

***Situiertes Normenverständnis
in Bezug auf beispielgebunden ikonische Beweise***

*Entwicklungen im Rahmen eines Aushandlungsprozesses im Eingangssemester der
nicht-gymnasialen Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund*

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Pädagogik
(Dr. paed.)

Der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Lara Gayer

Im Dezember 2025

Dissertation

Situiertes Normenverständnis in Bezug auf beispielgebunden ikonische Beweise

- Entwicklungen im Rahmen eines Aushandlungsprozesses im Eingangssemester der nicht-gymnasialen Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. *Christoph Selter*

Zweitgutachter: Prof. Dr. *Bettina Rösken-Winter*

Tag der mündlichen Prüfung: *08.05.2026*

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Situiertes Normenverständnis.....	5
1.1	Normen.....	5
1.1.1	Präskriptive und deskriptive Perspektive	5
1.1.2	Definition.....	8
1.2	Verständnis	10
1.2.1	Intra-, inter- und extrapersonelle Perspektive	10
1.2.2	Definition.....	12
1.3	Dimensionen der Situietheit	15
1.4	Normenverständnis.....	16
1.5	Aushandlungsprozesse	20
2	Beweise	25
2.1	Beweise als soziale Konstrukte	25
2.2	Normen für Beweise.....	28
2.3	Normenverständnis in unterschiedlichen Beweiskonzeptionen.....	32
2.3.1	Funktionen von Beweisen.....	32
2.3.2	Formal-deduktives Beweisverständnis	35
2.3.3	Präformales Beweisverständnis	37
2.3.4	Operatives Beweisverständnis	39
2.3.5	Generisches Beweisverständnis	43
2.4	Beispielgebunden ikonische Beweise.....	48
2.4.1	Bedeutung beispielgebunden ikonischer Beweise für den Anfangsunterricht	50
2.4.2	Schwierigkeiten mit beispielgebunden ikonischen Darstellungen..	53
2.4.3	Die sprachliche Darstellungsebene in beispielgebunden ikonischen Beweisen.....	55
2.4.4	Kohärenzebenen in beispielgebunden ikonischen Beweisen	56
3	Empirische Studien zum situierten Beweisverständnis	59
3.1	Fokus des Forschungsinteresses	60
3.2	Konstruktion der Beweisversuche	62
3.3	Erhebungsformate	65
3.4	Normenverständnis auf Forschendenseite	67
3.5	Normenverständnis auf Lernendenseite	77

4	Forschungsmethoden.....	83
4.1	Forschungsfragen	83
4.2	Mixed Methods.....	85
4.3	Qualitative Auswertungsmethoden.....	89
4.3.1	Qualitative Forschungsfragen.....	89
4.3.2	Dokumentarische Methode und qualitative Inhaltsanalyse	91
4.3.3	Qualitative Auswertung auf Lehrenden- und Lernendenseite	95
4.3.4	Gütekriterien qualitativer Forschung.....	99
4.4	Quantitative Auswertungsmethoden.....	102
4.4.1	Quantitative Forschungsfragen.....	102
4.4.2	Quantifizierung des Datenmaterials	105
4.4.3	Logistische Regression.....	107
4.4.4	Modellvoraussetzungen	110
4.4.5	Inferenzstatistik und Signifikanzniveaus	112
4.4.6	Chancen und Chancenverhältnisse	115
4.4.7	Quantitative Auswertung auf Lernendenseite.....	117
4.4.8	Gütekriterien quantitativer Forschung.....	120
5	Forschungsprozess.....	123
5.1	Entwicklung des Kategoriensystems	124
5.1.1	Deduktive Kategorienbildung	124
5.1.2	Induktive Kategorienbildung	125
5.2	Entwicklung der Erhebungsinstrumente.....	138
5.2.1	Normbrüche	140
5.2.2	Konstruktionsprinzipien.....	140
5.2.3	Erhebungsformate.....	142
5.3	Entwicklung der Intervention	143
5.3.1	Situierung der Intervention	143
5.3.2	Konzeption der Vorlesung.....	144
5.3.3	Konzeption der Übung.....	149
5.3.4	Beweisversuche	152
6	Qualitative Analyse	157
6.1	Kohärenz	159
6.1.1	Interaktionsgruppe	160
6.1.2	Inselgruppe	165
6.1.3	Präinteraktionsgruppe	169
6.1.4	Vergleich der Gruppen	174
6.1.5	Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung	179

6.2	Vollständigkeit	180
6.2.1	Interaktionsgruppe	181
6.2.2	Inselgruppe	188
6.2.3	Präinteraktionsgruppe	192
6.2.4	Vergleich der Gruppen	196
6.2.5	Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung	198
6.3	Logische Struktur	199
6.3.1	Interaktionsgruppe	200
6.3.2	Inselgruppe	203
6.3.3	Präinteraktionsgruppe	204
6.3.4	Vergleich der Gruppen	205
6.3.5	Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung	206
6.4	Allgemeingültigkeit	206
6.4.1	Interne Kohärenzebene	208
6.4.2	Kohärenz der Beispiele	226
6.4.3	Externe Kohärenzebene	235
6.4.4	Kohärenz der Darstellungsebenen	256
6.4.5	Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung	262
7	Quantitative Analyse	263
7.1	Kohärenz	265
7.1.1	Analyse des intendierten Normenverständnisses	265
7.1.2	Analyse des beobachteten Normenverständnisses	268
7.1.3	Untersuchung der Hypothesen	273
7.2	Vollständigkeit	278
7.2.1	Analyse des intendierten Normenverständnisses	278
7.2.2	Analyse des beobachteten Normenverständnisses	280
7.2.3	Untersuchung der Hypothesen	286
7.3	Logische Struktur	289
7.3.1	Analyse des intendierten Normenverständnisses	289
7.3.2	Analyse des beobachteten Normenverständnisses	289
7.3.3	Untersuchung der Hypothesen	290
7.4	Allgemeingültigkeit	291
7.4.1	Analyse des intendierten Normenverständnisses	291
7.4.2	Analyse des beobachteten Normenverständnisses	293
7.4.3	Untersuchung der Hypothesen	297
8	Diskussion	303
8.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	303
8.1.1	Kohärenz	304
8.1.2	Vollständigkeit	307

8.1.3 Logische Struktur.....	309
8.1.4 Allgemeingültigkeit	312
8.2 Didaktische Implikationen.....	315
8.3 Forschungsrelevante Implikationen.....	320
8.4 Limitationen und Ausblick	322
Literaturverzeichnis.....	325
Abbildungsverzeichnis.....	337
Tabellenverzeichnis.....	343
Erhebungsdokumente	347
Intervention: Vorbereitungsaufgaben	347
Intervention: Präsenzaufgaben	350
Eingangserhebung: Deckblatt.....	351
Ausgangserhebung	352

0 Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist es, Lehramtsstudierenden im Eingangssemester den Zugang zum eigenständigen Beweisen zu erleichtern. Laut Hanna ist das Beweisen ein mathematischer Inhaltsbereich, der zentral ist für das Verständnis davon, was Mathematik ist:

„Students cannot be said to have learned math, or even about math, unless they have learned what a proof is.“ (Hanna, 2000, S. 24)

Beweisen wird daher von Hanna als notwendiger Bestandteil der Schulausbildung angesehen. Dies findet sich auch in den NCTM-Standards von 2000 wieder:

„Reasoning and proof should be a consistent part of student's mathematical experiences in pre-kindergarten through grade 12.“ (Ferrini-Mundy, 2000, S. 56)

Ein Verständnis für das Beweisen, wie hier vorgeschlagen, so früh wie möglich in der Schullaufbahn vorzubereiten, baut auf der Idee des Spiralprinzips (vgl. Reiss & Hammer, 2021) auf. Danach werden komplexe Inhalte, wie hier das Beweisen, in niedrigen Klassenstufen angebahnt, um in höheren Klassenstufen darauf aufbauen zu können. Stylianides und Stylianides stellen in diesem Zusammenhang fest, dass eine Einführung des Beweisens in höheren Klassenstufen, ohne vorherige Anbahnung, in der Regel zu großen Schwierigkeiten beim Erwerb dieses Konzeptes führt:

„[...] when they [the students, Anm. d. A.] do experience proof, it seems alien rather than a natural extension of things they have already learned.“ (Stylianides & Stylianides, 2009, S. 238)

Dass das Beweisen im Allgemeinen ein Inhaltsbereich ist, der vielen Schülern und Schülerinnen sowie Studierenden Schwierigkeiten bereitet, wurde bereits in zahlreichen Studien untersucht (vgl. u. a. Healy & Hoyles, 2000; Selden, 2012; Kempen & Biehler, 2019). Im Rahmen einer ersten explorativen Vorstudie zu dieser Arbeit wurde zudem festgestellt, dass vielen Studierenden im Eingangssemester nicht klar war, welche Erwartungen an die von ihnen produzierten Beweise gestellt wurden. Auch auf Lehrendenseite zeigte sich in Diskussionen Uneinigkeit in Bezug darauf, wann ein Beweisversuch einer/s Studierenden als akzeptabel anerkannt werden konnte. Bereits 1997 stellte Hersh dazu im schulischen Kontext fest:

„We accuse students of the high crime of not even knowing what a proof is. Yet we, the math teachers, don't know it either.“ (Hersh, 1997, S. 153)

Laut Hersh ist sowohl auf Lernendenseite als auch auf Lehrendenseite nicht eindeutig geklärt, was einen Beweis zu einem Beweis macht. Bis heute scheint sich an dieser Situation, weder auf Schul- noch auf Hochschulebene, wenig geändert zu haben. Dem zugrunde liegt keine grundsätzliche Unfähigkeit, sondern vielmehr der Umstand, dass Beweise soziale Konstrukte sind (vgl. Abschnitt 2.1), deren *Validität*¹ im Allgemeinen nicht objektiv festgestellt werden kann, sondern sich nur im Rahmen von sozialen Aushandlungsprozessen innerhalb der Fachgemeinschaft auf diese geeinigt werden kann:

„Furthermore, the process of accepting an argument as proof relies heavily on the social mechanisms of the mathematical community.“ (Stylianides, 2007a, S. 3)

In logischer Konsequenz bedeutet dies, dass es keine objektiven, allgemein akzeptierten Akzeptanzkriterien für die Validität von Beweisen gibt (vgl. Hanna & Jahnke, 1996, S. 878), sondern dass diese von der jeweiligen mathematischen Gemeinschaft abhängen, in welcher sich mit Beweisen auseinandergesetzt wird. Gleichzeitig zeigen die oben beschriebenen Beobachtungen die Wichtigkeit, innerhalb einer solchen Gemeinschaft, in diesem Fall der *Lehr-Lern-Gemeinschaft im Eingangssemester der nicht-gymnasialen Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund*, Einigkeit hinsichtlich der Akzeptanzkriterien zu schaffen. Nur auf dieser Grundlage kann ein einheitliches Verständnis dessen vermittelt werden, was von Studierenden bei deren eigenständigen Beweiskonstruktion erwartet wird.

Im Rahmen dieser Arbeit soll daher eine Intervention im Sinne eines **Aushandlungsprozesses** zwischen Lehrenden- und Lernendenseite gestaltet werden. Diese hat zum Ziel ein möglichst hohes Maß an Interpersonalität zu erreichen im **Verständnis** der **Normen**, deren Erfüllung notwendig ist für die Akzeptanz eines Beweises in dieser Gemeinschaft. Da dadurch, wie eingangs beschrieben, der Zugang zum eigenen Beweisen auf Lernendenseite erleichtert werden soll, soll das Verständnis für diese Normen in der Auseinandersetzung mit konkreten Beweisversuchen² erfolgen und ist somit in diesem Sinne **situier**t (vgl. dazu Abschnitt 1.3).

1 Unter der „Validität“ eines Beweis(versuch)s wird dabei verstanden, inwiefern dieser tatsächlich die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage nachweist (vgl. dazu Selden & Selden, 2003, S. 1).

2 Es geht im Rahmen dieser Arbeit somit nicht um eine allgemeine Erörterung dessen, wie diese Normen verstanden werden können, sondern konkret darum, welches Verständnis der Normen sich zeigt in der Auseinandersetzung mit Beweisversuchen, die noch keinen validen Beweis darstellen und damit bestimmte dieser Normen verletzen.

In Kapitel 1 und 2 werden dafür zunächst die im Rahmen dieser Arbeit zentralen Begriffe geklärt. In *Kapitel 1* werden die Begriffe der Norm (Abschnitt 1.1), des Verständnisses (Abschnitt 1.2), des Normenverständnisses (1.4) und der Situiertheit (Abschnitt 1.3) in ihrer Verwendung im Rahmen dieser Arbeit definiert. Dabei wird insbesondere die Verortung des Verständnisses auf intra- und interpersoneller Ebene (Abschnitt 1.2.1) erläutert und in diesem Zusammenhang der Begriff der Interpersonalität geklärt. Weiterhin wird die Konzeption des Aushandlungsprozesses zur Etablierung von Interpersonalität im situierten Normenverständnis dargelegt (Abschnitt 1.5).

In *Kapitel 2* werden der Begriff des Beweises (Abschnitt 2.1) und die diesem zugrunde liegenden Normen beleuchtet (Abschnitt 2.2). Es wird das Verständnis dieser Normen analysiert, wie es sich in unterschiedlichen Konzeptionen dessen zeigt, wie Beweise im Lehrkontext aufgefasst werden können (Abschnitt 2.3). Vor diesem Hintergrund wird der Begriff des **beispielgebunden ikonischen Beweises** geklärt und die Fokussierung auf diesen Beweistyp im Rahmen dieser Arbeit begründet (Abschnitt 2.4).

In *Kapitel 3* werden die bisherigen empirischen Ergebnisse zum situierten Normenverständnis (Abschnitt 3.5) dargestellt und weiterhin die entsprechenden empirischen Studien vor dem Hintergrund der Entwicklung der Forschungsinstrumente im Rahmen dieser Arbeit vergleichend analysiert. Diese werden dabei verglichen hinsichtlich des Fokus‘ ihres Forschungsinteresses (Abschnitt 3.1), der Konstruktion der Beweisversuche (Abschnitt 3.2), der Erhebungsformate (Abschnitt 3.3) und des Normenverständnisses, das diesen Studien auf Seiten der Forschenden implizit zugrunde liegt (Abschnitt 3.4).

In *Kapitel 4* werden die Forschungsmethoden dieser Arbeit dargelegt. Dafür werden zunächst die Forschungslücken, die sich aus der Analyse der Studien in Kapitel 3 ergebenden, expliziert. Vor diesem Hintergrund werden die dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsfragen herausgearbeitet (Abschnitt 4.1). Die Wahl des Mixed-Methods-Ansatzes (Abschnitt 4.2) als Forschungsmethodologie zur Behandlung der Forschungsfragen wird begründet und die qualitativen (Abschnitt 4.3) und quantitativen (Abschnitt 4.4) Auswertungsmethoden werden in ihrer konkreten Umsetzung in dieser Arbeit erläutert. Die Forschungsfragen werden zu diesem Zweck ausdifferenziert in Unterfragen entsprechend des jeweiligen qualitativen beziehungsweise quantitativen Forschungsfokus‘.

In *Kapitel 5* wird der Forschungsprozess beschrieben. Dies umfasst die Entwicklung des Kategoriensystems, in welchem Unterasspekte im Verständnis der Normen und mögliche Ebenen der Betrachtung von konkreten Beweisversuchen ausdifferenziert werden (Abschnitt 5.1). Auf dieser Grundlage werden die Ent-

wicklung der Intervention (Abschnitt 5.3) und der diese Intervention begleitenden Erhebungsinstrumente (Abschnitt 5.2) erläutert.

In *Kapitel 6* wird die qualitative Analyse der Diskussionen dreier Kleingruppen im Rahmen der Intervention dargestellt, in *Kapitel 7* die darauf aufbauende quantitative Analyse. Die Analysen sind dabei entlang der Normen gegliedert, deren situiertes Verständnis untersucht werden soll.

In *Kapitel 8* werden die qualitativen und quantitativen Ergebnisse für jede Norm zusammengefasst (Abschnitt 8.1) und daraus didaktische Implikationen für die weitere Entwicklung der Intervention abgeleitet (Abschnitt 8.2). Abschließend werden die für die künftige Forschung zum Thema des situierten Normen- und Beweisverständnisses relevanten Aspekte zusammengefasst, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden (Abschnitt 8.3) und die Limitationen dieser Arbeit sowie sich daraus ergebende künftige Forschungsdesiderate dargestellt (Abschnitt 8.4).

Theorieteil

1 Situiertes Normenverständnis

Ziel des ersten Kapitels ist es, den Begriff des situierten Normenverständnisses, der dieser Arbeit zugrunde liegt, zu klären und die Konzeption des Aushandlungsprozesses im Rahmen dieser Arbeit darzulegen.

Dafür werden die Begriffe der Norm (1.1.2), des Verständnisses (1.2.2) und der Situietheit (1.3) erläutert und unter präskriptiver und deskriptiver (1.1.1) sowie intra-, inter- und extrapersoneller Perspektive (1.2.1) beleuchtet. Insbesondere wird dabei die Wahl des *Symbolischen Interaktionismus* als lerntheoretische Grundlage für diese Arbeit begründet (1.2.1). Auf dieser Grundlage wird die im Rahmen dieser Arbeit zentrale Unterscheidung zwischen Normen und Normenverständnis hergeleitet (1.4). In Abschnitt 1.5 wird schließlich die Gestaltung des Aushandlungsprozesses zur Etablierung von Interpersonalität im situierten Normenverständnis dargestellt.

1.1 Normen

1.1.1 Präskriptive und deskriptive Perspektive

In der soziologischen Theoriebildung des vergangenen Jahrhunderts lassen sich zwei Paradigmen unterscheiden, die sich in ihrer Sicht auf das menschliche Handeln und dessen Beforschung grundsätzlich unterscheiden: das *normative* und das *interpretative Paradigma*³. Diese sind, wie sich im kommenden Unterkapitel (vgl. Abschnitt 1.1.2) zeigen wird, zentral für die Perspektive auf Normen. In beiden Paradigmen ist der Handlungsbegriff zentral:

„Das soziologische Interesse richtet sich primär auf die elementaren Regelmäßigkeiten und Wandlungen in ausgewählten Verhaltensmerkmalen, die für die an ihnen beteiligten Individuen bedeutungs- und sinnvoll sind. In diesem Sinne könnte "Handeln" definiert werden als das für den Handelnden bedeutungs- und sinnvolle "Verhalten"“ (Wilson, 1980, S. 55)

Handeln ist demnach ein Verhalten, das durch Bedeutung und Sinn konstituiert ist. Dies ist auch der Aspekt von Interaktion, der in dieser Arbeit im Zentrum steht, in welcher Bedeutungskonstruktionen von Lernenden und Lehrenden untersucht werden sollen (vgl. Abschnitt 1.2.2).

³ Eine ausführliche Darstellung dieser Paradigmen findet sich zum Beispiel in Wilson (1980).

Im normativen Paradigma wird davon ausgegangen, „dass eine feste Verbindung besteht zwischen der Situation eines Handelnden und seinem Handeln in dieser Situation.“ (Wilson, 1980, S. 56). Diese Verbindung wird als *Regel* bezeichnet. Dabei werden zwei grundlegende Begriffe unterschieden:

„Eine Disposition kann dann definiert werden als eine Regel, die vom Handelnden internalisiert oder gelernt worden ist, während eine Erwartung definiert werden kann als eine Regel, die in einem sozialen System institutionalisiert worden ist.“ (Wilson, 1980, S. 57)

Eine *Disposition* ist also eine „Neigung des Handelnden, sich in einer bestimmten Situation in einer ganz bestimmten Weise zu verhalten“ (Wilson, 1980, S. 56), eine *Erwartung* dagegen wird extern an die/den Handelnde/n herangetragen und als **präskriptiv**⁴ angesehen: „das Individuum sollte sich in einer gegebenen Situation in einer ganz bestimmten Weise verhalten“ (Wilson, 1980, S. 56). Diese Erwartungen werden im normativen Paradigma als Rollenerwartungen verstanden. Handelnden werden bestimmte extrapersonell⁵ definierte *Rollen* (vgl. z. B. Cicourel, , S. 147 ff.) zugeschrieben und konkrete Handlungen vollziehen sich demnach immer im Rahmen der Erwartungen, die der/m Handelnden in dieser Rolle zugeschrieben werden⁶. Im normativen Paradigma herrscht dabei die Grundannahme des *kognitiven Konsens[es]* (Wilson, 1980, S. 57), wonach Situationen in gleicher Weise von den Handelnden interpretiert werden und somit zu gleicher Regelanwendung führen:

„Wenn soziale Interaktion dauerhaft und beständig sein soll, müssen die verschiedenen Teilnehmer Situationen und Handlungen in gleicher Weise definieren, denn sonst könnten Regeln nicht in der Weise wirksam werden, dass sie über Zeitabläufe hinweg zusammenhängende Interaktion hervorbringen könnten.“ (Wilson, 1980, S. 57)

Interpersonelle⁴ Unterschiede sind in diesem Paradigma schwer zu erklären. Als Grundvoraussetzung wird als gegeben angenommen, „dass die Handelnden ein System kulturell etablierter Symbole und Bedeutungen gemeinsam haben.“ (Wilson, 1980, S. 57).

Im interpretativen Paradigma, das maßgeblich von Blumer (1954) und Turner (1962) geprägt wurde, wird dagegen die Position vertreten, „nach der soziale Interaktion als ein interpretativer Prozess aufzufassen ist“ (Wilson, 1980, S. 54). Unter einem *interpretativen Prozess* versteht Wilson dabei das Folgende:

4 Zur Differenzierung der Begriffe „präskriptiv“ und „deskriptiv“ im Rahmen der Mathematikdidaktik siehe u. a. auch Leuders (2007).

5 Die Begriffe „extrapersonell“, „interpersonell“ und „intrapersonell“ werden in Abschnitt 1.3 erläutert.

6 Wilson spricht in diesem Zusammenhang von sogenannten „Rollenerwartungen“ (Wilson, 1980, S. 55).

„[...] der eine Handelnde nimmt das Handeln des anderen wahr als ein bedeutungs- und sinnvolles Handeln, in dem sich eine Absicht oder eine Haltung, in eine Rolle gefasst, ausdrückt. Auf der Grundlage dieser Wahrnehmung davon, auf was der andere aus ist, entwirft der Handelnde dann Richtung und Ablauf seines eigenen Handelns“ (Wilson, 1980, S. 59)

Handelnde handeln auf der Grundlage ihrer Interpretation der Handlung anderer, die an der Interaktion beteiligt sind. Die eigene Handlung wird somit nicht an extrapersonell vorgegebenen Erwartungen ausgerichtet, sondern an interpersonellen Erwartungen des Gegenübers.

„[...] es geht nicht mehr um den einfachen Prozess der Ausführung einer vorgeschriebenen Rolle, sondern darum, auf der Grundlage der Rolle, die einem von anderen zugeschrieben wird, das eigene Handeln zu entwerfen und zu verwirklichen. [...] das Handeln dieser anderen ihm gegenüber reflektiert Rollen, die er identifizieren muss.“ (Turner, 1962, S. 23)

Die Rolle wird hier nicht, wie im normativen Paradigma, als extrapersonell definiert verstanden, sondern als etwas, was interpersonell in der Interaktion entsteht. Zur eigenen Rolle hat der Handelnde demnach nur durch einen interpretativen Prozess der äußerlich wahrnehmbaren Handlungen der Anderen Zugang. Die mit der Rolle verknüpften Erwartungen an den Einzelnen haben für diesen also einen **deskriptiven**³ Charakter, keinen präskriptiven. Den anderen Handelnden wird ein bedeutungs- und sinnvolles Handeln unterstellt und auf dieser Grundlage werden bestimmte Muster wahrgenommen. Wilson spricht in diesem Zusammenhang von *dokumentarischer Interpretation*, die von den Handelnden in einer Interaktion fortlaufend angewendet wird:

„Dokumentarische Interpretation besteht darin, dass ein Muster identifiziert wird, das einer Reihe von Erscheinungen zugrunde liegt; dabei wird jede einzelne Erscheinung als auf dieses zugrunde liegende Muster bezogen angesehen, als ein Ausdruck, als ein „Dokument“ des zugrunde liegenden Musters. Dieses wiederum wird identifiziert durch seine konkreten individuellen Erscheinungen, so dass die das Muster wiedergebenden Erscheinungen und das Muster selbst einander wechselseitig determinieren in der gleichen Weise, in der das Teil und das Ganze einander wechselseitig [...] determinieren“ (Wilson, 1980, S. 60)

Er versteht dieses *Muster* nicht als eine hypothetische Vorannahme an die Situation, die in dieser versucht wird zu bestätigen, sondern für ihn determinieren sich die wahrgenommenen Erscheinungen und das vermutete zugrunde liegende Muster gegenseitig. Dabei liegt es in der Natur der Sache begründet, dass Handelnde in Bezug auf diese Muster nie zu einem sicheren, abschließenden Wissen kommen können und damit auch nicht auf die diesen zugrunde liegenden Absichten und Erwartungen des Gegenübers, sondern diese ständigen Reinterpretationen unterliegen:

„Folglich sind die wahrgenommenen Absichten und Bedeutungen im Handeln des anderen immer nur vorläufig, und sie unterliegen der ständigen Revision im Lichte nachfolgender Ereignisse im Ablauf der Interaktion.“ (Wilson, 1980, S. 59)

1.1.2 Definition

Dawkins und Weber definieren **Normen** im Rahmen ihrer Untersuchung zu Werten und Normen in Bezug auf mathematische Beweise als **Erwartungen** an die wissenschaftliche Praxis:

„[...] expectations on practice accepted by the scientific community“ (Dawkins & Weber, 2016, S. 126).

Dawkins und Weber verstehen diese Erwartungen dabei nicht im Sinne von individuellen Erwartungen Einzelner, sondern im Sinne von der Gemeinschaft extern vorgegebenen Erwartungen, die einen Handlungsrahmen für einzelne Individuen vorgeben. Es wird hier also eine extrapersonelle Perspektive im Sinne des normativen Paradigmas eingenommen. Diese werden zwar nicht als explizit formulierte Regeln verstanden, es wird aber eine klare Asymmetrie deutlich:

„This consistent act of positioning one’s actions in relation to a perceived expectation is what marks the influence of the values and norms on individual behavior, rather than mere obedience to a rule.“ (Dawkins & Weber, 2016, S. 126 f.)

Demnach existieren bestimmte (implizite) Erwartungen, die extrapersonell vorgegeben sind, von den Individuen in der Gemeinschaft wahrgenommen („perceived expectation“) werden können und an denen die eigenen Handlungen ausgerichtet werden sollten. Die Normen haben in diesem Verständnis also durchaus einen **präskriptiven**, wenn auch nicht explizit formulierten, Charakter. Dies wird auch deutlich an der Art der Normen, die Mathematiker/innen laut Dawkins und Weber an mathematische Beweise stellen, wie dass Beweise auf festgesetzten Definitionen beruhen müssen, deduktiv sein sollen und jede Widerlegung ausschließen. Für das Nichterfüllen dieser Erwartungen der Gemeinschaft können die Mitglieder zur Rechenschaft gezogen werden:

„[...] a community member breaching the norm can be held to account for this violation“ (Dawkins & Weber, 2016, S. 126; siehe dazu auch Herbst et al., 2011)

Methodologisch wurde dies bereits durch Sfard formuliert:

„A norm becomes explicit and most visible when violated. Violation evokes interlocutors’ spontaneous attempts at correction, often accompanied by a condemnation of the transgressor’s illegitimate behavior.“ (Sfard, 2008, S. 204)

Herbst und Chazan greifen diese Idee im Rahmen von *breaching experiments* (Herbst & Chazan, 2011, S. 412) wieder auf. Lehrpersonen werden dabei mit videografierten Situationen konfrontiert, in welchen Normen in Bezug auf das Verhalten von Lehrpersonen gezielt verletzt wurden. In einer Diskussion dieser Situation in Kleingruppen sollten die impliziten Normen der Lehrpersonen untersucht werden:

„It affords conditions that can precipitate and enforce a professional discussion of what practitioners perceive they are expected to do by the demands of their role [...]. A thought experiment in mathematics teaching by a group of participants provides less of a view on what each individual believes (which we are not focusing on at present) and more of what the practice (as approximated by a group of experienced practitioners) requires or allows them to do.” (Herbst et al., 2011, S.18 f.)

Normen werden hier ebenfalls als Erwartungen angesehen, die die betreffenden Akteur/innen als an sie von außen herangetragen wahrnehmen, also als extrapersonell. Anders als bei Dawkins und Weber (2016), die Normen auf der globalen Ebene der historischen Fachgemeinschaft betrachten, wird hier jedoch ein lokaler Blickwinkel eingenommen. Hier stehen die Rolle, die die Lehrpersonen für sich definieren, im Fokus sowie die Erwartungen, die mit dieser Rolle einhergehen. Dabei hängt es von der situativen Rahmung des breaching experiments ab, wie eng situiert (vgl. Abschnitt 1.3) diese Rolle und damit die mit ihr verbundenen Erwartungen definiert werden. Erwartungen werden hier auf forschungsmethodischer Ebene eher **deskriptiv** verstanden. Es werden konkrete Handlungen in der Situation interpretiert und daraus die geteilten Erwartungen hergeleitet.

In der interpretativen Unterrichtsforschung (vgl. u. a. Bauersfeld, 1988; Maier & Voigt, 1991), die auf dem interpretativen Paradigma aufbaut, werden Normen eher als Interaktionsmuster verstanden, die für die Beteiligten normativ werden in dem Sinne, dass implizite Erwartungen entstehen, an denen die Akteur/innen ihr Handeln ausrichten. Normen werden hier, nicht nur forschungsmethodologisch, sondern von ihrer Natur her, als **deskriptive** Kategorie zur Beschreibung beobachteter Regularitäten verstanden, die auf der lokalen Ebene einer Klassengemeinschaft in der gemeinsamen Interaktion entstehen und nicht von außen vorgegeben sind. Sie sind damit auf der interpersonellen Ebene angesiedelt, sie entstehen aus der Interaktion der Akteur/innen. Yackel und Cobb sprechen in diesem Zusammenhang explizit von Normen als

„[...] regularities in communal or collective classroom activity which are considered to be jointly established by the teacher and students as members of the classroom community” (Yackel & Cobb, 1996, S. 178)

Wie in den Ausführungen in diesem Abschnitt zu sehen ist, gibt es in der mathematikdidaktischen Literatur keine einheitliche Definition des Begriffs der **Norm**. Die Begriffsdefinition bewegt sich im Spannungsfeld von präskriptiver oder deskriptiver sowie extrapersoneller oder interpersoneller Perspektive. Allen Perspektiven gemein ist dabei die Definition des Normenbegriffes über den Begriff der Erwartung. Davon ausgehend stellt sich die Frage, wann eine Erwartung zur Norm wird und wie dies präzisiert werden kann, ohne sich konkret innerhalb der oben genannten Spannungsfelder verorten zu müssen. Eine solche Definition findet sich in der Systemtheorie Luhmanns, in welcher Normen defi-

niert werden als **lernunwillige Erwartungen**, an denen auch im Enttäuschungs-falle noch festgehalten wird:

„Das Unsichere, die Enttäuschung, wird vielmehr so behandelt, als ob es sicher wäre, und die Frage ist dann: ob man in diesem Falle die Erwartung aufgeben oder ändern würde oder nicht. [...] Lernbereite Erwartungen werden als *Kognitionen* stilisiert. Man ist bereit, sie zu ändern, wenn die Realität andere, unerwartete Seiten zeigt. [...] Dagegen werden lernunwillige Erwartungen als *Normen* stilisiert. Sie werden auch im Enttäuschungs-falle kontrafaktisch festgehalten.“ (Luhmann, 1984, S. 437)

In dieser Definition ist es nicht relevant, ob die Erwartungen als präskriptiv vorgegeben oder eher im Sinne von Handlungsmustern deskriptiv verstanden werden. Da im Rahmen dieser Arbeit Normen beziehungsweise Normenverständnis sowohl präskriptiv als auch deskriptiv aufgefasst werden, wird, wenn von Normen und Erwartungen die Rede ist, diese Definition Luhmanns als Grundlage gewählt. Der methodische Zugang dazu wird im Rahmen einer Intervention über breaching experiments im Sinne von Herbst und Chazan (2011) gewählt.

1.2 Verständnis

1.2.1 Intra-, inter- und extrapersonelle Perspektive

Die Lerntheorien, die im vergangenen Jahrhundert entwickelt wurden, lassen sich verorten zwischen den beiden Antipoden des *Individualismus* und des *Kollektivismus*⁷. Diese haben jeweils eine unterschiedliche Perspektive auf die Verortung von Verständnis, wie sich im kommenden Unterkapitel (vgl. Abschnitt 1.2.2) zeigen wird. Wesentliche Vertreter des Individualismus kommen aus der Schule der Theorie des *Konstruktivismus*, wie beispielsweise von Glasersfeld (1987). In dieser Schule wird Lernen als ein aktiver Konstruktionsprozess des Individuums verstanden, also als **intrapersoneller** Prozess in der/dem Lernenden:

„In der konstruktivistischen Sichtweise gehen wir davon aus, daß das Subjekt [...] seine subjektive Bedeutung der Wirklichkeit konstruiert.“ (Krummheuer & Voigt, 1991, S. 15)

Von Vertreter/innen des Kollektivismus wurde dieser Standpunkt stark kritisiert in der Hinsicht, dass dem Umstand nicht genug Rechnung getragen wird, dass Lernen innerhalb einer (Kultur-)Gemeinschaft passiert. Hauptvertreter/innen des Kollektivismus stammen aus der soziokulturellen Schule von Vygotsky und betonen die prioritäre Stellung des Sozialen gegenüber dem Individuellen mit Berufung auf Vygotskys *genetic law of development*, welches Vygotsky und wie folgt beschreiben:

⁷ Eine neuere, ausführliche Darstellung individualistischer und kollektivistischer Orientierungen in der Mathematikdidaktik findet sich z. B. in Barwell et al. (2024).

