

Bianca BEUTLER, Braunschweig

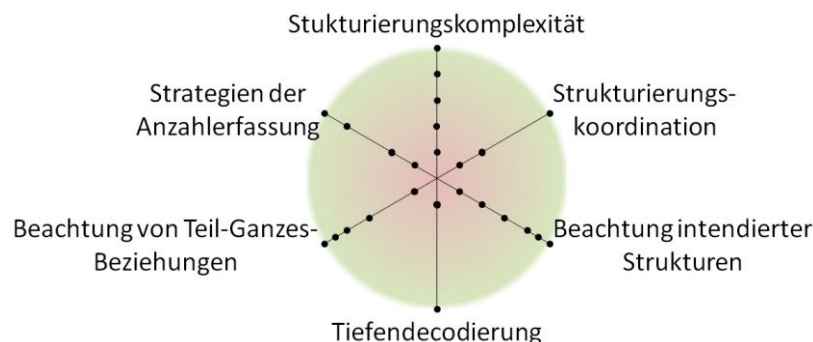
## Konkrete Würfelbauwerke vs. Schrägbilder von Würfelbauwerken – Schwierigkeiten beim Anzahlerfassen und Strukturieren

Wenn Vorschulkinder Anzahlen von Würfeln in konkreten Würfelbauwerken oder in Schrägbildern von Würfelbauwerken korrekt ermitteln wollen, müssen sie nicht nur über arithmetische Fähigkeiten verfügen, sondern auch die dreidimensionale Beschaffenheit eines Würfels und die Struktur der Würfelkonfiguration erfassen. Eine differenzierte Analyse kindlicher Strategien gibt Aufschluss über Zusammenhänge zwischen einzelnen Fähigkeitsbereichen und zeigt spezielle Schwierigkeiten im Umgang mit konkreten Bauwerken vs. Schrägbildern.

### 1. Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung

In Würfelbauwerken und anderen drei- oder auch zweidimensionalen Konfigurationen stehen deren Elemente und Elementgruppen in numerisch und geometrisch beschreibbaren Beziehungen zueinander. Diese ergeben die Struktur der Konfiguration und können vom Betrachter je nach seiner Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung unterschiedlich ausgedeutet und genutzt werden (vgl. z.B. Lüken 2012, Mulligan & Mitchelmore 2009, van Nes 2009). Die individuell hineingedeuteten Strukturen können dabei auch von den intendierten Strukturen abweichen (vgl. Söbbeke 2005).

Für eine differenzierte Beschreibung individueller Strukturierungsleistungen wurde auf Basis theoretischer und empirischer Erkenntnisse ein 6-dimensionales Netzdiagramm erstellt. Hiermit können Strategien hinsichtlich räumlicher Strukturierung und arithmetischer Zahlbegriffsentwicklung kategorisiert und Zusammenhänge in Strategietypen erfasst werden.

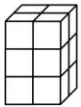
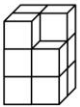

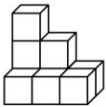


Im Diagramm sind die für die Strukturierung von Würfelkonfigurationen wichtigen Dimensionen der Strukturierungskomplexität (1. Beachtung nur einer Schicht, 2. Orientierung an Flächen, 3. Erfassen von Einzelelementen, 4. lokale Gliederung in Substrukturen, 5. globale Gliederung in Substruktu-

ren), der Strukturierungscoordination (1. Erfassung mit Auslassungen, 2. mit Überschneidungen, 3. vollständige, einmalige Erfassung) und der Tiefendecodierung (1. ohne Tiefendecodierung, 2. mit Tiefendecodierung) abgebildet (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2001). Eine weitere Dimension berücksichtigt, inwiefern die hineingedeuteten den intendierten Strukturen entsprechen (1. Umgang mit aus der Struktur herausgelösten Elementen, 2. willkürliches Vorgehen, 3. teilweise strukturgeleitet, 4. Beachtung von Spielwürfelbildern, 5. reihen-/spaltenweise, 6. schichtenweise). Die beiden arithmetischen Dimensionen zeigen Strategien der Anzahlbestimmung (1. keine, 2. Zählen in Einerschritten, 3. elaborierte Zählstrategien, 4. Rechnen) und die Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen (1. keine, 2. unvollständig/vollständig ordinal, 3. unvollständig kardinal, 4. vollständig kardinal, 5. Anwenden von Zahlentripeln) (vgl. Beutler 2012). Die Kategorien sind den Achsen von innen nach außen zugeordnet. Die Skalenwerte der Kategorien wurden hinsichtlich inhaltlicher Bewertungen angepasst.

