit den jeweiligen Verbindungsgewichten w_{ij} multipliziert werden.

4. Die Lernregel: Dieser Algorithmus gibt an, nach welcher Regel das neuronale Netz lernt, die vorgegebenen Eingaben in eine gewünschte Ausgabe zu konvertieren. Die verbreitetste Lernregel ist die Veränderung der Gewichte aufgrund der Vorgabe von wiederholten Trainingsmustern. Hierbei steht die Minimierung des Fehlers zwischen der erwarteten Netzausgabe und der tatsächlichen Ausgabe für die verschiedenen Trainingsmuster im Vordergrund.

Die Netzstruktur der neuronalen Netze lässt sich stark variieren. So sind Varianten mit Verbindungen in Vorwärtsrichtung zu den Ausgabeneuronen und den Eingabeneuronen denkbar. In dieser Arbeit werden jedoch nur die so genannten feedforward-Netze betrachtet. Diese besitzen nur Verbindungen von den Eingabeneuronen zu den Ausgabeneuronen.

Abbildung 10.2 zeigt die Struktur eines solchen Netzes. Das dort gezeigte Netz besitzt 4 Schichten. Dennoch handelt es sich um ein 3-stufiges Netz, da es 3 Schichten trainierbarer

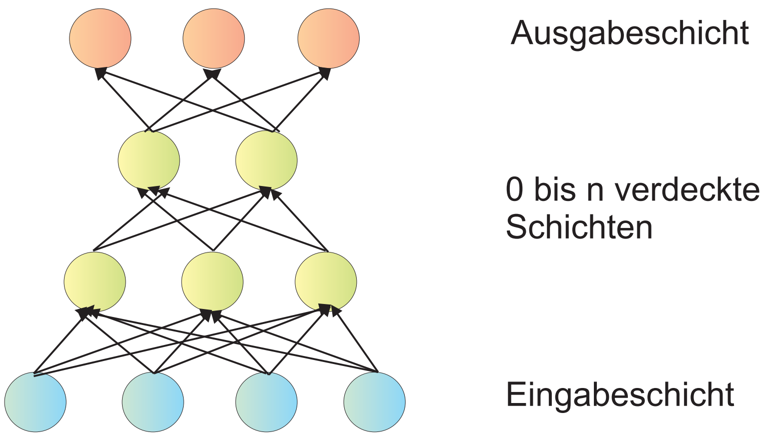


Abbildung 10.2: Feedforward-Netz mit 4 Zellschichten.

Verbindungen enthält. Aus der Eingabeschicht werden die Eingaben von den Eingabeneuronen an das Netz weitergeleitet. Die Zellen der Ausgabeschicht werden als Ausgabeneuronen bezeichnet und reichen die Netzausgabe nach außen. Alle anderen Schichten dienen ausschließlich der Informationsverarbeitung und werden, weil sie von außen nicht sichtbar sind, als verdeckte Schicht bezeichnet. In der Abbildung ist als Besonderheit ein vollständig ebenenweise verbundenes Netz gewählt, bei dem alle Zellen einer Ebene eine Verbindung zu jedem Neuron der nachfolgenden Ebene besitzen.

10.2 Lernregel

Wie schon im vorangegangenen Kapitel erwähnt ist die Lernregel eines neuronalen Netzes von zentraler Bedeutung. Grundsätzlich gibt es verschiedene Möglichkeiten des Lernens in neuronalen Netzen. Diese sind

- die Generation neuer Verbindungen.
- das Löschen vorhandener Verbindungen.
- die Anpassung der Verbindungsgewichte w_{ij}.
- die Veränderung der Neuronenschwellwerte.
- die Anpassung der Aktivierungs-, Propagations- und Ausgabefunktion.
- die Erzeugung neuer Neuronen.
- das Löschen neuer Neuronen.

Von diesen Möglichkeiten, ein neuronales Netz durch Trainieren lernen zu lassen, ist die Variante, die Verbindungsgewichte zu verändern, die am häufigsten verwendete Lernmethode.

Um dies zu erreichen, stehen im Wesentlichen

- die Hebbsche Lernregel,
- die Delta-Regel,
- die Backpropagations-Regel

zur Verfügung. Für genauere Informationen zu der Hebbschen Lernregel und der Delta-Regel sei hier auf [88, 91] verwiesen, da in den nachfolgenden Simulationen ausschließlich die Backpropagation-Regel Anwendung findet.

10.2.1 Backpropagation

Backpropagation ist eine Verallgemeinerung der oben schon erwähnten Delta-Regel, bzw. ein Spezialfall der allgemeinen Form der Hebbschen Lernregel. Anwendbar ist die Lernregel auf neuronale Netze mit mehr als einer Schicht von trainierbaren Verbindungsgewichten und einer nicht semilinearen Aktivierungsfunktion.

Die Backpropagation-Regel kann dann folgendermaßen formuliert werden

$$\Delta w_{ij} = \eta o_i \delta_j. \tag{10.4}$$

η ist hierbei die Lernrate, o_i die Ausgabe der Vorgängerzelle i und Δw_{ij} die Änderung des Gewichtes w_{ij}. δ_j errechnet sich als

$$\delta_j = \left\{ \begin{array}{c} f_j'(net_j)(t_j - o_j) \text{ falls j eine Ausgabezelle ist} \\ f_j'(net_j) \sum\limits_k (\delta_k w_{jk}) \text{ falls j eine verdeckte Zelle ist} \end{array} \right\}. \tag{10.5}$$

Hierbei ist gut zu erkennen, das die Summation über alle direkten Nachfolgerzellen erfolgt. Dies begründet auch die Bezeichnung Backpropagation (Rückwärtsverbreitung). Für die Propagations-Funktion wird bei der Backpropagation die Standard-Propagations-Funktion gewählt

$$net_j(t) = \sum_k o_i(t) w_{ij}. \tag{10.6}$$

Die logistische Aktivierungsfunktion ist

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \tag{10.7}$$

Als Ausgabefunktion wird die Identität angenommen. Somit ergibt sich für die Backpropagation

$$\delta_j = \left\{ \begin{array}{c} o_j(1 - o_j)(t_j - o_j) \text{ falls j eine Ausgabezelle ist} \\ o_j(1 - o_j) \sum\limits_k (\delta_k w_{jk}) \text{ falls j eine verdeckte Zelle ist} \end{array} \right\}. \tag{10.8}$$

Diese Form der Backpropagation findet in vielen praktischen Aufgaben Anwendung.

10.2.2 Schnellere Trainingsmethoden

Auf der Basis von Backpropagation lassen sich noch schnellere und einfacher zu handhabende Algorithmen entwickeln. Der Backpropagation-Algorithmus verändert die Verbindungsgewichte in Richtung des stärksten Abfalls der Bewertungfunktion.

Es hat sich jedoch herausgestellt, dass, obwohl die Bewertungsfunktion hier am schnellsten absinkt, dennoch nicht die beste Konvergenz des Trainings erreicht wird. In den konjugierten Gradientenverfahren (Conjugate gradient algorithm) wird eine Suche entlang der konjugierten Richtungen durchgeführt, was im Allgemeinen zu einer schnelleren Konvergenz des Trainings führt [92, 93].

Eine besondere Form dieses konjugierten Gradientenverfahrens wird in [92, 94] präsentiert. Im Gegensatz zu allen anderen Gradientenverfahren benötigt dieses keine aufwändige lineare Suche (line search). Dieser Lernalgorithmus (Scaled conjugate gradient algorithm) hat sich in Vorabsimulationen als am besten geeignet herausgestellt und wird in dieser Arbeit für die Simulationen verwendet. Auf die genaue Darstellung und Herleitung des Algorithmus wird aufgrund der Komplexität an dieser Stelle verzichtet.

10.2.3 Vorzeitiger Trainingsabbruch (Early stopping)

Für das Training eines neuronalen Netzes wird ein Satz von zueinander gehörigen Eingangs- und Ausgangssignalblöcken $A(z,T)$ und $A(z+L,T)$ benötigt. Durch das Training werden die Verbindungsgewichte w_{ij} so angepasst, dass der Fehler zwischen dem vorgegebenen und dem real erzielten Ausgangssignalblock minimal wird. Hierbei kann es zu einer Überanpassung (Overfit) kommen. Diese entspricht einer Art Auswendiglernen der Eingangs- und Ausgangssignalblöcke, was dazu führt, dass nur die zum Training verwendeten Signalblöcke korrekt prozessiert und unbekannte Signalblöcke schlecht verarbeitet werden.

Um diesen Effekt zu vermeiden, gibt es die Methode, einen vorzeitigen Trainingsabbruch zu erzwingen (Early stopping). Bei Verwendung dieser Methode werden nicht nur die Signalblöcke $A(z,T)$ und $A(z+L,T)$ bereitgestellt, sondern zusätzlich weitere Paare von Eingangs- und Ausgangssignalblöcken. Diese werden nach jedem Trainingsschritt eingesetzt, um zu überprüfen, wie sich das Fehlermaß für diese Validierungsblöcke, die nicht für das Training eingesetzt worden sind, entwickelt. Für den Fall, dass sich der Fehler zwischen vorgegebenem und realem Ausgangssignal zwar für die Trainingsblöcke weiter verringert, für die Validierungsblöcke jedoch vergrößert, wird das Training abgebrochen.