„Any function of the child's cultural development appears on the stage twice, or on two planes, first the social, then the psychological, first between people as an intermental category, then within the child as an intramental category.“ (Vygotsky & Cole, 1978, S. 105 f.)

Im Kollektivismus geht man davon aus, dass Lernen einen „Enkulturationsprozess“⁸ (Kempen, 2019, S. 104) in eine kulturelle Gemeinschaft und die Normen darstellt, die deren Diskurspraktiken zugrunde liegen:

„Learning mathematics in school is, then, a process of initiation into a pregiven discursive practice and occurs when students act in accord with the normative rules that constitute the practice.“ (Cobb & Bauersfeld, 1995, S. 6)

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein in dieser Weise verstandener Lernprozess als **extrapersoneller** Prozess bezeichnet, in der Weise, dass der Prozess durch Normen gesteuert ist, die von einer der/dem Lernenden gegenüber externen Institution oder Gemeinschaft vorgegeben sind. Nach Vygotsky geschieht dieser Prozess auf der Grundlage eines gemeinsamen *Zeichensystems* („système de signes“, Saussure, 1989, S. 46), in dessen Gebrauch die Lernenden eingeführt werden müssen. Das Zeichensystem ist dabei wiederum durch die Gemeinschaft vorgegeben und dessen Aneignung somit zunächst ebenfalls ein extrapersoneller Prozess. Bauersfeld lenkt bezüglich dieses Aneignungsprozesses den Fokus auf die Rolle der sozialen Interaktion:

„Learning is characterized by the subjective reconstruction of societal means and models through negotiation of meaning in social interaction“ (Bauersfeld, 1988, S.39)

Nach Bauersfeld geschieht die Aneignung der „societal means“, zu welchen in der Mathematik insbesondere das formale Zeichensystem gehört, durch einen Aushandlungsprozess zwischen Individuen innerhalb der Gemeinschaft bezüglich der Bedeutung dieser Mittel. Was hier bei Bauersfeld anklingt, ist eine interaktionistische Sichtweise, die Lernprozesse auf der **interpersonellen** Ebene der sozialen Interaktion zwischen Individuen verortet. Die theoretische Grundlage geht auf den durch Blumer begründeten *Symbolischen Interaktionismus* zurück. Die Grundlegung dieser Lerntheorie formuliert Blumer in drei prägnanten Prämissen. Zentral in der Theorie Blumers ist die *Bedeutung* von Dingen, was in der ersten Prämisse formuliert wird:

„Die erste Prämisse besagt, dass Menschen Dingen gegenüber auf der Grundlage der Bedeutungen handeln, die diese Dinge für sie besitzen.“ (Blumer, 1980, S. 81)

Die zweite Prämisse formuliert explizit den **interpersonellen** Charakter dieser Bedeutungen:

„Die zweite Prämisse besagt, dass die Bedeutung solcher Dinge aus der sozialen Interaktion, die man mit seinen Mitmenschen eingeht, abgeleitet ist oder aus ihr entsteht.“ (Blumer, 1980, S. 81)

⁸ Dieser Begriff wurde vor allem von Kempen (2019) in seiner Dissertation geprägt.

In der letzten Prämisse wird schließlich auch die **intrapersonelle** Ebene mit einbezogen

„Die dritte Prämisse besagt, dass diese Bedeutungen in einem interpretativen Prozess, den die Person in ihrer Auseinandersetzung mit den ihr begegnenden Dingen benutzt, gehandhabt und abgeändert werden.“ (Blumer, 1980, S. 81)

Nach Blumer entsteht Bedeutung also aus der Interaktion. An die Interaktion schließt laut Blumer jedoch ein intrapersoneller Verarbeitungsprozess an. Dadurch sind Unterschiede erklärbar in der Bedeutung, die die einzelnen Individuen der Interaktion nach der Interaktion einem Ding beimessen.

1.2.2 Definition

Zentraler Begriff im Symbolischen Interaktionismus ist, wie im vorangegangenen Abschnitt dargelegt, der Begriff der Bedeutung. Dabei verortet Blumer die Entstehung von Bedeutung auf der **interpersonellen** Ebene, bezieht aber auch die **intrapersonelle** Ebene mit ein. Damit grenzt sich Blumer deutlich ab von den beiden zu seiner Zeit gängigen Auffassungen zur Verortung der Bedeutung einmal auf extrapersoneller und einmal auf intrapersoneller Ebene. In der philosophischen Position des *Realismus* (Blumer, 1980, S. 83)

„[...] betrachtet man die Bedeutung als etwas, was dem Ding, das diese Bedeutung hat, zu eigen ist, als einen natürlichen Teil der objektiven Zusammensetzung des Dinges. [...] Die Bedeutung geht sozusagen von dem Ding aus, und es gibt daher keinen Entwicklungsprozess, keinen Aufbau der Bedeutung; es ist einzig notwendig, die Bedeutung, die in dem Ding selbst steckt, zu erkennen.“ (Blumer, 1980, S. 82)

Bedeutung wird hier also rein auf **extrapersoneller** Ebene betrachtet. Diese muss vom Individuum zwar erkannt werden, wird aber von diesem nicht aktiv selbst konstruiert. Sie ist durch die objektive Welt vorgegeben. Weiterhin grenzt sich Blumer von einer rein *psychologischen Sichtweise* auf die Bedeutung eines Dinges ab:

„Der andere wichtige traditionelle Ansatz betrachtet "Bedeutung" als einen psychisch bedingten Zusatz, den die Person, für die das Ding eine Bedeutung hat, an dieses heranträgt. [...] Die Bedeutung eines Dinges ist nur der Ausdruck gegebener psychologischer Elemente, die in Verbindung mit der Wahrnehmung des Dinges ins Spiel gebracht werden. [...] Unter grundlegenden Elementen versteht man z.B. Empfindungen, Gefühle, Ideen, Erinnerungen, Motive und Einstellungen.“ (Blumer, 1980, S. 83)

Bedeutung wird hier also auf einer rein **intrapersonellen** Ebene angesiedelt. Dabei geht es nicht, wie im Realismus, um ein kognitives Erkennen dessen, was ein Objekt an sich ausmacht, sondern um intrapersonelle Regungen auf kognitiver und emotionaler Ebene. Die Lerntheorie des Konstruktivismus baut auf dieser intrapersonellen Verortung der Bedeutung auf, grenzt sich dabei jedoch deutlich von der Vorstellung der Lernenden als passive Rezipienten ab, die lediglich auf Außenreize reagieren, wie dies in obigem Zitat anklingt. Vielmehr steht hier die aktive kognitive Bedeutungskonstruktion der Lernenden im Zent-

rum. Auch Bauersfeld geht zunächst von einer konstruktivistischen Sichtweise aus, setzt diese jedoch in Beziehung zum Standpunkt des Kollektivismus, wonach die Bedeutung eines Dinges durch die Kulturgemeinschaft vorgegeben wird:

„[...] the construction of what might be meant, the construction of references is with the listener [...] What we call understanding appears from this perspective as the active construction of such meanings and references supported by social interaction within culture.“ (Bauersfeld, 1995, S. 274)

Mit **Verständnis** wird bei Bauersfeld eben diese, für den Konstruktivismus zentrale, **aktive Bedeutungskonstruktion** im Individuum bezeichnet. Verständnis ist nach Bauersfeld damit auf der intrapersonellen Ebene verortet, unterstützt durch interpersonelle Prozesse in der Kulturgemeinschaft. Demgegenüber wird **Bedeutung** als etwas kulturell Vermitteltes und durch die Kulturgemeinschaft **extrapersonell** Definiertes verstanden. Rogoff, welche aus der soziokulturellen Schule Vygotskys stammt, formuliert dies in ähnlicher Weise, aber mit einem stärkeren Fokus auf die **interpersonelle** Ebene:

„[...] in the process of participation in social activity the individual already functions with shared understanding. The individual's use of this shared understanding is not the same as what was constructed jointly; it is an appropriation of the shared understanding by each individual that reflects the individual's understanding of and involvement in the activity.“ (Rogoff, 1990, S. 195)

Hier wird Verständnis vor allem auf der Ebene des interpersonell geteilten Verständnisses zwischen Individuen angesiedelt. Vor dem kollektivistischen Hintergrund Rogoffs ist der große Stellenwert bemerkenswert, der hier der intrapersonellen Ebene beigemessen wird. Verständnis entsteht danach nicht allein aus der Interaktion heraus, sondern beinhaltet einen intrapersonellen Aneignungsprozess. Blumer formuliert dies in seiner Theorie des Symbolischen Interaktionismus als **intrapersonellen Interpretationsprozess**:

„[...] dass der Gebrauch von Bedeutungen durch einen einzelnen in seinen Handlungen einen Interpretationsprozess beinhaltet. [...] In Abhängigkeit von der Situation, in die er gestellt ist, [...] sucht der Handelnde die Bedeutungen aus, prüft sie, stellt sie zurück, ordnet sie neu und formt sie um.“ (Blumer, 1980, S. 84)

Diesen Interpretationsprozess beschreibt Blumer hier als *situierten Prozess*: Je nach Situation geschieht eine entsprechende Umorganisation von Bedeutungen auf intrapersoneller Ebene. Voigt stellt außerdem fest, dass diese Umorganisation auch während eines Interaktionsprozesses stattfinden kann und Verständnis daher nicht als zeitlich robustes Konstrukt angesehen werden kann:

„Of course, the subject's background understanding is not fixed and stored knowledge that is unchangeable during the interaction processes; at any time during these processes, the subject may realize various background understandings. The result may be, that the realized background understanding will be confirmed or altered.“ (Voigt, 1995, S. 170)

Vor dem Hintergrund dieses Vergleichs kollektivistischer und individualistischer Positionen zum Verständnisbegriff als aktiver Bedeutungskonstruktion lässt sich Blumers Symbolischer Interaktionismus als Mittelweg zwischen diesen beiden Positionen verstehen. Blumer trägt mit seiner Theorie dabei den oben beschriebenen Gemeinsamkeiten dieser Positionen Rechnung, wobei zugleich eine eigene neue Position formuliert wird, die die Interaktion in das Zentrum der Betrachtung rückt, wie dies in der zweiten Prämisse formuliert ist:

„Die zweite Prämisse besagt, dass die Bedeutung solcher Dinge aus der sozialen Interaktion, die man mit seinen Mitmenschen eingeht, abgeleitet ist oder aus ihr entsteht.“ (Blumer, 1980, S. 81)

Bedeutung, beziehungsweise Verständnis im Sinne einer aktiven Bedeutungskonstruktion, entsteht danach auf der interpersonellen Ebene aus der Interaktion, wird aber durch einen Interpretationsprozess auf intrapersoneller Ebene verändert, wie in der dritten Prämisse formuliert:

Die dritte Prämisse besagt, dass diese Bedeutungen in einem interpretativen Prozess, den die Person in ihrer Auseinandersetzung mit den ihr begegnenden Dingen benutzt, gehandhabt und abgeändert werden.“ (Blumer, 1980, S. 81)

Dies kann in Übereinstimmung mit Vygotskys genetic law of development gesehen werden, wonach die individuelle, das heißt intrapersonelle, Ebene der sozialen Ebene, also je nach Auslegung der extrapersonellen oder interpersonellen, zeitlich nachgelagert ist. Nach der dritten Prämisse von Blumer muss diese zeitlich nachgelagerte, intrapersonelle Bedeutungskonstruktion nicht mit dem übereinstimmen, was in der Interaktion der Individuen etabliert wurde, wodurch interpersonelle Unterschiede erklärbar werden.

Die Begriffe Bedeutung und Verständnis werden bei den verschiedenen Autor/innen, wie in obiger Auseinandersetzung zu sehen war, unterschiedlich verwendet und auf unterschiedlichen Ebenen verortet. Im Rahmen dieser Arbeit steht der Begriff des **Verständnisses** im Zentrum, welcher im Sinne Bauersfelds als **aktive Bedeutungskonstruktion** verstanden wird, die sich auf rein kognitive Aspekte bezieht und affektive Aspekte ausklammert. **Bedeutung** wird im Rahmen dieser Arbeit als etwas betrachtet, was auf **extrapersoneller Ebene** durch die (Kultur-)Gemeinschaft vorgegeben ist. Da es hinsichtlich der Normen von Beweisen, dem Untersuchungsfokus dieser Arbeit, keine in der Kulturgeinschaft allgemein etablierte Bedeutung gibt (vgl. Abschnitt 2.1), wird im Rahmen dieser Arbeit das Verständnis und nicht die Bedeutung untersucht. In der entsprechenden Literatur taucht dieser Begriff jedoch häufiger auf und wird im Rahmen dieser Arbeit dann meist synonym verstanden mit dem Begriff des Verständnisses. Dabei ist zunächst offen, auf welcher Ebene, intra- oder interpersonell, dieses Verständnis angesiedelt ist. Blumer legt dies nicht fest, sondern verortet dieses zeitlich differenziert auf beiden Ebenen.

1.3 Dimensionen der Situiertheit

Für Blumer ist die Bedeutungskonstruktion stets abhängig von der Situation, in welcher diese stattfindet (vgl. Abschnitt 1.2.2). In der interpretativen Unterrichtsforschung, welche sich auf den Symbolischen Interaktionismus Blumers gründet, wird davon ausgegangen, dass jegliche Erfahrung **situier**t ist in dem folgenden Sinne:

„Das Subjekt macht seine Erfahrungen stets in einem Kontext, in einer konkreten Situation. [...] Nach Bauersfeld schlagen sich ähnliche Erfahrungen nun nicht in generellen kognitiven Strukturen nieder, sondern in „subjektiven Erfahrungsbereichen (SEB)“, die durch ihre Bindung an einen situativen Kontext charakterisiert sind.“ (Krummheuer & Voigt, 1991, S. 16)

Eine Reihe ähnlicher Erfahrungen führt laut Bauersfeld (1983) zur Bildung sogenannter *subjektiver Erfahrungsbereiche*. Dabei werden in der interpretativen Unterrichtsforschung subjektive Erfahrungsbereiche und Situationen als reflexiv aufeinander bezogen angesehen. Eine Situation wird hier einerseits als Kontext für die Entstehung von subjektiven Erfahrungsräumen eines Individuums verstanden. Auf deren Grundlage entstehen laut Krummheuer gewohnheitsmäßige Deutungsmuster, sogenannte *Rahmungen* (Krummheuer, 1984, S. 287), die damit selbst an diesen situativen Kontext gebunden, also selbst **situier**t sind. Diese wiederum dienen als Grundlage für die Interpretation neuer, ähnlicher Situationen. Bezogen auf Erfahrungen, die im Rahmen sozialer Interaktion zur Bedeutungskonstruktion eines (mathematischen) Objektes gemacht werden, können diese Rahmungen im Sinne des vorherigen Abschnittes als Verständnis des entsprechenden Objektes angesehen werden. Auch Verständnis ist damit keine „generelle[n] kognitive[n] Struktur[en]“, sondern **situier**t, das heißt, es bleibt stets an die Situation gebunden, in dem es entstanden ist.

Eine Situation kann dabei im Sinne der *situated cognition* (vgl. Barsalou, 1999; Glenberg, 1997) verstanden werden als

„[...] a region of perceived space that surrounds a focal entity over some temporal duration, perceived from the subjective perspective of an agent.“ (Yeh & Barsalou, 2006, S. 352 f.)

Hier wird **Situation** als ein **Wirklichkeitsausschnitt** mit zeitlicher und räumlicher Ausdehnung verstanden. Ebenso wird eine soziale Ausdehnung angesprochen, die in obiger Definition nur die intrapersonelle Ebene eines Subjektes umfasst. Weitere Ausdehnungsbereiche ergeben sich aus der Definition einer didaktischen Situation im Kontext der Mathematik:

„A didactical situation in mathematics is a project organized so as to cause one or some students to appropriate some piece of mathematical reference knowledge.“ (Brousseau & Warfield, 2020, S. 1)

Hier wird einmal eine didaktische Ausdehnung beschrieben, als Rahmenvorgaben der/s Organisator/in der Situation sowie eine inhaltliche Ausdehnung, die den Inhaltsbereich der Situation festlegt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Situation daher verstanden als ein Wirklichkeitsausschnitt mit festgelegter räumlicher, inhaltlicher, didaktischer, zeitlicher und sozialer Ausdehnung. Die Situiertheit lässt sich damit entlang der *Ausdehnungsbereiche*, in dieser Arbeit als *Dimensionen* bezeichnet, charakterisieren. Dabei wird die räumliche, inhaltliche, didaktische und zeitliche Ausdehnung der im Rahmen dieser Arbeit als Intervention gestalteten Situation auf Grundlage theoretischer und praktischer Überlegungen extrapersonell durch die Autorin vorgegeben. Die **räumliche Dimension** betrifft (im für diesen Kontext übertragenen Sinne) die konkreten Beispiele, in dieser Arbeit also die konkreten Beweisversuche und den entsprechend dafür gewählten Beweistyp (vgl. Abschnitt 2.4), mit welchen sich in der Intervention auseinandergesetzt werden soll. Die **inhaltliche Dimension** betrifft die Wahl des mathematischen Inhaltsbereiches für diese Beweisversuche, die **zeitliche Dimension** die Dauer der Intervention und die **didaktische Dimension** die Frage danach, wie eng die Situation von Lehrendenseite aus begleitet werden soll. Auch die **soziale Dimension**, also die Frage, in welcher Sozialform die Situation gestaltet sein soll, wird durch die Autorin vorgegeben.

Die im Rahmen dieser Arbeit gestaltete Intervention hat das Ziel, eine möglichst breite soziale Situierung des Verständnisses von Beweisnormen zwischen Lehrenden und Lernenden zu erreichen. Ein Analysefokus für die Auswertung der Intervention ist daher, inwieweit dieses Ziel durch die Intervention erreicht wurde und wie die Intervention dafür gegebenenfalls zukünftig angepasst werden muss. Daher wird die soziale Dimension der Situiertheit nicht nur konzeptuell verstanden, sondern auch als Forschungsfokus und damit als deskriptive Analysekatgorie. In der Analyse interessiert dabei, wie sich **Interpersonalität** im Verständnis der Akteur/innen entwickelt. Dafür soll die Entwicklung des Verständnisses auf intra- und interpersoneller Ebene untersucht werden.

1.4 Normenverständnis

In diesem Abschnitt soll die für die Arbeit grundlegende Unterscheidung zwischen Normen und Normenverständnis motiviert werden. Dafür werden Begrifflichkeiten aus der Forschungsliteratur unter diesen Gesichtspunkten beleuchtet und differenziert, um auf dieser Grundlage oben genannten Unterscheidung zu begründen.

Wie die vorangegangenen Ausführungen gezeigt haben, besteht in der Forschungsliteratur keine Einigkeit, wie Verständnis sozial situiert ist. Blumer situ-

iert dies zeitlich differenziert auf interpersoneller und intrapersoneller Ebene. Die interpersonelle Ebene umfasst dabei für Blumer die direkte Interaktion zwischen Individuen. Für Krummheuer und Voigt (1991) entsteht Verständnis auf der Grundlage subjektiver Erfahrungsbereiche, welche intrapersonell im Subjekt situiert sind. Dies kann im Unterrichtsgeschehen zu dem Problem unterschiedlicher, parallel nebeneinander vorliegender und nicht miteinander vereinbar Verstandnisse, beziehungsweise Rahmungen (vgl. Abschnitt 1.3), führen. Vom Hofe sieht dies als eine Hauptursache für Kommunikationsschwierigkeiten im Unterricht:

„Eine der elementarsten und grundsätzlichsten Ursachen solcher Verständnisschwierigkeiten liegt [...] vielleicht darin, daß dem Schüler – und möglicherweise auch dem Lehrer – oft nicht klar ist, wovon eigentlich die Rede ist; genauer: Wesentliche Ursachen könnten darin zu suchen sein, daß die Begriffe und Symbole, mit denen im Mathematikunterricht umgegangen wird, vom Schüler mit einer völlig anderen Deutung gefüllt werden, als es im Sinne der Sache adäquat wäre.“ (Vom Hofe, 1995, S. 10)

Um dem zu begegnen, ist es nötig, dass die Akteur/innen ihre Verstandnisse aneinander angleichen. Dies wird bei Krummheuer und Voigt als *Modulation* bezeichnet:

„Durch ein solches Modulieren entsteht bei dem Einzelnen eine neue Sichtweise, die jedoch noch an die ursprüngliche gebunden ist.“ (Krummheuer & Voigt, 1991, S. 17)

Laut Krummheuer und Voigt ist es also möglich, dass sich Verstandnisse in der Interaktion verändern, sie bleiben dabei aber von dem ursprünglichen intrapersonellen Verständnis geprägt. Ein interaktional neu etabliertes Verständnis entsteht in diesem Prozess dadurch nicht automatisch. Laut Krummheuer und Voigt führt dieser Prozess vielmehr dazu, dass eine Einigung nur auf der Ebene gleicher Bezeichnungen stattfindet. Dies bezeichnen Krummheuer und Voigt mit dem Begriff des *Arbeitsinterims*, in welchem „Lehrer und Schüler das gleiche [machen], ohne dabei dasselbe denken zu müssen.“ (Krummheuer & Voigt, 1991, S. 17). Dabei werden zwar auf beiden Seiten gemeinsame Bezeichnungen (Arbeitsinterims) genutzt, deren Verstandnisse (Rahmungen) sind laut Krummheuer jedoch nicht notwendigerweise deckungsgleich:

„Bei Herstellung eines Arbeitsinterims in der Unterrichtskommunikation wird also nicht notwendig eine Einigung über vorzunehmende Rahmungen erzielt, sondern zumeist nur eine Einigung auf eine gemeinsame Ausdrucksweise und eine äußere Übereinstimmung von Handlungsschritten.“ (Krummheuer, 1984, S. 289)

Gemäß Saussure (1989) könnte man dies formulieren in dem Sinne, dass sich zwar auf einen gemeinsamen *Bezeichnenden* („signifiant“, Saussure, 1989, S. 263) geeinigt wird, es aber unklar ist, ob damit das gleiche *Bezeichnete* („signifié“, Saussure, 1989, S. 263) gemeint ist. Nach Steinbring (2005), der *Begriff* (Steinbring, 2000, S. 9) als die Wechselbeziehung von Bezeichnendem und

Bezeichnetem auffasst⁹, wäre hier also kein gemeinsamer Begriff etabliert worden. Die Bezeichnenden, gemäß Krummheuer und Voigt (1991) die Arbeitsinterims, sind damit auf interpersonell externalisierter Ebene angesiedelt. Sie sind, gemäß Krummheuer und Voigt (1991), in der Interaktion entstanden und stehen von nun an als extrapersonelle, vorgegebene Kommunikationsmittel zur Verfügung. Das Bezeichnete, bei Krummheuer und Voigt (1991) die Rahmung beziehungsweise in der Terminologie dieser Arbeit das Verständnis, ist dabei weiterhin situiert, das heißt an die Situation gebunden, in welcher es entstanden ist. Bei Krummheuer und Voigt (1991) sind die diesbezüglich verwendeten Begrifflichkeiten der „Rahmung“ und des „Arbeitsinterim“ noch sehr weit gefasst in Bezug auf Verstehensprozesse im unterrichtlichen Geschehen. Normative Aspekte, also bestimmte Erwartungen (vgl. Abschnitt 1.1) an das Unterrichtsgeschehen, werden dabei nicht explizit in den Fokus gerückt. In diesem Kontext wird im Rahmen dieser Arbeit zwischen einer **Norm** als dem **Bezeichnenden** und dem entsprechenden **Normenverständnis** als dem **Bezeichneten** unterschieden.

Blumer spricht in seiner aus dem Symbolischen Interaktionismus abgeleiteten Methodologie von *erschließenden Begriffen* („sensitizing concepts“, Blumer, 1954, S. 7 ff.), die in der Datenanalyse nicht extrapersonell und präskriptiv vorgegeben werden können, sondern deren Bedeutung (beziehungsweise Verständnis in der Terminologie dieser Arbeit, vgl. Abschnitt 1.2.2) sich nur im situativen Kontext ergibt. Dieses Verständnis entsteht im Sinne Bohnsacks auf der Grundlage *konjunktiven Wissens*, also eines interpersonell geteilten, handlungsleitenden Wissens, das den Beteiligten nicht aktiv bewusst sein muss (vgl. Bohnsack, 2003, S. 12). Erschließende Begriffe ergeben sich damit ebenfalls aus dem Zusammenspiel eines Bezeichnenden, das interpersonell externalisiert wurde (siehe oben), und einem Bezeichneten, also dessen Verständnis, das Teil des konjunktiven Wissens ist. Zugang zu diesem Wissen erhält man laut Bohnsack „wenn wir uns [...] mit der Handlungspraxis vertraut gemacht haben.“ (Bohnsack, 2003, S. 562). Erschließende Begriffe, beziehungsweise deren **Verständnis**, sind für Blumer daher **deskriptive Analysekategorien**, die auf der interpersonellen Ebene verortet sind. Auch bei Blumer ist dies nicht beschränkt auf rein normative Aspekte.

Vom Hofe geht in seinem Grundvorstellungskonzept ebenfalls von einer interpersonellen Situierung von Begriffen und deren Verständnis aus. Damit werden explizit auch normative Aspekte von Verstehensprozessen gefasst, was im Fol-

9 „Begriff“ ersetzt im *epistemologischen Dreieck* Steinbrings das „Zeichen“ („signe“, Saussure, 1989, S. 46) bei Saussure. Steinbring spricht dabei im Kontext der mathematischen Begriffsbildung statt von Bezeichnetem von „Referenzkontext“ und statt von Bezeichnendem von „Zeichen/Symbol“ (vgl. Steinbring, 2000, S. 9).

genden dargestellt werden soll. Anders als Krummheuer und Voigt (1991) geht vom Hofe außerdem davon aus, dass die zugrunde liegenden *Erfahrungsbereiche* selbst schon interpersonell situiert sind:

„Bei den hier entwickelten Erklärungsansätzen wurde bei der Betrachtung der bereichsspezifischen Einbindung – im Gegensatz zu einer eng aufgefaßten ›Subjektivität‹ der Erfahrungsbereiche (SEB) – nach *Erfahrungsbereichen* (EB) gefragt, die vermutlich eine ganze Lerngruppe betreffen und in diesem Sinne *intersubjektiv* sind.“ (Vom Hofe, 1995, S. 127)

Vom Hofe möchte dabei die *Grundvorstellungen* (Vom Hofe, 1995, S. 1) die sich auf Grundlage solcher geteilter Erfahrungsräume entwickelt haben, in einer deskriptiven Analyse herausarbeiten. Dies entspricht einem Verständnis von Grundvorstellungen als erschließende Begriffe im Sinne Blumers. Er möchte damit direkt die von ihm festgestellten Verständnisschwierigkeiten adressieren, die auf der Grundlage unterschiedlicher Verständnisse der verwendeten Begriffe, beziehungsweise im Sinne Saussures der Bezeichnenden, entstehen. Grundvorstellungen sind für vom Hofe dabei „idealtypischen mentalen Repräsentationen“ (zitiert nach Griesel et al. 2019, S. 129) abstrakter mathematischer Konzepte, im Sinne dieser Arbeit also interpersonell geteilte **grundlegende Aspekte dieser Konzepte**. Vom Hofe erweitert damit das bis dahin übliche Vorgehen, bei welchem primär auf Grundlage stoffdidaktischer Überlegungen vorgegangen wurde und Grundvorstellungen damit extrapersonell und präskriptiv formuliert wurden. Auch er greift weiterhin auf Überlegungen stoffdidaktischer Art zurück, um die zur Vermittlung eines abstrakten Konzeptes relevanten grundlegenden Aspekte aus fachlicher Perspektive herauszuarbeiten, bezieht jedoch auch empirische Beobachtungen mit ein. In diesen Aspekten sind bestimmte Erwartungen gefasst, wie das entsprechende Konzept aufgefasst werden sollte. Sie stellen somit normative Aspekte des Konzeptes dar. Diese werden als die grundlegenden Aspekte in Bezug auf das jeweilige Konzept betrachtet und werden somit, nachdem sie herausgearbeitet wurden, als **präskriptiv** angesehen.

In diesem Sinne werden die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten **Normen** als die **Bezeichnenden** der **grundlegende Aspekte** in Bezug auf das **Konzept des mathematischen Beweises** aufgefasst. Diese werden im Sinne des Grundvorstellungskonzeptes vom Hofes auf der Grundlage theoretischer und empirischer Überlegungen abgeleitet (vgl. Abschnitt 2.2) und im Weiteren für die Konzeption der Arbeit als verbindlich, also **präskriptiv**, angesehen. Diese Normen dienen in der Datenanalyse weiterhin als „analytische Elemente“ (Blumer, 1980, S. 128), also als Analysekategorien im Zusammenhang mit der Diskussion der Validität von Beweisversuchen.

Unter **Normenverständnis** wird dagegen das entsprechend Bezeichnete gefasst, also der situierte Aspekt der jeweiligen Norm. Auf methodologischer Ebene beschreibt dies im Sinne von Blumer den **deskriptiven** Aspekt der jeweiligen

normativen Analysekategorie. Blumer spricht dabei statt von Verständnis von der „Beschaffenheit“ (Blumer, 1980, S. 128) der analytischen Elemente, die nicht vor der eigentlichen Analyse festgelegt werden kann. Die Datenanalyse im Sinne Blumers

„[...] beginnt nicht mit analytischen Elementen, deren Beschaffenheit im Voraus festgesetzt und während ihrer Anwendung niemals überprüft oder abgeändert worden ist [...] Sie versucht vielmehr, die Beschaffenheit des analytischen Elements durch eine intensive Erforschung seiner Gegebenheiten in der empirischen Welt zu bestimmen.“ (Blumer, 1980, S. 128)

Dabei ist es für Blumer unumgänglich, die untersuchten „Objekte so zu sehen, wie sie [die Handelnden, Anm. d. A.] sie selbst sehen.“ (Blumer, 1980, S. 133). Im Rahmen dieser Arbeit wird daher das Normenverständnis nicht von Forschendenseite vorgegeben, sondern auf Grundlage einer empirischen Vorerhebung herausgearbeitet.

1.5 Aushandlungsprozesse

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Interaktionsprozess gestaltet und beforscht, durch welchen ein geteiltes Normenverständnis auf Lehrenden- und Lernenden-seite erreicht werden soll. Dabei stellt sich zunächst die Frage, welche Rolle die Lehrenden und welche die Lernenden in diesem Prozess spielen sollen. In der Interpretativen Unterrichtsforschung werden diese Rollen als relativ symmetrisch angesehen:

„In der sozialen Interaktion sind im Hinblick auf gemeinsames Handeln die subjektiven Bedeutungskonstruktionen der einen Person bezogen auf die der anderen Person. Z.B. versuchen Schüler in der Regel, ihre Vorstellungen und Denkwege an der vermuteten Erwartung des Lehrers auszurichten [...]. Und auch der Lehrer richtet im allgemeinen sein Denken an den vermuteten Sinnhorizonten der Schüler aus. [...] In der sozialen Interaktion zwischen Lehrer und Schüler werden so zueinander passende Bedeutungen ausgehandelt, es entwickelt sich Verständigung.“ (Krummheuer & Voigt, 1991, S. 15 f.)

Nach dieser Auslegung sind Lehrende und Lernende in der Interaktion grundsätzlich gleichberechtigt und richten in der Interaktion ihre eigenen Bedeutungskonstruktionen an denen der anderen aus. Es geht hier also nicht um einen einseitig verstandenen Enkulturationsprozess, in welchem die Lehrenden das gewünschte Verständnis vermitteln und die Lernenden dies passiv aufnehmen. Die Interaktion wird hier vielmehr als ein wechselseitiger Anpassungsprozess der intrapersonellen Verständnisse der Akteur/innen verstanden. Die Normen („Erwartungen“) werden dabei jedoch von Lehrendenseite eingebracht. Dabei wird sich auf Lehrendenseite am Verständnis („Sinnhorizonte“) der Lernenden ausgerichtet. Als Ziel einer (gelingenden) Interaktion wird explizit formuliert, dass ein zwischen Lehrenden und Lernenden interpersonell geteiltes Verständnis etabliert wird. Cobb und Yackel bezeichnen in dieser Weise in der Klassengemeinschaft gemeinsam ausgehandelte Normen als soziomathematische Normen

und den entsprechenden Prozess zu deren Etablierung als **Aushandlungsprozess** („process of [...] negotiation“, Cobb & Yackel, 1996, S. 8). Die Rollenverteilung sehen sie darin als symmetrisch an, insofern, als beide Seiten sowohl eine **aktive** als auch eine **interpretierende** Rolle spielen. Dies machen sie am Beispiel der *mathematischen Unterschiedlichkeit* deutlich:

„[...] on the one hand, the students did not know what would constitute a mathematical difference until the teacher and other students accepted some of their contributions but not others. Consequently, in responding to the teacher's requests for a different solution, the students were both learning what counts as a mathematical difference and helping to interactively constitute what counts as a mathematical difference in their classroom.“ (Cobb & Yackel, 1996, S. 8)

Durch ihre aktive Beantwortung der Aufforderung nach unterschiedlichen Lösungen bieten die Lernenden hier die Grundlage dafür, in der gegenseitigen Interpretation ihrer Handlungen gemeinsam auszuhandeln, wann von einer unterschiedlichen Lösung gesprochen werden kann. Die lehrende Person hat ebenfalls eine aktive Rolle, insofern, als sie explizit zur Auseinandersetzung einlädt. Auch sie interpretiert dabei die Handlung der Lernenden und reagiert darauf entsprechend ihrem Verständnis, worauf wiederum die Lernenden reagieren. Cobb und Yackel gehen darüber hinaus davon aus, dass auch die Lehrperson selbst kein vorgefertigtes Verständnis mitbringt, sondern dieses selbst im Rahmen dieses Aushandlungsprozesses für sich klarstellt:

„On the other hand, the teachers in these classrooms were themselves attempting to develop an inquiry form of practice and had not, in their prior years of teaching, asked students to explain their thinking. Consequently, the experiential basis from which they attempted to anticipate students' contributions was extremely limited. Further, they had not necessarily decided in advance what would constitute a mathematical difference. Instead, the teachers seemed to clarify their own understanding of mathematical difference as they interacted with their students. Viewed in this way, the sociomathematical norm of mathematical difference appeared to emerge in the course of joint activity via a process of often implicit negotiation“ (Cobb & Yackel, 1996, S. 8)

Daraus ergibt sich ein **zyklischer Prozess** (vgl. Abbildung 1): Die Lernenden versuchen sich an die vermuteten Erwartungen der Lehrperson anzupassen. Die Lehrperson positioniert sich daraufhin in Bezug auf diese Beiträge und klärt dadurch ihr eigenes Verständnis. Vor diesem Hintergrund validiert sie die Beiträge der Lernenden und kommuniziert dadurch ihr (aktuelles) Verständnis. Dazu können sich nun wiederum die Lernenden in Beziehung setzen und ihr Verständnis an den (vermuteten) Erwartungen der Lehrperson ausrichten. Dieses neue Verständnis zeigt sich wiederum in den Beiträgen der Lernenden, wodurch ein neuer Zyklus beginnt.