## 2. Konzeption der Studie

In 2011/2012 wurden 22 Vorschüler zu Beginn und am Ende ihres letzten Halbjahres vor Schuleintritt mittels TEDI-MATH und halbstandardisierter Einzelinterviews (ca. 75min/Kind) getestet. Das eigens entwickelte Aufgabenkompendium berücksichtigt diverse Anforderungen der räumlichen Strukturierung unter Verwendung von konkreten Würfelbauwerken sowie zweidimensionalen Darstellungen von Würfelbauwerken, Punktfeldern und Quadratgittern (vgl. Beutler 2011, 2012). Eine Aufgabensequenz fokussiert u.a. die Bestimmung von Würfelanzahlen konkreter oder in Schrägbildern dargestellter Bauwerke. Die Kinder bestimmen jeweils die Anzahl, bauen das Bauwerk nach und bestimmen erneut die Anzahl. Zum Nachbau der Schrägbilder werden die Kinder nur im Nachtest angehalten.

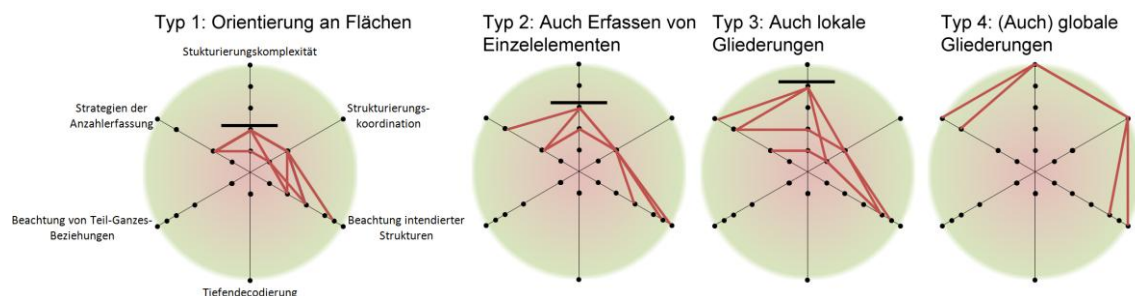
Nr.	Konkrete Würfel		Schrägbilder	
	A5	A6	A7	A8
Vorgebene und herzustellende Struktur				

Eine qualitative Auswertung der videografierten und transkribierten Interviews gibt Aufschluss über Strukturierungsfähigkeiten und Zusammenhänge zur Zahlbegriffsentwicklung der Kinder und dient gleichzeitig der Evaluation eines zwischen den Testzeitpunkten platzierten mathematischen Frühförderprogramms. Die Analyse stützt sich auf Lösungskorrektheiten, die Strategieermittlung mit Hilfe der oben beschriebenen Netzdiagramme und jeweils aufgabenspezifische Merkmale.

### 3. Konkrete Würfelbauwerke vs. Schrägbilder von Würfelbauwerken

Bisherige Studien ergaben, dass Kinder konkrete Situationen leichter perceptiv erfassen als ikonische Darstellungen und sie Schrägbilder von Würfelbauwerken erst mit Vorwissen über konkrete Würfelbauwerke und Konventionen der Schrägbilddarstellungen verstehen (vgl. Cohen 1979, Blanck & Eichler 1999). Zudem seien Vorschulkinder den Umgang mit konkretem Material mehr gewohnt und nutzen in Aufgaben mit Schrägbilddarstellungen primitivere Strategien der Anzahlerfassung (vgl. Ben-Haim et al. 1985, Söylemezoğlu & Olkun 2003). Jedoch gelingt in der eigenen Studie eine erste Bestimmung der Würfelanzahlen der Schrägbilder ca. doppelt so vielen Kindern wie bei konkreten Bauwerken. Auch bilden die Kinder, die bei konkreten Bauwerken Anzahlen korrekt ermitteln, eine echte Teilmenge zu den Kindern, die in Schrägbildern Anzahlen korrekt ermitteln. Ursachen zeigen sich in der qualitativen Analyse der kindlichen Strukturierungen:

Alle Strukturierungsprofile der Kinder mit inkorrekten Lösungen lassen sich hinsichtlich der Dimension der Strukturierungskomplexität sortieren. Z.B. für A5 im Vortest ergeben sich hierdurch vier Typen. Die Abbildung zeigt alle übereinandergelegten zugehörigen Profile, ohne Auswertung der Teil-Ganzes-Beziehungen; die Tiefendecodierung spielt in A5 keine Rolle.



Diese Typen der Strukturierung zur Anzahlbestimmung konkreter Würfel offenbaren, dass bei höherer Strukturierungskomplexität die Beachtung intendierter Strukturen tendenziell höher ist und zunehmend höhere Strategien der Anzahlerfassung genutzt werden. Fehlerhafte Anzahlbestimmungen resultieren insbesondere aus dem Zählen von Flächen anstelle von Würfeln (Typ 1). Wenn Kinder auch dreidimensionale Würfel erfassen, führt eine mangelhafte Koordination der Abzählhandlungen zum Auslassen oder mehrfachen Erfassen einzelner Würfel (Typ 2-3). Diese Kinder verlieren die Orientierung durch ihr Drehen des Bauwerks und sie zählen mit inkorrekten Eins-zu-eins-Zuordnungen wegen gleichzeitigen Tippens mit zwei Fingern auf gegenüberliegende Seiten oder wegen Nichteinhaltens von Zählpausen beim Umgreifen von einer auf die andere Seite. Ungünstige Reihenfolgen erschweren zusätzlich die Koordination. Bei korrekter globaler Gliederung führt ein Rechenfehler zur falschen Anzahl (Typ 4).

Fehlerhafte Anzahlbestimmungen bei den Schrägbildern werden durch eine fehlende Tiefendecodierung, d.h. ein Nichterfassen verborgener Würfel, und gelegentlich durch Koordinationsprobleme wegen ungünstiger Reihenfolgen oder zu schnellem Zählen verursacht (Typ 2-3). Niemals erfolgt eine Orientierung an Flächen. Entgegen älterer Studien kann also jedes getestete Kind Schrägbilder als Darstellung dreidimensionaler Bauwerke deuten.

Die Schwierigkeiten bei konkreten Bauwerken mögen einerseits an deren Kompaktheit liegen, die eine Orientierung an Flächen begünstigt. Andererseits birgt die Möglichkeit alle Seiten zu betrachten und anzufassen auch Risiken. Neben Übungen zur globalen Gliederung sollten daher auch zielführende und hinderliche Materialhandlungen bewusst gemacht werden.

## Literatur

- Ben-Haim, D., Lappan, G. & Houang, R. T. (1985): Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. In: *Educational Studies in Mathematics* 16/4, 389-409.
- Beutler, B. (2012): „Das ist das gleiche, nur anders.“ – Vorschulkinder erkennen geometrische und arithmetische Beziehungen beim Umstrukturieren von Flächen und Bauwerken. In: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Münster: WTM, 125-128.
- Beutler, B. (2011): Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM Verlag, 107-110.
- Blanck, S. & Eichler, K.-P. (1999): Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie – Chance für einen kindorientierten Unterricht. In: *Grundschulunterricht*, 46/6.
- Cohen, H. G. (1979): What research says: Developing ability to organize space. In: *Science and Children*, 17/3, 33-35.
- Lüken, M. (2012): *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.
- Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): *Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen*. Frankfurt: Lang.
- Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009): Awareness of pattern and structure in early mathematical development. In: *Mathematics Education Research Journal*, 21, 33-49.
- Söylemezoğlu, T. & Olkun, S. (2003): Establishing conceptual bases for the measurement of volume. In: *International Online Journal of Science and Mathematics Education*. Siehe: <http://trove.nla.gov.au/work/27523576>. Zuletzt eingesehen: 15.03.2013.
- Söbbeke, E. (2005): *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.
- Van Nes, F. (2009): *Young children's spatial structuring ability and emerging number sense*. Utrecht: All Print.