Early stopping wird in den nachfolgenden Untersuchungen zur Signalpropagation von optischen Signalen in Glasfasern angewendet.

10.3 Einsatzmöglichkeiten neuronaler Netze für die Simulation der Signalausbreitung in optischen Fasern

Für die Simulation der Signalausbreitung in optischen Fasern gibt es eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Ansätze. Dieses Kapitel stellt einige dieser Ansätze vor und geht auch auf einige in der jüngsten Vergangenheit veröffentlichten Artikel ein.

Für die Generierung der Trainingsdaten wurde das Simulationstool PHOTOSS [95] verwendet, das am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik an der Universität Dortmund entwickelt wurde. Für die Simulation der neuronalen Netze wurde die Neuronale Netze Toolbox für MATLAB verwendet [92].

10.3.1 Simulation spezieller Pulsformen

In [89, 90] wurde nach Beendigung der in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellten Untersuchungen eine weitere Art neuronale Netze für die Propagation von optischen Pulsen veröffentlicht.

Das in diesen Veröffentlichungen vorgestellte neuronale Netz wird mit einem großen Datensatz für die Propagation eines speziellen Pulses bei einem speziellen Parametersatz der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung trainiert. Hierdurch lernt das neuronale Netz das Verhalten der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung für diesen einen Puls auswendig und ist nachfolgend auch in der Lage, Lösungen an beliebigen Stellen innerhalb des Trainingsdatengitters zu bestimmen.

Das neuronale Netz besitzt hierzu 3 Eingangsneuronen, welche die Werte z, t und ein Bias annehmen. Empirisch wurde ermittelt, dass ein Netz mit 42 verdeckten Neuronen zu den besten Ergebnisse führt. Zwei Ausgangsneuronen liefern den Real- und Imaginärteil der Signaleinhüllenden an dem durch den Netzeingang definierten Punkt.

Diese Vorgehensweise bei dem Einsatz von neuronalen Netzen zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung wurde jedoch in dieser Arbeit ganz bewusst nicht betrachtet. Für diese Arbeit ist das Ziel, eine Methodik zu finden, welche es erlaubt, eine dem trainierten Netz unbekannte Signalfolge (NRZ-Sequenz) zu propagieren. Das obige Vorgehen erlaubt lediglich eine Reproduktion der Trainingsdaten. Diese Generalisierung der Trainingsdaten zu erreichen, ist eine der schwierigsten Aufgaben im Zusammenhang mit den nachfolgend erläuterten Untersuchungen.

10.3.2 Simulation der Faserübertragungseigenschaften anhand von Systemgüteparametern

Eine Möglichkeit, neuronale Netze für die Simulation optischer Übertragungssysteme einzusetzen, ist es, nicht die Signaleinhüllende zu propagieren, sondern das Übertragungssystem anhand von Signalgüteparametern zu beschreiben. Das neuronale Netz wird in diesem Fall auf die Bestimmung der Signalgüteparameter trainiert. Als mögliche Bewertungskriterien bieten sich die in Kapitel 4 definierten Fehlermaße an. Hierzu müssen eine Reihe von Referenzrechnungen erfolgen, um einen ausreichend großen Satz von Trainingsdaten zu erhalten. So wird zum Beispiel die EOP nach der Signalpropagation in Abhängigkeit von verschiedenen Systemcharakteristika (Nichtlinearität, Dispersion, Dämpfung, Faserlänge) bestimmt. Diese Systemcharakteristika dienen dem neuronalen Netz später als Eingangsparameter (Abbildung 10.3).

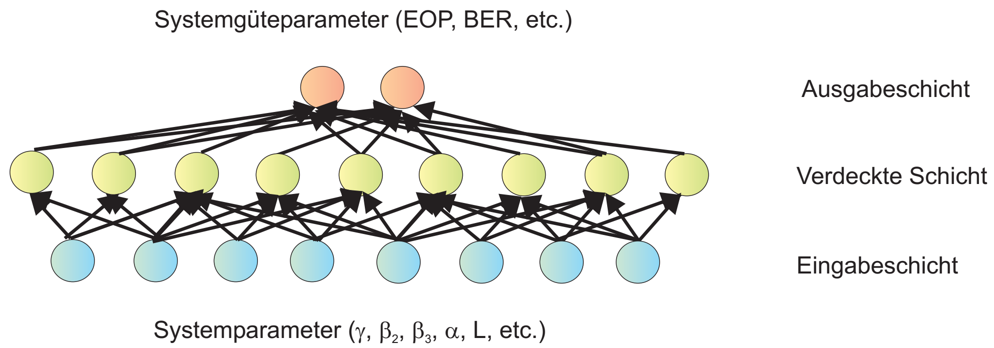


Abbildung 10.3: Simulation der Faserübertragungseigenschaften anhand von Systemgüteparametern.

Dieses Vorgehen wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter untersucht, da in der Regel auch die Signaleinhüllende nach der Signalpropagation für eine weitere Signalbearbeitung und -bewertung benötigt wird.

10.3.3 Simulation der Signalpropagation anhand der Signaleinhüllenden

Wie schon in dem vorangegangenen Kapitel erwähnt, ist die wohl intuitivste Vorgehensweise, neuronale Netze für die Simulation der Signalpropagation einzusetzen, die Signaleinhüllende $A(z,T)$ als Signaleingabe zu verwenden. Da es sich bei der Signaleinhüllenden um komplexe Abtastwerte handelt, muss eine Methode gefunden werden, diese so bereitzustellen, dass reelle Eingangswerte, wie sie für ein neuronales Netz erforderlich sind, vorliegen. Dies wird erreicht, indem für jeden Signalblock der Real- $Re\{A(z,T)\}$ und Imaginärteil $Im\{A(z,T)\}$ getrennt in das neuronale Netz gereicht werden (Abbildung 10.4). Auch das Ausgangssignal erfolgt getrennt, wie es schon von den Trainingsdaten vorgegeben wird.

Diese Vorgehensweise wird für die nachfolgenden Untersuchungen der Signalpropagation mittels neuronaler Netze verwendet.

10.4 Numerische Untersuchung des Verfahrens

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von numerischen Simulationen vorgestellt. Diese Ergebnisse sollen Aufschluss über die Anwendbarkeit von neuronalen Netzen für die Simulation der Propagation von optischen Signalen in Glasfasern liefern.

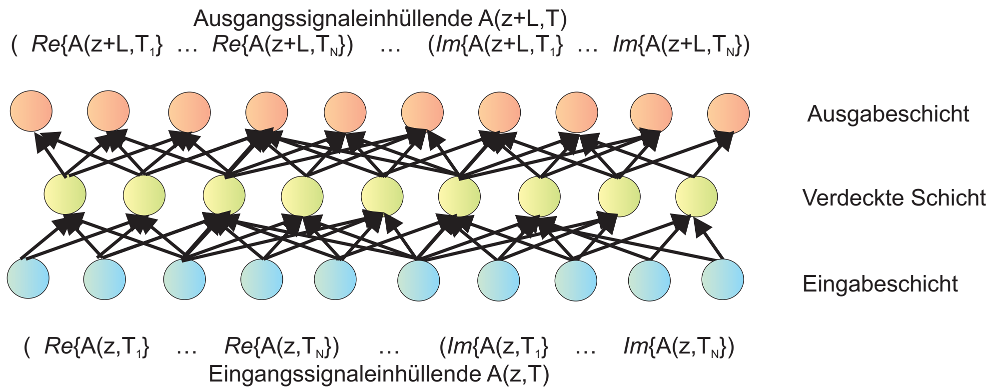


Abbildung 10.4: Simulation der Signalpropagation anhand der Signaleinhüllenden.

10.4.1 Lineare Signalausbreitung einer Eingangsleistung

Zuerst wird untersucht, ob sich die hier verwendete Netztopologie des neuronalen Netzes eignet, die Charakteristika einer Signalübertragung zu erlernen. Hierzu wird aus Gründen der Einfachheit eine linear simulierte Glasfaser betrachtet.

Die Trainingsdaten werden mit PHOTOSS [95] erzeugt. Die Einkanalsimulationen werden bei zyklischer Faltung mit 1024 Abtastwerten und einer Bandbreite von $0,32$THz durchgeführt. Der Systemaufbau ist in Abbildung 10.5 dargestellt. Der Sender erzeugt ein 10 GBit/s NRZ Signal mit einem Roll-Off-Faktor 0,5. Diese Signal wird in einem Erbium-dotierten Faserverstärker (EDFA) auf 0 dBm Fasereingangsleistung verstärkt. Ein 80 km lange Standardeinmodenfaser (SSMF) mit den Faserparametern $\alpha = 0,2$ dB/km, $\beta_2 = -20,44$ ps^2/km, $\beta_3 = 0$ ps^3/km und $L = 80$km. Simuliert werden 50 Signalblöcke unterschiedlicher Bitsequenzen, wobei jeweils das Eingangs- und Ausgangssignal in einer Komponente zur Signalabspeicherung (Filesaver) gesichert werden.