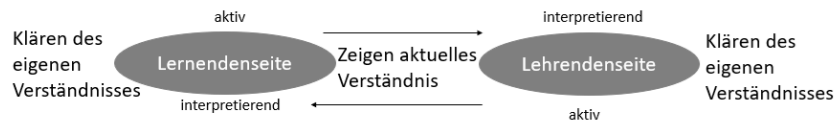


Abbildung 1 Modell des Aushandlungsprozesses zwischen Lehrenden- und Lernendenseite

Die Aushandlung eines gemeinsamen Verständnisses läuft also meist nicht in der Weise ab, dass die aktuellen Verständnisse auf beiden Seiten explizit formuliert und auf einer Metaebene diskutiert werden, sondern nach Cobb und Yackel eher situativ und implizit durch die gemeinsame Auseinandersetzung in einer Situation der interaktiven Validierung von Beiträgen der Lernenden vor dem Hintergrund des zu etablierenden Verständnisses.

Das Verhältnis von Lehrenden- und Lernendenseite ist dabei dennoch nicht komplett symmetrisch, die Lehrperson trägt weiterhin die Verantwortung, dass das ausgehandelte interpersonelle Verständnis kompatibel ist mit dem von ihr wahrgenommenen extrapersonellen Verständnis der (fach)mathematischen (Kultur)gemeinschaft oder in den Worten von Stylianides:

„[...] the teachers are in a position of social intellectual authority with more power than the students over the results of these negotiations. [...] That is, the teacher has responsibility to help students construct mathematical ways of knowing that are compatible with those of wider society.“ (Stylianides, 2007a, S. 13)

In dem von Cobb und Yackel (1996) beschriebenen Aushandlungsprozess wird nach Cobb und Yackel die soziomathematische Norm der mathematischen Unterschiedlichkeit ausgehandelt. Vor dem Hintergrund der begrifflichen Differenzierung in Abschnitt 1.4 kann dies an dieser Stelle spezifiziert werden: Die **Norm** selbst, die Erwartung, dass die Lernenden unterschiedliche Lösungen präsentieren sollen, wird hier nicht ausgehandelt. Diese wird von der Lehrperson explizit formuliert und bietet den Rahmen der folgenden Interaktion. Was ausgehandelt wird, ist das **situierte Verständnis der Norm** in der Gemeinschaft einer Schulklasse. Yackel und Cobb sehen dies, die Norm und ihr Verständnis, als zwei Perspektiven auf dieselbe Sache an:

„With regard to sociomathematical norms, what becomes mathematically normative in a classroom is constrained by the current goals, [...] and assumptions of the classroom participants. At the same time these goals and largely implicit understandings are themselves influenced by what is legitimized as acceptable mathematical activity. It is in this sense that we say sociomathematical norms and goals and beliefs about mathematical activity and learning are reflexively related.“ (Yackel & Cobb, 1996, S. 460)

Verständnis und Normen entstehen nach Yackel und Cobb beide aus der Interaktion im Klassenraum. Dabei beschreibt Verständnis für Yackel und Cobb eher

die intrapersonelle Ebene der einzelnen Teilnehmenden („participants“), und (soziomathematische) Normen eher die interpersonelle Ebene der Klassengemeinschaft („classroom“). Beide beeinflussen sich gegenseitig. Die einzelnen Verständnisse beeinflussen das, was als gemeinsame Norm in der Interaktion entstehen kann und die bereits etablierten Normen beeinflussen, wie sich die Verständnisse der Akteure ausformen.

Der in Abbildung 1 dargestellte **zyklische Prozess** soll als Grundlage dienen für die Gestaltung des Aushandlungsprozesses im Rahmen dieser Arbeit. Eine besondere Herausforderung stellt dabei der Umstand dar, dass die Lehrendenseite auf Hochschulebene nicht aus einer einzelnen Lehrperson besteht, sondern aus einem heterogen zusammengesetzten Team an Lehrenden. Aus diesem Grund, und auch vor dem Hintergrund der von Stylianides betonten besonderen Verantwortung auf Lehrendenseite, wird der erste Schritt im Kreislaufmodell – die Etablierung eines (gemeinsamen) Normenverständnisses auf Lehrendenseite – als separate **Vorerhebung** durchgeführt. Im Sinne des obigen Kreislaufmodells soll sich dafür auf Lehrendenseite mit konkreten Studierendenprodukten auseinandergesetzt werden. Das dadurch herausgearbeitete Verständnis auf Lehrendenseite dient dann als Grundlage für die Intervention auf Lernendenseite, die ihr Verständnis an den Erwartungen auf Lehrendenseite ausrichten soll.

2 Beweise

In diesem Kapitel sollen der normative Rahmen für Beweise, der dieser Arbeit zugrunde liegt, hergeleitet und der Fokus auf beispielgebunden ikonische Beweise begründet werden. Dafür wird zunächst die Natur eines mathematischen Beweises beleuchtet (2.1), um vor diesem Hintergrund zu klären, woher Normen für Beweise kommen können und wie diese festgelegt werden können. Davon ausgehend werden konkrete Normen abgeleitet (2.2). Anschließend wird das Verständnis dieser Normen vor dem Hintergrund unterschiedlicher Beweis-konzeptionen analysiert. Dabei wird sich zeigen, dass das Normenverständnis stark von dem Verständnis dessen abhängt, was einen Beweis nach der jeweiligen Konzeption ausmacht. Vor diesem Hintergrund wird eine Klassifikation von Beweistypen vorgeschlagen, die unabhängig ist von Vorannahmen zum Verständnis der Normen (2.3). Auf dieser Grundlage wird der Fokus auf den Beweistyp des beispielgebunden ikonischen Beweises im Rahmen dieser Arbeit begründet und sich mit Besonderheiten und Schwierigkeiten in Bezug auf diesen Beweistyp auseinandergesetzt (2.3).

2.1 Beweise als soziale Konstrukte

Hemmi bezeichnet in ihrer Dissertation Beweise als „Artefakte“ (Hemmi, 2011, S. 87ff), die sie als „tools“ (Vygotsky & Cole, 1978, S. 19ff) im Sinne Vygotskys versteht, also als Kulturprodukte, die geschichtlich in einer Kulturgemeinschaft entstanden sind. Sie stellen somit vom Menschen selbst geschaffene, künstliche Werkzeuge dar „that mediate between the social and the individual“ (Hemmi, 2011, S. 87). Sie nutzt den Begriff der „transparency“ (Lave & Wenger, 1999, S. 27) von Lave und Wenger, um auf die Wichtigkeit dessen hinzuweisen, dass es, um den Umgang mit einem Artefakt, wie dem Beweis, zu lernen, nicht ausreicht, das Artefakt zu nutzen, also selbst zu beweisen. Darüber hinaus müssen das Artefakt und dessen Bedeutung betrachtet werden und sich mit dem auseinandergesetzt werden, was einen Beweis zu einem Beweis macht („inner workings“), also welche Erwartungen und damit Normen an einen Beweis gestellt werden:

„The significance of artifacts in the full complexity of their relations with practice can be more or less transparent to the learners. Transparency in its simplest form may just imply that the inner workings of an artifact are available for the learners” (Lave & Wenger, 1999, S. 27)

Insofern plädiert sie für eine explizite Behandlung dieser Normen beim Unterrichten von Beweisen. Stylianides geht ebenfalls von Beweisen als, wie er

es nennt, *sozialen Konstrukten* aus. Dabei geht er noch einen Schritt weiter und definiert einen Beweis aus eben diesen sozial etablierten Normen heraus:

„Within this framework of knowledge construction and validation in mathematics, proof is described as a social construct. [...] therefore, proofs are outcomes of socially agreed upon sets of rules [of discourse]“ (Stylianides, 2007a, S. 11 f.)

Diese Regeln stellen bestimmte Erwartungen an den mathematischen Diskurs über Beweise dar, also **Normen**, auf deren Grundlage sich nach Stylianides Beweise definieren lassen. Diese „rules of mathematical discourse“ (Sfard, 2000, S. 157) können dabei laut Sfard von Lernendenseite aus nicht rein aus deren Alltagerfahrung heraus abgeleitet werden:

„If we insist on teaching mathematics that cannot be easily incorporated in, or derived from, everyday discourse, there seems to be no escape from introducing the students to the meta-rules of modern mathematics or at least to their selected subset.“ (Sfard, 2000, S. 184)

Auch Sfard plädiert daher, wie Hemmi, dafür, dass diese Normen explizit vermittelt werden sollen. Aufgrund der besonderen Natur der Normen können diese weder durch bloße Benennung von Lehrendenseite aus noch ohne Anleitung selbst entdeckend gelernt werden. Insofern muss die Lehrperson eine aktive Rolle als „experienced player“ spielen und die Normen aktiv vertreten:

„[...] the unique rules of mathematical discourse cannot be learned by simple articulation, and they cannot be reinvented by students engaged in discussing mathematical problems “in any way they regard as appropriate.” Rules of language games can only be learned by actually playing the game with experienced players.“ (Sfard, 2000, S. 185)

Normen (in Bezug auf Artefakte) kommen damit laut Sfard letzten Endes von **fachlicher Seite** und sind dadurch legitimiert. Dies ist auch konsistent mit dem von Stylianides formulierten, an Bruner angelehnten, „intellectual honesty principle“, wonach intellektuelle Ehrlichkeit sich auf die Lernendenseite und auf die fachliche Seite bezieht und eine Balance zwischen beiden Seiten schaffen soll:

„The intellectual-honesty principle, which states that the notion of proof in school mathematics should be conceptualized so that it is, at once, honest to mathematics as a discipline and honoring of students as mathematical learners“ (Stylianides, 2007a, S. 1)

Bezogen auf Normen von Beweisen sollten diese also den Lernenden und dem, was für diese jeweils zugänglich ist, gerecht werden, aber auch in gleichem Maße den fachlichen Vorstellungen eines guten Beweises entsprechen.

Andererseits wird in der Forschungsliteratur zum Beweisen aus der Tatsache heraus, dass Beweise soziale Konstrukte sind, begründet, dass sich *Akzeptanzkriterien* für Beweise („criteria for the acceptability of mathematical proofs“) **nicht allgemein vorgegeben** lassen, sondern stets von der jeweiligen Gemeinschaft und deren Praktiken abhängen:

„That there is no generally accepted list of criteria for the acceptability of mathematical proofs is plausible from a perspective that sees proof as embedded in a social practice.“ (Sommerhoff & Ufer, 2019, S. 718)

Ufer et al. (2009) versuchen in ihrer Darstellung des Methodenwissens dabei zumindest bestimmte *Bereiche für Akzeptanzkriterien* (vgl. Ufer et al., 2009, S. 35) von Beweisen aus dem Ideal eines (formalen) Beweises herzuleiten (vgl. Abschnitt 2.2). Es werden also bestimmte **normative Dimensionen**¹⁰ festgelegt, die für Beweise relevant sind und aus welchen sich konkrete Akzeptanzkriterien ableiten lassen in der jeweiligen sozialen Situierung der Auseinandersetzung mit Beweisen. Auch Hanna und Jahnke (1996) betonen in diesem Zusammenhang, dass die Akzeptanz eines Beweises selbst auf einem **situierten Aushandlungsprozess** in der betreffenden (Lehr-Lern-)Gemeinschaft beruht:

„Furthermore, the process of accepting an argument as proof relies heavily on the social mechanisms of the mathematical community.“ (Stylianides, 2007a, S. 3)

Der Begriff des Akzeptanzkriteriums wird dabei erst bei Sommerhoff und Ufer spezifiziert in der folgenden Weise:

„Acceptance criteria can be seen as more or less pragmatic instantiations of certain norms and values regarding mathematical proof, which are held by the (local) mathematical community“ (Sommerhoff & Ufer, 2019, S. 719f)

Akzeptanzkriterien werden dabei bereits als der situierte Aspekt einer Norm betrachtet. In der Terminologie dieser Arbeit entspricht dies dem **situierten Normenverständnis** (vgl. Abschnitt 1.4). Durch diese Unterscheidung zwischen Norm und Normenverständnis lassen sich beide in diesem Abschnitt beschriebenen Perspektiven zusammenbringen. Eine Aushandlung von Akzeptanzkriterien im Sinne von Stylianides ist dabei konsistent mit dem in Abschnitt 1.5 dargestellten Aushandlungsprozess, in welchem das **situierte Normenverständnis** zwischen Lehrenden- und Lernendenseite ausgehandelt werden soll. Die **Normen** selbst werden jedoch, wie auch Sfard dies fordert, von fachlicher Seite aus vorgegeben und dienen als begrifflicher Orientierungsrahmen. Stylianides selbst legt in seiner Beweisdefinition bestimmte normative Dimensionen für Beweise vorab fest und sieht lediglich deren konkrete Auslegung (also das Normenverständnis) in der jeweiligen Lehr-Lern-Gemeinschaft als sozial situiert an:

„Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions against a mathematical claim with the following characteristics:

10 Dimensionen werden hier, wie in Abschnitt 1.3., als Ausdehnungsbereiche verstanden. Jede Dimension besteht dabei aus einem Kontinuum, in welchen die konkrete Anzahl an betrachteten Entitäten, deren Grad an Verbindung, Organisation oder Reichweite verortet werden kann (vgl. dazu die konkrete Ausformulierungen der normativen Dimensionen in Abschnitt 2.2).

1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;
2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community;
3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community“ (Stylianides, 2007b, S. 291)

Er nennt hier drei wesentliche normative Dimensionen: Entitäten, die ohne weitere Begründung genutzt werden dürfen im Beweis („set of accepted statements“), erlaubte Formen, diese Entitäten miteinander zu verbinden („modes of argumentation“), und die *Darstellungsebene*, in welcher der Beweis dargestellt ist („modes of argument representation“).

2.2 Normen für Beweise

Ziel dieses Unterkapitels ist es, aus der Forschungsliteratur **normative Dimensionen** für Beweise herauszuarbeiten und auf dieser Grundlage verbindliche **Normen** zu formulieren für die Konzeption und Auswertung der Intervention dieser Arbeit. Die soziale Situiertheit bezieht sich dabei auf das Normenverständnis und nicht auf die Normen selbst (vgl. Abschnitt 2.1). Letztere werden als begrifflicher Orientierungsrahmen angesehen, welcher verschiedene Verständnisse zulässt.

Es geht dabei weniger um Kriterien für eine adäquate formale Abgefasstheit von Beweisen, da die in der Intervention betrachteten Beweisversuche nicht in der formalen Darstellungsebene verfasst sind (vgl. Abschnitt 2.4). Vielmehr geht es um grundsätzliche Kriterien für Beweise, die unabhängig von deren Beweistyp (und damit insbesondere von der genutzten Darstellungsebene) gelten. In diesem Sinne wird auf Kriterien aus der Fachdidaktik zurückgegriffen und nicht auf Kriterien aus der Fachwissenschaft, wie diese beispielsweise Dawkins und Weber (2016) darstellen. In der Fachdidaktik liefern Heinze und Reiss (2003) eine hilfreiche Systematik im Rahmen ihrer Darstellung des Methodenwissens. Nach Heinze und Reiss beschreibt Methodenwissen das Wissen und Verständnis über korrekte mathematische Beweisprozeduren (vgl. Heinze & Reiss, 2003, S. 2). Die von ihnen herausgearbeiteten Aspekte des Methodenwissens werden dabei angesehen als „Bereiche für notwendige Kriterien“ (Ufer et al., 2009, S. 35) für die „Akzeptanz von Beweisen“ (Ufer et al., 2009, S. 35), also als **normative Dimensionen** (vgl. Abschnitt 2.1).

Einige Besonderheiten in der Zielsetzung und Herleitung der Aspekte des Methodenwissens machen es für die Herleitung der **Normen** aus diesen normativen Dimensionen heraus jedoch nötig, diese unter weiteren Gesichtspunkten zu beleuchten. So ist die Zielsetzung von Heinze und Reiss primär, ein Wissen auf der syntaktischen Ebene korrekter Beweisprozeduren zu

etablieren. Dagegen sollen die Normen, die dieser Arbeit zugrunde liegen, auch Kriterien zur Bewertung des semantischen Gehalts von Beweisversuchen umfassen (vgl. dazu Weber & Alcock, 2004). Weiterhin gehen Heinze und Reiss von einem *formal-deduktiven Beweisverständnis* aus (vgl. Abschnitt 2.3.2), wohingegen in dieser Arbeit anschauliche, grundschulrelevante Beweiskonzepte (vgl. Abschnitt 2.4.1) im Zentrum stehen.

Ein weiterer Aspekt, der vor dem Hintergrund der Zielsetzung dieser Arbeit problematisch ist, ist, dass Heinze und Reiss die Aspekte des Methodenwissens primär aus theoretischen Überlegungen ableiten. Erst in einem zweiten Schritt werden die abgeleiteten Aspekte auf empirische Ergebnisse beim Beweisen angewendet. Im Rahmen dieser Arbeit werden allerdings Kriterien gesucht, mit denen Schwierigkeiten beim Beweisen auf Lernendenseite gezielt begegnet werden kann. Gemäß Abschnitt 1.4 sollten Kriterien dieser Art im Sinne von Grundvorstellungen nicht rein aus der Theorie abgeleitet sein, sondern die Empirie mit einbeziehen. Vor diesem Hintergrund werden zur Spezifikation der **Normen** die Aspekte des Methodenwissens nach Heinze und Reiss (2003) mit empirischen Ergebnissen zur Beweiskompetenz in Beziehung gesetzt.

Als empirische Grundlage dient hier die Kategorisierung der Beweiskonstruktionen der Studierenden im Eingangssemester an der Universität Paderborn von Kempen und Biehler (2019). Diese Kategorisierung ist unter den oben genannten Problemstellungen in mehrfacher Hinsicht geeignet, die Aspekte von Heinze und Reiss (2003) zu komplettieren. Es wird auch die Semantik der Beweisprodukte in den Blick genommen und nicht ausschließlich die Syntax. Die Kategorien sind insofern von allgemeinem Charakter, als mit ihnen verschiedene Beweistypen betrachtet werden, neben formalen Beweisen auch solche, die für die Grundschullehrramtsausbildung von besonderer Relevanz sind. Sie basieren auf Kategoriensystemen früherer Studien von Bell (1976) und Recio und Godino (2001) und wurden durch Kempen und Biehler (2019) in der Pilotierung kombiniert und weiterentwickelt. Insofern können die Kategorien als empirisch gewonnene „Idealtypen“ (vgl. Griesel et al. 2019, S. 129) für Schwierigkeiten beim Beweisen betrachtet werden, deren jeweilige Gegenteile **Normen** an Beweise entsprechen.

Dieses empirisch begründete Kategoriensystem wurde unabhängig von den von Heinze und Reiss (2003) theoretisch hergeleiteten Kategorien entwickelt, weshalb deren Gegenüberstellung zur Herleitung möglichst breit anwendbarer Normen besonders produktiv erscheint. Zu diesem Zweck werden zunächst ausgehend von den Aspekten des Methodenwissens bei Heinze und Reiss, die diesen zugrunde liegenden **normativen Dimensionen** in einer Weise expliziert, dass diese unabhängig von der Beweiskonzeption möglichst breite Anwendung

finden können. Diesen normativen Dimensionen werden daraufhin die entsprechenden Fehlertypen in der Kategorisierung der Beweisprodukte bei Kempfen und Biehler (2019) zugeordnet. Diese entsprechen Normbrüchen in Bezug auf Beweise. Aus deren gegenteiliger Formulierung werden schließlich die dieser Arbeit zugrunde liegenden **Normen** für Beweise hergeleitet. Die entsprechenden Zuordnungen sind in Tabelle 1 dargestellt:

Tabelle 1 Herleitung der Normen für Beweise

Methodisches Wissen (Heinze & Reiss, 2003)	Normative Dimension	Kategorisierung Be- weisprodukte (Kempfen & Biehler, 2019)	Norm
Beweisstruktur	Entitäten	K4: Argumentation mit Lücke	Vollständigkeit
	Organisation	K2: pseudo (Zirkel- schluss)	Logische Struktur
Beweiskette	Verbindung	K3: fragmentarisch	Kohärenz
Beweisschema	Reichweite	K1: empirisch	Allgemeingültigkeit

Die *Beweisstruktur* als einen Aspekt des methodischen Wissens beschreiben Heinze und Reiss wie folgt:

„A proof starts at given premises and ends at a specific assertion. [...] Moreover, gaps that form disruptions in the structure of the argumentation are not accepted as part of a mathematical proof.“
(Heinze & Reiss, 2003, S. 2)

Dies umfasst zwei normative Dimensionen: Die **Entitäten**, die in einem Beweis vorhanden sein sollten. Bei Heinze und Reiss werden diesbezüglich explizit die Entitäten der „premises“ und der „assertion“ genannt. Und die **Organisation** der Entitäten innerhalb des Beweises. Laut Heinze und Reiss sollten diese linear organisiert sein, wobei mit den „premise“ begonnen werden sollte und mit der „assertion“ geendet.

Der ersten normativen Dimension, wonach es bestimmte festgelegte **Entitäten** gibt, die in einem Beweis vorhanden sein sollten, lässt sich bei Kempfen und Biehler die Kategorisierung *Argumentationen mit Lücken* (K4) zuordnen. Die Erwartung an einen Beweis, das heißt die darin implizit formulierte Norm, ist die der **Vollständigkeit**: Es soll keine Lücken im Beweis geben, das heißt, alle geforderten Entitäten sollten expliziert werden.

Der normativen Dimension der **Organisation** lässt sich der Fehlertyp des *Zirkelschlusses* (K2 : pseudo) nach Kempfen und Biehler zuordnen. Zirkelschlüsse widersprechen dabei der Erwartung einer klar festgelegten

linearen Abfolge der Entitäten und damit der Norm der **logischen Struktur**, die von einem Beweis erfüllt werden sollte.

Der Aspekt der *Beweiskette* umfasst nach Heinze und Reiss das Wissen darüber, dass jeder Schritt aus dem vorherigen hergeleitet werden sollte: „Each step of a proof can be concluded from the previous step“ (Heinze & Reiss, 2003, S. 2). Hier geht es als normative Dimension also um den Grad an **Verbindung** der Entitäten, die hier konkret als *Beweisschritte* („step of a proof“) benannt werden. Nach Heinze und Reiss sollten dabei aufeinanderfolgende Beweisschritte in enger kausaler Verbindung zueinanderstehen.

Der entsprechende Normbruch bezüglich der normativen Dimension der Verbindung wird bei Kempen und Biehler wie folgt beschrieben: “The student mentions relevant aspects, but fails to build up a coherent argument.” (Kempen & Biehler, 2019, S. 739). Dies entspricht bei Kempen und Biehler der Kategorie *fragmentarisch* (K3). Die zugrunde liegende Erwartung an einen Beweis wäre hier, dass dieser ein kohärentes Argument darstellt, also dass die Norm der **Kohärenz** erfüllt ist.

Das *Beweisschema* im Sinne von Heinze und Reiss bezieht sich auf die zulässigen Schlussweisen. Nach Heinze und Reiss wäre dies einzig die deduktive Schlussweise, was bedeutet, dass insbesondere empirische Argumente, bei welchen nur einzelne Beispiele betrachtet werden, nicht zulässig sind. Die normative Dimension, die hier angesprochen wird, ist die der **Reichweite**. Bei *empirischen* Beweisprodukten reicht diese nicht über das dargestellte Beispiel hinaus.

Diese stellen bei Kempen und Biehler (2019) eine eigene Kategorie dar (K1). Die entsprechende Norm vor dem Hintergrund dieser Dimension ist die der **Allgemeingültigkeit**: Die Reichweite soll alle relevanten Beispiele umfassen und nicht lediglich das dargestellte Beispiel. Für Heinze und Reiss (2003) ergibt sich dies automatisch aus der Anwendung einer deduktiven Schlussweise im Sinne eines formal-deduktiven Beweisverständnisses und wird daher nicht weiter ausdifferenziert.

Nach Heinze und Reiss (2003) sind diese Normen unabhängig voneinander in der Hinsicht, dass sich Beweisprodukte konstruieren lassen, die einen der Aspekte verletzen, die anderen aber erfüllen. Über die Unabhängigkeit dieser Aspekte im Denken von Lernenden wird dabei keine Aussage getroffen.

2.3 Normenverständnis in unterschiedlichen Beweiskonzeptionen

In diesem Kapitel soll die Abhängigkeit des Normenverständnisses vom *Beweisverständnis*, also dem Verständnis dessen, was einen Beweis ausmacht (vgl. Sporn et al., 2021), dargelegt werden. Dafür werden verschiedene *Beweiskonzeptionen*¹¹, die der Vermittlung von Beweisen zugrunde liegen können, in den Blick genommen und das darin implizite Beweis- und Normenverständnis analysiert. Als theoretischer Hintergrund für diese Konzeptionen werden zunächst die verschiedenen Funktionen beleuchtet, die Beweisen in der Forschungsliteratur zugeschrieben wurden.

2.3.1 Funktionen von Beweisen

Das Verständnis der in Abschnitt 2.2 herausgearbeiteten Normen für Beweise ist vor dem Hintergrund zu sehen, welche Funktionen Beweisen in der jeweiligen Gemeinschaft zugeschrieben werden. Zusammen mit den Normen für Beweise bilden diese Funktionen die Grundlage des Beweisverständnisses in der jeweiligen Gemeinschaft. Dabei bezeichnet Beweisverständnis im Sinne Sporns et al. (2021) das Verständnis dessen, was einen Beweis ausmacht, im Gegensatz zum Beweisverstehen, also dem Nachvollziehen eines konkreten Beweises.

Dass dem Begründen und Beweisen eine große Rolle innerhalb der schulischen Mathematikausbildung bereits ab der Vorschule zukommen soll, wird, wie in der Einleitung ausgeführt, explizit in den NCTM Standards (2000) gefordert und von Hanna dadurch begründet, dass Beweisen einen zentralen Aspekt mathematischer Tätigkeit darstellt:

„Students cannot be said to have learned math, or even about math, unless they have learned what a proof is.“ (Hanna, 2000, S. 24)

Beweise haben hier die Funktion, ein authentisches Bild der mathematischen Tätigkeit zu vermitteln. Dabei stellt sich die Frage, was diese Tätigkeit ausmacht und welche Funktionen Beweise in diesem Zusammenhang genau erfüllen können. In der Fachdidaktik selbst wurde dies in Bezug auf die schulische Ausbildung vielfältig diskutiert (vgl. z.B. Auslander, 2008; Hanna & Jahnke, 1996; Rav, 1999; de Villiers, 1990). Die meisten Arbeiten orientieren sich dabei an der Darstellung von de Villiers (1990), welcher die folgenden, im

¹¹ Mit „Beweiskonzeption“ wird hierbei die Einheit aus dem verwendeten Beweistyp (im Sinne von Abschnitt 2.4) und der zugrunde liegenden didaktischen oder fachlichen Hintergrundtheorien bezeichnet (vgl. dazu Biehler & Kempen, 2016, S. 144). Mit „Beweisverständnis“ wird dagegen lediglich der Aspekt bezeichnet, der die Bedeutung des Beweisbegriffs in der jeweiligen Konzeption zu fassen versucht.

Rahmen dieser Arbeit zentralen, Funktionen benennt: Verifikation, Erklärung, Entdeckung, Systematisierung, Kommunikation, Überzeugung¹².

Die offensichtlichste Funktion ist die der *Verifikation*, welche von Jahnke und Ufer wie folgt beschrieben wird:

„Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 331)

Danach hat ein Beweis die Aufgabe, die Gültigkeit eines mathematischen Satzes zweifelsfrei nachzuweisen. Dies kann nach Jahnke und Ufer dadurch gewährleistet werden, dass Beweise auf der Grundlage eines formal-deduktiven Systems aus Axiomen und festgelegten Schlussregeln aufgebaut werden. Die Verifikationsfunktion von Beweisen ist im Rahmen dieser Arbeit insofern zentral, als auf ihrer Grundlage über die Validität eines Beweisversuchs entschieden werden kann und somit Normen für Beweise begründet werden können. Sie wird jedoch durch weitere, eher didaktisch orientierte, Funktionen ergänzt.

Eine weitere zentrale Funktion eines Beweises ist nach de Villiers die der *Erklärung*. International hat die Unterscheidung zwischen „proofs that prove“ (Hanna, 1989, S. 45), also Beweisen, die ein syntaktisch korrekt aufgebautes Argument für die Gültigkeit eines Beweises liefern, und „proofs that explain“ (Hanna, 1989, S. 45), also Beweisen, die inhaltliche Zusammenhänge erklären, durch die Arbeiten von Hanna (1989) viel Beachtung erfahren. Hanna beruft sich dabei auf Steiner, der die folgende Definition für einen „explanatory proof“ liefert:

„[...] an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the results depend on the property.“ (Steiner, 1978, S. 143)

Mit einem Fokus auf „proofs that explain“ in der Schulausbildung möchte Hanna die Erklärungsfunktion von Beweisen vermehrt in den Fokus rücken gegenüber einer reinen Verifikationsfunktion.

Beweise sind jedoch weit mehr als ein bloßes Werkzeug zur Verifikation oder Erklärung einer Aussage. Der britische Mathematiker Hardy beschreibt mathematisches Arbeiten eher als Entdeckungsreise:

¹² In der Forschungsliteratur wurden darüber hinaus noch weitere Funktionen diskutiert. In diesem Abschnitt werden jedoch nur diejenigen Funktionen näher beleuchtet, welche im Rahmen dieser Arbeit von besonderer Relevanz sind.

„I have myself always thought of a mathematician as in the first instance an observer, a man who gazes at a distant range of mountains and notes down his observations. His object is simply to distinguish clearly and notify to others as many different peaks as he can. There are some peaks which he can distinguish easily, while others are less clear. He sees A sharply, while of B he can obtain only transitory glimpses. At last he makes out a ridge which leads from A , and following it to its end he discovers that it culminates in B . B is now fixed in his vision, and from this point he can proceed to further discoveries.“ (Hardy, 1929, S. 18)

Beweise dienen demnach innerhalb der Mathematik auch zur *Entdeckung* und *Systematisierung* neuen Wissens. Hardy beschreibt hier eine/n Mathematiker/in als Beobachter/in auf einer Entdeckungsreise im Land der Mathematik. Der Mathematiker Manin beschreibt diese Landschaft als *mathscape*. Einzelne herausragende Beobachtungen werden mit der Metapher von Berggipfeln beschrieben. Diese stellen die wesentlichen Entitäten für einen **vollständigen** Beweis dar. Manin präzisiert diese Entitäten wie folgt: „Axioms, definitions and theorems are spots in a mathscape“ (Manin, 1992, zitiert nach Wittmann, 2021b, S. 116). Ziel ist es einerseits, diese Entitäten klar voneinander abzugrenzen („distinguish“) und andererseits Verbindungslinien zwischen diesen Entitäten herauszuarbeiten. Dadurch werden **Kohärenzen** in einer bestimmten **logischen Abfolge** etabliert. Das durch diese Kohärenzen geprägte Land der Mathematik, die *mathscape*, und Beweise sind direkt miteinander verbunden, oder wie Manin es ausdrückt:

„A proof becomes just one of many ways to increase the awareness of a mathscape“. (Manin, 1992, zitiert nach Wittmann, 2021b, S. 116).

Ein Beweis ist dabei, nach Hardy, nichts weiter, als ein Versuch, diese Beobachtungen und Zusammenhänge anderen zu *kommunizieren*:

„If he wishes someone else to see it, he *points to it*, either directly or through the chain of summits which led him to recognise it himself. When his pupil also sees it, the research, the argument, the *proof* is finished. [...] If we were to push it to its extreme we should be led to a rather paradoxical conclusion; that there is, strictly, no such thing as mathematical proof.“ (Hardy, 1929, S. 18)

Laut Hardy kann der/die Beweisende nicht mit dem/der Rezipienten/in des Beweises den Weg gemeinsam abgehen, aber die wichtigsten Zwischenschritte in der richtigen Reihenfolge und ihrem Zusammenhang aufzeigen, damit diese/r den Weg (Beweis) und dessen Ziel (Theorem) selbst erkennt und gehen kann. In diesem Sinne gibt es nach Hardy keine Beweise, die wirklich den **vollständigen** Weg darlegen, sondern nur die Möglichkeit, von der Existenz eines solchen vollständigen Weges zu überzeugen. Nach Hardy wird ein Beweis erst dadurch zu einem Beweis, dass er von dem/der Rezipienten/in als solcher erkannt wird, also zu einer subjektiven *Überzeugung* der Gültigkeit der Aussage führt.

In diesem Unterkapitel zeigten sich bereits zwei zentrale Beweisverständnisse, wobei einmal die Verifikationsfunktion und einmal die Erklärungsfunktion von Beweisen im Fokus stehen. Das Verständnis der in Abschnitt 2.2 eingeführten

Normen ist dabei stark geprägt von dem jeweils zugrunde liegenden Beweisverständnis. Dieser Zusammenhang von Normen- und Beweisverständnis soll in den kommenden Unterkapiteln näher untersucht werden.

2.3.2 Formal-deduktives Beweisverständnis

Wie sich in der Analyse in Abschnitt 2.2 gezeigt hat, beruht das Verständnis der in diesem Abschnitt herausgearbeiteten Normen bei Heinze und Reiss (2003) auf einem formal-deduktiven Beweisverständnis. In diesem Beweisverständnis steht die Verifikationsfunktion eines Beweises im Fokus und andere, eher didaktisch orientierte Funktionen (vgl. dazu Abschnitt 2.3.1) stehen im Hintergrund. Es stellt das in der Fachmathematik am weitesten verbreitete Verständnis eines Beweises dar (vgl. z. B. Azzouni, 2004; Hilbert, 1931). Jahnke und Ufer formulieren dies wie folgt:

„Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 331)

Deduktiv bezieht sich hier auf die Art der Schlussweise, in welcher nur auf Schlussregeln im Rahmen des *Kalküls des natürlichen Schließens* (vgl. van Riel & Vosgerau, 2018) zurückgegriffen werden darf (vgl. dazu u. a. Biehler & Kempen, 2016, S. 145 sowie Ufer et al., 2009, S. 32). Ein *formaler* Beweis ist ein Beweis, der in einem formalen System aus festgelegten Axiomen und Schlussregeln operiert und entsprechend eine formale Darstellungsebene verwendet (vgl. dazu u. a. Biehler & Kempen, 2016, S. 145 sowie Ufer et al., 2009, S. 31). Die formale Darstellungsebene basiert dabei auf der Verwendung allgemeiner Repräsentanten, durch welche automatisch die **Allgemeingültigkeit** des Dargestellten gegeben ist.

Zur Analyse von Beweisprozessen vor dem Hintergrund eines formal-deduktiven Beweisverständnisses wird in der Fachdidaktik dabei meist auf das Toulmin-Modell (2003) zurückgegriffen. Dieses wurde von Toulmin ursprünglich zur Analyse von Argumentationsprozessen, auch außerhalb der Mathematik, entwickelt. Danach besteht ein Argumentationsschritt innerhalb einer Argumentation aus Daten, die, aufgrund einer Schlussregel, zu einer Schlussfolgerung führen. Dies ergibt eine genau festgelegte Organisation dieser Entitäten in einem Beweis (vgl. Abbildung 2). Die **logische Struktur** eines Beweises wird im Sinne dieser Organisation verstanden.

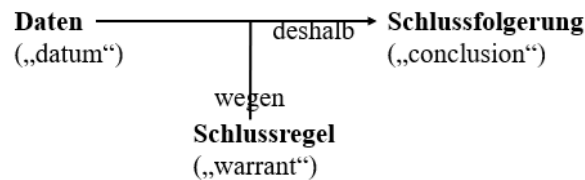


Abbildung 2 Toulmin-Modell (nach Toulmin, 2003)

Die Verbindung der Entitäten, also die **Kohärenz** (vgl. Abschnitt 2.2), wird im Sinne einer kausalen Verknüpfung über genau spezifizierte Schlussregeln festgelegt. Bei einem formal-deduktiv verstandenen Beweis sind gemäß Jahnke und Ufer nur Axiome und bereits bewiesene Sätze als Daten zulässig. Damit wird ein weiteres Verständnis der Kohärenz angesprochen: Es soll explizit der Zusammenhang zu außerhalb des eigentlichen Beweises liegenden Entitäten, zu Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, hergestellt werden, also zu einer *externen Kohärenzebene*. Zur externen Kohärenzebene wird im Rahmen dieser Arbeit (unabhängig vom zugrunde liegenden Beweisverständnis) außerdem die zu beweisende Aussage selbst gezählt. Geht es um den Zusammenhang zu Entitäten auf dieser Ebene, wird von **externer Kohärenz** gesprochen. Bei Zusammenhängen von Entitäten innerhalb des eigentlichen Beweises wird dagegen von **interner Kohärenz** gesprochen. Im formal-deduktiven Beweisverständnis wird die interne Kohärenz als die oben beschriebenen Art der kausalen Verknüpfung verstanden.

In einem Beweis kann eine Schlussfolgerung selbst wieder als Datum für einen neuen Argumentationsschritt dienen. Das erste Datum und die weiteren Konklusionen entsprächen damit den Beweisschritten (vgl. Heinze & Reiss, 2003, S. 2) im Sinne von Heinze und Reiss, also den Entitäten, die im Sinne der **Vollständigkeit** eines Beweises expliziert werden müssten. Nach Hersh (2013) erfüllt kein (formal-deduktiv verstandener) Beweis tatsächlich die Norm der Vollständigkeit, in der Hinsicht, dass kein Beweis die Gültigkeit einer mathematischen Aussage lückenlos ausschließlich aus Axiomen und mit Hilfe der Schlussregeln des Kalküls des natürlichen Schließens herleitet. Aberdein (2013) unterscheidet daher zwischen der argumentativen Struktur eines Beweises, die lückenhaft ist, und der inferenziellen Struktur, die vollständig ist und von deren Existenz die argumentative Struktur des Beweises überzeugen soll (vgl. dazu auch das Zitat von Hardy in Abschnitt 2.3.1). Weber und Czocher (2019) betonen in ihrem Artikel über Sichtweisen von Mathematikern und Mathematikerinnen auf Beweise, dass diese die Zulässigkeit von Lücken in einem Beweis auf unterschiedliche Weise bewerten, was einerseits abhängig von der Intention des Beweises ist, andererseits von der Zielgruppe und davon,

ob diese in der Lage ist, diese Lücke für sich selbst zu schließen. Hier kommt also wieder eine gewisse soziale Situiertheit im Verständnis dieser Norm zum Tragen.

2.3.3 Präformales Beweisverständnis

Für die Umsetzung des Beweisens im Schulunterricht wurde ein streng formal-deduktives Beweisverständnis von den meisten Mathematikdidaktiker/innen als zu rigoros und schwer greifbar eingestuft. Daher wurden didaktische Beweiskonzeptionen entwickelt, die das Beweisen im Sinne des „intellectual honesty principles“ (nach Stylianides, 2007a, S. 1), auf intellektuell ehrliche Art und Weise den Lernenden vermitteln sollen. Biehler und Kempen (2016) liefern eine Übersicht dieser verschiedenen *didaktischen Beweiskonzeptionen*¹³. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur die für diese Arbeit relevanten Konzeptionen behandelt und auf dieser Grundlage eine eigene Konzeption beispielgebunden ikonischer Beweise herausgearbeitet. Von der Notwendigkeit einer formalen Abgeschlossenheit des Beweises wird in diesen Konzeptionen in der Regel abgesehen:

„Here we do not think primarily of formal proofs but of a meaningful arguing which, by all means, should be correct and intellectually honest“ (Blum & Kirsch, 1979, S. 7)

Blum und Kirsch orientierten sich in der von ihnen eingeführten Konzeption *präformaler Beweise* dabei noch stark an dem Ideal eines formal-deduktiv verstandenen Beweises:

„If formalized, they [die Beweisschritte, Anm. der Autorin] have to correspond to correct formal-mathematical arguments.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187)

Sie fordern in dieser Beweiskonzeption, dass präformale Beweise grundsätzlich *formalisierbar* sein sollen in dem Sinne, dass alle Beweisschritte und deren Verbindung sich in formal-deduktive Beweisschritte und Schlussregeln übersetzen lassen. Damit grenzen sie sich klar von weniger rigoros gefassten didaktischen Beweiskonzeptionen ab. Die Notwendigkeit eines rigoroseren Beweisverständnisses machen sie an einem Beispiel aus der Oberstufenmathematik fest, welches zwar ein anschaulich nachvollziehbares, aber falsches Argument für die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage liefert. Blum und Kirsch präzisieren ihre Beweiskonzeption wie folgt:

13 Biehler und Kempen (2016) sprechen in diesem Zusammenhang von „didaktisch orientierte[n] Beweiskonzept[en]“ (Biehler & Kempen, 2016, S. 144), verstehen darunter jedoch „Beweisformen, in Verbindung mit der jeweiligen Lehr-/Lernkonzeption“ (Biehler & Kempen, 2016, S. 144). Im Rahmen dieser Arbeit wird daher von (didaktischen) Beweiskonzeptionen und nicht von Beweiskonzepten gesprochen.

„[...] we mean by a preformal proof a chain of correct, but not formally represented conclusions which refer to valid, non-formal premises. [...] The conclusions should succeed one another in their "psychologically natural" order. [...] If formalized, they have to correspond to correct formal-mathematical arguments.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187)

Die für den Beweis relevanten Entitäten werden hier, in Anlehnung an die Bezeichnungen im Sinne des Toulmin-Modells, mit Voraussetzungen („premises“) und Schlussfolgerungen („conclusions“) bezeichnet. Ein **vollständiger** Beweis muss demnach die Voraussetzungen und alle relevanten Schlussfolgerungen als Beweisschritte enthalten. Die **logische Struktur** wird, wie im formal-deduktiven Verständnis, im Sinne einer linearen Abfolge der Schlussfolgerungen („chain of [...] conclusions“) verstanden. Die genaue Abfolge ist im präformalen Verständnis nicht explizit vorgegeben, sondern wird hier eher intuitiv verstanden im Sinne einer „psychologically natural order“.

Das Verständnis von **Kohärenz** basiert auch hier auf dem Herstellen kausaler Zusammenhänge zwischen den Beweisschritten. Im präformalen Beweisverständnis müssen diese nicht über Schlussregeln erfolgen, die vorab als zulässig festgelegt wurden. Sie sollten sich aber formal umformulieren lassen und in dieser Formalisierung auf diesen Schlussregeln basieren. Zu den Voraussetzungen zählt nach Blum und Kirsch alles, was für den Beweis der Aussage genutzt werden darf. Auch hier wird also wieder die externe Kohärenzebene mitadressiert, die Entitäten umfasst, die außerhalb des eigentlichen Beweises liegen. Anders als im formal-deduktiven Beweisverständnis sind dies nicht Entitäten innerhalb eines formalen Systems, sondern Aussagen, die intuitiv klar sind:

„Particular examples of such premises include concretely given real objects, geometric-intuitive facts, reality-oriented basic ideas, or intuitively evident, "commonly intelligible", "psychologically obvious" statements.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187)

Demnach dürfen intuitiv klare Aussagen als Begründungsgrundlagen genutzt werden. Was als intuitiv klar angesehen wird, ist dabei nach Blum und Kirsch von der jeweiligen Gemeinschaft abhängig und bedarf eines Aushandlungsprozesses, ist somit also sozial situiert:

„What are "intuitive" or "obvious" bases for argumentation, has to be decided in each individual case by the persons involved on the basis of their knowledge. Such bases can, of course, be changed in course of time, in particular by learning or experience.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187)

In der Darstellungsebene kann bei präformalen Beweisen demnach vom Ideal eines formalen Beweises abgewichen werden und es können stattdessen informelle Darstellungen gewählt werden. Insbesondere bedeutet dies, dass keine allgemeinen Repräsentanten gewählt werden müssen, sondern die Zusammenhänge auch an konkreten Beispielen verdeutlicht werden können. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach der Allgemeingültigkeit des Beweises in anderer Weise als vor dem Hintergrund eines formal-deduktiven Beweisverständnisses:

„The conclusions must be capable of being generalized directly from the concrete case.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187)

Allgemeingültigkeit wird hier in dem Sinne verstanden, dass alle Schlussfolgerungen sich verallgemeinern lassen und damit unabhängig vom konkret dargestellten Beispiel funktionieren. Vor dem Hintergrund eines präformalen Beweisverständnisses bedeutet dies, dass diese sich in eine formale Darstellung überführen lassen, durch welche die Allgemeingültigkeit direkt zum Ausdruck kommt.

2.3.4 Operatives Beweisverständnis

Wittmann kritisiert das formal-deduktive Verständnis von Beweisen und sieht dies nicht als richtigen Ansatz für den schulischen Unterricht an. Er plädiert für einen stärker verstehensorientierten Zugang zum Beweisen durch informelle Repräsentationsweisen:

„The teaching and learning of mathematics in the social context of school has to be based on a context of understanding and a frame of communication different from those in university mathematics. To appropriately transfer proof activity into the boundary conditions of school, we must abandon formal axiomatic deductive presentations of relevant mathematical theories in favour of sound informal presentations.“ (Wittmann, 2021a, S. 74)

Wittmann richtet sich damit auch gegen ein präformales Beweisverständnis, wie dies von Blum und Kirsch (vgl. Abschnitt 2.3.3) formuliert wurde:

„These authors [Blum and Kirsch, Anm. d. A.] called proofs of this kind “pre-formal proofs” [...] These descriptions indicate that the authors had some concerns about the status of such proofs while, at the same time, they also had an unquestioned respect for formal proofs.“ (Wittmann, 2021c, S. 232)

Für Wittmann stellen auch informelle Beweise valide Beweise dar, welche keiner Formalisierung bedürfen. Er kritisiert dabei, dass bereits durch die Bezeichnung präformal diese Konzeption nur als Vorstufe zum eigentlich formalen Beweis angesehen und ihr kein Wert an sich beigemessen wird. Zentral für Wittmann ist bei einem informellen Beweis, dass die Semantik und nicht die Syntax eines Beweises im Fokus steht

„[...] this method of demonstration calls upon the meaning of the terms employed, as distinct from abstract methods, which dispense with the interpretation of the terms and employ only the abstract relations between them.“ (Wittmann, 2021a, S. 61 f.)

Dies betont auch Hanna, wenn sie unterscheidet zwischen „proofs that proof“, also Beweisen, bei welchen die Verifikationsfunktion im Zentrum steht, und „proofs that explain“, also Beweisen, die bei welchen die Erklärungsfunktion im Fokus steht (vgl. Abschnitt 2.3.1). **Kohärenz** wird bei Wittmann als Herstellen

von konzeptuellen Beziehungen verstanden und nicht als reines Anwenden von Schlussregeln:

„A proof of a theorem is a pattern of conceptual relationships linking the statement to the premises in a logically stringent way.“ (Wittmann, 2021b, S. 140)

Als für den Beweis relevante Entitäten werden auch bei Wittmann die Voraussetzung („premises“) und die zu beweisende Aussage („statement“) genannt. Ein vollständiger Beweis sollte demnach diese Entitäten enthalten. Die **logische Struktur** wird hier einmal global verstanden in dem Sinn einer festgelegten Reihenfolge der Entitäten. Danach soll sich die Aussage aus der Voraussetzung ergeben. Weiterhin wird gefordert, dass die Abfolge logisch stringent ist. Dies ist an dieser Stelle ähnlich offen formuliert wie im präformalen Beweisverständnis und fordert keinen Bezug auf Schlussregeln innerhalb eines formalen Systems.

In der von ihm eingeführten Beweiskonzeption des *operativen Beweises* werden die oben benannten konzeptuellen Beziehungen, die **Kohärenzen** zwischen den Entitäten, nicht über deduktive Schlüsse, sondern über konkrete Operationen hergestellt. Dies baut auf der konstruktivistischen (vgl. Abschnitt 1.2.1) Lerntheorie Piagets auf, wonach Lernende erst über Operationen an Objekten Zugang zu konzeptuellen Beziehungen zwischen diesen erhalten:

„According to Piaget, mathematical knowledge is not derived from the objects themselves, but *from operations with objects* [...] To understand mathematical objects means to explore how they are constructed and how they behave if they are subjected to operations“ (Wittmann, 2021c, S. 234)

Davon ausgehend begründet Wittmann das *operative Prinzip*, wonach Lernende Operationen systematisch untersuchen sollen entlang der folgenden Gesichtspunkte:

- „(1) to explore which operations can be performed and how they are linked to one another,
- (2) to find out which properties and relationships are imprinted into the objects through construction,
- (3) to observe which effects, properties, and relationships are brought about by the operations according to the guiding question “What happens with . . . if . . . ?““ (Wittmann, 2021c, S. 234)

Operative Beweise sind für Wittmann Beweise, die kausale Beziehungen („relationships“) auf der Grundlage von Operationen herstellen im Sinne von: Wenn diese Operation mit dem Objekt gemacht wird, dann hat das diesen Effekt auf das Objekt:

„[...] operative proofs depend on the effects of operations applied to the objects in question.“ (Wittmann, 2021c, S. 234)

Die **Operation** stellt damit eine weitere Entität dar. Durch diese soll der (globale) Zusammenhang hergestellt werden von der Voraussetzung („premises“, Wittmann, 2021b, S. 140) zum Effekt der Operation, welche das gewünschten Ergebnis im Sinne der zu beweisenden Aussage („statement“, Wittmann, 2021b,

S. 140) darstellt. Ein Beispiel für einen solchen operativen Beweis zur Aussage „Die Summe zweier natürlicher Zahlen im Abstand 2 ist immer gerade“, ist in Abbildung 3 dargestellt:

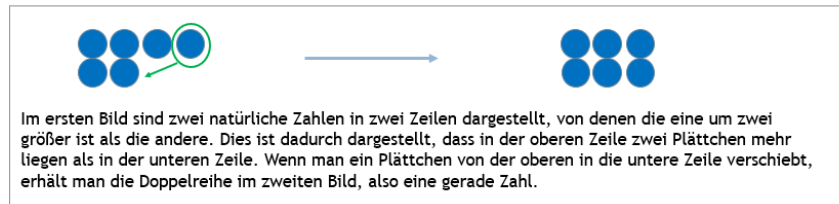


Abbildung 3 Operativer Beweis zur Aussage „Die Summe zweier natürlicher Zahlen im Abstand 2 ist immer gerade“ (Der Beweis wurde von der Autorin selbst erstellt)

Im Sinne des operativen Prinzips werden also konkrete Objekte mit bestimmten Eigenschaften gemäß der **Voraussetzung** gewählt, in obigen Beispiel (Abbildung 3) zwei Plättchenreihen, von denen die eine zwei Plättchen mehr hat als die andere. An diesen werden konkreten Veränderungen („operations“) vorgenommen, um das gewünschte **Endergebnis** zu erhalten. In Abbildung 3 wird ein Plättchen verschoben, um eine Doppelreihe zu erhalten. Dies lässt sich im Sinne des Toulmin-Modells wie folgt darstellen:

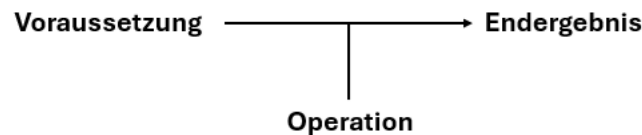


Abbildung 4 Operatives Beweismodell in Anlehnung an das Toulmin-Modell

Die wesentlichen Beweisschritte vor dem Hintergrund eines operativen Beweisverständnisses sind damit die Voraussetzung, die Operation und das Endergebnis¹⁴. Diese müssen für einen **vollständigen** Beweis dargestellt sein. Die **logi-**

¹⁴ Von einem Endergebnis wird gesprochen bei einem einschrittigen Beweis, der nur einen solchen Argumentationsschritt bestehend aus Voraussetzung, Operation und Endergebnis umfasst. Bei einem mehrschrittigen Beweis kann das Ergebnis eines Argumentationsschrittes wieder als Voraussetzung für einen darauffolgenden Argumen-

sche Struktur ergibt sich entsprechend der linearen Organisation in Abbildung 4. Die globale **Kohärenz** zwischen Voraussetzung und Endergebnis wird dabei über die Operation hergestellt.

Da operative Beweise auf dem operativen Prinzip basieren, werden diese gemäß Wittmann dem natürlichen Lernprozess der Schüler/innen gerecht, sind also in den Worten von Stylianides (2007a) intellektuell ehrlich gegenüber den Lernenden. Weiterhin zeigt Abbildung 4 die Parallelität zu formal-deduktiven Beweisen, wobei lediglich die Schlussweise nun durch eine operative ersetzt wurde. Damit können auch operative Beweise als rigorose Beweise aufgefasst werden, also im Sinne von Stylianides (2007a) auch als intellektuell ehrlich gegenüber der fachlichen Seite. Wittmann begründet dies über die allgemeine Natur der Operation:

„These operations involve general patterns for the following reason: when it is intuitively clear that the operations applied to a particular object are applicable to all objects of a certain class to which the particular object belongs, the relationships which can be derived from these operations are recognized as generally valid. [...] Because of the general nature of the operations, operative proofs are rigorous proofs with a clear foundation.“ (Wittmann, 2021c, S. 234)

Hier wird von Wittmann die Allgemeingültigkeit als die zentrale Norm für die Validität eines Beweises benannt. Er versteht **Allgemeingültigkeit** in dem Sinne, dass die Operation allgemeinen Charakter hat. Die Reichweite der Operation erstreckt sich dabei auf eine ganze *Klasse von Objekten*, zu welcher das konkret gewählte Objekt gehört, an dem die Operation ausgeführt wird. Die gleiche Reichweite ergibt sich dabei für Wittmann automatisch für die durch die Operation hergestellte Beziehung. Was hier allgemeinen Charakter hat, sind also, in der Terminologie dieser Arbeit, die **Kohärenzen**. Die Klasse an Objekten wird bei Wittmann dabei nicht näher spezifiziert.

Diese tritt in der Konzeption des *action proofs* bei Semadeni klarer zutage. Auf diesen Vorarbeiten Semadenis baut die Konzeption operativer Beweise bei Wittmann auf. Bereits bei Semadeni taucht der in Abbildung 4 dargestellte operative Dreischritt aus Voraussetzung, Operation und Endergebnis auf, wenn er den aus seiner Sicht ersten von vier Schritten eines action proofs beschreibt:

„1° Choose a special case [...]. The case should be generic (that is without special features) [...]. Choose an enactive and/or iconic representation of this case [...]. Perform certain concrete, physical actions (manipulating objects, drawing pictures, moving the body etc.) so as to verify the statement in the given case.“ (Semadeni, 1984, S. 32)

Nach Semadeni soll ein enaktiv oder ikonisch konkret dargestellter Repräsentant gewählt werden, welcher ansonsten keine weiteren speziellen Eigenschaften

tationsschritt dienen. Mit Endergebnis wird bei einem mehrschrittigen Beweis daher nur das Ergebnis am Ende einer solchen Abfolge von Argumentationsschritten bezeichnet. Das Endergebnis sollte dabei direkt die Beziehung zur zu beweisenden Aussage verdeutlichen.

aufweist. Einen solchen Repräsentanten bezeichnet Semadeni als *generisch*. An diesem Repräsentanten sollen konkrete Operationen ausgeübt werden. Auf Grundlage des aus der entsprechenden Operation resultierenden (End-)Ergebnisses soll die zu beweisende Aussage begründet werden. Die Allgemeingültigkeit ergibt sich für Semadeni dabei aus dem Vergleich mehrerer Beispiele:

„2° Choose other examples, keeping the general schema permanent but varying the constants involved. In each case verify the statement, trying to use the same method as in 1°.

3° When you no longer need physical actions, continue performing them mentally until you are convinced that you know how to do the same for many other examples“ (Semadeni, 1984, S. 32)

In Schritt 2° sieht die Konzeption des action proofs vor, dass Lernende ein Gefühl für die Allgemeingültigkeit des Beweises erhalten, indem sie das allgemeine Schema, also die dargestellten Kohärenzen, auf andere Beispiele übertragen, also die **Übertragbarkeit**¹⁵ auf konkrete andere Beispiele prüfen. Daraus soll in Schritt 3° die subjektive Überzeugung gewonnen werden, dass sich die Kohärenzen auf beliebige andere Beispiele übertragen lassen. Hier sollen also Kohärenzen zwischen verschiedenen Beispielen hergestellt werden. Damit wird eine weitere Kohärenzebene eingeführt, die **Ebene der Beispielbetrachtung**. Im vierten und letzten Schritt nach Semadeni soll dann die Reichweite innerhalb dieser Ebene bestimmt werden, das heißt die Klasse an Beispielen, für welche diese operative Methode funktioniert:

„4° Try to determine the class of cases for which this method works.“ (Semadeni, 1984, S. 32)

Die Klasse an Beispielen, die auch Wittmann angesprochen hat, wird bei Semadeni also a posteriori bestimmt. Sie wird im Nachhinein festgelegt als die Klasse, für welche die gewünschten Zusammenhänge gelten.

2.3.5 Generisches Beweisverständnis

Die im deutschsprachigen Raum stark verbreiteten Beweiskonzeptionen des präformalen und des operativen Beweises arbeiten beide mit konkreten Beispieldarstellungen (vgl. Abschnitte 2.3.3 und 2.3.4). Diese nutzen informelle Darstellungsebenen, meist die ikonische. Anders als bei formal dargestellten Beweisen, welche die Allgemeingültigkeit über allgemeine Repräsentanten gewährleisten, muss bei diesen die Allgemeingültigkeit explizit begründet werden. Bei präformalen Beweisen wird dabei der Weg über die Formalisierung gewählt, also die Überführung der Kohärenzen der konkreten Darstellung in eine formale Darstellung von deduktiven Schlüssen (vgl. Abschnitt 2.3.3). Ist diese Formalisierung möglich, so ist die Allgemeingültigkeit der konkreten

¹⁵ Der Begriff wurde von Gayer (2023) eingeführt, ausgehend von der Definition eines generischen Beweises bei Biehler und Kempen (2016).

Darstellung gegeben. Bei einem operativen Beweis wird dies über den allgemeinen Charakter der operativen Schlüsse begründet (vgl. Abschnitt 2.3.4). Die Operation soll dabei für eine ganze Klasse an Objekten anwendbar sein. Dafür muss nach Semadeni die Übertragbarkeit der Operation auf weitere Beispiele geprüft werden.

Im internationalen Raum werden Beweise, welche mit konkreten Beispieldarstellungen arbeiten, als *generische Beweise* bezeichnet und nicht näher ausdifferenziert, ob diesen ein präformales oder operatives Beweisverständnis zugrunde liegt. Die Attribuierung generisch für einen Beweis(versuch) lässt damit noch keine Rückschlüsse auf die Erfüllung der Norm der Allgemeingültigkeit zu, sondern klärt lediglich den verwendeten Beweistyp.

Die Frage nach der Allgemeingültigkeit auf Grundlage dieses breiter gefassten Beweisverständnisses wurde dabei meist anhand des allgemeinen Charakters der (meist) ikonischen Darstellung diskutiert. Dieser allgemeine Charakter wurde mit dem Begriff der *Generizität* bezeichnet. Eine generische Darstellung ist demnach eine Darstellung, die die Norm der Allgemeingültigkeit erfüllt, was zu Verwirrungen im Zusammenhang mit dieser Begrifflichkeit führen kann.

Eine erste systematische Auseinandersetzung mit dem Begriff der Generizität in der Mathematikdidaktik stammt von Mason und Pimm (1984). Sie grenzen dabei generische Darstellungen auf der einen Seite von allgemeinen („general“) Darstellungen und auf der anderen Seite von nicht-generischen Darstellungen ab. Diese Abgrenzung geschieht nach Mason und Pimm intrapersonell, das heißt, wie eine bestimmte Darstellung wahrgenommen wird, hängt von der Wahrnehmung des Betrachters ab oder in den Worten Mason und Pimms: „It all has to do with perception“ (Mason & Pimm, 1984, S. 283). Sie führen dafür das Beispiel der symbolischen Darstellung einer geraden Zahl an, einmal beispielgebunden durch die konkrete Zahl 6 und einmal formal durch die Variable $2N$ (vgl. Abbildung 5). Durch die Wahl verschiedener Artikel kann hier in beiden Darstellungen differenziert werden zwischen einer konkreten nicht-

THE even number 6,	THE even number $2N$
AN even number (like) 6,	AN even number $2N$
ANY even number (like) 6,	ANY even number $2N$

Abbildung 5 Unterscheidung von Formalisierungsgrad und Grad der Generizität (Abbildung aus Mason & Pimm, 1984, S. 281)

generischen Betrachtung („the“ bezeichnet ein spezifisches Objekt), einer (potenziell) generischen Betrachtung („an“ legt den Fokus eher auf ein konkretes Beispiel, das repräsentativ für eine Klasse von Beispielen steht) und einer allgemeinen Betrachtung („any“ drückt aus, dass die Darstellung bereits die gesamte Klasse an Beispielen repräsentiert).

Nach Mason und Pimm können damit sowohl beispielgebundene als auch formale, also mit Variablen arbeitende, Darstellungen die Norm der Allgemeingültigkeit erfüllen. Wie dies im Fall einer beispielgebundenen Darstellung möglich ist, erläutern Mason und Pimm wie folgt:

„6, when seen in the context of even numbers, CAN be seen as a generic even number, but this requires stressing some of its features (its evenness) and ignoring other features (that it is a product of two primes, that it is divisible by 3). It is almost impossible to tell whether someone else is stressing and ignoring the same way that you are, without recourse either to algebra or considerable discussion.“ (Mason & Pimm, 1984, S. 288)

Um 6 als generisches Beispiel für eine gerade Zahl zu verstehen, ist es danach nötig, auf bestimmte Eigenschaften der Zahl (Vielfaches von 2) zu fokussieren, für welche diese als Repräsentant steht, und von anderen spezifischen Eigenschaften zu abstrahieren. Dies ist deutlich konkreter als in den Ausführungen Semadenis (vgl. Abschnitt 2.3.4), wo generisch in der Weise verstanden wird, dass das Beispiel gar keine spezifischen Eigenschaften aufweist. Die Zahl 6 muss als konkreter, aber nicht spezifischer (im Sinne weitere spezifischer Eigenschaften über die gewünschte hinaus) Repräsentant aller gerader Zahlen wahrgenommen werden, also 6 als „PARTICULAR, but non-specific even number.“ (Mason & Pimm, 1984, S. 283)

Dabei betonen Mason und Pimm wieder, dass das Verständnis der Allgemeingültigkeit in beispielgebundenen Darstellungen, also deren Grad an Generizität, individuell vom Betrachtenden abhängt. Sie sehen darin bei der Vermittlung dieses Aspektes eine große Schwierigkeit: „How can you expose the genericity of an example to someone who sees only its specificity.“ (Mason & Pimm, 1984, S. 287). Sie betonen in obigem Zitat aber auch die wichtige Rolle von Diskussionen beispielgebundener Darstellungen, um mehr Aufschluss über das Verständnis der Generizität einer anderen Person zu erhalten. Daher werden auch im Rahmen der Intervention entsprechende Diskussionen durchgeführt.

Das gleiche Prinzip, das Mason und Pimm für konkrete Darstellungen benutzen, wird von Mason und Pimm auch für Beweise formuliert, die mit konkreten Darstellungen arbeiten:

„The generic proof, although given in terms of a particular number, nowhere relies on any specific properties of that number.“ (Mason & Pimm, 1984, S. 284)

Allgemeingültigkeit wird in obigem Zitat verstanden im Sinne einer Nicht-Spezifität der verwendeten Darstellungen im Beweis. Die Allgemeingültigkeit könnte also prinzipiell getestet werden, indem man lediglich das konkrete Beispiel betrachtet und prüft, inwieweit in der Argumentation **Spezifitäten**¹⁶, also spezifische Eigenschaften des konkreten Beispiels, (über das, was dieses Beispiel repräsentieren soll hinaus) genutzt wurden. Yopp und Ely (2016) formulieren dies konkret als Kriterium, um die Generizität eines Beweisversuchs zu prüfen. Sie schlagen zunächst vor, den entsprechenden Beweisversuch im Sinne des Toulmin-Modells (siehe Abschnitt 2.3.2) zu strukturieren in eine Kette aus Beweisschritten und der Explikation der entsprechenden Schlussregeln („warrants“), wobei entsprechende Lücken, falls möglich, gefüllt werden. Es wird hier also von einem formal-deduktiven Beweisverständnis ausgegangen. Der Beweisversuch wird also im Sinne eines deduktiven Beweisverständnisses bereits so umstrukturiert, dass er logisch strukturiert, vollständig und kohärent ist. Diese Aspekte werden dabei also nicht evaluiert, sondern vor dem Hintergrund, dass diese gegeben sind, die Allgemeingültigkeit. Um diese zu prüfen, schlagen Yopp und Ely folgendes Vorgehen vor:

„Check the warrants for each frame, starting with the example that instantiates the hypothesis. The warrants may use only features of the example that are either defining features of the objects in the (original) claim’s hypothesis or new features already established in the previous frames (perhaps through prior results). If so, the argument does not violate these warrant rules, and the example is appealed to generically.“ (Yopp & Ely, 2016, S. 46)

Ein auf einer konkreten Darstellung beruhender Beweisversuch ist also dann generisch, wenn in jedem Argumentationsschritt („frame“) für die Begründung von Zusammenhängen aufeinanderfolgender Beweisschritte nur Eigenschaften genutzt werden, die das Beispiel laut Voraussetzung erfüllt oder die in vorherigen Argumentationsschritten (oder anderen Sätzen) bereits begründet wurden. Insbesondere wird hier die Klasse an Objekten (vgl. Abschnitt 2.3.4) spezifiziert, für welche die konkrete Darstellung ein Repräsentant ist. Das Beispiel soll die Hypothese, also in der in Abschnitt 2.3.4 etablierten Terminologie, die Voraussetzung repräsentieren. Im weiteren Verlauf des Beweises dürfen nur die in der Voraussetzung geforderten Eigenschaften an diese Objekte (und bereits etabliertes Wissen) genutzt werden. Die Klasse an Objekten ist damit a priori durch die in der zu beweisenden Aussage formulierte Voraussetzung gegeben und wird nicht, wie bei Semadeni, erst a posteriori festgelegt (vgl. Abschnitt 2.3.4).

¹⁶ Dieser Begriff wurde von Gayer (2023), auf der Grundlage der Arbeiten von Mason und Pimm (1984) und Yopp und Ely (2016), eingeführt.