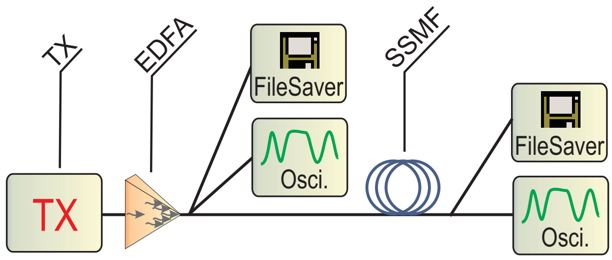


Abbildung 10.5: Systemaufbau zur Erzeugung der Validierungs- und Trainingsblöcke.

Die Simulation und das Training des neuronalen Netzes für das obige System wird in MATLAB durchführt. Hierzu wird die Neuronale Netze Toolbox eingesetzt. Es wird ein Feedforward-Netz mit 3 Zellschichten (Eingangsschicht, 1 verdeckte Schicht, Ausgangsschicht) generiert, das der Blockgrösse N entsprechend 2N Eingangs- und Ausgangsneuronen beinhaltet (Kapitel 10.3.3). Die Anzahl der Neuronen in der verdeckten Schicht wird von 2 bis 60 variiert. Für das Training werden die Methoden aus Kapitel 10.2.2 und 10.2.3 verwendet. Das Training wird abgebrochen, wenn entweder 40000 Trainingsiterationen erreicht sind, die Bewertungsfunktion gleich 0 ist oder sich die Bewertungsfunktion für die Validierungsblöcke 3000-mal verschlechtert hat (Overfitting).

Es werden für das Training 40 unabhängige Signalblöcke verwendet. Die Validierung wird anhand von 10 weiteren Signalblöcken durchgeführt, welche Bitsequenzen beinhalten, die nicht für das Training verwendet wurden.

Abbildung 10.6 zeigt für das Training des obigen Netzes den quadrierten Durchschnittsfehler, welcher im Rahmen des Backpropagation-Trainings als Bewertungsfunktion verwendet wird. Aufgetragen ist dieser Fehler sowohl für die Trainings- als auch für die Validierungsblöcke. Hier ist die Tendenz zu erkennen, dass der Fehler zwischen der Netzausgabe und den Trainingsdaten für eine höhere Neuronenzahl verringert wird. Zudem ist zu erkennen, dass für bestimmte Neuronenanzahlen sehr ungenaue Trainingsergebnisse erreicht werden. Der beste Trainingserfolg wurde in der Simulation für 50 Neuronen erzielt. Eine Optimierung der Neuronenanzahl in der verdeckten Schicht ist für eine gute Approximation maßgeblich. Der Fehler der Validierungsblöcke liegt für alle Simulationen über dem der Trainingsblöcke.

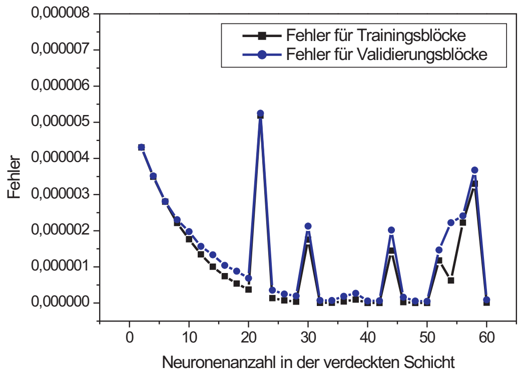


Abbildung 10.6: Durchschnittsfehler zwischen dem vorgegebenen und den real erzielten Ausgangsblock für die Trainings- und Validierungsblöcke in Abhängigkeit von der Neuronenanzahl.

Wird für alle simulierten Trainings- und Validierungsblöcke die relative Leistungsabweichung (RPP) über der Neuronenanzahl aufgetragen, so ergibt sich Abbildung 10.7. Es ergibt sich hier ebenfalls eine Verringerung der RPP bei einer Erhöhung der Neuronenanzahl. Auffällig ist jedoch, dass die RPP für einige der Validierungsblöcke deutlich größer ausfällt. Dies ist dadurch begründet, dass gerade diese Blöcke Bitsequenzen beinhalten, welche selten auftreten und somit nicht gut trainiert werden können, da diese auch in den Trainingsdaten nur selten vorhanden sind. Eine Vergrößerung des Trainingsdatensatzes könnte dieses Problem beheben.

Um einen Eindruck von der Approximationsqualität der Netzausgabe zu gewinnen, sind in Abbildung 10.8 die Beträge der propagierten NRZ-Sequenz des vorgebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für einen Trainingsblock und einen Validierungsblock dargestellt. Hier ist gut zu erkennen, dass für dieses linear propagierte Signal mit nur einer Eingangsleistungstufe eine gute Approximation durch das neuronale Netz erzielt wird. Auch unbekannte Bitsequenzen werden mit großer Genauigkeit prozessiert.

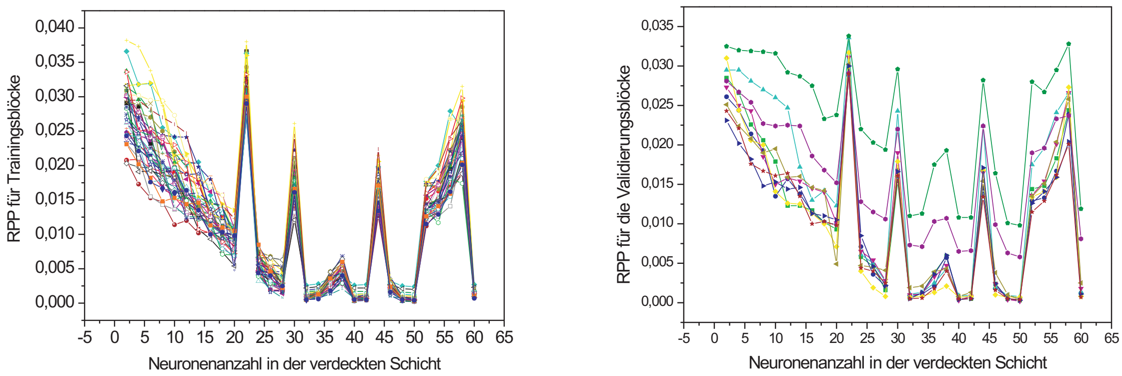


Abbildung 10.7: Relative Leistungsabweichung (RPP) zwischen dem vorgegebenen und dem real erzielten Ausgangsblock für a) 40 Trainingsblöcke und b) 10 Validierungsblöcke in Abhängigkeit von der Neuronenanzahl.

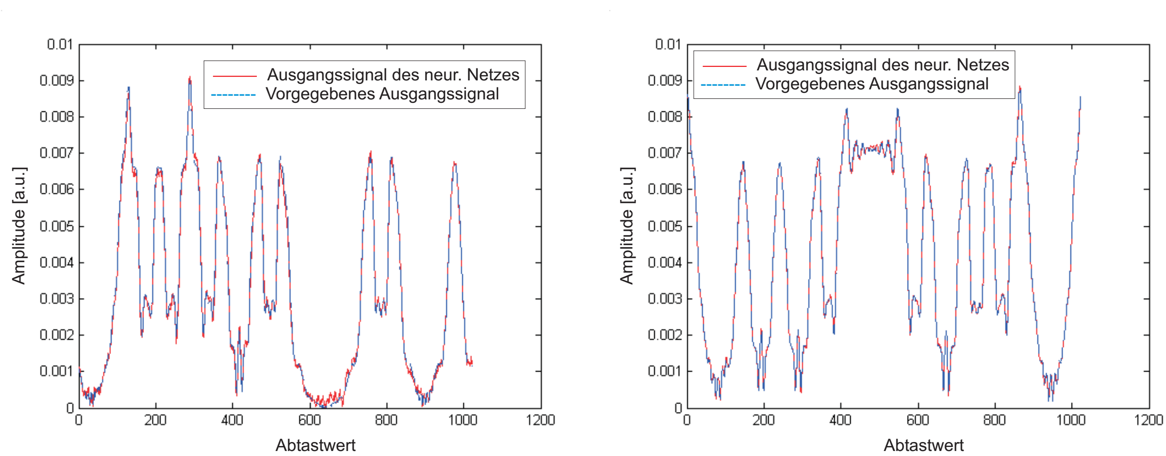


Abbildung 10.8: Betrag der propagierten NRZ-Sequenz des vorgegebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für a) einen Trainingsblock und b) einen Validierungsblock.