Balacheff beschreibt ein generisches Beispiel in ähnlicher Weise, wobei er nicht explizit von einem formal-deduktiven Beweisverständnis ausgeht, sondern eher von einem operativen:

„The generic example involves making explicit the reasons for the truth of an assertion by means of operations or transformations on an object that is not there in its own right, but as a characteristic representative of its class. The account involves the characteristic properties and structures of a class, while doing so in terms of the names and illustrations of its representatives.“ (Balacheff, 1991, S. 219)

Einen generischen Beweis erhält man nach Balacheff nicht allein dadurch, dass man ein generisches Beispiel wählt, sondern darüber hinaus muss auch die Operation an diesem Beispiel generisch sein, das heißt für alle Objekte funktionieren, die der gleichen Klasse angehören. Dies entspricht dem Verständnis von Allgemeingültigkeit bei Wittmann (vgl. Abschnitt 2.3.4). Dieses Verständnis wird im Rahmen dieser Arbeit als **klassifikatorisches¹⁷ Verständnis** bezeichnet und dient im Rahmen dieser Arbeit als Grundlage für die Analyse des Verständnisses von Allgemeingültigkeit auf Lehrenden- und Lernendenseite. Dabei kann differenziert werden danach, ob nur einzelne Objekte oder auch Kohärenzen in klassifikatorischer Weise verstanden werden. Weiterhin kann untersucht werden, ob auch die Voraussetzung klassifikatorisch verstanden wird in der oben beschriebenen Weise, dass die in der Voraussetzung geforderten Eigenschaften der Objekte in die Betrachtung der Zusammenhänge einbezogen werden. In der Klassifikation von Beweisprozessen bei Balacheff (1988) stellt ein klassifikatorisches Verständnis eines der höchsten Level dar. Dies grenzt Balacheff von dem niedrigsten Level der „empirischen Naivität“ ab, wo die Betrachtung eines oder mehrerer einzelner Beispiele als ausreichendes Indiz für die Gültigkeit einer (allgemeingültigen) mathematischen Aussage ist. Dieses Verständnis, wonach die Reichweite einer Beispieldarstellung nicht über das singuläre Beispiel hinausgeht, wird im Rahmen dieser Arbeit als **singuläres¹⁷ Verständnis** bezeichnet. Es stellt damit eine bestimmte Erwartung an diese Reichweite dar, kann also als ein mögliches Verständnis von Allgemeingültigkeit betrachtet werden.

Für ein klassifikatorisches Verständnis von Allgemeingültigkeit reicht im Sinne von Yopp und Ely (2016) die Betrachtung interner Kohärenzen aus. Konkrete weitere Beispiele und die Herstellung von **Kohärenz zwischen den Beispielen**, also die Übertragung der Zusammenhänge im Sinne Semadeni, sind dabei nicht unbedingt notwendig. Laut Semadeni ist dieses Vorgehen jedoch zentral beim Aufbau eines tragfähigen Verständnisses der Allgemeingültigkeit eines Bewei-

17 Die Begriffe „klassifikatorisch“ und „singulär“ wurden, ausgehend von Balacheff (1988), in Bezug auf das Verständnis der Spezifitäten eines konkret dargestellten Beispiels von Gayer (2023) eingeführt.

ses. Erst durch die Übertragung auf andere Beispiele wird nach Semadeni ein Gefühl für das allgemeine Prinzip hinter der Argumentation entwickelt, welche sich dann auf beliebige Zahlen (der gleichen Klasse) übertragen lässt (vgl. Abschnitt 2.3.4). Damit wird der Schritt geebnet von einer rein **empirisch**¹⁸ verstandenen **Übertragbarkeit** auf einzelne weitere Beispiele, zu einer **allgemeinen**¹⁸ **Übertragbarkeit** auf alle (im Sinne der Voraussetzung relevanten) Beispiele. Bei der Konzeption der Intervention wird die Übertragung auf andere Beispiele daher explizit eingefordert, das Verständnis von Allgemeingültigkeit jedoch entlang der Kategorien klassifikatorisch und singulär analysiert.

2.4 Beispielgebunden ikonische Beweise

Wie sich in der Analyse der unterschiedlichen Beweisverständnisse gezeigt hat, stehen die Normen der Vollständigkeit, logischen Struktur, Kohärenz und Allgemeingültigkeit bei allen Beweiskonzeptionen im Zentrum der Betrachtung. Was sich unterscheidet je nach Beweisverständnis ist jedoch das Verständnis dieser Normen. Die Validität eines Beweises wird dabei, unabhängig von der Definition eines Beweises in der jeweiligen Konzeption, anhand dieser Normen festgemacht. Die Validität steht in der Verifikationsfunktion eines Beweises im Fokus, die anderen in Abschnitt 2.3.1 aufgeführten Funktionen zielen eher auf die didaktische Perspektive auf Beweise und deren Rolle bei Lernprozessen innerhalb der Mathematik. Diese Funktion wird daher als Ausgangspunkt für die Definition eines Beweises im Rahmen dieser Arbeit genutzt. Weiterhin wird die Begrifflichkeit für die externe Entität, die bewiesen werden soll, festgelegt mit dem Begriff der *Aussage*. Damit ergibt sich die folgende Definition:

Ein Beweis einer mathematischen Aussage ist ein allgemeingültiger, vollständiger, kohärenter und logisch strukturierter Nachweis der Gültigkeit der Aussage.

Mit dem Begriff des *situierten Beweisverständnisses* wird im Rahmen dieser Arbeit das situierte Verständnis dieser Normen sowie deren Interdependenzen bezeichnet.

Die in Abschnitt 2.3 diskutierten didaktischen Beweiskonzeptionen basieren jeweils auf bestimmten didaktischen Hintergrundtheorien. Das Beweis- und Normenverständnis wird in diesen Konzeptionen dabei implizit bereits durch deren Bezeichnung kommuniziert: Bei präformalen Beweisen steht die Formalisierbarkeit im Zentrum, bei operativen Beweisen und action proofs das operative Prinzip und bei generischen Beweisen die Generizität der Darstellung. Bei generischen Beweisen zeigte sich diese Bezeichnung zudem insofern als problematisch, als mit dem Attribut generisch nicht klar differenziert werden kann zwischen der Benennung des Beweistyps und der Erfüllung der Norm der All-

¹⁸ Diese Begriffe wurden von Gayler (2023) eingeführt.

gemeingültigkeit durch einen Beweis dieses Typs (vgl. Abschnitt 2.3.5). Um eine Diskussion über Normen möglichst frei von Vorannahmen zu deren Verständnis führen zu können, wurde für diese Arbeit eine Klassifikation von Beweistypen entwickelt, die weitgehend unabhängig von didaktischen Hintergrundtheorien ist. Im Weiteren ist daher auch nicht von Beweiskonzeptionen, sondern von Beweistypen im engeren Sinne die Rede.

In den diskutierten Beweiskonzeptionen wurde meist mit ikonischen Darstellungen gearbeitet, welche sich in besonderer Weise für den Anfangsunterricht in der Schule (vgl. Abschnitt 2.4.1) eignen. Eine erste Systematisierung ergibt sich damit entlang der **Darstellungsebenen**. Gemäß Bruner (1967, S. 42f) zählen zu diesen neben der ikonischen auch die enaktive, die sprachliche und die symbolische Darstellungsebene. Da es im Rahmen dieser Arbeit um verschriftlichte Beweisprodukte geht, die ohne mündliche Erläuterungen auskommen müssen, wird die sprachliche Darstellungsebene als notwendiger Bestandteil dieser Beweisprodukte angesehen und nicht als zusätzlicher Beweistyp (vgl. Abschnitt 2.4.3). Aus dem gleichen Grund wird in dieser Arbeit die enaktive Ebene insofern ausgeklammert, als nur die verschriftlichte ikonische Darstellung enaktiver Handlungen in den Blick genommen wird. Die Systematisierung entlang der Darstellungsebenen beschränkt sich damit auf die *ikonische* und die *symbolische* Darstellung.

Auf beiden Darstellungsebenen kann weiterhin nach dem **Formalisierungsgrad** differenziert werden, also danach, ob es sich um eine *beispielgebundene*¹⁹ Darstellung handelt, die mit einem konkreten Beispiel arbeitet, oder um eine *formale* Darstellung in dem Sinne, dass Variablen genutzt werden. Der Formalisierungsgrad gibt damit an, wie viel an Allgemeingültigkeit bereits potenziell durch die Darstellung vermittelt wird. Gemäß Mason und Pimm (1984) ist die Wahl des Formalisierungsgrades jedoch prinzipiell unabhängig davon, ob der entsprechende Beweisversuch die Norm der Allgemeingültigkeit tatsächlich erfüllt oder nicht (vgl. Abschnitt 2.3.5). Deshalb ist es wichtig diese Aspekte auch sprachlich klar zu trennen und eine Darstellungsweise mit Variablen nicht als allgemeine Darstellung zu bezeichnen, weil dies bereits das Vorhandensein einer allgemeingültigen Darstellung suggerieren könnte.

19 Der Begriff der „Beispielgebundenen Beweisstrategie“ wurde von Padberg in seiner „Einführung in die Mathematik“ geprägt (vgl. Padberg, 1997, S. 80 ff.). Er definiert diesen Begriff dort jedoch nicht explizit. Krumsdorf greift diesen im Rahmen seiner Dissertation zum „Beispielgebundenen Beweisen“ wieder auf. Dabei legt Krumsdorf den Fokus explizit auf den Prozess des Beweisens und nicht, wie im Rahmen dieser Arbeit, auf das Produkt des Beweises (vgl. Krumsdorf, 2015, S. 141).

Dies ergibt eine Klassifikation entlang der beiden Dimensionen der Darstellungsebene und des Formalisierungsgrades²⁰ (vgl. Abbildung 6). In der elementaren Zahlentheorie, die den inhaltlichen Rahmen für die Intervention liefert (vgl. Abschnitt 5.3.1), arbeitet eine beispielgebunden symbolische Darstellung dabei mit konkreten Zahlen, eine formal symbolische mit Variablen und algebraischen Ausdrücken. Für beispielgebunden ikonische Darstellungen werden konkrete Anzahlen an Plättchen verwendet. Für eine formal-ikonische Darstellung werden gemäß Kempen „geometrische Variablen“ (Kempen, 2019, S. 98) genutzt, die durch drei Punkte zwischen den Plättchen verdeutlichen, dass es sich um eine beliebige Anzahl an Plättchen handelt. In Abbildung 6 sind die entsprechenden Darstellungen einer geraden Zahl entlang dieser Klassifikation dargestellt. Eine gerade Zahl wird dabei symbolisch als Vielfaches von zwei dargestellt und ikonisch durch eine Anzahl an Plättchen, die sich restlos in Zweierpaare zerlegen lässt:

Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	$2 \cdot 3$	
formal	$2 \cdot n$	

Abbildung 6 Systematik der Beweistypen am Beispiel der Darstellung einer geraden Zahl

Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf beispielgebunden ikonischen Beweisen aus Gründen, die im Folgenden näher ausgeführt werden. Dabei werden Besonderheiten und Probleme in Bezug auf diesen Beweistyp in den Blick genommen, denen im Rahmen der Intervention begegnet werden muss.

2.4.1 Bedeutung beispielgebunden ikonischer Beweise für den Anfangsunterricht

Beispielgebundene Beweise, die verallgemeinernd ausgehend von konkreten Beispieldarstellungen arbeiten, stellen laut Stylianides (2016) einen bereits im Grundschulunterricht sinnvoll anwendbaren Beweistyp dar. Laut Söbbeke und Welsing (2017) können konkrete Beispieldarstellungen dabei in besonderer

²⁰ Diese entspricht der Klassifikation bei Kempen (2019), jedoch mit anderen Bezeichnungen.

Weise hilfreich sein, davon ausgehend verallgemeinerndes Denken zu entwickeln und damit ein erstes Verständnis von Allgemeingültigkeit.

Konkrete **ikonische** Darstellungen können als direkte Verschriftlichung enaktiver Beweise (im Sinne von action proofs, vgl. Abschnitt 2.3.5) verstanden werden, die mit Wendeplättchen und konkreten physischen Operationen an diesen arbeiten. Konkretes Material bietet in diesem Sinne die Möglichkeit des enaktiven Operierens mit diesem Material, was im Sinne Piagets dem natürlichen Lernprozess im Aufbau mathematischen Wissens entspricht:

„According to Piaget, mathematical knowledge is not derived from the objects themselves, but from operations with objects“ (Wittmann, 1998, S. 159)

Wittmann leitet daraus das operative Prinzip ab, wonach das Verständnis mathematischer Objekte durch das konkrete Operieren am Material entsteht (vgl. Abschnitt 2.3.4). Im Bereich der Arithmetik in der Grundschule kann die Arbeit mit Materialien wie Wendeplättchen genutzt werden, um Einblicke in die Natur natürlicher Zahlen und des Dezimalsystems zu erlangen (vgl. Steinweg 2002). In diesem Zusammenhang betont Wittmann, dass die Grundlegung der modernen europäischen Mathematik nicht mit formal-deduktiven Beweisen begonnen hat, sondern mit enaktiven beziehungsweise ikonischen Beweise, die eben solche Plättchen („counters“) nutzen:

„However, the early history of mathematics demonstrates very clearly the basic role of counters (“calculi”) in the development of arithmetic [...]. It is interesting to note that the ancient Greeks discovered and proved the first theorems on even, odd and figurate numbers by forming appropriate patterns of counters [...]“ (Wittmann, 1998, S. 158)

In der jüngeren Geschichte der Mathematikdidaktik wird die Bedeutung von ikonischen Repräsentationen, wie der hier beschriebenen Plättchen, für den Aufbau mentaler Modelle von mathematischen Konzepten betont (vgl. Krauthausen 1994). Dabei wollen die Autoren diese nicht als reines Hilfsmittel für schwächere Lernende verstanden wissen:

„Concrete and visual representations are neither only aids for the so-called ‘slow learners’ nor is their use restricted to the early steps of the learning process. They are important for all children and they are useful for the whole duration of the learning process.“ (Krauthausen, 1994, S. 33)

Für Wittmann sind enaktive beziehungsweise ikonische Repräsentationen selbst schon Träger theoretischer Beziehungen und haben daher vielfältige Einsatzmöglichkeiten bei der Darstellung und Kommunikation konzeptueller Zusammenhänge:

„[...] representations have an amphibianlike status: On the one hand they are quasi-real or, as in the case of counters, even real, on the other hand they carry theoretical relationships. As a consequence the use of representations is not restricted at all *to founding or illustrating concepts*. On the contrary:

Representations can be used and are used in the full process of making mathematics including mathematizing, discovering, reasoning, and communicating.“ (Wittmann, 1998, S. 159)

Durch die hier beschriebene Natur der Repräsentationen sind diese auch im Bereich des Begründens und Beweisens einsetzbar. Wittmann betont außerdem in diesem Zusammenhang die zentrale Bedeutung dieser Darstellungen im Grundschulunterricht, die Beweisaktivitäten auf intellektuell ehrliche Weise bereits ab der ersten Klasse erlauben:

„[...] appropriate representations are powerful enough to carry sound proofs. This fact opens up to mathematics education a new approach to the teaching of proofs: instead of postponing the activity of proving to higher grades where the students are expected to be mature for some level of formal argument, informal proofs with concrete representations of numbers and geometric figures can be developed from grade 1. Students can gradually learn to express conceptual relationships more and more formally.“ (Wittmann, 2021b, S. 143)

Die Wichtigkeit der frühen Auseinandersetzung mit Beweisen bereits in der Grundschule formulieren auch Stylianides und Stylianides:

„when [students] do experience proof, it seems alien rather than a natural extension of things they have already learned. Therefore, there is growing appreciation of the importance of the goal to make proof central to students' mathematical education as early as the elementary grades“ (Stylianides & Stylianides, 2009, S. 238)

Stylianides formuliert dies als eines der grundlegenden Prinzipien beim schulischen Beweisen, dem sogenannten *Kontinuumsprinzip*:

„The continuum principle states that there should be continuity in how the notion of proof is conceptualized in different grade levels so that students' experiences with proof in school have coherence.“ (Stylianides, 2007a, S. 3)

Ikonische Beweise stellen laut Wittmann valide Beweise dar und haben einen weiteren entscheidenden Vorteil gegenüber rein formal-deduktiven Beweisen: Danach sind diese Beweise eher bedeutungsvoll in dem Sinne, dass sie im Sinne Hannas (1989) „proofs that explain“ darstellen und keine bloßen „proofs that proof“, die zwar die Aussage beweisen, aber keine Einsichten darüber zulassen, warum die Aussage gilt (vgl. Abschnitt 2.3.1). Für einen verstehensorientierten Zugang zum Beweisen, bereits in der Grundschule, ist es nach Blum und Kirsch wichtig, dass zukünftige Lehrpersonen in ihrer Ausbildung in den entsprechenden Beweistypen unterrichtet werden:

„Everything said so far holds all the more for teacher training. In order to enable the future teacher to realize the aforesaid aspects in his (or her) instruction he himself has to be educated at university correspondingly, i.e. - among other things - he has to get to know proofs on different levels, and he has to learn to conduct such proofs for himself as well as to reflect upon that.“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 200)

Im Rahmen dieser Arbeit wird daher der Fokus auf beispielgebunden ikonische Beweise in der Lehramtsausbildung gelegt.

2.4.2 Schwierigkeiten mit beispielgebunden ikonischen Darstellungen

Wie in Abschnitt 2.4.1 erläutert, können beispielgebunden ikonische Darstellungen helfen beim Aufbau eines konzeptuellen Verständnisses und beim Herstellen und Kommunizieren allgemeiner Zusammenhänge in mathematischen Beweisen. Ikonische Darstellungen, und damit auch ikonische Beweise, sind jedoch nicht aus sich heraus verständlich. Bereits Schipper (1982) stellte fest, dass diese Repräsentationen einen neuen Lerngegenstand für die Lernenden darstellen, die diese vor neue Herausforderungen stellen. Empirische Studien haben dies bestätigt (vgl. z. B. Radatz 1986). Die spezifischen Schwierigkeiten wurden in verschiedenen Forschungsarbeiten herausgearbeitet. In Bezug auf ikonische Beweise sind dabei insbesondere die folgenden zentral: Schwierigkeiten, ikonisch dargestellte Operationen zu erkennen (vgl. Cuoco & Goldenberg, 1992), verschiedene Strukturen in einem Ganzen wahrnehmen zu können (vgl. Wertheimer, 1938), ikonische Darstellungen mit analytischem Denken zu verbinden (vgl. Presmeg, 1986), und in Bildern enthaltene Argumentationen zu verstehen (vgl. Bardelle, 2010). Bardelle (2010) stellte fest, dass ikonische Darstellungen in Beweisen meist nur als Werkzeug oder Veranschaulichung verstanden werden und in der konkreten Auseinandersetzung mit dem Beweis eigenständig auf eine andere, meist formale, Darstellungsebene gewechselt wird.

Kempen und Biehler (2019) untersuchten den Umgang von Lehramtsstudierenden mit den in Abschnitt 2.4 erläuterten Beweistypen²¹. Auch nach der Intervention von Kempen und Biehler (2019) waren nur 13,5% der Studierenden in der Lage einen beispielgebunden ikonischen Beweis zu formulieren, der alle in Abschnitt 2.2 explizierten Normen²² erfüllt, was deutlich unter den Ergebnissen für die anderen Beweistypen liegt. Kempen und Biehler (2015) stellten zudem fest, dass viele Studierende ikonische Beweise sogar als schwieriger empfanden als die anderen Beweistypen. Mögliche Gründe dafür können darin liegen, dass der Umgang mit Variablen aus der Schule bekannt ist, der Umgang mit ikonischen Darstellungen aber ein neues Lernfeld darstellt. Das nötige *collateral knowledge*²³ (vgl. Hoffmann, 2007, S. 188) zum Umgang mit Punktmustern muss erst aufgebaut werden.

21 Kempen und Biehler (2019) gehen dabei von der gleichen Klassifikation der Beweistypen aus, bezeichnen diese jedoch in anderer Weise.

22 Diese Normen werden von Biehler und Kempen nicht explizit so benannt, in Abschnitt 2.2 wurden die Normen jedoch auf Grundlage des in dieser Studie genutzten Kategoriensystems zur Klassifizierung der Studierendenprodukte hergeleitet.

23 Der Begriff „collateral knowledge“ wurde von Pierce eingeführt. Nach Hoffmann beschreibt dieser Begriff Wissen, das notwendig ist für die betreffende kognitive Aktivität, hier das ikonische Beweisen, aber selbst nicht explizit gemacht wird.

Kempen (2018) untersuchte in seiner quantitativen Studie mit Lehramtsstudierenden darüber hinaus die Akzeptanz formaler und ikonischer Beweise und unterschied dabei nach den Beweisfunktionen Überzeugung („conviction“, S. 226), Erklärung („explanation“, S. 226) und Verifikation („verification“, S. 226). Der beispielgebunden ikonische Beweis wies dabei hohe Werte bei den ersten beiden Funktionen auf (im Mittel 5 von 6 Punkten), beim Aspekt der Verifikation jedoch sehr niedrige (im Mittel 2 von 6 Punkten). Danach haben für die Studierenden ikonische Beweise mehr Erklärungspotenzial und führen zu höherer subjektiver Überzeugung von der Richtigkeit der Aussage, sie werden jedoch in der Mehrheit nicht als valide Beweise im Sinne einer Verifikationsfunktion betrachtet werden. Für formal ikonische Beweise zeigten sich bei der Verifikationsfunktion die gleichen niedrigen Werte wie beim beispielgebunden ikonischen Beweisversuch, zudem jedoch deutlich geringere Werte bei der Überzeugungs- und Erklärungsfunktion als beim beispielgebunden ikonischen Beweisversuch.

Auch Wittmann kam bezüglich der Akzeptanz beispielgebunden ikonischer Beweise als valide Beweise zu ähnlichen, rein qualitativen, Ergebnissen. Er legte seinen Studierenden in einer qualitativen Studie formal symbolische und beispielgebunden ikonische Beweise vor und ließ deren Validität einschätzen. Auch hier zeigte sich, dass die ikonischen Beweise zwar als intuitiv zugänglicher empfunden, aber nicht als valide Beweisform angesehen wurden:

„I prefer the symbolic proof, as school has confronted me only with this type of proof. These proofs guarantee generality. The iconic proof is more intuitive, which is surely an advantage for primary teaching. I for myself see the iconic proof more as an illustration and concretisation of the symbolic proof.“ (Wittmann, 2021a, S. 68)

In diesem Zitat einer/s Studierenden wird ein möglicher Grund für die geringere Akzeptanz von beispielgebunden ikonischen Beweisen gegenüber formal symbolischen Beweisen deutlich: das Fehlen dieser Beweisform im Schulunterricht und damit einhergehend eine ausschließliche Fokussierung auf formal symbolische Beweise. Ein weiterer möglicher Grund ergibt sich aus der Feststellung von Weber und Czocher (2019), dass selbst unter Fachmathematikern Uneinigkeit bezüglich der Validität beispielgebunden ikonischer Beweise besteht.

Vor dem Hintergrund der zentralen Bedeutung für den Anfangsunterricht und der in Abschnitt 2.3.4 begründeten grundsätzlichen Validität dieses Beweistyps ergibt sich die Wichtigkeit der Thematisierung beispielgebunden ikonischer Beweise in der Lehramtsausbildung und die eingehende Auseinandersetzung damit, wann ein solcher Beweis valide ist. Dies ist ein weiterer Grund für die Fokussierung auf diesen Beweistyp bei der Auseinandersetzung mit dem Normenverständnis in Bezug auf Beweise.

2.4.3 Die sprachliche Darstellungsebene in beispielgebunden ikonischen Beweisen

Die geringe Akzeptanz von beispielgebunden ikonischen Beweisen als valide Beweise kann auf Seiten von Fachmathematiker/innen nach Inglis und Mejía-Ramos (2008) dadurch erhöht werden, dass diese durch eine sprachliche Erläuterung begleitet werden. In der Fachdidaktik betonte Bardelle die Wichtigkeit der Verbindung zweier Darstellungsebenen, wie hier der ikonischen und der sprachlichen, für den Aufbau eines vertieften Verständnisses eines mathematischen Konzepts:

„[...] the coordination of at least two different semiotic systems of representation of a concept can improve its understanding.“ (Bardelle, 2010, S. 259)

In der Fachdidaktik besteht dabei weitgehend Einigkeit, dass ein beispielgebunden ikonischer Beweis immer einer sprachlichen Erläuterung bedarf, um als valider Beweis gelten zu können (vgl. u. a. Biehler & Kempen, 2016; Müller & Wittmann, 1988; Reid & Vallejo-Vargas, 2018). Wittmann stellt dabei fest, dass die sprachliche Darstellungsebene in beispielgebunden ikonischen Beweisen sehr unterschiedlich eingesetzt wird:

„Some of them consist mainly of a text and use a figure just for supporting the text. Others rely heavily upon figures and transformations and contain only a few explaining lines.“ (Wittmann, 2021b, S. 140)

Danach steht entweder die sprachliche Darstellung im Vordergrund, die durch eine zusätzliche ikonische Darstellung veranschaulicht wird oder die ikonische Darstellung steht im Vordergrund und die Sprache soll nur beim Verständnis unterstützen. Für Biehler und Kempen (2016), Wittmann und Ziegenbalg (2007) sowie Reid & Vallejo-Vargas (2018) besteht die wesentliche Rolle der sprachlichen Erläuterung darin, den allgemeinen Charakter der ikonisch dargestellten Kohärenzen zu explizieren:

„Es muss schon durch einen erklärenden Text sichergestellt werden, dass die zur Begründung von Beziehungen angewandten Operationen wirklich allgemein ausführbar sind.“ (Wittmann & Ziegenbalg, 2007, S. 42)

Nach Wittmann und Ziegenbalg ist damit nicht eine Darstellungsebene der anderen untergeordnet, sondern die ikonische und die sprachliche Darstellungsebene werden beide als gleichberechtigte und unerlässliche Bestandteile eines beispielgebunden ikonischen Beweises angesehen. Ein Beispiel dafür findet sich in dem operativen Beweis aus Abschnitt 2.3.4:

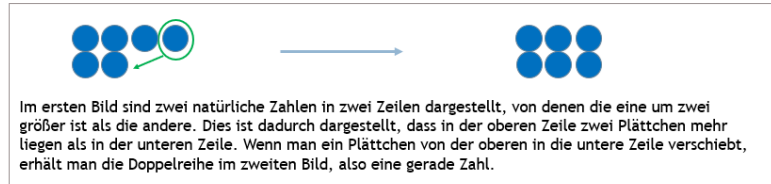


Abbildung 7 Operativer Beweis zur Aussage „Die Summe zweier natürlicher Zahlen im Abstand 2 ist immer gerade“ (entspricht **Abbildung 3**)

Hier wird über die sprachliche Darstellungsebene verdeutlicht, dass man durch die Operation des Verschiebens eines von anfangs zwei überstehenden Plättchen immer eine Doppelreihe erhalten kann. Bei Wittmann wird die Bedeutung der sprachlichen Darstellungsebene außerdem anhand eines ikonischen Beweises für den Satz des Pythagoras dargelegt. Dabei sollen laut Wittmann die internen Kohärenzen und die externe Kohärenz zur Aussage explizit sprachlich begründet werden:

„However, it is essential for the soundness of the proof that the decomposition of figures into parts and their rearrangement is accompanied by explanations of *why* the figures fit together in different ways and *what* this means for area.“ (Wittmann, 2021b, S. 142)

Zentrale Rolle spielt die sprachliche Darstellung in einem beispielgebunden ikonischen Beweis somit insbesondere in Bezug auf die Normen der Allgemeingültigkeit und Kohärenz. Im Rahmen dieser Arbeit wird für beispielgebunden ikonische Beweise daher stets eine zusätzliche sprachliche Erläuterung eingefordert. Zudem wird in der Analyse des Normenverständnisses differenziert nach den Darstellungsebenen ikonisch und sprachlich.

2.4.4 Kohärenzebenen in beispielgebunden ikonischen Beweisen

Um die Allgemeingültigkeit einer beispielgebunden ikonischen Darstellung herauszuarbeiten, ist es laut Semadeni unerlässlich, die konkrete Beispieldarstellung auf andere Beispiele zu übertragen (vgl. Abschnitt 2.3.5). Diese Übertragung wird daher auch im Rahmen der Intervention explizit eingefordert. Dafür soll explizit die Übertragbarkeit, also die Kohärenz zu (mindestens) einem weiteren **Beispiel**, untersucht werden. Um diese Übertragbarkeit zu gewährleisten, müssen die **internen Kohärenzen** in klassifikatorischer Weise verstanden und in einer Weise übertragen werden, dass die **externe Kohärenz** zur Aussage erhalten bleibt. Die sprachliche **Darstellungsebene** darf dabei nur so viel Information enthalten, dass diese für beide Beispiele Gültigkeit hat und genau so viel an Information enthalten, dass die Kohärenzen ausreichend begründet sind. Zentral für die Untersuchung des Verständnisses der **Allgemeingültigkeit** sind

daher die Kohärenzebenen der Kohärenz zwischen den Beispielen, der internen Kohärenz, der externen Kohärenz und der Kohärenz der ikonischen und sprachlichen Darstellungsebene. Weiterhin lässt sich das Verständnis der **logischen Struktur** differenziert untersuchen durch die Betrachtung der Organisation der Entitäten innerhalb und zwischen diesen Kohärenzebenen.

3 Empirische Studien zum situierten Beweisverständnis

Ziel dieses Abschnittes ist es, das methodische Vorgehen der grundlegenden Arbeiten zum situierten Beweisverständnis zu vergleichen, um vor diesem Hintergrund das methodische Vorgehen im Rahmen dieser Arbeit herauszuarbeiten. Der Rahmen für die ausgewählten Studien ist an dieser Stelle weiter gefasst als die Untersuchung des Verständnisses der einzelnen Normen aus Abschnitt 2.2, da es wenige Studien gibt, die explizit den gleichen normativen Rahmen wie diese Arbeit zugrunde legen. Die Auswahl ist dabei beschränkt auf die insofern für die Auseinandersetzung mit der Thematik grundlegenden Studien, als diese von den meisten neueren Arbeiten als theoretische Grundlage genutzt werden. Dies betrifft die folgenden Arbeiten: Healy und Hoyles (2000), Knuth (2002), Selden und Selden (2003), Martin und Harel (1989), Alcock und Weber (2005) sowie Heinze und Reiss (2003). Weiterhin wird eine neuere Arbeit von Sommerhoff und Ufer (2019) einbezogen, die einen ähnlichen normativen Rahmen zugrunde legt wie diese Arbeit.

Zunächst wird der Forschungsfokus dieser Studien analysiert (3.1). Dabei wird untersucht, wie eng gefasst der normative Rahmen in den jeweiligen Arbeiten ist, also insbesondere, welche Normen untersucht werden und inwieweit diese vorab festgelegt wurden. Allen Arbeiten gemein ist, dass diese im Sinne der Erhebung eines situierten Verständnisses auf der Grundlage von breaching experiments (vgl. Abschnitt 1.1.2) arbeiten, also mit konkreten Beweisversuchen, die von den Studienteilnehmenden bewertet werden sollen. Die wesentlichen Designelemente dabei sind die Beweisversuche selbst und das Erhebungsformat, also die Fragestellungen, die zu diesen Beweisversuchen formuliert wurden. Diese Elemente werden in den Unterkapiteln 3.2 und 3.3 über die Studien hinweg verglichen. Anschließend wird das Beweis- und Normenverständnis auf Forschendenseite verglichen (3.4), das meist nur implizit in den Normbrüchen der Beweisversuche erkennbar ist. Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse zum Normenverständnis auf Lernendenseite zusammengefasst (3.5). In diesen Teil fließen weitere empirische Studien ein als die oben genannten.

3.1 Fokus des Forschungsinteresses

Das Forschungsinteresse der hier analysierten Arbeiten hat zwei Hauptfoki mit mehr oder weniger explizitem Bezug zu einem normativen Rahmen – *Beweisvorstellungen* („conceptions of proof“) und *Beweisvalidierungskompetenzen*.

In der sehr breit angelegten quantitativen Studie von Healy und Hoyles (2000) mit 2459 14-15jährige Schüler/innen in England und Wales zu „proof conceptions in algebra“ (Healy & Hoyles, 2000, S.1) liegt der Forschungsfokus auf einer „analysis of the notions of proof held by students“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 398), also bei den Beweisvorstellungen. In diesem Rahmen werden von Healy und Hoyles verschiedene Fragen aufgeworfen:

„Were students competent at constructing or evaluating a mathematical proof? What did students judge to be the nature of mathematical proof? What did they see as its purpose? Did they see proving as verifying cases or convincing and explaining?“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 398)

Hier werden Beweisvalidierungskompetenzen mit subsumiert unter den Beweisvorstellungen. Beweisvorstellungen werden damit sehr breit gefasst und umfassen verschiedene Facetten, wie **Normen von Beweisen** („nature of mathematical proof“) und Beweisfunktionen („purpose“). In der letzten Frage werden Funktionen von Beweisen wie Verifikation, Überzeugung und Erklärung vermischt mit der Norm der **Allgemeingültigkeit**.

Bei der Untersuchung der Validierungskompetenz wird vorab von Forschenden-seite aus festgelegt, welche der den Schüler/innen vorgelegten Beweisversuche als valide und welche als nicht valide angesehen werden. In der Operationalisierung der Validierungskompetenz wird ein Validitätsrating hinsichtlich der Adäquatheit der Einschätzung der Schüler/innen zur Validität der Beweisversuche errechnet aus Fragen zur Norm der Korrektheit²⁴ („Has a mistake in it“, Healy & Hoyles, 2000, S. 403) und der **Allgemeingültigkeit** („Shows that the statement is always true.“, „Only shows that the statement is true for some even numbers“, Healy & Hoyles, 2000). Diese beiden Normen werden hier also als Unterasspekte der Validität aufgefasst, klar voneinander abgegrenzt und explizit abgefragt.

In der Studie von Selden und Selden (2003) wurden die Validierungskompetenzen von acht Mathematikstudierenden im „transition to proof“ Kurs (2. bis 4. Semester) untersucht. Validierung bedeutet laut Selden und Selden: „checking whether such arguments really are proofs of theorems“ (Selden & Selden, 2003,

²⁴ Diese Norm wurde nicht in den dieser Arbeit zugrunde liegenden normativen Rahmen (entsprechend Abschnitt 2.2) einbezogen, obwohl diese relevant für die Bewertung der Validität eines Beweisversuchs ist. Bei der Korrektheit handelt es sich jedoch nicht um eine Norm, bei welcher von grundlegend verschiedenen Verständnissen ausgegangen werden kann. Vielmehr steht bei dessen Einschätzung das Beweisverstehen im Fokus, also insbesondere die Frage, ob Fehler erkannt werden oder nicht.

S. 1). Selden und Selden beziehen sich in ihrem Verständnis von Validierung auf die Leseverständnissforschung Ende des letzten Jahrhunderts, die Validierung als individuelle Bedeutungskonstruktion der/s Lesenden auffasst und die Validität als etwas, das auf Lesendenseite entsteht und nicht dem Text inhärent ist. Nichtsdestotrotz legen sie ihrer Analyse die eigene Bedeutungskonstruktion zugrunde. Um die Validierungskompetenz zu erheben, starten Selden und Selden dabei damit, die den Studierenden vorgelegten Beweisversuche zunächst selbst zu analysieren und etablieren dadurch implizit einen normativen Rahmen für die spätere Analyse der Validierungsprozesse der Studierenden. Sie versuchen also nicht die Verständnisse der Studierenden ohne normative Vorgaben zu rekonstruieren, sondern gleichen deren Validierungsverhalten mit dem eigenen, als normativ bindend verstandenen, Validierungsverhalten ab. Die entsprechenden Normen werden jedoch nicht explizit als solche auf der Metaebene benannt.

Knuth (2002) legt in seiner qualitativen Studie „Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof“ mit sechzehn Lehrkräften den Fokus auf Beweisvorstellungen von Sekundarlehrkräften. Die halbstrukturierten Interviews starteten dabei mit offenen Fragen zu individuellen Beweisvorstellungen, die, wie bei Healy und Hoyles, sehr breit gefasst sind und zum Beispiel auch Fragen zu den Funktionen von Beweisen mit einschließen. Im zweiten Interviewteil liegt der Fokus dann auf „teachers' understandings of what constitutes proof“ (Knuth, 2002, S. 383), also explizit bei Normen von Beweisen. Dies wird explorativ untersucht, ein konkreter normativer Rahmen wurde hier somit nicht vorab festgelegt.

In den Studien von Martin und Harel (1989) und Alcock und Weber (2005) liegt der Forschungsfokus jeweils auf einer Norm. In der Studie von Martin und Harel (1989) „Proof Frames of Preservice Elementary School Teachers“ liegt dieser auf dem Verständnis der **Allgemeingültigkeit** von 101 angehenden Grundschullehrkräften. Alcock und Weber (2005) untersuchen in ihrer Studie „Proof validation in real analysis: inferring and checking warrants“ die Validierungskompetenz von dreizehn Mathematikstudierenden im Eingangssemester und legen den Fokus dabei auf eine Norm, die ihrer Meinung nach bislang zu wenig erforscht wurde:

„[...] when one is validating a proof, it is not sufficient to make certain that each statement in the argument is true. One must also check that there is good reason to believe that each statement follows from the preceding statements or from other accepted knowledge, i.e. that there is a valid warrant for making that statement in the context of this argument.“ (Alcock & Weber, 2005, S. 1).

Hier liegt der Fokus auf der Norm der **Kohärenz**, die von der Norm der Korrektheit abgegrenzt wird.

Der expliziteste und umfassendste normative Rahmen findet sich in Arbeiten zum Methodenwissen, die auf die Arbeiten von Heinze und Reiss (2003) zurückgehen²⁵. Bei Heinze und Reiss werden explizit die von ihnen eingeführten Aspekte des Methodenwissens, und damit die Normen, die auch dieser Arbeit zugrunde liegen (vgl. Abschnitt 2.2), untersucht und nicht global die Validierungskompetenz. In der ursprünglichen Arbeit zu diesem Thema von Heinze und Reiss werden allerdings nur Normbrüche zu zwei der drei Aspekte des Methodenwissens vorgelegt. In einer neueren Studie von Sommerhoff und Ufer (2019), die von diesen Vorarbeiten ausgeht, werden alle drei Aspekte des Methodenwissens untersucht.

Fazit für Forschungsfokus für diese Arbeit

Die betrachteten Studien haben unterschiedlich weite Foki, die nicht nur Normen von Beweisen umfassen, sondern auch weitere Facetten von Beweisvorstellungen, wie Funktionen von Beweisen. Die Analyse der diskutierten Arbeiten zeigte dabei, dass diesen in ihrem Forschungsanliegen allen (mehr oder weniger) implizit ein **normativer Rahmen** zugrunde liegt. Am deutlichsten tritt dieser Rahmen in Arbeiten zum Methodenwissen zutage, welche auch die Grundlage für den in Abschnitt 2.2 etablierten normativen Rahmen dieser Arbeit liefern. Im Hinblick auf eine klare Fokussierung des Forschungsanliegens liegt der Fokus dieser Arbeit auf der Untersuchung des Verständnisses dieser Normen.

3.2 Konstruktion der Beweisversuche

In wenigen der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Studien wird explizit auf die Konstruktion der Beweisversuche eingegangen, die den Studienteilnehmenden vorgelegt werden. Meist werden die Beweisversuche entsprechend des theoretischen, durchaus normativ geprägten, Rahmens der Studie klassifiziert (vgl. Abschnitt 3.1), aber nicht näher erläutert, woher diese stammen beziehungsweise wie diese entwickelt wurden.

Healy und Hoyles (2000) beschreiben, dass sie in einer Vorstudie Schüler/innen der gleichen Jahrgangsstufe wie in der Hauptstudie Beweise haben erstellen lassen. Dieser Ansatz ist im Hinblick darauf zielführend, dass in dieser Studie Beweisvorstellungen erhoben werden sollen und dafür von typischen „Fehlern“ in dieser Alltagsstufe ausgegangen wird und untersucht wird, inwieweit diese von den Schüler/innen erkannt werden. Aus diesen Beweisen der Vorstudie wurden die Beweisversuche für die Hauptstudie generiert, die prototypische

²⁵ Diese bilden eine der Grundlagen, auf welchen der normative Rahmen erarbeitet wurde, der dieser Arbeit zugrunde liegt (vgl. Abschnitt 2.2).

Beispiele für Probleme mit der Norm der Allgemeingültigkeit oder der Darstellungsebene aufweisen. Der genaue Prozess von den anfänglichen Produkten der Schüler/innen hin zu den eher prototypischen und auf einzelne Normen fokussierten Beweisversuchen wird jedoch nicht genauer ausgeführt. Insofern wird nicht klar, ob die Normbrüche tatsächlich eine typische Umsetzung der Normen auf Lernendenseite widerspiegeln und somit von deren Normenverständnis ausgehen oder doch das Normenverständnis der Forschenden widerspiegeln, die diese Beweisversuche letztendlich konstruiert haben.

In der Studie von Selden und Selden (2003) werden **authentische Studierendenprodukte** genutzt, was dem Forschungsinteresse entspricht, die Validierungskompetenz zu erheben, die von den Studierenden erwartet wird – der kritische Umgang mit eigenen und fremden Studierendenprodukten. Eine Schwierigkeit bei diesem Vorgehen zeigt sich in der hohen internen Komplexität der Beweisversuche, die von den Studierenden diskutiert werden sollten. So stellen Selden und Selden der Analyse der Interviewdaten eine ausführliche Analyse der einzelnen Beweisversuche und der darin enthaltenen Normbrüche voran. In jedem Beweisversuch zeigen sich demnach Normbrüche auf verschiedenen Ebenen. Wenn es dabei dem natürlichen Validierungsverhalten der Studierenden entspricht, sich mit dem Auffinden lokaler, oberflächlicher Fehler zu begnügen, werden tiefer liegende Probleme vielleicht gar nicht mehr betrachtet und Nuancen im Normenverständnis können so nicht erhoben werden. In der Fülle an verschiedenen Ebenen und Normen innerhalb eines Beweisversuchs werden jedoch leicht tieferliegende Aspekte des Verständnisses der jeweiligen Norm verdeckt. Für geübtere Validierende, die, wie Lehrpersonen, regelmäßig vor der Aufgabe der Leistungsbewertung stehen, könnte dagegen die Auseinandersetzung mit authentischen Studierendenprodukten ein spannender Ansatz sein, um das Normenverständnis zu erheben.

Weiterhin macht die Konzeption als Einzelinterview es schwierig, Nuancen im Normenverständnis zu erheben, wenn sich nicht zu Sichtweisen anderer positioniert werden muss.

Bei Knuth (2002) wurden Beweisversuche aus der Literatur, vorwiegend aus der Geometrie, herangezogen, diese aber nicht vorab hinsichtlich der beinhalteten Normbrüche analysiert. Bei Martin und Harel (1989) wurden entsprechend des Forschungsinteresses Beweisversuche mit unterschiedlichen Graden an Allgemeingültigkeit genutzt, von der Überprüfung einzelner Beispiele über generische Beispiele bis hin zu formal-deduktiven Beweisen. Es sollte untersucht werden, welche dieser Beweisversuche als Beweise anerkannt werden und an welchen Kriterien dies festgemacht wird. Die Beweisversuche wurden von den **Forschenden** selbst **konstruiert**, zum Konstruktionsprozess der Beweisversu-

che werden keine Informationen gegeben. Bei Alcock und Weber (2005) finden sich keine genaueren Angaben zur Herkunft des verwendeten Beweisversuchs.

Auch in Studien, die einen klaren normativen Rahmen formulieren, wie die aufgeführten Studien zum Methodenwissen von Heinze und Reiss (2003) und Sommerhoff und Ufer (2019), werden die Beweisversuche von den **Forschenden** selbst **konstruiert** ohne nähere Hinweise zum Konstruktionsprozess zu liefern. Die Beweisversuche werden entlang des normativen Rahmens klassifiziert, wobei jeder Beweisversuch **genau einem Aspekt** des Methodenwissens zugeordnet wird und nicht innerhalb eines Beweisversuchs Normbrüche zu unterschiedlichen Beweisversuchen vermisch werden. Entsprechend dem Forschungsinteresse werden dadurch Schwierigkeiten mit den einzelnen Normen erhoben. Wie genau die Normen im Verständnis der Studienteilnehmenden zusammenhängen, lässt sich durch diese Methodik nur schwer erheben. Dafür eignen sich eher Beweisversuche, in welchen mehrere Normbrüche kombiniert auftreten.

Fazit zur Konstruktion der Beweisversuche in dieser Arbeit

Im Sinne des in Abschnitt 1.5 beschriebenen Aushandlungsprozesses muss hier unterschieden werden zwischen der Konstruktion der Beweisversuche zur Vorhebung des Normenverständnisses auf Lehrendenseite und der Konstruktion zur Erhebung auf Lernendenseite. Lehrende sollen sich demnach mit typischen Schwierigkeiten auf Lernendenseite auseinandersetzen. Daher wird hier dem Vorgehen von Healy und Hoyles (2000) sowie Selden und Selden (2003) gefolgt, wonach von **authentischen Produkten** auf Lernendenseite ausgegangen wird, diese aber in der Hinsicht geglättet werden, dass die Normbrüche klar zu Tage treten.

Für die Studierenden werden die Beweisversuche auf Grundlage des auf Lehrendenseite erhobenen Normenverständnisses konstruiert. Die entsprechenden Beweisversuche werden von **Forschendenseite** aus **konstruiert**, um die Normbrüche möglichst prototypisch darstellen zu können und die Komplexität der Beweisversuche zu reduzieren. Dabei soll sich nicht, wie bei den diskutierten Studien zum Methodenwissen, auf einen Normbruch pro Beweisversuch beschränkt werden, sondern es soll durch die **Kombination verschiedener Normbrüche** in einem Beweisversuch die Authentizität der Produkte aufrechterhalten werden und vor allem die Möglichkeit eröffnet werden, die Beziehung der Normen im Verständnis der Studierenden explizit zu erheben.

3.3 Erhebungsformate

Die Erhebungsformate unterscheiden sich vor allem in der Art der Fragestellungen, die zu den Beweisversuchen in den diskutierten Studien gestellt wurden. Diese Fragestellungen fokussierten unterschiedlich stark auf einzelne Normen. Meist haben diese ein **geschlossenes Format**, in welchem eine Bewertung auf einer Skala abgefragt wird, manchmal ergänzt durch das Einfordern von Begründungen oder lautem Denken.

In den Studien von Martin und Harel (1989) und Knuth (2002) wurde in geschlossenen Fragestellungen global nach der Validität der vorgelegten Beweisversuche gefragt. In der Studie von Healy und Hoyles (2000) wird ebenfalls in geschlossenen Frageformaten explizit nach der Norm der Korrektheit („Has a mistake in it“, S. 403) und der Allgemeingültigkeit („Shows that the statement is always true“, „Only shows that the statement is true for some even numbers“, S. 403) gefragt. In der Studie von Heinze und Reiss (2003) sollten die Schüler/innen laut denken, während sie die Beweisversuche evaluierten. Explizit gefragt wurde im Interview hier, wie bei Healy und Hoyles (2000), aber nur nach den Normen der Allgemeingültigkeit und Korrektheit und nicht nach den anderen Aspekten des Methodenwissens:

„In each case the students had to evaluate the solution and then to answer three questions: whether the proof is universally valid or whether it is only valid for special cases and whether the proof contains a mistake.“ (Heinze & Reiss, 2003, S. 6).

Auch bei Sommerhoff und Ufer (2019) sollten die Studienteilnehmenden entscheiden, ob es sich um einen „correct mathematical proof“ (S. 723) handelt. Hier wird also nicht klar sprachlich unterschieden zwischen Korrektheit und Validität. Korrektheit wird auch hier nicht als Unteraspekt, sondern eher als Synonym zu Validität verstanden. Bei Selden und Selden (2003) wird explizit nach der Korrektheit gefragt, wobei eigentlich die Validität im Vordergrund steht (siehe vorheriger Abschnitt).

Heinze und Reiss (2003) weisen außerdem explizit darauf hin, dass rein geschlossene Fragen im Multiple-Choice-Format nur oberflächliche Informationen über Schwierigkeiten der Schüler/innen mit den Normen liefern (vgl. Heinze und Reiss, 2003, S. 8). Deshalb wurden in ihrer Studie die Fragen durch **offene Interviewfragen** ergänzt. Auch Sommerhoff und Ufer (2019) ergänzen ihre geschlossenen Fragen durch das Einfordern von Begründungen für die Antworten auf diese Fragen. Diese werden entsprechend dem theoretischen Rahmen entlang der normativen Kategorien eingeordnet und die Passung zum intendierten Normbruch untersucht.

Eher qualitativ ausgerichtete Studien erheben durch lautes Denken die Validierungsprozesse der Studienteilnehmenden und lassen explizit an den Beweisversuchen problematische Punkte festmachen, fordern also eine **Konkretisierung** am Beweisversuch explizit ein (z. B. Selden & Selden, 2003). Knuth (2002) fordert außerdem explizit den **Vergleich von Beweisversuchen** hinsichtlich ihrer Überzeugungskraft ein. Alcock und Weber (2005) lassen ihre Studienteilnehmenden außerdem die Beweisversuche explizit **verbessern** und anschließend **erneut validieren**. Kommen diese nicht selbst auf den intendierten Normbruch, werden entsprechende **Impulse** geliefert.

Fazit zu den Erhebungsformaten in dieser Arbeit

An dieser Stelle muss unterschieden werden zwischen den Fragestellungen für die Erhebungsdokumente der Eingangs- und Ausgangserhebung und den Fragestellungen für die Intervention selbst. Im Hinblick darauf, dass vor Beginn der Intervention die normativen Begrifflichkeiten den Studierenden noch nicht bekannt sind, wurden für Eingangs- und Ausgangserhebung²⁶ **offene Fragen** zur Validierung der Beweisversuche gewählt. Um das Verständnis der Normen differenziert erheben zu können, ohne diese durch die Fragestellung bereits zu implizieren, wurde dabei lediglich abgefragt, was gut und was noch nicht gut umgesetzt ist im jeweiligen Beweisversuch. Die Erhebung ist als Paper-und-Pencil-Test in Einzelarbeit konzipiert, um das intrapersonelle Verständnis der Einzelpersonen erheben zu können.

Auch für die Gestaltung der Intervention wurde für den Einstieg in die Diskussion eine offene Fragestellung zum **Vergleich** der vorgelegten Beweisversuche hinsichtlich ihrer Validität gewählt (vgl. Knuth, 2002). Außerdem wurde sich an der Idee von Alcock und Weber (2005) orientiert, konkrete **Impulse** zu den intendierten Normbrüchen zu liefern. Diese werden nach dem offenen Einstieg in der Intervention als Arbeitsaufträge formuliert. Die entsprechende Norm wird dabei zwar nicht explizit benannt, jeder Impuls zielt jedoch auf ein bis zwei der Normen ab.

Außerdem wird im zweiten Teil der Intervention, wie bei Alcock und Weber (2005), die **Verbesserung** der vorgelegten Beweisversuche und eine **Validierung** dieser Beweisversuche entlang der Normen eingefordert. Im Sinne der Erhebung des situierten Normenverständnisses wird außerdem stets eine **Konkretisierung** am vorgelegten Beweisversuch eingefordert (vgl. z.B. Selden & Selden, 2003). In der Analyse der Diskussionen im Rahmen der Intervention wird diese Betrachtungsweise zudem einbezogen. Dabei wird differenziert zwischen einer Betrachtung des konkreten Beweisversuchs und einer Erörterung von Normen auf der Metaebene ohne Bezug zum konkreten Beweisversuch.

26 Die Eingangs- und Ausgangserhebung sind inhaltlich identisch (vgl. Abschnitt 5.2).

Allen Studien scheint zudem gemein zu sein, dass die Studienteilnehmenden individuell befragt wurden, wodurch deren intrapersonelles Verständnis erhoben werden konnte. Es ist dadurch jedoch nicht möglich, die Entwicklung eines interpersonell geteilten Verständnisses zu erheben. Im Rahmen der Intervention wird daher auf Diskussionen in **Kleingruppen** im Sinne von breaching experiments (vgl. Abschnitt 1.1.2) zurückgegriffen.

3.4 Normenverständnis auf Forschendenseite

In der groß angelegten quantitativen Studien von Healy und Hoyles (2000) mit 2459 Schüler/innen standen die Norm der Allgemeingültigkeit und der Aspekt der Darstellungsebene im Vordergrund. Sie gehen dabei von einem formal-deduktiven Beweisverständnis aus. Bei den den Teilnehmenden vorgelegten Beweisversuchen (vgl. Abbildung 8) wurde unterschieden zwischen einem empirischen Beweisversuch, der mehrere Beispiele auflistet („Bonnie’s“), einem generischen beispielgebunden ikonischen Beweisversuch („Yvonne’s“), zwei narrativen Beweisversuchen („Ceri’s“ und „Duncan’s“) und zwei formal symbolischen Beweisversuchen, einem validen (Arthur’s) und einem nicht validen (Eric’s).

Die **Allgemeingültigkeit** eines Beweisversuchs wird von Healy und Hoyles in Abgrenzung zu rein empirischen Begründungen und damit einem singulären Verständnis von Beispieldarstellungen (vgl. Abschnitt 2.3.5) verstanden. Dies spiegelt sich in folgendem Zitat wider: „Did they see proving as verifying cases or convincing and explaining?“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 398). Was genau einen generischen Beweis von einem nicht-generischen Beweisversuch unterscheidet wird aber nirgends explizit definiert. Implizit werden in der Diskussion der Beweisversuche Kriterien formuliert: „relied on common properties“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 400) und „suggested underlying reasons and explanations“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 400), wobei letzteres Kriterium, entsprechend der Klassifikation in dieser Arbeit, eher der Kohärenz zuzurechnen wäre. Es wird keine klare Grenzlinie zwischen empirischen und generischen Beweisversuchen gezogen. So wird Bonnies Beweisversuch von Healy und Hoyles als empirisch klassifiziert, wenngleich sich in den Beispielen durchaus ein Muster erkennen lässt, die Erhöhung um zwei von Rechnung zu Rechnung, welches sich verallgemeinert begründen ließe. Dieser Beweisversuch unterscheidet sich insofern wenig im Grad der Generizität von dem ikonischen Beweisversuch von Yvonne, welcher das allgemeine Muster hinter dem Beispiel auch nicht explizit formuliert, aber von Healy und Hoyles (2000) als generisch klassifiziert wird. Dies wird in der Diskussion der Ergebnisse nur implizit thematisiert, wenn zusätzlich zu den quantitativen Daten noch Interviewdaten hinzugezogen werden, aus

denen hervorgeht, dass Bonnies Beweisversuch deshalb als valider Beweis anerkannt wurde, weil dieses generische Moment entdeckt wurde (vgl. Healy & Hoyles, 2000, S. 411).

A1. Arthur, Bonnie, Ceri, Duncan, Eric, and Yvonne were trying to prove whether the following statement is true or false:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

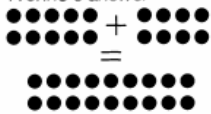
Arthur's answer
 a is any whole number
 b is any whole number
 $2a$ and $2b$ are any two even numbers
 $2a + 2b = 2(a + b)$
 So Arthur says it's true.

Bonnie's answer
 $2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$
 $2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$
 $2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$
 So Bonnie says it's true.

Ceri's answer
 Even numbers are numbers that can be divided by 2. When you add numbers with a common factor, 2 in this case, the answer will have the same common factor.
 So Ceri says it's true.

Duncan's answer
 Even numbers end in 0, 2, 4, 6, or 8. When you add any two of these, the answer will still end in 0, 2, 4, 6, or 8.
 So Duncan says it's true.

Eric's answer
 Let $x =$ any whole number,
 $y =$ any whole number
 $x + y = z$
 $z - x = y$
 $z - y = x$
 $z + z - (x + y) = x + y = 2z$
 So Eric says it's true.

Yvonne's answer

 So Yvonne says it's true.

From the above answers, choose **one** that would be closest to what you would do if you were asked to answer this question.

From the above answers, chose the **one** to which your teacher would give the best mark.

Abbildung 8 Beweisversuche aus der Studie von Healy und Hoyles (2000, S. 400)

Auch wenn der Fokus für Healy und Hoyles auf der Norm der Allgemeingültigkeit und dem Aspekt der Darstellungsebene liegt, geht es, wie oben angedeutet, implizit auch um die Norm der **Kohärenz**. Dabei ist festzustellen, dass sich die beiden narrativen Beweisversuche in ihrem Grad an Kohärenz durchaus unterscheiden, dies aber von Healy und Hoyles nicht explizit thematisiert wird. Beide behaupten implizit Zusammenhänge, ohne diese explizit zu begründen, aber nur

in Ceris Beweisversuch ließe sich diese Begründung einfach ergänzen durch Verweis auf das Assoziativgesetz. Der korrekte, formal symbolische Beweis wird beschrieben als „logical argument with explicit links made between premises and conclusions“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 402), also im Sinne einer global verstanden Kohärenz, wo der Gesamtzusammenhang zwischen Voraussetzung und Endergebnis explizit gemacht wird.

Die eigenen Beweisversuche der Schüler/innen wurden zudem nach dem Kriterium der **Vollständigkeit** bewertet: „42% of the narrative arguments were complete proofs“ (Healy & Hoyles, 2000, S. 415). Wie diese Norm genau verstanden wird, also wann ein Beweis als vollständig angesehen wird, wird jedoch nicht weiter expliziert.

Martin und Harel (1989) differenzieren die Norm der **Allgemeingültigkeit** in ihrer Studie entsprechend ihrem Forschungsinteresse weiter aus. Auch sie gehen von einem formal-deduktiven Beweisverständnis aus und formulieren dieses explizit unter Berufung auf Anderson. Anderson beschreibt einen Beweis als „deductively valid argument, where the conclusion is true if the premises are true.“ (zitiert nach Martin & Harel, 1989, S. 42). Dies kontrastieren Martin und Harel zu einem „inductively valid argument“ (zitiert nach Martin & Harel, 1989, S. 42) was sie als Alltagsverständnis von Beweisen annehmen. Um das Verhältnis dieser Verständnisse zu untersuchen, wurden verschiedene empirische Beweisversuche konstruiert („example“, „pattern“, „big number“ und „example“ and „non example“, Martin & Harel, 1989, S. 44), wobei Bonnies Beweisversuch aus dem Fragebogen von Healy und Hoyles (2000) der Kategorie „pattern“ zuzuordnen wäre. Diese Kategorie würde am ehesten einem klassifikatorischen Verständnis (vgl. Abschnitt 2.3.5) nahekommen, in welchem ein allgemeines Muster erkannt wird, das mehreren Beispielen zugrunde liegt. Um tatsächlich ein klassifikatorisches Verständnis zu erreichen, müssten diese Beispiele jedoch als Repräsentanten einer gemeinsamen Klasse erkannt werden. Außerdem nutzen Martin und Harel einen inkorrekten, formal symbolischen Beweis, einen als „general proof“ (Martin & Harel, 1989, S. 44) bezeichneten, korrekten, formal symbolischen Beweis und einen generischen, beispielgebunden symbolischen Beweis. Letzterer entspricht dem korrekten, formal symbolischen, wobei lediglich Variablen durch konkrete Zahlen ersetzt wurden (vgl. Abbildung 9). Was den generischen Beweis gegenüber dem empirischen auszeichnet, wird hier implizit an der grundsätzlichen Formalisierbarkeit des Arguments festgemacht. Die konkreten Zahlen könnten umgekehrt auch wieder durch Variablen ersetzt werden und liefern dadurch ein valides Argument. Die Validität des formal symbolischen Beweises wird an der **Vollständigkeit** und implizit auch an der **Kohärenz** des Argumentes festgemacht: „A correct general proof of the statement was presented, including statements justifying each step“. (Martin &

Harel, 1989, S. 44). Vollständigkeit wird hier verstanden in dem Sinne, dass jeder Beweisschritt explizit dargestellt ist, Kohärenz als das Liefern von Begründungen für jeden Beweisschritt.

General proof	Let a be any three-digit number, with digits x , y , and z . By the place value concept, $a = 100x + 10y + z$. This equality can be written $a = (99x + x) + (9y + y) + z$. By the commutative and associative properties, we get $a = (99x + 9y) + (x + y + z)$. Notice that the expression $99x + 9y$ is always divisible by 9, and therefore also by 3. Now if the second expression, which is the sum of the number's digits, is divisible by 3, then, by the "sum property," we get that the number itself is divisible by 3.
Particular proof	Consider 756. This number can be represented as follows: $756 = 7 \times 100 + 5 \times 10 + 6$. This can be rewritten $756 = (7 \times 99 + 7) + (5 \times 9 + 5) + 6$. By the commutative and associative properties, we get $756 = (7 \times 99 + 5 \times 9) + (7 + 5 + 6)$. Notice that the expression $7 \times 99 + 5 \times 9$ is always divisible by 9, and therefore also by 3. Now if the second expression, which is the sum of the number's digits, is divisible by 3, then, by the "sum property," we get that the number itself is divisible by 3.

Abbildung 9 Formal symbolischer und beispielgebunden symbolischer Beweis aus der Studie von Martin und Harel (1989, S. 45)

Martin und Harel untersuchen außerdem, wie Healy und Hoyles (2000), den Aspekt der Darstellungsebene und inwieweit dieser die Bewertung der Beweisversuche beeinflusst. Die Beweisversuche sind alle auf der symbolischen Ebene dargestellt (ggf. durch narrative Teile ergänzt), ikonische Darstellungen werden nicht genutzt. Martin und Harel legen den Fokus dabei auf die Frage, ob bei der Bewertung eher auf oberflächliche Merkmale („ritualistic aspects of proof“, Martin & Harel, 1989, S. 42) geachtet wird wie, ob es sich um eine formal symbolische Darstellung handelt, oder auf Merkmale, die wirklich für die Argumentation relevant sind.

Knuth (2002) geht von einem weniger formal-deduktiv geprägten Beweisverständnis aus. Für ihn liegt der Fokus auf unterschiedlichen Funktionen von Beweisen („roles of proof“, S. 379), die von den Lehrkräften wahrgenommen werden. Der Fokus liegt für Knuth dabei vor allem auf unterschiedlichen Graden der Erklärungskraft („explanatory role of proof“, S. 383) der Beweisversuche, also auf der Erklärungsfunktion von Beweisen. Knuth arbeitet hier vor allem mit Beispielen aus der Geometrie, wo sich die Frage der Generizität ikonischer Darstellungen nochmal anders stellt, weil die meisten Beweise in der Geometrie mit konkreten, aber generischen, Skizzen arbeiten. Er legt den Lehrkräften unter anderem zwei Beweisversuche (vgl. Abbildung 10) mit unter-

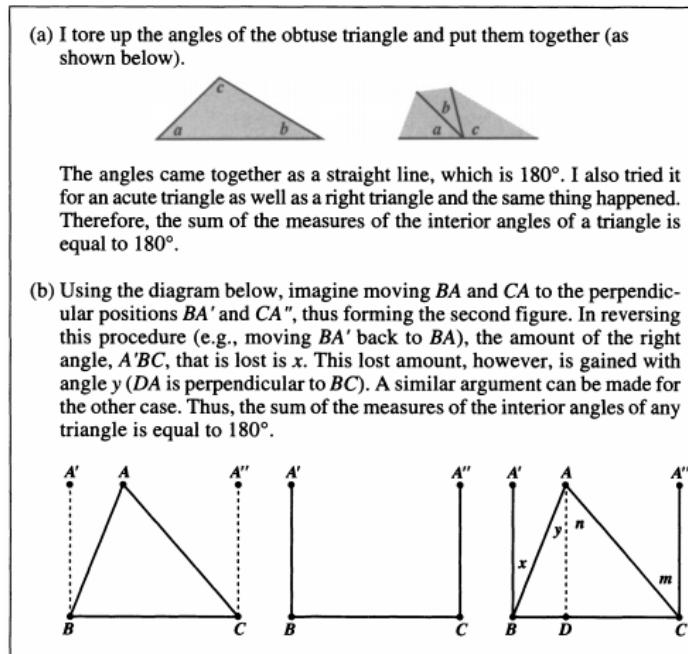


Abbildung 10 Beweisversuche aus der Geometrie mit unterschiedlichem Grad an Generizität aus der Studie von Knuth (2002, S. 392)

schiedlichen Graden an Generizität vor – einen rein empirischen und einen, der die wesentlichen Beweisschritte darstellt, aber keine Begründungen für deren Zusammenhänge liefert. So wird im zweiten Fall zwar behauptet, dass die entsprechenden Winkel gleich groß sind, nicht aber, dass dies aufgrund des Wechselwinkelsatzes der Fall ist. Hier wird die Norm der **Allgemeingültigkeit** also wieder implizit mit anderen Normen, denen der **Vollständigkeit** und der **Kohärenz**, vermischt, was von Knuth (2002) jedoch nicht explizit thematisiert wird. Auch Knuth formuliert nirgends explizit, woran er die Generizität der vorgelegten Beweisversuche festmacht und was diese von rein empirischen Überprüfungen unterscheidet. Sein genaues Verständnis von Allgemeingültigkeit bleibt also unklar und ebenfalls beschränkt auf eine Abgrenzung zu rein empirischen Beispielbetrachtungen.

Eine weitere Norm, die Knuth betrachtet, ist die der **logischen Struktur**. Er legte den Lehrkräften einen formal symbolischen Beweisversuch vor, mit korrekten algebraischen Umformungen, der allerdings die Umkehrung der Aussage beweist und nicht die Aussage selbst (vgl. Abbildung 11).

Prove: If $x > 0$, then $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ Assume true.

$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$ Subtracting 2 from each side and rewriting the left-hand side as a fraction with denominator of x .

$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ Factoring the numerator.

$x > 0$ Since the numerator is always positive and the fraction itself must be greater than or equal to zero, then the denominator must be positive.

Therefore, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ is equivalent to $x > 0$. It follows that if $x > 0$, then $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Abbildung 11 Beweisversuch mit Normbruch bei der logischen Struktur aus der Studie von Knuth (2002, S. 393)

Die Norm der logischen Struktur wird hier also *global* verstanden in dem Sinne, dass aus der Voraussetzung das Endergebnis hergeleitet werden soll und nicht umgekehrt. Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Schritten sind in diesem Beweisversuch korrekt hergestellt, das heißt eine *lokale* (und korrekte) **Kohärenz** ist vorhanden, aber die globale logische Struktur ist inkorrekt.

Es liegen hier also Diskrepanzen vor, einerseits zwischen zwei Normen und andererseits auf der Ebene der Betrachtung (lokal vs. global), was von Knuth aber nicht explizit getrennt wird. Die Ergebnisse sind vor diesem Hintergrund schwer einzuordnen, da nicht klar ist, ob das Problem auf Studierendenseite bei den Normen oder bei der Ebene der Betrachtung liegt. Hier wäre schon in der Konstruktion des Beweisversuchs eine klare Unterscheidung zwischen Normen (Kohärenz und logische Struktur) und der Ebene der Betrachtung (lokal und global) wichtig.

Für Selden und Selden (2003) steht die Verifikationsfunktion eines Beweises im Zentrum des eigenen Beweisverständnisses. Sie betrachten ausschließlich formal symbolische Beweise, gehen also implizit von einem formal-deduktiven Beweisverständnis aus. Sie stellen der Analyse der Ergebnisse eine ausführliche Analyse der vorgelegten Beweisversuche voran. Diese Analysen sind sehr umfassend, aber nicht strukturiert entlang bestimmter, vorab festgelegter Normen. Die grundlegenden Normen und deren Verständnis auf Forschendenseite werden zwar implizit in der Diskussion der Beweisversuche thematisiert, spielen aber in der späteren Analyse keine Rolle mehr. Selden und Selden folgen dabei in ihrer Bewertung einer Überprüfung Zeile für Zeile. So schreiben Selden und Selden beispielsweise zu Beweisversuch (c) in Abbildung 12

“Proof (c)”: The Gap

PROOF. Let n be an integer such that $n^2 = 3x$ where x is an integer. Then $3 \mid n^2$. Since $n^2 = 3x$, $nn = 3x$. Thus, $3 \mid n$. Therefore if n^2 is a multiple of 3, then n is a multiple of 3. ■

Abbildung 12 Beweisversuch aus der Studie von Selden und Selden (2003, S. 17)

zu der Aussage „For any positive integer n , if n^2 is a multiple of 3, then n is a multiple of 3“ zu Beweisschritt [4] „Thus, $3 \mid n$ “:

„Nothing in [1], [2], or [3] indicates why [4] should be true. Indeed, to fill the gap would amount to proving the theorem.“

Es wird also auf die fehlende **Kohärenz** hingewiesen, die verstanden wird als das Nicht-Herstellen von Zusammenhängen zu den vorherigen Beweisschritten. Laut Selden und Selden fehlen dafür konkrete Beweisschritte, die Kohärenz wird hier vermischt mit der **Vollständigkeit**. Es zeigt sich wieder, wie eng die einzelnen Normen, auch im Verständnis auf Forschendenseite, zusammenhängen. Erst durch die Kombination beider Normbrüche im gleichen Beweisversuch lässt sich dieser Zusammenhang klar herausstellen.