10.4.2 Lineare Signalausbreitung unterschiedlicher Eingangsleistungen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt nur Signale einer Leistung betrachtet wurden, werden nun Signale unterschiedlicher Fasereingangsleistungen untersucht. Die Trainingsdaten wurden dennoch durch eine lineare Simulation der Glasfaser erreicht. Mit diesen Untersuchungen soll als Vorstufe für eine nichtlineare Untersuchung geprüft werden, ob sich diese Trainingsmethodik eignet, auch Signale stark unterschiedlicher Eingangspegel mit einem neuronalen Netz zu erfassen.

Kontinuierlich pro Block ansteigende Signaleingangsleistung

Der Systemaufbau zur Erzeugung der Trainingsdaten unterscheidet sich nicht von dem in Abbildung 10.5 vorgestellten. Abweichend jedoch erzeugt der Erbium-dotierte Faserverstärker (EDFA) nicht eine konstante Leistung für alle Simulationsblöcke, sondern alle 50 erzeugten Trainingsblöcke werden mit unterschiedlicher Fasereingangsleistung simuliert. Die Leistung wird von 0 dBm bis 5 dBm in 0,1 dBm Schritten erhöht.

Die 40 Simulationsblöcke mit den Leistungen 0 - 3,9 dBm werden als Trainingsblöcke eingesetzt. Als Validierungsblöcke dienen die verbleibenden Blöcke der Fasereingangsleistung 4 - 4,9 dBm. Von den veränderten Trainingsdaten abgesehen verändert sich die Netztopologie zum vorangegangenen Kapitel nicht. Die Anzahl der Neuronen wird wieder von 2 auf 60 Neuronen erhöht.

In Abbildung 10.9 wird für das Training des obigen Netzes der quadrierte Durchschnittsfehler gezeigt. Aufgetragen ist dieser Fehler sowohl für die Trainings- als auch für die Validierungsblöcke. Aus diesem Diagramm ist schon zu erkennen, dass das Training des neuronale Netzes nicht erfolgreich war. Durch die Erhöhung der Neuronenanzahl wird die Bewertungsfunktion für die Validierungsblöcke nicht verringert.

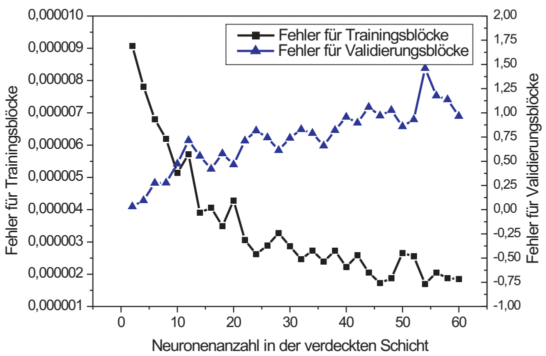


Abbildung 10.9: Durchschnittsfehler zwischen dem vorgegebenen und den real erzielten Ausgangsblock für die Trainings- und Validierungsblöcke in Abhängigkeit von der Neuronenanzahl.

Wird für alle simulierten Trainings- und Validierungsblöcke die relative Leistungsabweichung (RPP) über der Neuronenanzahl aufgetragen, so ergibt sich Abbildung 10.10. Auch in diesem Bild ist deutlich zu erkennen, dass das Training nicht zum deutlichen Erfolg geführt hat.

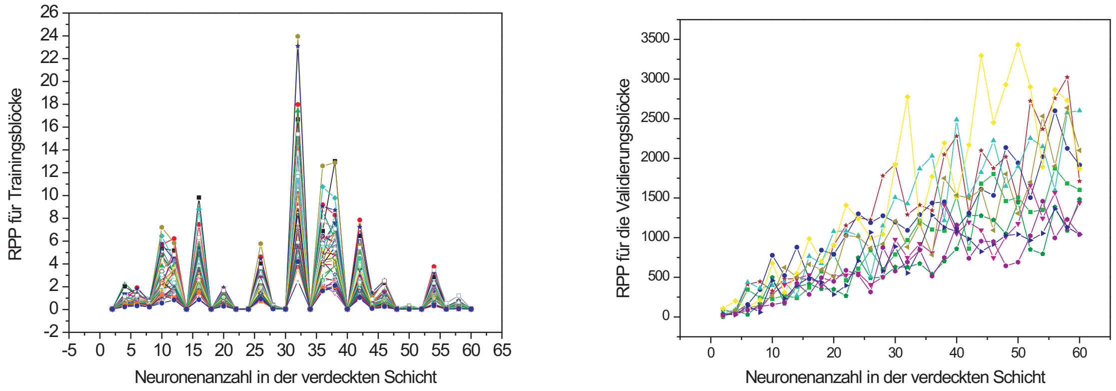


Abbildung 10.10: Relative Leistungsabweichung (RPP) zwischen dem vorgegebenen und dem real erzielten Ausgangsblock für a) 40 Trainingsblöcke und b) 10 Validierungsblöcke in Abhängigkeit von der Neuronenanzahl.

In Abbildung 10.11 sind die Beträge der propagierten NRZ-Sequenz des vorgebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für den jeweils fünften Trainings- (0,4 dBm Eingangsleistung) und Validierungsblock (4,4 dBm Eingangsleistung) dargestellt. Auch hier zeigt sich, dass die gewählte Trainingsmethodik nicht geeignet ist. Als Grund für den mangelnden Trainingserfolg wird vermutet, dass die Validierungsblöcke eine höhere Signalleistung aufweisen als die Trainingsblöcke.

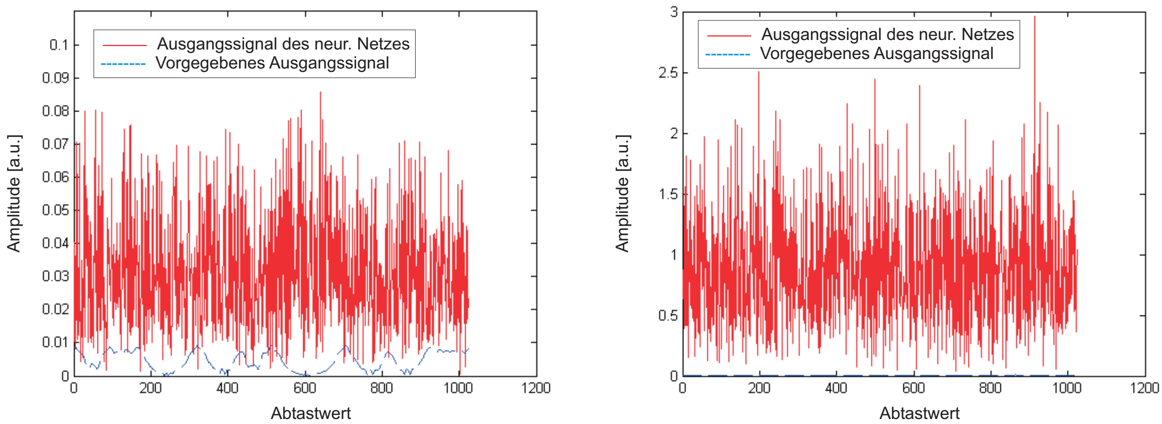


Abbildung 10.11: Betrag der propagierten NRZ-Sequenz des vorgegebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für a) einen Trainingsblock und b) einen Validierungsblock.

Stufenweise ansteigende Signaleingangsleistung

Gegenüber den Simulationen im vorherigen Kapitel werden nun zwei wesentliche Veränderungen eingeführt. Zum einen wird die Leistung der Validierungsblöcke so gewählt, dass sie im Bereich der zuvor durch die Trainingsblöcke vorgegebenen Eingangsleistungen liegt. Zum anderen wird die Leistung der Trainingsblöcke nicht kontinuierlich erhöht. In dem Systemaufbau aus Abbildung 10.5 liefert der Erbium-dotierte Faserverstärker (EDFA) für die Erzeugung der Trainingsdaten für jeweils 20 Signalblöcke eine konstante Leistung und variiert diese in den Stufen 0, 3, 6, 9, 12, 15 dBm. Die so gewonnenen 120 Signalblöcke werden alle als Trainingsblöcke verwendet. Für die Validierungblöcke werden zusätzlich 10 Blöcke mit einer Fasereingangsleistung von 0 dBm erzeugt.

Abbildung 10.12 stellt für alle simulierten Trainings- und Validierungsblöcke die relative Leistungsabweichung (RPP) über der Neuronenanzahl dar. Aufgetragen ist die RPP für alle Trainings- und Validierungsblöcke. Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel ist hier zu erkennen, dass sich der Fehler sowohl für die Trainings- als auch für die Validierungsblöcke mit einer wachsenden Neuronenanzahl verringert. Ein minimaler Fehler wurde für 54 Neuronen in der verdeckten Schicht erreicht.