Ein weiterer Beweisversuch beweist die umgekehrte Aussage, die **logische Struktur** wird hier also wie bei Knuth verstanden. Die Norm der **Allgemeingültigkeit** taucht hier nicht auf, da alle Beweisversuche formal abgefasst sind und in dieser Hinsicht keine Probleme aufweisen.

Für Alcock und Weber (2005) steht ganz explizit die Norm der (lokalen) Kohärenz im Fokus, die diese klar abgegrenzt wissen wollen von der Norm der (lokalen) Korrektheit:

„We first argue that when one is validating a proof, it is not sufficient to make certain that each statement in the argument is true. One must also check that there is good reason to believe that each statement follows from the preceding statements or from other accepted knowledge, i.e. that there is a valid warrant for making that statement in the context of this argument.“ (Alcock & Weber, 2005, S. 1)

Kohärenz wird in dieser Studie von Alcock und Weber lokal als Begründung des Zusammenhangs zwischen aufeinanderfolgenden Beweisschritten verstanden. Das Verständnis der Kohärenz ist dabei stark geprägt von einem formal-deduktiven Beweisverständnis im Sinne des Toulmin-Modells und wird vor diesem Hintergrund als das Vorhandensein von „warrants“ (Alcock & Weber, 2005, S. 1) verstanden. So wird den Studierenden hier ein Beweisversuch vorgelegt (vgl. Abbildung 13), in welchem jeder Schritt zwar korrekt ist, der letzte aber nicht aus dem vorletzten hergeleitet werden kann. Es geht hier im Ver-

ständnis von Kohärenz also nicht darum, dass Zusammenhänge nicht explizit gemacht werden, sondern darum, dass ein Zusammenhang grundsätzlich nicht besteht. Dies ist ein sehr klar eingegrenztes Verständnis von Kohärenz, das durch die beschriebene Methodik gut untersuchbar ist, allerdings weitere mögliche Komponenten im Verständnis von Kohärenz ausklammert.

Theorem: $(\sqrt{n}) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

Proof: We know that $a < b \Rightarrow a^m < b^m$.

So $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

$n < n + 1$ so $\sqrt{n} < \sqrt{n + 1}$ for all n .

So $(\sqrt{n}) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ as required.

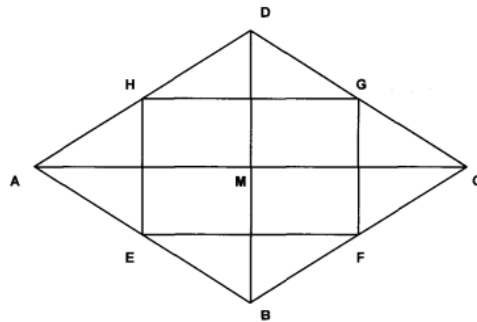
Abbildung 13 Beweisversuch mit Normbruch bei der Kohärenz aus der Studie von Alcock und Weber (2005, S. 8)

Auch bei Sommerhoff und Ufer (2019) ist das Verständnis der **Kohärenz** (im Sinne einer Beweiskette) sehr eingeschränkt und vermischt mit der Norm der Korrektheit. Es wird ein Beweisversuch mit einem inkorrekten „warrant“ (vgl. Abschnitt 2.3.2) vorgelegt, das heißt es wird zwar lokal ein Zusammenhang explizit gemacht, dieser ist aber inkorrekt.

Auch in der Studie von Ufer et al. (2009), die auf den Arbeiten von Heinze und Reiss (2003) zum Methodenwissen aufbaut, wird ein eher enges Verständnis der Normen schon durch die Art des entsprechenden Normbruchs im Beweisversuch vorgegeben. Dies soll anhand zweier Beispiele aus der Studie verdeutlicht werden. In dem Beweisversuch in Abbildung 14 wird die Nicht-Erfüllung der Norm der **Allgemeingültigkeit** verstanden als die Präsentation eines konkreten Beispiels und, noch spezifischer, als Argumentation anhand konkreter Messoperationen an diesem Beispiel. Das Beispiel wird von Heinze und Reiss (2003) als Beispiel für einen Normbruch hinsichtlich des Beweisschemas, in dieser Arbeit also der Allgemeingültigkeit, klassifiziert und keinen weiteren Aspekten zugeordnet. Weiterhin liegt hier aber auch ein rein beschreibender Text vor, der keine Zusammenhänge herstellt, also auch keine (deduktive) Beweiskette. In der Terminologie dieser Arbeit liegt also ebenfalls ein Normbruch hinsichtlich der **Kohärenz** vor. Es fehlen entscheidende Beweisschritte, somit ist der Beweisversuch auch nicht **vollständig**.

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Achims Antwort:

Ich habe drei Rauten gezeichnet: eine mit genau 7 cm Seitenlänge, eine mit 4,9 cm Seitenlänge und eine mit 2,75 cm Seitenlänge. Jedes Mal habe ich die Seitenmitten eingezeichnet und verbunden. Dann habe ich die Innenwinkel dieser Vierecke EFGH gemessen: sie waren immer genau 90° groß.

Also sind die Vierecke EFGH immer Rechtecke.

Die Behauptung ist wahr!

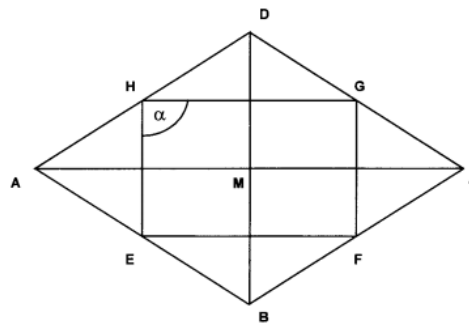
Abbildung 14 Empirischer Beweisversuch mit vielfältigen Normbrüchen aus der Studie von Ufer et al. (2009, S. 50)

Der Beweisversuch in Abbildung 15 wird von Heinze und Reiss (2003) als Beispiel für einen Normbruch hinsichtlich der Beweisstruktur, in dieser Arbeit also der **logischen Struktur**, klassifiziert. Der dritte Beweisschritt nutzt das, was zu zeigen ist als Argument, hier liegt also ein Zirkelschluss. Was eigentlich am Ende des Beweises stehen sollte, steht in der Mitte. Auch hier liegt ein eher enges Verständnis dieses Aspektes vor, indem ein Normbruch beim Aspekt der Beweisstruktur auf das Vorhandensein eines Zirkelschlusses reduziert wird und keine anderen Unterasspekte der lokalen oder globalen Reihenfolge von Beweisschritten mit einbezogen werden. Durch die sehr strikte Form als *two-column proof* wird hier gewährleistet, dass Beweisschritte und Begründungen vollständig dargestellt werden, dass also auf der Ebene der Vollständigkeit und Kohärenz keine Probleme vorliegen. Es wird auch nichts behauptet, was nicht allgemein zutreffen würde und insofern liegt auch kein Problem hinsichtlich der

Allgemeingültigkeit vor. Dieser Beweisversuch stellt tatsächlich einen isolierten, wenn auch sehr eingeschränkt verstandenen, Normbruch auf der Ebene der Beweisstruktur dar.

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Christians Antwort:

Aussage	Begründung
Das Viereck $ABCD$ hat die Geraden AC und BD als Symmetrieachsen.	$ABCD$ ist eine Raute.
Das Viereck $EFGH$ hat die Geraden AC und BD als Symmetrieachsen.	E, F, G, H sind die Seitenmitten.
$\alpha = 90^\circ$	Winkel im Rechteck
Alle 4 Innenwinkel von $EFGH$ sind kongruent, also ebenfalls 90° .	wegen der obigen Symmetrien
$\Rightarrow EFGH$ ist ein Rechteck.	

Die Behauptung ist wahr!

Abbildung 15 Beweisversuch mit Normbruch bei der logischen Struktur aus der Studie von Ufer et al. (2009, S. 51)

Fazit zum Normenverständnis in dieser Arbeit

In den diskutierten Studien wird selten der normative Rahmen, in dem die Studie sich bewegt, explizit gemacht. Auch wenn dieser explizit formuliert wird, wie bei Alcock und Weber (2005) oder Heinze und Reiss (2003), wird das eigene **Verständnis der Normen** nicht expliziert, steckt aber **implizit** in der Art der Normbrüche oder wird implizit in der Diskussion der entsprechenden Beweisversuche formuliert. Was dadurch untersucht werden kann, ist nur dieses spezifische Verständnis der Normen und weitere Aspekte des Verständnisses müssen ausgeklammert bleiben. Außerdem werden häufig verschiedene Normen miteinander vermischt. Wie sich bei Heinze und Reiss (2003) zeigt, ist es schwierig, einen wirklich isolierten Normbruch zu konstruieren, das heißt einen Beweisversuch, der nur eine der Normen verletzt, die anderen aber nicht. Inwieweit es zu einer **Vermischung von Normen** und Normbrüchen kommt, hängt dabei stark mit dem Verständnis dieser Normen zusammen.

Auch im Rahmen dieser Arbeit muss von einem bestimmten Vorverständnis auf Forschendenseite in Bezug auf die Normen ausgegangen werden. Dieses wurde versucht möglichst breit zu fassen über die zugrunde liegenden normativen Dimensionen und dabei kein bestimmtes Beweisverständnis zugrunde zu legen: Die **Vollständigkeit** beschreibt notwendige Entitäten für den Beweis, die **logische Struktur** deren Organisation, die **Kohärenz** deren Grad an Verbindung und die **Allgemeingültigkeit** die Reichweite (vgl. Abschnitt 2.2). Dies wurde als Grundlage gewählt, um das der Intervention zugrunde gelegte Normenverständnis über eine Vorerhebung auf Lehrendenseite zu spezifizieren (vgl. Abschnitt 1.5). Dafür werden „geglättete“ authentische Studierendenprodukte genutzt, um das Problem zu vermeiden, dass durch konstruierte Beweisversuche bereits implizit ein bestimmtes Normenverständnis kommuniziert wird und dadurch nur dieses erhebbbar ist. Die Normen sollen dabei klar differenziert werden von den Ebenen, auf welchen diese Normen betrachtet werden, also der Darstellungsebene und dem Grad der Konkretisierung am Beweisversuch.

3.5 Normenverständnis auf Lernendenseite

Selden und Selden (2003) stellen in ihrer Studie eine deutliche Verbesserung der Validierungskompetenz der Studierenden im Laufe der Intervention fest. Die Studie war als „teaching interview“ (S. 20) angelegt, was bedeutet, dass in dessen Verlauf von Forschendenseite nicht nur beobachtet wurde, sondern auch fördernd eingegriffen. Daraus leiten Selden und Selden die grundsätzliche Förderbarkeit der Validierungskompetenz ab. Als ein Hauptergebnis erhalten Selden und Selden außerdem, dass die Studierenden in ihrer Validierung ihren Fokus

vor allem auf eher lokalere, oberflächliche Fehler in der Notation legen und die Beweisversuche Zeile für Zeile überprüfen.

Bei Healy und Hoyles (2000) stehen der Aspekt der Darstellungsebene und die Norm Allgemeingültigkeit im Vordergrund. Sie stellen fest, dass narrative und ikonische Beweisversuche zwar den eigenen Herangehensweisen der Schüler/innen am meisten entsprechen und für diese die meiste Erklärungskraft haben. Von den algebraischen Beweisversuchen (auch wenn diese Fehler aufweisen) wird dagegen in der Mehrheit erwartet, dass diese die beste Note erhalten. Auch die als empirisch klassifizierten Beweisversuche werden als sehr nah an der eigenen Herangehensweise bewertet, aber es wird nicht erwartet, dass diese eine gute Note erhalten würden. Im Verständnis der Mehrheit der Schüler/innen zeigen diese Beweisversuche auch nicht, dass die Aussage immer gültig ist, sondern nur, dass sie für bestimmte Fälle gültig ist. Healy und Hoyles werten dies als Indiz, dass die Schüler/innen durchaus, in der Terminologie dieser Arbeit, ein adäquates situiertes Verständnis von **Allgemeingültigkeit** haben, diese aber noch nicht in eigenen Beweisversuchen umsetzen können. Für Healy und Hoyles bedeutet dies, dass Allgemeingültigkeit auch auf Seite der Schüler/innen in Abgrenzung von empirischen Begründungen verstanden wird (vgl. Abschnitt 3.4).

Weiterhin wird in den Ergebnissen deutlich, dass die Norm der **Kohärenz** noch Schwierigkeiten bereitet, was jedoch von Healy und Hoyles nicht explizit thematisiert wird. So wird ein relativ kohärenterer Beweisversuch schlechter bewertet als ein entsprechend weniger kohärenter Beweisversuch.

Die Ergebnisse von Martin und Harel (1989) geben einen noch vertiefteren Einblick in das Verständnis der Allgemeingültigkeit, die Beziehung zum Verständnis anderer Normen konnte durch die Fokussierung auf diese Norm in dieser Studie jedoch nicht untersucht werden. In dieser Studie wurde die Akzeptanz von empirischen, generischen und formal symbolischen Beweisversuchen bei angehenden Grundschullehrkräften untersucht. Als Ergebnis erhalten Martin und Harel, dass knapp die Hälfte der Studierenden sowohl den formal symbolischen als auch mindestens einen empirischen Beweisversuch als valide bewertet. Sie werten dies dahingehend, dass eine Person zeitgleich sowohl ein induktives als auch ein deduktives „proof frame“ (S. 41) zeigen kann, oder, in der Terminologie dieser Arbeit, dass das Verständnis von **Allgemeingültigkeit** kein robustes intrapersonelles Konstrukt ist. Zwischen den Graden an Generizität in den empirischen Beweisversuchen (vgl. Abschnitt 3.4) wird dabei nicht explizit differenziert, weshalb, wie bei Healy und Hoyles (siehe oben), lediglich die Abgrenzung von allgemeingültigen und empirischen Beweisversuchen untersucht werden kann. Wie genau generische Beweisversuche und entsprechende Grade an Generizität erkannt und verstanden, kann in diesem Setting nicht

erhoben werden. Martin und Harel fanden jedoch darüber hinaus heraus, dass die meisten Studierenden, die den formal symbolischen Beweisversuch als valide bewerten, auch den generischen als valide bewerten. Dies könnte ein Indiz dahingehend sein, dass auch die Studierenden, wie Martin und Harel selbst, Generizität im Sinne von Formalisierbarkeit verstehen (vgl. Abschnitt 3.4). Etwa die Hälfte der Studierenden bewerten außerdem den inkorrekten formal symbolischen Beweisversuch als valide, was Martin und Harel in der Weise interpretieren, dass diese Studierende mehr auf oberflächliche („ritualistic“, S. 47) Merkmale achten als auf den Inhalt.

Auch für Knuth (2002) liegt der Fokus auf der Frage, ob von den befragten unterrichtenden Sekundarlehrkräften empirische Beweisversuche als valide Beweise gewertet werden. Dies taten fünf von sechzehn Lehrkräften. In der Auseinandersetzung mit einem weiteren generischen Beweisversuch aus der Geometrie stellt Knuth außerdem fest, dass die Mehrheit der Lehrkräfte Unsicherheiten zeigt in Bezug auf die Allgemeingültigkeit des vorgelegten Arguments und glaubt, dass es weiterhin Gegenbeispiele geben könnte. Dies wertet Knuth als Unsicherheit in Bezug auf das Verständnis der **Allgemeingültigkeit**. Weitere Normen tauchen in der Analyse von Knuth nur implizit auf, wenn die Studienteilnehmenden an einem Beweisversuch beanstanden, dass dieser kein „sufficient level of detail“ (Knuth, 2002, S. 398) und somit einen Normbruch hinsichtlich der Vollständigkeit aufweist. **Vollständigkeit** wird hier von den Teilnehmenden im Sinne von Detailgenauigkeit verstanden.

In seiner Interviewstudie mit siebzehn Schüler/innen im Alter von fünfzehn Jahren kommt Chazan (1993) zu ähnlichen Ergebnissen. Chazan befragte die Schüler/innen zu ihrem Verständnis der vorgelegten empirischen und formal symbolischen Beweisversuche in der Geometrie. Die meisten der Befragten gaben an, dass es trotz Beweis dennoch möglich ist, Gegenbeispiele zu finden. Ein Verständnis von **Allgemeingültigkeit**, wonach Gegenbeispiele ausgeschlossen sind, liegt hier also nicht vor. Außerdem erkannten viele nicht das Generische in den geometrischen Zeichnungen zum Beweis.

Alcock und Weber (2005), die Mathematikstudierende im Eingangssemester mit einem Normbruch zur (lokalen) **Kohärenz** zwischen aufeinanderfolgenden Beweisschritten konfrontierten, stellen fest, dass nur zwei der befragten dreizehn Studierenden den intendierten Normbruch erkennen und die anderen ihren Fokus auf die lokale Korrektheit des Beweisversuchs legen:

„[...] their responses seem to suggest that they focused on the correctness of the manipulations performed in the argument as opposed to the nature of the argument itself.“ (Alcock & Weber, 2005, S. 393)

Nach einem entsprechenden Impuls, der explizit auf den intendierten Normbruch hinweist, sind acht der Studierenden in der Lage diesen korrekt zu benennen. Daraus leiten Alcock und Weber eine grundsätzliche Förderbarkeit dieser Norm ab.

Heinze und Reiss (2003) stellen Schwierigkeiten der Schüler/innen der achten Klasse vor allem bei der **logischen Struktur**, bei Heinze und Reiss als Beweisstruktur („proof structure“) bezeichnet, fest. Hinsichtlich der Auseinandersetzung mit empirischen Beweisversuchen zeigte sich in dieser Studie ein differenziertes Bild. So sind sich die meisten Schüler/innen in dieser Studie bewusst, dass empirische Argumente keine Beweise darstellen, bewerteten diesen aber dennoch als Beweis aufgrund eines falschen Verständnisses der logischen Struktur:

„As mentioned above, several students considered the empirical solution as a proof because of mistakes related to the second aspect (proof structure). They stated that the empirical solution is correct, because the assertion is true. Most of these students knew (and said so explicitly) that empirical arguments do not form a proof.“ (Heinze und Reiss, 2003, S. 8)

Dies gibt bereits einen Hinweis auf die enge Verwobenheit des Verständnisses der einzelnen Normen auf Lernendenseite. Sommerhoff und Ufer (2019) vergleichen, vor dem theoretischen Hintergrund des Methodenwissens, Akzeptanzkriterien von Beweisen von Schüler/innen, Studierenden und Fachmathematiker/innen. Sie stellen fest, dass sich Schüler/innen und Studierende nach dem ersten abgeschlossenen Semester in ihrer Validierungskompetenz kaum unterscheiden. Die Studierenden weisen dabei teilweise sogar schlechtere Ergebnisse auf. Die Norm der **Allgemeingültigkeit** bereitet dabei geringe Probleme, die Normbrüche zur **logischen Struktur** und **Kohärenz** werden jedoch nur von weniger als der Hälfte erkannt und nur ein sehr geringer Prozentsatz kann die entsprechend verletzte Norm korrekt benennen. Dabei konnte nur das Verständnis auf Forschendenseite untersucht werden, wonach die Allgemeingültigkeit in Abgrenzung von empirischen Begründungen verstanden wird, die logische Struktur in Abgrenzung zu zirkulären Argumenten und die Kohärenz als korrekte Begründung lokaler interner Zusammenhänge (vgl. Abschnitt 3.4).

Sporn et al. (2021) untersuchen, inwieweit *concept-orientated* Methodenwissen, also Wissen ohne Bezug zu konkreten Beweisversuchen und *action-orientated* Methodenwissen, was in der Terminologie dieser Arbeit dem situierten Normenverständnis entspricht, in sich homogene aber voneinander klar unterscheidbare Konstrukte darstellen. Sie stellen fest, dass sich die einzelnen Normen im concept-orientated Methodenwissens im Verständnis der Studienteilnehmenden nicht klar voneinander abgrenzen lassen, im action-oriented Methodenwissen jedoch durchaus. Weiterhin lassen sich die Konstrukte concept-oriented und action-orientated Methodenwissen klar voneinander abgrenzen.

Dies bestätigt, dass es im Rahmen dieser Arbeit sinnvoll ist, sich mit dem situ-
ierten Verständnis in Auseinandersetzung mit konkreten Beweisversuchen zu
beschäftigen, um die einzelnen Normen und deren Beziehungen zueinander im
Verständnis der Lernenden zu untersuchen.

Zusammenfassung zum Normenverständnis auf Lernendenseite

Die Norm der **Allgemeingültigkeit**²⁷ ist die Norm, deren Verständnis bislang am
meisten untersucht wurde, sowohl auf Schulebene als auch auf Hochschulebene.
Dabei zeigt die Studie von Healy und Hoyles (2000) zwar, dass diese Norm in
der Umsetzung bei eigenen Beweisversuchen den Schüler/innen große Schwierig-
keiten bereitet und die Mehrheit empirische Argumente nutzt, dass sie sich
jedoch bewusst sind, dass diese eigentlich keine Beweise darstellen. Es liegt
also ein gewisses Verständnis der Allgemeingültigkeit vor, das vor allem die
Abgrenzung von formal dargestellten zu rein empirischen Beweisversuchen
betrifft. Auch Heinze und Reiss (2003) und Sommerhoff und Ufer (2019) stellen
fest, dass diese Norm auf der Ebene des situierten Verständnisses sowohl Schü-
ler/innen als auch Studierenden unter den Normen die geringsten Schwierigkei-
ten bereitet. Die Interviewstudie von Chazan (1993) zeigt jedoch, dass dieses
Verständnis auf der Lernendenseite noch sehr unzureichend ist, wenn nicht
verstanden wurde, dass ein valider Beweis die Allgemeingültigkeit der Aussage
zeigt und es somit keine Gegenbeispiele geben kann. Auch zeigen die Schü-
ler/innen Schwierigkeiten im Erkennen des Generischen in konkreten Beispie-
len. Auf Lehrendenseite zeigen sich ähnliche Schwierigkeiten, wie die Studie
von Martin und Harel mit angehenden Grundschullehrkräften zeigt. Knuth stellt
außerdem in seiner Interviewstudie mit Sekundarlehrkräften fest, dass das Ver-
ständnis von Allgemeingültigkeit auf intrapersoneller Ebene kein robustes Kon-
strukt darstellt und Einzelpersonen unterschiedliche, auch widersprüchliche,
Verständnisse zeigen können.

Einzig die Studie von Alcock und Weber (2005) stellt die Norm **Kohärenz** (von
aufeinanderfolgenden Beweisschritten) in den Fokus. Sie stellen fest, dass die
Studierenden selten von selbst auf diese Norm achten und eher andere Normen
im Fokus haben, nach einem entsprechenden Impuls aber den Normbruch in
diesem Bereich erkennen. Auch Sommerhoff und Ufer (2019), die Kohärenz
weniger als das Herstellen von internen Zusammenhängen verstehen, als viel-
mehr als die korrekte Begründung dieser Zusammenhänge, stellen fest, dass
sowohl Schüler/innen als auch Studierende in der Mehrheit den Normbruch in
diesem Bereich nicht erkennen.

²⁷ Eine ähnliche Zusammenfassung der Ergebnisse zum situierten Verständnis der All-
gemeingültigkeit findet sich in Gayer (2023).

Ebenso zeigt diese Studie sowie die Studie von Heinze und Reiss (2003), dass die größten Probleme im Verständnis der **logischen Struktur** liegen. Die Untersuchung des Verständnisses dieser Norm beschränkt sich jedoch auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich zirkulärer Begründungen beziehungsweise in den Studien Knuth (2002) und Selden und Selden (2003) hinsichtlich des Beweises der umgekehrten Aussage (vgl. Abschnitt 3.4).

Zur Norm der **Vollständigkeit** gibt es kaum Studien. Dies mag darin begründet liegen, dass diese Norm, zumindest vor dem Hintergrund eines formal-deduktiven Beweisverständnisses, die am schwierigsten zu greifende und zu erfüllende Norm darstellt (vgl. Abschnitt 2.3.2). Lediglich in Studien, die Beweisvorstellungen im Blick haben, kommt diese Norm manchmal implizit zum Tragen, wie bei Knuth (2002), wo Bewertungen an zu geringer Detailgenauigkeit festgemacht werden.

Methodenteil

4 Forschungsmethoden

4.1 Forschungsfragen

In diesem Abschnitt werden zunächst die Forschungslücken herausgearbeitet, die sich in der Analyse der bisherigen Studien zum situierten Normenverständnis in Abschnitt 3 gezeigt haben. Auf dieser Grundlage werden die Forschungsfragen, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen, spezifiziert.

Wie die Analyse im vorangegangenen Abschnitt gezeigt hat, steht in den Studien zum situierten Beweisverständnis meist die Norm der Allgemeingültigkeit im Fokus. Dabei wurde Allgemeingültigkeit auf Forschendenseite meist in Abgrenzung von rein empirischen Begründungen verstanden, womit nur dieses Verständnis in den entsprechenden Studien untersuchbar war. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Analyse dieses Verständnisses entlang der in Abschnitt 2.4.4 eingeführten Kohärenzebenen stärker ausdifferenziert werden.

Die anderen Normen (aus Abschnitt 2.2) der Kohärenz, logischen Struktur und Vollständigkeit wurden noch vergleichsweise wenig untersucht. In dieser Arbeit sollen **alle Normen** gleichberechtigt in die Analyse einbezogen werden. Was darüber hinaus bislang wenig erforscht ist, ist der **Zusammenhang dieser Normen** im Verständnis auf Lernendenseite, ein weiterer Untersuchungsfokus dieser Arbeit.

In den Studien werden zudem meist mehrere Beweistypen betrachtet, die verschieden Darstellungsebenen nutzen und damit auch die Frage aufwerfen, inwiefern rein ikonisch dargestellte Beweisversuche an sich valide sein können. Andere Studien legen den Fokus ausschließlich auf formal symbolische Beweisversuche. Im Rahmen dieser Arbeit wird das situierte Normenverständnis ausschließlich in Bezug auf **beispielgebunden ikonische Beweise** untersucht. Dies einerseits deshalb, weil dies einen für den schulischen Anfangsunterricht zentralen Beweistyp darstellt (vgl. Abschnitt 2.4.1). Andererseits soll dadurch verhindert werden, dass die Validität eines Beweisversuches hauptsächlich auf Grundlage der gewählten Darstellungsebene eingeschätzt wird und die oben genannten Normen dadurch in den Hintergrund treten. Eine Fokussierung auf

diesen Beweistyp kann somit eine vertieftere Auseinandersetzung mit dem situierten Normenverständnis ermöglichen²⁸.

Weiterhin wurde in den bisherigen Studien zum situierten Verständnis der Normen der Allgemeingültigkeit, Kohärenz, logischen Struktur und Vollständigkeit implizit deren (meist eher eng gefasstes) Vorverständnis auf Forschendenseite zugrunde gelegt (vgl. Abschnitt 3.4). Dabei wurde, je nach Studie, entweder die Lehrenden- oder die Lernendenseite in den Blick genommen. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Normenverständnis in einer Weise untersuchbar gemacht werden, die von möglichst **wenig Vorannahmen** hinsichtlich des **Verständnisses auf Forschendenseite** ausgeht. Weiterhin soll sowohl die Lehrenden- als auch die Lernendenseite (auf der Hochschulebene) in den Forschungsprozess einbezogen werden mit dem Ziel, ein möglichst hohes Maß an **Interpersonalität** im situierten Normenverständnis zu erreichen (vgl. Abschnitt 0).

Zu diesem Zweck wird im Rahmen dieser Arbeit eine Intervention entwickelt, welche als **Aushandlungsprozess zwischen Lehrenden- und Lernendenseite** (vgl. Abschnitt 1.5) zum situierten Normenverständnis in Bezug auf beispielgebunden ikonische Beweise konzipiert ist. Das der Intervention auf Lernendenseite zugrunde liegende Verständnis der Normen wird dabei durch eine Vorerhebung auf Lehrendenseite spezifiziert (vgl. Abschnitt 5.1.2).

Ziel dieser Arbeit ist es, die Entwicklung des situierten Verständnisses auf Lernendenseite im Rahmen der Intervention zu untersuchen. Dadurch soll das Konstrukt des **situierete Normenverständnisses** empirisch in der Situierung der Intervention (vgl. Abschnitt 5.3.1) untersucht und spezifiziert werden. Dies umfasst insbesondere eine Fokussierung auf den oben genannten Beweistyp beispielgebunden ikonischer Beweise. Dieses Konstrukt wird dabei entsprechend obigen Ausführungen als relationales Konstrukt aufgefasst, das heißt, es werden alle in Abschnitt 2.2 eingeführten Normen sowie deren Zusammenhänge im Verständnis auf Lernendenseite untersucht gemäß

Forschungsfrage 1: Welches situierte Normenverständnis entwickelt sich auf Lernendenseite in der Intervention?

Vor dem Hintergrund der Zielsetzung der Intervention interessiert bei der Untersuchung der Entwicklung dieses Verständnisses im Rahmen der Intervention der dabei erreichte Grad an **Interpersonalität** im Sinne von

²⁸ Zu den Besonderheiten dieses Beweistyps in Bezug auf das Normenverständnis siehe die Abschnitte 2.3 und 2.4. Insbesondere die Frage nach der Allgemeingültigkeit stellt sich in diesem Zusammenhang in anderem Maße. Hier bietet sich eine Analyse entlang der in Abschnitt 2.4.4 eingeführten Kohärenzebenen an, ein bislang unerforschter Bereich.

Forschungsfrage 2: Wie entwickelt sich die Interpersonalität im situierten Normenverständnis in der Intervention?

Dies umfasst die Frage nach dem Grad an Interpersonalität auf Lernendenseite sowie zwischen Lernenden- und Lehrendenseite. Darüber hinaus sollen konkrete Hinweise für eine mögliche **Weiterentwicklung der Intervention** gewonnen werden. Deshalb werden über die aktuelle Intervention hinaus weitere mögliche Einflussfaktoren auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses untersucht gemäß

Forschungsfrage 3: Welche potenziellen Einflussfaktoren gibt es auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses in der Intervention?

4.2 Mixed Methods

Für die Untersuchung der Forschungsfragen wurde ein Mixed Methods Ansatz gewählt. Dieser beschreibt nach Mertens die Verbindung mehrerer forschungsrelevanter Komponenten zu einem Ganzen oder in den Worten Mertens:

„[...] the use of more than one method, methodology, approach, theoretical or paradigmatic framework and, integration of results from those different components“ (Mertens et al., 2016, S. 4)

Im Rahmen dieser Arbeit sollen dabei qualitative und quantitative Methoden für die Untersuchung der Forschungsfragen zur Anwendung kommen. Damit basiert das methodische Vorgehen dieser Arbeit auf unterschiedlichen Forschungsparadigmen: dem qualitativen und dem quantitativen. Nach Buchholtz (2021) bedürfen die Integrierbarkeit dieser Paradigmen und der Nutzen dieser Integration für das Forschungsvorhaben einer expliziten Begründung. Grundlage dieser Begründung soll dabei laut Buchholtz eine dem Forschungsgegenstand immanente ontologische Mehrschichtigkeit sein:

„[...] bei der Begründung dargelegt werden sollte, inwieweit der untersuchte Forschungsgegenstand eine ontologische Mehrschichtigkeit und Komplexität aufweist, die eine [...] Integration von Forschungsmethoden überhaupt erst erforderlich macht.“ (Buchholtz, 2021, S. 235)

Für die **erste Forschungsfrage** zum in der Intervention entwickelten situierten Normenverständnis ergibt sich diese Mehrschichtigkeit aus der lerntheoretischen Grundlegung dieser Arbeit. Gemäß der zweiten Prämisse des Symbolischen Interaktionismus nach Blumer (vgl. Abschnitt 1.2.1) entwickeln sich Bedeutungen (beziehungsweise Verständnis, zur Unterscheidung der Begriffe im Rahmen dieser Arbeit vgl. Abschnitt 1.2.2) zunächst in der Interaktion zwischen Individuen. Die Konzeption der Intervention basiert daher auf der Diskus-

sion der Normen in Kleingruppen im Sinne von breaching experiments (vgl. Abschnitt 1.1.2), also zunächst auf einem **qualitativen** Erhebungssetting. Auch die Datenanalyse folgt hier zunächst dem qualitativen Paradigma, was sich ebenfalls aus Blumers Lerntheorie ergibt. Danach entsteht Bedeutung in einem interpretativen Prozess zwischen den Beteiligten. Blumer überträgt dies auf den Forschungsprozess selbst und leitet daraus die methodologische Folgerung ab, dass auch die Beschreibung von Interaktionen interpretativer Natur sein sollte. Konkret bedeutet dies für ihn, dass die Konzepte (im Rahmen dieser Arbeit also die Normen), die für diese Beschreibung genutzt werden, nicht im Vorhinein in ihrer Bedeutung festgelegt sind (wie dies im quantitativen Paradigma üblich ist), sondern aus der Empirie so rekonstruiert werden müssen, wie sie die Beteiligten selbst sehen (wie dies im qualitativen Paradigma üblich ist).