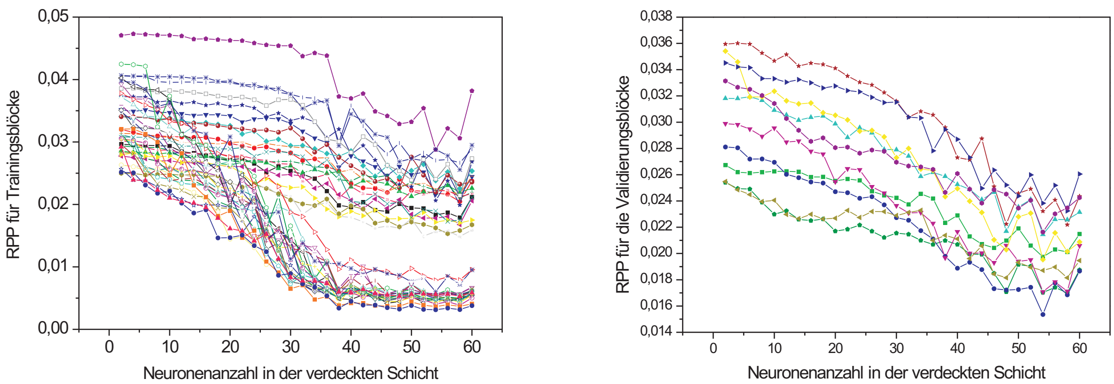
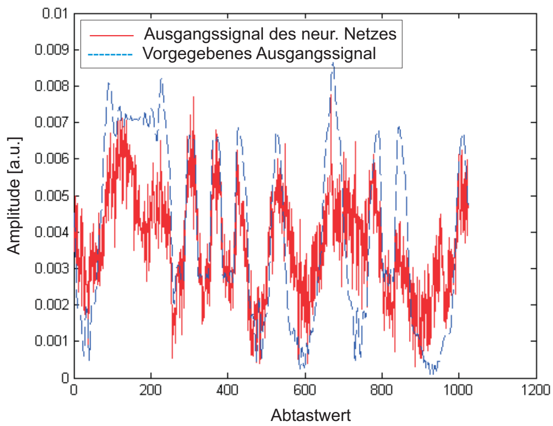


Abbildung 10.12: Relative Leistungsabweichung (RPP) zwischen dem vorgegebenen und dem real erzielten Ausgangsblock für a) 120 Trainingsblöcke und b) 10 Validierungsblöcke in Abhängigkeit von der Neuronenanzahl.

In Abbildung 10.11 sind die Beträge der propagierten NRZ-Sequenz des vorgegebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für den jeweils fünften Trainings- und Validierungsblock mit jeweils einer Fasereingangsleistung von 0 dBm dargestellt. Aus diesen Ergebnissen lässt sich nun schließen, dass neuronale Netze mit der hier vorgestellten Topologie geeignet sind, auch eine Propagation von Signalen mit unterschiedlichen Signaleingangsleistungen zu prozessieren. Die Approximationsergebnisse aus diesem Abschnitt sind für einen Einsatz der neuronalen Netze jedoch noch nicht ausreichend, zeigen jedoch die Fähigkeit der neuronalen Netze, das Übertragungsverhalten der optischen Fasern zu erlernen.



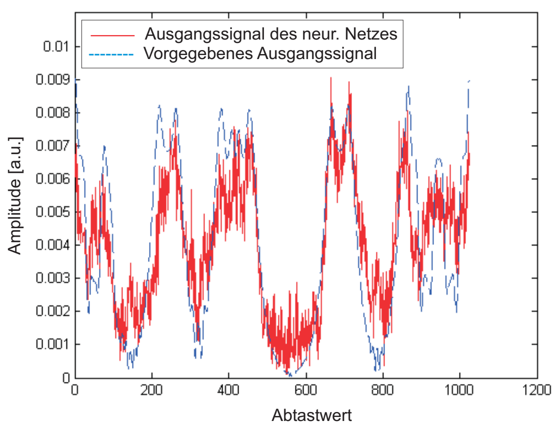


Abbildung 10.13: Betrag der propagierten NRZ-Sequenz des vorgegebenen und des real erzielten Ausgangsblocks für a) einen Trainingsblock und b) einen Validierungsblock.

10.5 Bewertung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Simulationen zur Verwendung von neuronalen Netzen für die Simulation der Signalausbreitung in optischen Fasern hat gezeigt, dass schon einfache Netzstrukturen ausreichen, um das Übertragungsverhalten der Glasfaser zu erlernen.

Trainiert wurden in dieser Arbeit aber nur linear simulierte Faserstrecken, wobei jedoch unterschiedliche Eingangspegel für die simulierten Signalblöcke verwendet wurden. Hiermit konnten gute Lernerfolge erzielt werden. Mit den gewonnene Ergebnissen ist eine Optimierung der Netzstruktur und eine Verallgemeinerung auf ein nichtlineares Übertragungssystem möglich.

Der wesentliche Vorteil bei der Verwendung der neuronalen Netze ist die große Berechnungsgeschwindigkeit, da der hohe Rechenaufwand im Vorfeld beim Training des neuronalen Netzes entsteht und nur einmal durchzuführen ist.

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden unterschiedliche Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung untersucht. Die numerischen Methoden wurden aufgrund von Simulationsergebnissen miteinander verglichen. Das Augenmerk der Untersuchung lag dabei vor allem auf der Beurteilung der Schnelligkeit und Genauigkeit der einzelnen Algorithmen. Die untersuchten numerischen Methoden ergaben zusammenfassend die folgenden Ergebnisse:

- Aus den Untersuchungen der klassischen numerischen Verfahren, wie sie in Kapitel 5 vorgestellt wurden, ergibt sich die Schlussfolgerung, dass diese Verfahren für die Simulation der Signalpropagation in optischen Fasern nur in Spezialfällen effizient eingesetzt werden können. Es stellte sich heraus, dass sich mit allen Verfahren dieses Typs nur schmalbandige Signale effektiv propagieren lassen. Durch den Einsatz von FD-Schemata höherer Ordnung kann dieses Problem beseitigt werden, allerdings muss dann neben dem höheren Rechenaufwand auch eine Reduktion der Propagationsschrittweite in Kauf genommen werden.

- Das in Kapitel 6 untersuchte Split-Step-Verfahren bietet die Möglichkeit, den linearen und nichtlinearen Gleichungsanteil durch eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze zu lösen. Die FD-basierten Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungsanteils besitzen den Nachteil, aufgrund der numerischen Dispersion nur in einem spektral stark begrenzten Bereich gültige Ergebnisse zu liefern. Die FD-basierten Split-Step-Verfahren können also nur in Sonderfällen zur schnellen Lösung der NLSG eingesetzt werden. Die transformationsbasierten Verfahren liefern hier die genaueren Ergebnisse und können universeller eingesetzt werden. Ein symmetrisches Split-Step-Fourier-Verfahren liefert unter den untersuchten Transformationsverfahren für eine große Mehrheit der untersuchten Systeme die besten Ergebnisse.

- In Kapitel 7 wird basierend auf der Split-Step-Methode eine Lösung des linearen Gleichungsanteils der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung durch IIR-Filter vorgestellt. Die Verwendung von IIR-Filtern im Rahmen eines Split-Step-Schemas führt zur Reduzierung des Rechenaufwandes um den Faktor 3-5. Für die Approximation der Gruppenlaufzeitverzögerung werden abhängig von den Simulationsparametern sowohl ein Filter zweiter als auch ein Filter dritter Ordnung verwendet. Hierdurch kann auch eine große Simulationsbandbreite genau erfasst werden. Dieses Verfahren wurde mit der Fourier-Methode zur Lösung des linearen Gleichungsanteils kombiniert, so dass die jeweils genauere Methode in der Simulation eingesetzt wird. Somit wird systemabhängig eine Verbesserung der Berechnungsgenauigkeit bei gleicher Berechnungsdauer erreicht.

- Die Untersuchungen in Kapitel 8 haben ergeben, dass die Kollokations-Methode zu guten und verlässlichen Ergebnissen führt. Jedoch war es möglich, diese Ergebnisse in kürzerer Zeit mit der verbreiteten Split-Step-Fourier-Methode zu gewinnen. Aus diesem Grund kann die Kollokations-Methode mit der von uns gewählten Basis nicht für die Simulation der Propagation von optischen Signalen in Glasfasern empfohlen werden.

- Die bei den Split-Step-Schemata verwendbaren Schrittweitenalgorithmen zur Unterdrückung von Resonanzartefakte in der numerischen Lösung wurden in Kapitel 9 analysiert. Hier konnte gezeigt werden, dass der weit verbreitete Algorithmus, welcher basierend auf einer exponentiell abfallenden Signalspitzenleistung aufgrund von Faserdämpfung die Schrittweite logarithmisch erhöht, in den Ansatz basierend auf der Unterdrückung der künstlichen Vierwellenmischung überführt werden kann. Ein Vergleich der obigen Algorithmen mit einem weiteren neuen Algorithmus basierend auf der tatsächlichen Signalspitzenleistung an jedem Ort entlang der optischen Faser, wodurch der Einfluss anderer Fasereffekte auf die Schrittweitenbestimmung direkt einbezogen wird, wurde durchgeführt. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass alle Algorithmen nach der Signalübertragung zu einer vergleichbaren Genauigkeit führen. Eine möglich Ausnahme bilden hier die Raman-verstärkten Systeme. Wird hier die tatsächliche Signalspitzenleistung herangezogen, so wird eine bessere Approximation erreicht.

- Die Verwendung von neuronalen Netzen für die Simulation der Signalausbreitung in optischen Fasern zeigte, dass das Übertragungsverhalten der Glasfaser abgebildet werden kann. Trainiert wurden die neuronalen Netze in dieser Arbeit nur mit Daten von linear simulierten Faserstrecken, wobei jedoch unterschiedliche Eingangspegel für die simulierten Signalblöcke verwendet wurden. Aus Sicht des neuronalen Netzes ergibt sich bezüglich des Lernverhaltens kein weiterer Unterschied bei der Verallgemeinerung auf nichtlineare Systeme. Weitere Untersuchungen zur Optimierung der Lernparameter und der Ausdehnung auf nichtlineare Systeme bieten hier die Möglichkeit, die Einsatzmöglichkeiten der neuronalen Netze weiter zu untersuchen.

Aus den Untersuchungen folgt, dass umso mehr ein Lösungalgorithmus auf das jeweilige Problem zugeschnitten ist, desto effizienter arbeitet der Algorithmus. Dies ist in Abbildung 11.1 veranschaulicht. Problemstellungen, wie z. B. der Lösung der NLSG für nur eine bestimmte zu propagierende Pulsform, lassen sich mit speziell darauf abgestimmten Algorithmen sehr effizient lösen. Ist aber über das zu lösende System wenig bekannt, müssen sehr allgemeine Lösungsverfahren mit höherem Aufwand zum Einsatz kommen. Für die Lösung der NLSG ohne spezielle Randbedingungen hat sich das Split-Step-Verfahren mit einem kombinierten Einsatz von IIR-Filtern und Fourier-Transformationen zur Lösung des linearen Operators als optimal herausgestellt.

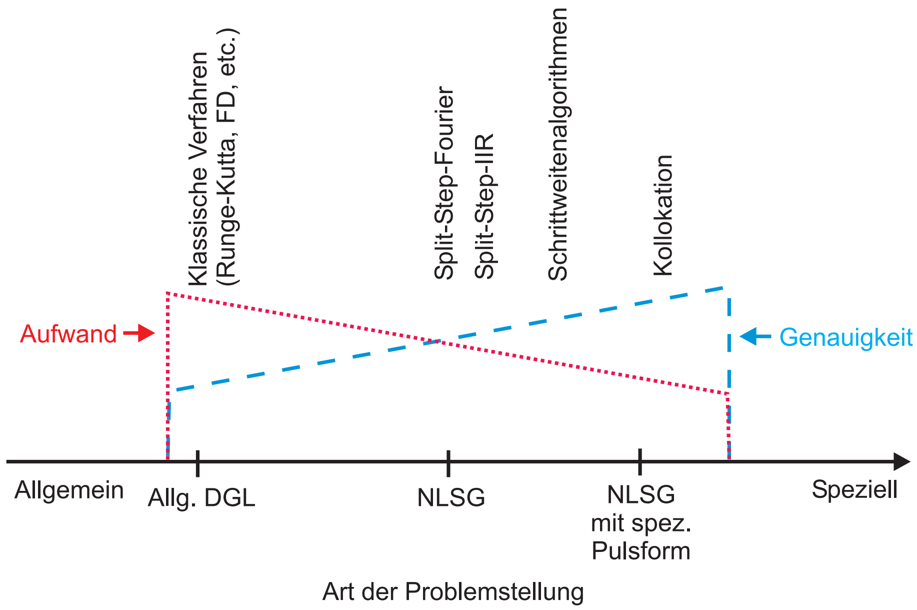


Abbildung 11.1: Veranschaulichung des Berechnungsaufwandes und der Berechnungsgenauigkeit abhängig von der Problemstellung und dem zu wählenden Berechnungsverfahren.

Die Untersuchungen von neuronalen Netzen zur Simulation der Signalausbreitung von optischen Pulsen in Glasfasern haben gezeigt, dass neuronale Netze geeignet sind, diese Aufgabe zu erfüllen. Weiterführende Untersuchungen konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden. Hier ist vor allem noch zu klären, welche Lernmethodik gewählt werden muss, um die Leistungsabhängigkeit des Ausgangssignal besser zu erlernen.

Literaturverzeichnis

[1] D. Chem, S. Wheeler, D. Nguyen, A. Färbert, A. Schöpflin, A. Richter, C. J. Weiske, K. Kotten, P. M. Krummrich, A. Schex, C. Glingener, "3.2 TB/s field trail (80 x 40 GB/s) over 3x82 km SSMF using FEC, Raman and tunable dispersion compensation", OFC 2001, Anaheim, PD 36, 2001.

[2] Y. Frignac, G. Charlet, W. Idler, R. Discher, P. Tran, S. Lanne, S. Borne, C. Martinelli, G. Veith, A. Jourdan, J. P. Hamaide, S. Bigo, "Transmission of 256 wavelength-division- and polarization-division-multiplexed channels at 42,7 GBit/s (10.2 TBit/s capacity) over 3x100 km of TeraLight TM fiber", OFC 2002, Anaheim, FC 5, 2001.

[3] K. Fukuchi, M. Kasamatsu, M. Morie, R. Ohhira, T. Ito, K. Seiya, D. Ogasahara, T. Ono, "10.92-TB/s (273 x 40-GB/s) triple-band/ultra-dense WDM optical-repeatered transmission experiment", OFC 2001, Anaheim, PD 4, 2001.

[4] C. Glingener, "Next Generation Optical Networks and Related Components", Workshop: Optical MEMS and Integrated Optics, Universität Dortmund, 2001.

[5] J. Kissing, "Analytische Bewertung der Signalqualität in faseroptischen Nachrichtennetzen", Universität Dortmund, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Dissertation, 2003.

[6] J.-P. Elbers, "Modellierung und Simulation faseroptischer Übertragungssysteme", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1996.

[7] C. Glingener, "Modellierung und Simulation faseroptischer Netze mit Wellenlängenmultiplex", Dissertation, Verl. für Wiss., Forschung und Technik, 1998.

[8] M. Düser, "Modellierung der Signalausbreitung in optischen Fasern", Studienarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1997.

[9] S. Vorbeck, "Untersuchung der Polarisationsmodendispersion in optischen Kommunikationssystemen hoher Bitrate", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2001.

[10] S. Vorbeck, "Untersuchung verschiedener Modulationsschemata für optische Übertragungssysteme hoher Kapazität und Reichweite", Studienarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2000.

[11] M. Schneiders, "Untersuchung der Signaldegradation in nichtlinearen optischen Übertragungssystemen mit Wellenlängenmuliplex", Studienarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2000.

[12] M. Schneiders, "Stimulierte Raman-Streuung in faseroptischen Übertragungssystemen", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2001.

[13] A. Steinkamp, "Modellierung und Simulation optischer Kommunikationssysteme hoher Datenrate", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund , 2001.

[14] S. Pachnicke, "Constraint based routing due to physical impairments in automatically switched optical transport networks", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2002.

[15] M. Windmann, "Modellierung und Simulation optischer Kommunikationssysteme mit RZ-Modulation", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2002.

[16] J.-P. Elbers, C. Glingener, J. Lenge, J. Kissing, E. Voges, "Simulation and Modelling of Photonic WDM-Systems", Proceedings of the SPIE, Vol. 3666, S. 220-225, 1999.

[17] J. Kissing, M. Plura, J. Lenge, E. Voges, "Möglichkeiten und Grenzen der BER-Bestimmung mittels OSNR- und EOP-Messungen", ITG-Workshop "Performance monitoring", HHI, Berlin, 2000.

[18] H. D. Lüke, "Signalübertragung", Springer Verlag, Berlin, 7. Aufl., 1999.

[19] E. Voges, K. Petermann, "Optische Kommunikationstechnik - Handbuch für Wissenschaft und Industrie", Springer Verlag, Berlin, 2002.

[20] G. P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Second Edition, Academic Press, San Diego, 1995.

[21] G. P. Agrawal, "Fiber Optic Communication Systems", Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1996.

[22] H. G. Unger, "Optische Nachrichtentechnik Teil I", 2. Auflage, Heidelberg, Hüthig, 1990.

[23] C. Glingener, "Faseroptische Nachrichtennetze", Vorlesungsskript, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2002.

[24] R. Ramaswami, K. Sivarajan, "Optical Networks - A Practical Perspective", 2. Auflage, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2002.

[25] E. Iannone, F. Matera, A. Mecozzi, M. Settembre, "Nonlinear Optical Communication Networks", John Wiley & Sons, New York, 1998.

[26] R. H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson, H. A. Haus, "Raman response function of silica-core fibers", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 6, Nr. 6, S. 1159-1165, 1989.

[27] M. Plura, J. Kissing, J. Lenge, E. Voges, "Einfluss des Self-Steepening-Effektes in hochbitratigen optischen Weitverkehrsstrecken", ITG-Fachtagung "Photonische Netze", Dresden, 2001.

[28] E. Voges, "Optische Übertragungstechnik I", Skriptum zur Vorlesung, Universität Dortmund, 2000.

[29] E. Voges, "Optische Übertragungstechnik II", Skriptum zur Vorlesung, Universität Dortmund, 2000.

[30] M. Plura, J. Kissing, J. Lenge, E. Voges, "Schnelle Berechnung der Signalverzerrungen in nichtlinearen Faserstrecken zur Bestimmung der Systemgüte", ITG-Workshop "Performance monitoring", HHI, Berlin, 2000.

[31] M. Plura, J. Kissing , J. Lenge, "Dispersionsmanagement und Reichweitenoptimierung bei Berücksichtigung von SPM, XPM, und FWM in WDM-Systemen", ITG-Workshop "Modellierung von Komponenten und Systemen für die WDM-Übertragung", Siemens, München, 1999.

[32] C. R. Menyuk, P. K. A. Wai, "Polarisation evolution and dispersion in fibers with spatially varying birefringence", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 11, Nr. 7, 1994.

[33] J. Kissing, M. Plura, S. Vorbeck, J. Lenge, E. Voges, "Optimierte Modulationsformate für maximale Reichweite und Kapazität unter Berücksichtigung von Rauschen, Faserdispersion, PMD, SPM und XPM", ITG-Workshop "Modulationsformate und spektrale Effizienz hochbitratiger Übertragungssysteme", T-Nova, Darmstadt, 2001.

[34] M. Meyer, "Einfluss der Polarisationsmodendispersion in nichtlinearen optischen Übertragungssystemen", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1999.

[35] T. Gravemann, "Modellierung und Simulation der Polarisationsmodendispersion optischer Kommunikationssysteme", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 2002.

[36] J. Häring, "Entwurf schneller Algorithmen zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1998.

[37] C. Großmann, H. G. Roos, "Numerik partieller Differentialgleichungen", Teubner Studienskripte Mathematik, Stuttgart, 1992.

[38] G. Denk, "Ein neues Diskretisierungsverfahren zur effizienten numerischen Lösung rasch oszillierender Differentialgleichungen", Dissertation, Mathematischen Institut der Technischen Universität München, 1992.

[39] H. Schröder, "Algorithmen und Architekturen der schnellen digitalen Signalverarbeitung", Skriptum zur Vorlesung SIV, Universität Dortmund, 1997.

[40] M. W. Müller, M. Reimer, "Höhere Mathematik IV", Skriptum zur Vorlesung, Teil 1, Universität Dortmund, 1989.

[41] R. Lee, A. C. Cangellaris, "A Study of Discretization Error in the Finite Element Approximation of Wave Solutions", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. 40, Nr. 5, 1992.

[42] C. Böhm, "Pulsausbreitung in verlustbehafteten dispersiven Medien", Studienarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1997.

[43] W. H. Press, "Numerical Recipes in C", Cambridge University Press, 1992.

[44] A. Björck, G. Dahlquist, "Numerische Methoden", R. Oldenbourg Verlag, München, 1972.

[45] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, "Taschenbuch der Mathematik", 25. Auflage, B. . Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991.

[46] K. J. Blow, D. Wood, "Theoretical Description of Transient Stimulated Raman Scattering in Optical Fibers", IEEE J. Quantum Electronics, Vol. 25, Nr. 12, S. 2665-2673, 1989.

[47] B. Garcia-Archilla, J. M. Sanz-Serna, R. Skeel, "Long-time-step methods for oscillatory differential equations", Applied Mathematics and Computation Reports 1996/7, Universidad de Valladolid, 1996.

[48] B. P. Nelson, D. Wood, "Analysis of the nonlinear coaxial coupler", IEEE J. Quantum Electronics, Vol. 24, S. 1915-1921, 1988.

[49] M. Vetterli, J. Kovacevic, "Wavelets and Subband Coding", Prentice Hall, 1995.

[50] R. Zurmühl, S. Falk, "Matrizen 1 - Grundlagen", 7. Aufl., Springer Verlag, 1997.

[51] H. Tal-Ezer, R. Kosloff, "An accurate and efficient scheme for propagating the time dependent Schrödinger equation", J. Chem. Phys. Vol. 81, Nr. 9, S. 3967-3971, 1984.

[52] U. Peskin, R. Kosloff, N. Moiseyev, "The solution of the time dependent Schrödinger equation by the (t, t') method: The use of global polynomial propagators for time dependent Hamiltonians", J. Chem. Phys., Vol. 100, Nr. 12, 1994.

[53] M. Hochbruck, C. Lubich, "On Krylow Subspace Approximations to the Matrix Exponential Operator", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 34, Nr. 5, S. 1911-1925, 1997.

[54] T. J. Park, J. C. Light, "Unitary quantum time evolution by iterative Lanczos reduction", J. Chem. Phys., Vol. 85, Nr. 10, S. 5870-5876, 1986.

[55] B. Hermansson, D. Yevick, W. Bardyszewski, M. Glasner, "A Comparison of Lanczos Electric Field Propagation Methods", J. Lightwave Technol., Vol. 10, Nr. 6, 1992.

[56] H. Schwarz, "Zur Nichtlinearen Approximation nichtlinearer dynamischer Systeme", Automatisierungstechnik at 37, R. Oldenbourg Verlag, 1989.

[57] W. W. Smith, W. J. Rugh, "On the Structure of a class of Nonlinear Systems" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, Nr. 6, 1974.

[58] Y. Goussard, W. C. Krenz, L. Stark, G. Demoment, "Practical Identification of Functional Expansions of Nonlinear Systems Submitted to Non-Gaussian Inputs", Ann. of Biomed. Eng., Vol. 19, S. 401-427, 1991.

[59] M. J. Korenberg, L. D. Paarmann, "Orthogonal Approaches to Time-Series Analysis ans System Identification", IEEE SP Magazine, 1991.

[60] K. S. Shanmugam, M. Lal, "Analysis and Synthesis of a class of Nonlinear Systems", IEEE Transactions on Circuits ans Systems, Vol. CAS-23, Nr. 1, 1976.

[61] R. F. Harrington, "Matrix method for field problems", Proc. IEEE, Vol. 55, Nr. 2, S. 136-149, 1967.

[62] M. M. Ney, "Method of moments as applied to electromagnetic problems", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-33, Nr. 10, S. 972-980, 1985.

[63] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, "Spectral methods in fluid dynamics", Springer-Verlag, Inc., New York, 1988.

[64] R. Remis, P. M. van Berg, "A Modified Lanczos Algorithm for the Computation of Transient Electromagnetic Wavefields", IEEE Trans. Microwave Theory ans Techniques, Vol. 45, Nr. 12, 1997.

[65] L. R. Watkins, Y. R. Zhou, "Modeling Propagation in Optical Fibers Using Wavelets", J. Lightwave Technol., Vol. 12, S. 1536-1542, 1994.

[66] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Informat. Theory, Vol. 36, S. 961-1005, 1990.

[67] G. Strang, "Wavelet transforms versus Fourier transforms", Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 28, Nr. 2, S. 288-305, 1993.

[68] T. Kremp, "Split-step wavelet collocation methods for linear and nonlinear optical wave propagation", Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Fridericiana Karlsruhe, Karlsruhe, 2002.

[69] M. J. Potasek, G. P. Agrawal, S. C. Pinault, "Analytic and numerical study of pulse broadening in nonlinear dispersive optical fibers", J. Opt. Soc Am. B, Vol. 3. Nr. 2, 1986.

[70] M. Plura, T. Balslink, J. Kissing, D. Schulz, E. Voges, "Analysis of an improved Split-Step algorithm for simulating optical transmission systems", Int. J. Electron. Commun. (AEÜ), Vol. 56, Nr. 6, S. 1-6, 2002.

[71] M. Plura, J. Kissing, M. Gunkel, J. Lenge, J.-P. Elbers, C. Glingener, D. Schulz, E. Voges, "Improved split-step method for efficient fibre simulations", IEE Electron. Lett., Vol. 37, Nr. 5, S. 286-287, 2001.

[72] M. Plura, J. Kissing, J. Lenge, D. Schulz, E. Voges, "Efficient fibre simulation: A novel approach to the split-step method", Workshop W1: "Modelling and Design of Optical Networks and Systems", 26th European Conference on Optical Communication, ECOC 2000, München, 2000.

[73] A. Carena, V. Curri, R. Gaudino, P. Poggiolini, S. Benedetto, "A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber", IEEE J. sel. Areas in Commun., Vol. 15, Nr. 4, S. 751-765, 1997.

[74] G. Albertengo, L. Lo Presti, "Time-domain simulation of group delay impairments in telecommunication systems", Int. J. Mod. & Sim., Vol. 6, Nr. 1, S. 22-25, 1986.

[75] M. Mause, "Makromodellierung faseroptischer Übertragungssysteme", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Universität Dortmund, 1998.

[76] M. C. Jeruchim, P. Balaban, K. S. Shanmugan., "Simulation of communication systems", Plenum Press, New York, 1992.

[77] S. Deb, A. Sharma, "Nonlinear pulse propagation through optical fibers: An efficient numerical method", Optical Eng., Vol. 32, Nr. 4, S. 695-699, 1993.

[78] A. Sharma, S. Banerjee, "Method for propagation of total fields or beams through optical waveguides", Optics Lett., Vol. 14, Nr. 1, S. 96-98, 1989.

[79] S. Banerjee, A. Sharma, "Propagation characteristics of optical waveguiding structures by direct solution of the Helmholtz equation for total fields", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 6, Nr. 12, S. 1884-1894, 1989.

[80] A. Sharma, A. Taneja, "Unconditionally stable procedure to propagate beams through optical waveguides using the collocation method", Optics Lett., Vol. 16, Nr. 15, S. 1162-1164, 1991.

[81] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[82] M. Plura, T. Balslink, J. Kissing, D. Schulz, E. Voges, "Analysis of the collocation method for simulating the propagation of optical pulse sequences", Int. J. Electron. Commun. (AEÜ), Vol. 56, Nr. 5, S. 1-7, 2002.

[83] T. Kremp, W. Freude, A. Sharma, "Collocation method for nonlinear optical pulse propagation", Workshop W1: "Modelling and Design of Optical Networks and Systems", 26th European Conference on Optical Communication, ECOC 2000, München, 2000.

[84] A. H. Stroud, D. Secrest, "Gaussian quadrature formulas", Prentice-Hall, Inc., London, 1966.

[85] G. Bosco, A. Carena, V. Curri, R. Gaudino, P. Poggiolini, S. Benedetto, "Suppression of spurious tones induced by the Split-Step method in fiber systems simulation", IEEE Phot. Techn. Lett., Vol. 12, Nr. 5, S. 489-491, 2000.

[86] G. Bosco, A. Carena, V. Curri, R. Gaudino, P. Poggiolini, "Suppression of spurious tones in fiber system simulations based on the Split-Step method", LEOS '99, San Francisco, Vol. 2, WH4, S. 455-456, 1999.

[87] M. Gunkel, "Simulation von Vierwellenmischung (FWM): Konzepte zur Schrittweitensteuerung", ITG-Workshop "Modulationsformate und spektrale Effizienz hochbitratiger Übertragungssysteme", T-Nova, Darmstadt, 2001.

[88] A. Zell, "Simulation neuronaler Netze", Addison-Wesley, Bonn, 1996.

[89] C. Monterola, C. Saloma, "Solving the nonlinear Schrödinger equation with an unsupervised neural network", Opt. Express, Vol. 9, S. 72-84, 2001.

[90] C. Monterola, C. Saloma, "Solving the nonlinear Schrödinger equation with an unsupervised neural network: estimation of error in solution", Opt. Communication, Vol. 222, S. 331-339, 2003.

[91] D. E. Rumelhart, J. L. McClelland, "Parallel distributed processessingExplorations in the microstructure of cognitions, Volume 1: Foundations", The MIT Press, 1986.

[92] H. Demuth, M. Beale, "Neural network toolbox user's guide", The MathWorks Inc., 2001.

[93] MathWorks, "MATLAB", www.mathworks.com.

[94] M. F. Moller, "A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning", Neural Networks, Vol. 6, S. 525-533, 1993.

[95] Universität Dortmund, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, "PHOTOSS - The Photonic System Simulator", www.photoss.de.

[96] Virtual Photonics, "VPItransmissionmaker WDM", www.virtualphotonics.com.

[97] ARTIS, "OptSim - The Electrical and Optical Transmission System Design & Simulation Environment", www.artis-software.com.

[98] RSoft, Inc. Research Software, "LinkSIM - Simulation and Analysis Package for Optical Communication Links", www.rsoftinc.com.

[99] Optiwave, "OptiSystem - Optical Communication System Design Software", www.optiwave.com.

[100] IPSIS, "COMSIS", www.ipsis.com.

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Englisch	Deutsch
AWG	Arrayed Waveguide Grating	Fasergitter
BER	Bit Error Rate	Bitfehlerrate
CW	Continuous Wave	Konstantes Signal
d	Duty Cycle	Tastverhältnis
DCF	Dispersion Compensating Fiber	Dispersionskompensierende Faser
DEMUX	Demultiplexer	Demultiplexer
DGD	Differential Group Delay	Differentielle Gruppenlaufzeitverzögerung
DSF	Dispersion Shifted Fiber	Dispersionsverschobene Faser
DWDM	Dense Wavelength Division Multiplex	Dichtes Wellenlängenmultiplex
EDFA	Erbium Doped Fiber Amplifier	Erbium dotierter Faserverstärker
EO	Eye Opening	Augenöffnung
EOP	Eye Opening Penalty	Verschlechterung der Augenöffnung
FD	Finite Differences	Finite-Differenzen)
FWHM	Full Width at Half Maximum	Halbwertsbreite
FWM	Four Wave Mixing	Vierwellenmischung
GVD	Group Velocity Dispersion	Gruppengeschwindigkeitsdispersion
IIR	Infinite Impulse Response	Unendliche Impulsantwort
MUX	Multiplexer	Multiplexer
MZM	Mach-Zehnder-Modulator	Mach-Zehnder-Modulator
NLSG	Nonlinear Schrödinger Equation	Nichtlineare Schrödingergleichung
NZDSF	Non Zero Dispersion Shifted Fiber	Nicht-Null-dispersionsverschobene Faser
OSNR	Optical Signal to Noise Ratio	Optisches Signal-zu-Rauschleistungs-Verhältnis
PMD	Polarisation Mode Dispersion	Polarisationsmodendispersion
PRBS	Pseudo Random Bit Sequence	Pseudo Zufallszahlen-Sequenz
RAE	Relative Average Error	Relative Durchschnittsfehler
RPP	Relative Power Penalty	Relative Leistungsabweichung
RX	Receiver	Empfänger
SBS	Stimulated Brillouin Scattering	Stimulierte Brillouin-Streuung
SPM	Self Phase Modulation	Selbstphasenmodulation
SRS	Stimulated Raman Scattering	Stimulierte Raman-Streuung
SSMF	Standard Single Mode Fiber	Standard-Einmoden-Faser
SST	Self-Steepening Effect	Selbstversteilerung
TDM	Time Division Multiplex	Zeitmultiplex
TMM	Transfer Matrix Method	Transfermatrixmethode
TX	Transmitter	Sender
WDM	Wavelength Division Multiplex	Wellenlängenmultiplex
XPM	Cross Phase Modulation	Kreuzphasenmodulation

Wissenschaftlicher Werdegang

Markus Plura wurde am 28. November 1974 in Dortmund geboren. Nach Erlangung der allgemeinen Hochschulreife 1994 begann er das Studium der Elektrotechnik an der Universität Dortmund.

Im Studienjahr 1996/97 nahm er im Rahmen des ERASMUS-Programms an einem Studentenaustausch mit der City University in London teil. Durch die Belegung aller erforderlichen Master-Kurse konnte er das Austauschjahr mit dem Abschluss Master of Science in Information Engineering (MSc.) mit Auszeichnung beenden. In der dort verfassten Thesis "Accurate Characterisation of Bragg Gratings" wurden Bragg-Fasergitter unter Anwendung von FEM Simulatoren und der Transfer-Matrix-Methode charakterisiert.

Mit der Arbeit "Optimierung des Dispersionsmanagements bei Einmodenfaserstrecken unter Berücksichtigung der Selbstphasenmodulation" erstellt bei der Siemens AG in München in Kooperation mit dem Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Universität Dortmund schloss er 1999 das Studium der Elektrotechnik mit dem Diplom ab.

Während seiner Studienzeit war er Mitglied im Siemens Student Program (SSP).

In der Zeit von 1999 bis 2003 arbeitete Herr Plura als wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Universität Dortmund im Bereich der Modellierung und Simulation optischer Nachrichtensysteme. Hier untersuchte er insbesondere schnelle Simulationsmethoden zur Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung im Rahmen eines DFG-Projektes.

Seit 2003 ist er bei der VCS AG in Bochum im Bereich Spacecom tätig. Hier beschäftigt er sich in erster Linie mit Bodensegmentlösungen für die Weltraumkommunikation im Umfeld der internationalen Raumstation ISS.