Das in dieser Weise analysierte Normenverständnis konnte dann für die anschließende **quantitative** Untersuchung zur Grundlage genommen werden. Dies entspricht im Sinne von Buchholtz der „Entwicklung“ (Buchholtz, 2021, S. 227) als einer der fünf von Buchholtz formulierten möglichen Ausrichtungen für die Integration von Forschungsmethoden. Dabei werden die Ergebnisse aus einer Methode (hier der qualitativen) zur Grundlage für die Entwicklung der anderen Methode (hier der quantitativen) genommen. Bei dieser Art der Integration der Methoden wurde nicht davon ausgegangen, dass die Analyse die Bedeutung der Normen (unabhängig von der Interaktionssituation) festlegt, sondern es sollte untersucht werden, ob sich das in den Interaktionen gezeigte Verständnis auch in einer auf die Interaktion folgenden Erhebung in dieser Form zeigt. Dieses Vorgehen trägt der dritten Prämisse des Symbolischen Interaktionismus Rechnung. Danach folgt auf die Entwicklung von Bedeutung (beziehungsweise Verständnis) in der Interaktion ein intrapersoneller Verarbeitungsprozess. Das nach der Interaktion bei den Beteiligten entstandene intrapersonelle Verständnis kann demnach durchaus zwischen den Beteiligten variieren und sich auch unterscheiden von dem, was sich in der Interaktion gezeigt hat. Für die Erhebung dieses intrapersonellen Verständnisses wurde daher ein Paper-und-Pencil-Test in Einzelbearbeitung gewählt, um Einflüsse durch weitere Interaktionen im Rahmen dieser quantitativen Erhebung ausschließen zu können.

Ein weiterer Grund dafür, an die qualitative Untersuchung der Entwicklung des Normenverständnisses im Rahmen der Intervention eine **quantitative** Untersuchung anzuschließen, liegt in der Erhöhung der Reichweite in Bezug auf die *soziale Situierung* im Sinne der **zweiten Forschungsfrage**. Dies entspricht im Sinne von Buchholtz der „Erweiterung“ (Buchholtz, 2021, S. 227) als einer weiteren möglichen Ausrichtung für die Integration von Forschungsmethoden. Während die Entwicklung und der Grad an Interpersonalität in der qualitativen Analyse sich lediglich in den untersuchten Gruppen und dem Vergleich dieser Gruppen untersuchen ließen, sollte durch die quantitative Untersuchung die

Reichweite auf die gesamte Lehr-Lern-Gemeinschaft dieser Veranstaltung ausgedehnt werden. Durch diese quantitative Analyse wird der Grad an Übereinstimmung in der gesamten Lernendengemeinschaft, in welcher die Intervention stattfand, quantifizierbar. Weiterhin war die Erhebung auf der Grundlage des zuvor auf Lehrendenseite erhobenen Verständnisses konzipiert worden (vgl. Abschnitt 1.5). Dadurch war ein direkter Abgleich des auf Lernendenseite erhobenen Verständnisses mit dem auf Lehrendenseite intendierten Verständnis möglich. Erst die quantitative Untersuchung macht es somit möglich zu untersuchen, inwieweit das Ziel der Intervention erreicht wurde, ein (in hohem Maß) interpersonell geteiltes Normenverständnis in der Lehr-Lern-Gemeinschaft zu etablieren.

Weiterhin ist es durch diese zusätzliche Erhebung möglich neben der sozialen Reichweite auch die Reichweite bezüglich der anderen Situiertheitsdimensionen zu erweitern²⁹. Bei der *zeitlichen Situierung* konnte dadurch auch die unmittelbare Zeit nach der Intervention (die Erhebung fand mehrere Tage nach der Intervention statt, vgl. Abschnitt 5.3.1) miteingeschlossen werden. Es wurde dabei bewusst auf die Untersuchung einer noch größeren zeitlichen Reichweite verzichtet, da es dem Forschungsfokus entsprechend um die unmittelbar durch die Intervention geförderte Entwicklung ging und nicht um die langfristige Wirkung der Intervention. Bezüglich der *inhaltlichen Situierung* wurde weiterhin der gleiche Inhaltsbereich gewählt, jedoch eine neue zu beweisende Aussage. Dies war vor allem dem durch die Lehrveranstaltung gegebenen Rahmenbedingungen geschuldet. Es wurden neue Beweisversuche genutzt, in welchen die Normbrüche und die verwendeten ikonischen Definitionen in anderer Weise kombiniert wurden als in der Intervention (vgl. Abschnitt 5.2.2), es wurde also die *räumliche Situierung* erweitert. Für die *didaktische Situierung* wurden in der Erhebung offene Fragen zur Beweisbewertung gewählt ohne spezifischen Bezug zu einer der Normen, um die Auseinandersetzung an dieser Stelle nicht künstlich in eine Richtung zu lenken. Es wurde damit eine weitere Situierung gewählt als in der Intervention selbst, wo es Impulse gab, die die Diskussion explizit in Richtung der Normen lenken sollten (vgl. Abschnitt 5.3.3).

Zudem sollte die Wirkung der Intervention auf die Entwicklung des Normenverständnisses untersuchbar gemacht werden, um Hinweise für eine künftige Weiterentwicklung zu erhalten. Dafür ist eine quantitative Erhebung bestehend aus Eingangs- und Ausgangserhebung in einem (Warte-)Kontrollgruppendesign notwendig (vgl. Abschnitt 5.3.1). Diese ermöglicht Rückschlüsse darüber, für welche Normen die aktuell konzipierte Intervention bereits das intendierte Ver-

²⁹ Hierfür wäre nicht unbedingt eine Erhebung quantitativer Natur nötig gewesen. Der Hauptgrund für die Wahl quantitativer Methoden lag in Bezug auf Forschungsfrage 2 in der Erhöhung der sozialen Reichweite.

ständnis fördert und an welchen Stellen möglicherweise noch nachgebessert werden muss.

Im Sinne der **dritten Forschungsfrage** sollte in diesem Zusammenhang zudem untersucht werden, welche weiteren möglichen Einflussfaktoren es neben der Intervention auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses auf Lernendenseite gibt, um diese bei der Konzeption künftiger Interventionen mit zu berücksichtigen. Diese potenziellen Einflussfaktoren wurden durch eine vergleichende Analyse der Gruppendiskussionen herausgearbeitet. Entsprechend obiger Argumentation zur Untersuchung der ersten Forschungsfrage kann bei einer lerntheoretischen Grundlegung durch den Symbolischen Interaktionismus das Herausarbeiten von Zusammenhängen, wie hier der Einfluss bestimmter Faktoren auf das situierte Normenverständnis, nur auf Grundlage eines interpretativen Prozesses stattfinden. Es wird dabei nach Mustern gesucht, die mehreren Beobachtungen zugrunde liegen (vgl. Abschnitt 1.1.2). Der erste Analyseschritt ist hier also wiederum **qualitativer** Natur. Diese Muster wurden in Form von Hypothesen zum entsprechenden Einflussfaktor formuliert. In einem weiteren, darauf aufbauenden Analyseschritt sollten diese Hypothesen **quantitativ** überprüft werden. Dieses Vorgehen entspricht wiederum der „Entwicklung“ (Buchholtz, 2021, S. 227) von Forschungsmethoden im Sinne von Buchholtz. Ziel der quantitativen Analyse ist es dabei, die Größe und Signifikanz des Einflusses der qualitativ herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren zu untersuchen, und damit zu prüfen, inwieweit sich die qualitativen Beobachtungen auf die Grundgesamtheit hin verallgemeinern lassen. Durch die quantitative Analyse kann damit wiederum die soziale Reichweite der Untersuchung erhöht werden.

Bei der Darstellung der Ergebnisse wurde zunächst die qualitative Analyse bezüglich aller Forschungsfragen vorgenommen. In der anschließenden quantitativen Analyse wurden diese Ergebnisse darauf aufbauend weiter verdichtet. Die entsprechend qualitativ beziehungsweise quantitativ adressierten Schichten der erste bis dritte Forschungsfrage wurden dabei durch eine **Ausdifferenzierung** in jeweils eine **qualitative** und eine **quantitative Teilfrage** (diese sind in Abschnitt 4.3.1 bzw. 4.4.1) im Sinne von Buchholtz expliziert:

„Als hilfreich erweist sich hier, beim Formulieren von entsprechenden Forschungsfragen verschiedene Schichten des Gegenstands durch Teilfragen zu adressieren und die Teilfragen zu einer übergreifenden integrierten Forschungsfrage zu synthetisieren.“ (Buchholtz, 2021, S. 235)

Abschließend wurden qualitative und quantitative Ergebnisse vergleichend gegenübergestellt, um daraus konkrete Hinweise für die Weiterentwicklung der Intervention abzuleiten. Diese Hinweise stellen somit „**Meta-Inferenzen**“ (Buchholtz, 2021, S. 235) zwischen den Methoden dar, das heißt

„[...] gebündelte Schlussfolgerungen höherer Ordnung [...], die darauf abzielen, gemeinsame Schlussfolgerungen aus den sich bestätigenden, widersprechenden und ergänzenden Ergebnissen zu ziehen und im gesamten Forschungskontext zu reflektieren.“ (Hense und Schork, 2017, S. 381)

4.3 Qualitative Auswertungsmethoden

4.3.1 Qualitative Forschungsfragen

Die Intervention basiert auf der Diskussion von Beweisversuchen, die Normbrüche hinsichtlich der in Abschnitt 2.2 etablierten Normen enthalten (vgl. Abschnitt 3.3). Diese Diskussionen fanden in Kleingruppen innerhalb einer Übungssitzung statt. Dabei wurden diejenigen Kleingruppen in ihren Diskussionen videografiert, deren Teilnehmenden vorab ihr Einverständnis zur Verwendung der Daten für Forschungszwecke erteilt hatten. Die videografierten Kleingruppendiskussionen wurden gemäß den Transkriptionsregeln nach Kuckartz und Rädiker (2022, S. 167 ff.) transkribiert. Längere Passagen ohne Bezug zur Aufgabenstellung wurden dabei nicht mit transkribiert. Für die qualitative Analyse wurden drei der Kleingruppen exemplarisch ausgewählt, die sich hinsichtlich ihrer Gruppengröße und der/s Übungsleitenden unterschieden. Dies ermöglicht einerseits das Herausarbeiten von Gemeinsamkeiten und Unterschieden durch den Vergleich jeweils zwei der Gruppen und gleichzeitig den Abgleich der Ergebnisse mit der jeweils dritten Gruppe.

Bei der qualitativen Analyse geht es dabei um die Untersuchung des **Entwicklungsprozesses** in der **Diskussion in den Kleingruppen** im Rahmen der Intervention, während es in der quantitativen Analyse um einen Vorher/Nachher-Vergleich des intrapersonellen Verständnisses auf Lernendenseite und einen Abgleich mit dem auf Lehrendenseite intendierten Verständnis geht. Die Forschungsfragen 1 bis 3 (vgl. Abschnitt 4.1) werden daher jeweils in eine qualitative und eine quantitative Unterforschungsfrage ausdifferenziert. Tabelle 2 zeigt die entsprechend qualitativ ausdifferenzierten Forschungsfragen, die quantitative Ausdifferenzierung erfolgt in Abschnitt 4.4.1.

In der qualitativen Analyse soll insbesondere dem Umstand Rechnung getragen werden, dass sich in den Diskussionen im zeitlichen Verlauf bei den Diskussionsteilnehmenden **unterschiedliche Verständnisse** zeigen können. Forschungsfrage 1 wird daher qualitativ spezifiziert zu

Forschungsfrage 1.1: Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?

Im Sinne der zweiten Forschungsfrage soll die Entwicklung von Interpersonalität in den Normenverständnissen der Diskussionsteilnehmenden qualitativ untersucht werden.

Tabelle 2 Qualitative Ausdifferenzierung der Forschungsfragen

FF 1	1. Welches situierte Normenverständnis entwickelt sich auf Lernendenseite in der Intervention?
qualitativ	1.1. Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?
FF 2	2. Wie entwickelt sich die Interpersonalität im situierten Normenverständnis in der Intervention?
qualitativ	2.1. Welche intra- und interpersonellen Entwicklungen zeigen sich hinsichtlich der situierten Normenverständnisse in den Diskussionen in den Kleingruppen?
FF 3	3. Welche potenziellen Einflussfaktoren gibt es auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses in der Intervention?
qualitativ	3.1. Welche potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche zeigen sich in den Diskussionen in den Kleingruppen?

Im Sinne der Prämissen des Symbolischen Interaktionismus, die sowohl **inter- als auch intrapersonelle Prozesse** als Basis für den Verständnisaufbau formulieren (vgl. Abschnitt 1.2.1), kann die zweite Forschungsfrage wie folgt qualitativ spezifiziert werden zu

Forschungsfrage 2.1: Welche intra- und interpersonellen Entwicklungen zeigen sich hinsichtlich der situierten Normenverständnisse in den Diskussionen in den Kleingruppen?

Im Sinne der dritten Forschungsfrage sollten schließlich Hypothesen generiert werden zu weiteren potenziellen Einflussfaktoren auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses in den Diskussionen in den Kleingruppen. Diese Hypothesen sollen so formuliert sein, dass diese im Rahmen der quantitativen Analyse überprüfbar sind. In der quantitativen Analyse steht der Abgleich des situierten Normenverständnisses auf Lernendenseite mit dem intendierten Verständnis auf Lehrendenseite im Fokus. Die Untersuchung des intendierten Verständnisses wiederum ist operationalisiert durch die **intendierten Normbrüche** in den zu diskutierenden Beweisversuchen. Vor diesem Hintergrund wird Forschungsfrage 3 spezifiziert zu

Forschungsfrage 3.1: Welche potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche zeigen sich in den Diskussionen in den Kleingruppen?

4.3.2 Dokumentarische Methode und qualitative Inhaltsanalyse

Zur Untersuchung der **ersten Forschungsfrage** zur Entwicklung der situierten Normenverständnisse sollen diese entsprechend der theoretischen Grundlegung des Symbolischen Interaktionismus (vgl. Abschnitt 1.4) aus der Perspektive der Handelnden heraus rekonstruiert werden. Die (Sprach-)Handlungen müssen dafür von Forschendenseite aus interpretiert und in einen Gesamtzusammenhang gebracht werden. Die *dokumentarische Methode*, die methodologisch auf dem interpretativen Paradigma beruht und hier nach Bohnsack (2003) dargestellt wird, bietet das dafür notwendige Instrumentarium.

Die Normen, die der Beweisbewertung zugrunde liegen sollen und deren Verständnis untersucht werden soll, ergeben sich jedoch aus der theoretischen Grundlegung der Arbeit (vgl. Abschnitt 2.2). Diese sollen nicht selbst aus der Perspektive der Handelnden rekonstruiert werden, sondern lediglich deren Verständnis. Diese Normen werden daher im Sinne der *qualitativen Inhaltsanalyse* nach Mayring (2015) als (Ober-)Kategorien für die Kodierung des Datenmaterials angesehen.

Dies macht eine Integration der qualitativen Methoden der dokumentarischen Methode und der qualitativen Inhaltsanalyse im Sinne eines Zusammenführens von Methoden notwendig, die im Folgenden detailliert dargestellt werden soll. Dabei wird von der dokumentarischen Methode ausgegangen und an den entsprechenden Stellen werden Adaptionen im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse beschrieben. Die dokumentarische Methode unterscheidet zwischen zwei Interpretationsschritten, der formulierenden Interpretation und der reflektierenden Interpretation, die im Folgenden dargestellt werden:

Formulierende Interpretation und Zusammenhang zur Inhaltsanalyse nach Mayring

In der formulierenden Interpretation, dem ersten Analyseschritt der dokumentarischen Methode, werden die *Themen* und *Unterthemen* der Diskussion herausgearbeitet. Ziel ist es, die thematische Struktur der Diskussionen in ihrem Verlauf nachzuzeichnen. Dies liefert einen ersten Überblick über die in der Diskussion wichtigen Themen und deren zeitliche Abfolge. Für die weitere Analyse können (ggf. zeitlich verstreut liegende) Passagen zu den gleichen Themen ausgewählt und einer gemeinsamen Analyse unterzogen werden. Dadurch können Unterthemen identifiziert und Gemeinsamkeiten und Unterschiede im zeitlichen Verlauf analysiert werden.

Die Themen sind bei der Untersuchung des Normenverständnisses durch die entsprechenden Normen bereits aus der theoretischen Grundlegung der Arbeit vorgegeben (siehe oben). Die Themen entsprechen den Normen der Allgemeingültigkeit, Vollständigkeit, logischen Struktur und Kohärenz. Diese werden also

nicht aus dem Material selbst heraus bestimmt, sondern als vorab festgelegter Analyserahmen an die Texte herangetragen.

Damit hat der erste Analyseschritt der dokumentarischen Methode, wie er in dieser Arbeit angewendet wird, eine enge Beziehung zur *deduktiv-induktiven Kategorienbildung* im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse. Auch in der qualitativen Inhaltsanalyse geht es um „die Analyse von Material, die aus irgendeiner Art der Kommunikation stammt.“ (Mayring, 2015, S. 11, Herv. i.O.). Ziel ist es auch hier, die Sinngehalte des Materials zu analysieren oder in den Worten Schreiers „systematically describe the meaning of your material“ (Schreier, 2012, S.3). Zentral bei der Inhaltsanalyse ist ein systematisches und regelgeleitetes Vorgehen im Sinne einer kategorienbasierten Herangehensweise, durch welche die Daten reduziert werden sollen (vgl. Schreier, 2012, S. 5) sowie die empirische Verankerung der gebildeten Kategorien. Dieses systematische, empirisch verankerte Vorgehen soll im Rahmen dieser Arbeit genutzt werden, um das Normenverständnis aus der Perspektive der Handelnden heraus in Unteraspekten auszudifferenzieren.

Bei der deduktiv-induktiven Kategorienbildung werden in einem ersten Schritt deduktive Kategorien, im Rahmen dieser Arbeit also die oben genannten Normen, an das Textmaterial herangetragen. Dies bezeichnet Mayring als strukturierende Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2015, S. 97 ff.): Das Material wird entlang dieser Kategorien („Themen“ in der dokumentarischen Methode) kodiert.

Um die Unterasspekte im Normenverständnis auszudifferenzieren, können Unterkategorien („Unterthemen“ in der dokumentarischen Methode) am Material induktiv gebildet werden. Mayring bezeichnet dies als zusammenfassende Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2015, S. 69 ff.), die unter anderem durch Paraphrasieren, Generalisieren und Subsumieren (siehe unten) des Textmaterials neue (Unter-)Kategorien bildet.

Reflektierende Interpretation

Bei der reflektierenden Interpretation wird ausgehend von der formulierenden Interpretation die Entwicklung von *Orientierungen* im Diskussionsverlauf analysiert. Dabei bezeichnen Orientierungen „Sinnmuster, die unterschiedliche (einzelne) Handlungen strukturieren.“ (Przyborski, 2004, S. 55). Im Kontext dieser Arbeit kann dabei unterschieden werden zwischen den Normen, die in der formulierenden Interpretation an das Material herangetragen werden, und dem Normenverständnis der Akteur/innen, welches den Orientierungen im Sinne Przyborskis entspricht. Die reflektierende Interpretation wird im Rahmen dieser Arbeit vor allem für die Beantwortung der **zweiten Forschungsfrage** zu intra- und interpersonellen Entwicklungen in den situierten Normenverständnissen der Diskussionsteilnehmenden genutzt. Dabei ist die Untersuchung von inkludierenden Modi im Sinne Przyborskis von zentralem Interesse. Inkludierende Modi sind nach Przyborski „Formen, wie das Kollektiv gemeinsame Orientierung

hervorbringt“ (Przyborski, 2004, S. 96). In der dokumentarischen Methode wird dafür die Relation zwischen Äußerungen und Reaktionen auf diese Äußerungen untersucht und nach Regelmäßigkeiten, nach Mustern, gesucht. Przyborski schlägt dafür eine Klassifikation in drei Schritten vor, die vor dem Hintergrund des theoretischen Rahmens dieser Arbeit begrifflich angepasst wurde. Diese Anpassung ist in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3 Interaktionsmuster in Anlehnung an die inkludierenden Modi nach Przyborski 2004, (S.62 ff.)

Dokumentarische Methode	Inhaltliche Erläuterung	Bezeichnung in dieser Arbeit
Schritt 1	Proposition	Orientierungsgehalt aufgeworfen
	Validierung oder Elaboration (Exemplifizierung beziehungsweise argumentativ)	Zustimmende Reaktion
Schritt 2	Antithese oder Opposition	Ablehnende Reaktion
		Einigung
Schritt 3	Konklusion	

Im ersten Schritt, der *Proposition*, wird zunächst ein *Orientierungsgehalt* aufgeworfen (vgl. Przyborski, 2004, S. 62 ff.). Im Rahmen dieser Arbeit bedeutet dies, dass ein bestimmtes Normenverständnis durch eine Person (erstmalig) aufgeworfen wird.

Im Rahmen der Intervention sollten die Diskussionsteilnehmenden zunächst in Einzelarbeit ihre eigenen Normenverständnisse in Bezug auf die präsentierten Beweisversuche klären und diese anschließend im Rahmen der Kleingruppendiskussion gegenüberstellen (vgl. Abschnitt 5.3.3). In diesem Kontext kann daher außerdem unterschieden werden zwischen **präinteraktional** und **interaktional** entwickeltem Verständnis. Bei ersterem handelt es sich um ein bereits in der Einzelarbeit entwickeltes Verständnis, bei letzterem um ein Verständnis, das sich erst im Rahmen der Interaktion entwickelt. Dies wird anhand der Tempuswahl und dem Zeitpunkt der Äußerung unterschieden: Präteritum oder Perfekt sowie eine Äußerung zu Beginn der Diskussion weisen eher auf ein präinterak-

tional entwickeltes Verständnis hin, Präsens und eine spätere Äußerung auf ein interaktional entwickeltes Verständnis.

Bei den zustimmenden Reaktionen wird in der dokumentarischen Methode unterschieden zwischen einer *Validierung* (Przyborski, 2004, S. 70) und einer *Elaboration* (Przyborski, 2004, S. 69). Erstere bezeichnet eine kurze zustimmende Äußerungen wie „ja“ oder „genau“, welche zwar auf eine grundsätzliche Übereinstimmung der Orientierung verweist, jedoch offenlässt, inwieweit die zustimmende Person die Äußerung der Person tatsächlich im Detail nachvollzogen hat und welchen Aspekten genau zugestimmt wird.

Da Validierung im Rahmen dieser Arbeit bereits mit einem anderen Bedeutungsgehalt belegt ist, wurde dies als **(einfache) Zustimmung** bezeichnet. Die Elaboration bezeichnet dagegen eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Proposition im Sinne einer weiteren Ausdifferenzierung des Orientierungsgehaltes. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus dabei auf den folgenden beiden Punkten:

Einmal auf der *Exemplifizierung* nach Przyborski, also der Verdeutlichung an einem Beispiel (vgl. Przyborski, 2004, S. 69). Im Rahmen dieser Arbeit wird darunter ein Ebenenwechsel verstanden von einer abstrakten Erörterung der Normen ohne konkreten Bezug zu einem Beweisversuch hin zu einer Konkretisierung anhand eines gegebenen Beweisversuchs. Mit **Ebenenwechsel** wird in dieser Arbeit im Allgemeinen ein Wechsel in der Ebene der Betrachtung bezeichnet. Dies ist somit weiter gefasst als die Exemplifizierung bei Przyborski. Insbesondere fällt darunter auch der Wechsel zwischen sprachlicher und ikonischer Darstellungsebene.

Weiterhin liegt der Fokus auf *argumentativen Elaborationen* nach Przyborski, in welchen weitere Begründungen für den aufgeworfenen Orientierungsgehalt geliefert werden (vgl. Przyborski, 2004, S. 69). Dies wird in der Analyse im Rahmen dieser Arbeit daher als **Begründung** bezeichnet und liefert einen Hinweis darauf, wie die Normen im Verständnis der Diskussionsteilnehmenden zusammenhängen.

Bei den ablehnenden Reaktionen unterscheidet Przyborski zwischen der *Antithese* (Przyborski, 2004, S. 71), bei welcher ein Gegenhorizont geäußert wird, der sich jedoch in einer Synthese mit der ursprünglichen Orientierung vereinigen lässt, und einer *Opposition* (Przyborski, 2004, S. 72), welche auf grundlegend unterschiedliche Orientierungsrahmen schließen lässt. Diese Unterscheidung wird im Rahmen dieser Arbeit aufgegriffen. Dabei werden einerseits gemeinsame, **interaktionale Entwicklungen** von Verständnissen betrachtet. Diese können sowohl aus antithetischen als auch aus von Anfang an geteilten Verständnissen entstehen. Von daher wird an dieser Stelle die Differenzierung nach zustimmenden und ablehnenden Reaktionen aufgelöst. Die Opposition bei

Przyborski wird in dieser Arbeit im Sinne von bis zum Ende hin **parallel nebeneinander vorliegenden, unvereinbaren Verständnissen** aufgefasst.

Im dritten Schritt wird bei Przyborski untersucht, ob eine abschließende *Konklusion* (Przyborski, 2004, S. 74) formuliert wird, also eine Einigung erreicht wird. Die darin enthaltene Frage nach dem Grad an Übereinstimmung in Bezug auf die im zeitlichen Verlauf der Diskussion formulierten Verständnisse wird im Rahmen dieser Arbeit bereits im zweiten Schritt bei der Auseinandersetzung mit den zustimmenden und ablehnenden Reaktionen betrachtet. Darüber hinaus soll an dieser Stelle untersucht werden, ob diese Verständnisse von den Diskussionsbeteiligten selbst abschließend auf der **Metaebene** betrachtet, explizit formuliert und verglichen werden oder ob diese bis zum Ende hin nur **implizit formuliert** bleiben.

Die Untersuchung der **dritten Forschungsfrage** zu potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen eines intendierten Normbruchs und damit das Etablieren des intendierten Normenverständnisses basiert auf einer **komparativen Analyse** im Sinne der dokumentarischen Methode. Dafür werden die etablierten Normenverständnisse und die diesbezüglichen intra- und interpersonellen Entwicklungen zwischen den Gruppen verglichen. Erst durch diesen Vergleich wird deutlich, dass sich beim Fehlen bestimmter Einflussfaktoren, die in anderen Gruppen vorhanden sind, das Normenverständnis nicht in intendierter Weise entwickelt.

4.3.3 Qualitative Auswertung auf Lehrenden- und Lernendenseite

Wie in Abschnitt 1.5 beschrieben, gab es eine erste Vorerhebung auf Lehrendenseite, durch welche das Normenverständnis ausdifferenziert wurde, welches in der Intervention den Lernenden vermittelt werden soll. In dieser Vorerhebung wurde angestrebt, einen hohen Grad an Interpersonalität in der gemeinsamen Diskussion zu erreichen. Demzufolge liegt der Fokus in der Analyse der Vorerhebung darauf, in einer deduktiv-induktiven Kategorienbildung das Verständnis der Normen in Unteraspekte auszudifferenzieren, welche von der Mehrheit der Lehrenden geteilt werden. Dies entspricht dem Schritt der formulierenden Interpretation in der dokumentarischen Methode. Der Schritt der reflektierenden Interpretation kommt erst auf Lernendenseite zur Anwendung.

Auf Lernendenseite wurde anhand des auf diese Weise in Unteraspekte der Normen ausdifferenzierten Kategoriensystems eine strukturierende Inhaltsanalyse gemacht. Hier wurden also keine neuen (Unter-)Kategorien induktiv gebildet, sondern untersucht, inwieweit sich das durch die Lehrendenseite vorgegebene Verständnis auch auf Lernendenseite wiederfindet.

Lehrendenseite

Um das Normenverständnis auf Lehrendenseite zu erheben, sollten die Normen ausdifferenziert werden entlang der verschiedenen Ebenen der Betrachtung. Dafür wurde das Textmaterial in einer strukturierenden Analyse zunächst entlang der Normen und dann jede Norm nochmals entlang der Ebenen der Betrachtung kodiert³⁰. Aus dem Vergleich der Passagen zur gleichen Norm und den gleichen Ebenen der Betrachtung wurden induktiv Unterasspekte im Verständnis der jeweiligen Norm herausgearbeitet. Um diese zu konkretisieren, wurde auf Verfahrensweisen der zusammenfassenden Inhaltsanalyse zurückgegriffen, welche hier nach Mayring (2015, S. 69ff) dargestellt werden: Die Unterkategorien sollten relativ nah am empirischen Material sein, aber dennoch so allgemein, dass sich diese zu wenigen Unterkategorien zusammenfassen lassen. Dementsprechend wurde ein mittleres Abstraktionsniveau festgelegt. Nachdem sich mit den Texten vertraut gemacht wurde, wurde mit der *Segmentierung* begonnen. Dabei sollte jedes Segment einen zusammenhängenden Gedanken abbilden. Da auch Zusammenhänge im Verständnis der Normen untersucht werden sollten, kann ein Segment mit mehreren Normen kodiert werden, jedoch nicht mit unterschiedlichen Ausprägungen in der Ebene der Betrachtung. Die *Kodiereinheit* (kleinstmögliches Segment) wurde daher auf einen Spiegelpunkt oder einen Teilsatz (die kleinere der beiden Einheiten) festgelegt, die *Kontexteinheit* auf einen Paragraphen. Ein Segment endet automatisch auch dort, wo der Redeanteil einer Person endet.

Die Passagen wurden daraufhin paraphrasiert und nicht bedeutungstragende Textbestandteile gestrichen mit dem Ziel, eine *grammatische Kurzform* zu erreichen. Durch Vergleich dieser Kurzformen konnten durch *Generalisieren* (also Anheben des Abstraktionsniveaus) und *Subsumtion* unter bereits bestehende Kurzformen eine Sättigung erreicht werden in dem Sinne, dass nach Durchgang der Hälfte des Materials jede neue Unterkategorie unter eine bereits gebildete subsumiert werden konnte. Es konnte so ein einheitliches System an Unterkategorien gebildet werden, das sich in das deduktiv formulierte Analyseraster aus normativen Oberkategorien und Ebenen der Betrachtung einfügt. In einem zweiten Materialdurchgang wurde das Material entlang dieser Unterkategorien kodiert. Das so ausdifferenzierte Kategoriensystem erfüllt dabei die folgenden Gütekriterien nach Schreier (2012, S. 71ff) sowie Kuckartz und Rädiker (2022, S. 63ff):

30 Auf eine Doppelkodierung musste aus zeitlichen und personellen Gründen an dieser Stelle verzichtet werden. Das Kategoriensystem wurde bereits bei der Quantifizierung der Erhebungsdaten aus Eingangs- und Ausgangserhebung in gleicher Weise genutzt. Dort wurde durch eine Doppelkodierung die Reliabilität sichergestellt. Die Kodierung wurde an dieser Stelle von einer der Kodiererinnen, die auch die Quantifizierung vorgenommen hatte, kodiert. Vor diesem Hintergrund erschien eine erneute Zweitkodierung an dieser Stelle verzichtbar.

Der *Konstruktvalidität* wird durch die theoretische Fundierung der normativen Oberkategorien und die Expert/innenbefragungen zu den induktiv gebildeten Unterkategorien Rechnung getragen. Zweck des Kategoriensystems ist es, das situierte Normenverständnis differenziert erheben zu können. Dies zeigt die *enge Beziehung zu den Forschungsfragen*. Die (Unter-)Kategorien selbst sind *eindimensional*, das heißt jede Dimension im Kategoriensystem umfasst nur eine Facette des Materials, die sich aus der Kombination einer Norm und einer Ebene der Betrachtung ergibt. Sie ergeben sich aus der zusammenfassenden Analyse aus dem empirischen Material und liefern durch diesen Prozess *genau definierte und nachvollziehbare* (Unter-)Kategorien. Dabei sind sie so formuliert, dass sie in ihrer Anwendung *trennscharf* sind, das heißt die Entitäten sind klar voneinander abgegrenzt. Dies wird dadurch gewährleistet, dass in einem Kodiermanual durch Kodierregeln und Ankerbeispiele festgelegt ist, welche (Unter-)Kategorie einem Segment zuzuordnen ist. Da auch die Beziehung der Normen im Verständnis der Lernenden untersucht werden soll, werden die Kategorien hier nicht als disjunkt angenommen. Das heißt einem Segment können mehrere (Unter)Kategorien zugeordnet werden. Außerdem ist das Kategoriensystem in doppelter Hinsicht vollständig: In der Richtung vom Kategoriensystem zum empirischen Material findet jede (Unter-)Kategorie bei der Kodierung Verwendung. Das Kategoriensystem ist also *gesättigt*. In der umgekehrten Richtung kann jedes Segment einer Kategorie zugeordnet werden, das Kategoriensystem ist somit *erschöpfend*.

Lernendenseite

Formulierende Interpretation

Um eine gute Vergleichbarkeit zwischen den Gruppen zu gewährleisten, wurden die Transkripte zunächst anhand externer Kriterien in Abschnitte vorgegliedert³¹. Für jeden Abschnitt wurde eine Turn-by-Turn-Analyse entlang der Normen und der Ebenen der Betrachtung vorgenommen. Die Normen wurden entsprechend der Vorerhebung auf Lehrendenseite entlang der dort analysierten Unterasspekte der Normen ausdifferenziert. Für jeden Abschnitt wurde ein Zentralthema identifiziert, was der Norm entspricht, die in der Diskussion in diesem Abschnitt im Fokus steht. Weiterhin wurden Seitenthemen identifiziert, also Normen, die in engem Zusammenhang zum Zentralthema diskutiert wurden. Die Daten wurden dahingehend reduziert, dass für jeden Abschnitt nur die Textstellen für die Analyse ausgewählt wurden, die das Zentral- und die Seitenthemen dieses Abschnittes diskutieren. Es wurden weiterhin nur diejenigen Textstellen betrachtet, die in

³¹ Das entsprechende Vorgehen ist zu Beginn von Abschnitt 6 dargestellt.

Bezug auf diese Themen neue Orientierungen aufwerfen, beziehungsweise bereits aufgeworfene weiter vertiefen.

Die Normen, die als Zentral- und Seitenthemen im jeweiligen Abschnitt auftreten, wurden dabei als Entitäten für die grafische Veranschaulichung der Analyse des jeweiligen Abschnittes gewählt. Diese Veranschaulichung wird im Rahmen dieser Arbeit als *Analyseraster* bezeichnet. Um das Verständnis der in diesem Abschnitt zentralen Norm grafisch darzustellen, wurden zu jeder Norm die Ebenen der Betrachtung und die Unterasspekte mit aufgeführt und die jeweils in dem Abschnitt diskutierten hervorgehoben, die anderen ausgegraut.

Reflektierende Interpretation

Die Beziehungen zwischen den diskutierten Normen wurden in den Analyserastern durch Pfeile verdeutlicht. Dabei wurden je nach Abschnitt und daraus resultierendem Analysefokus entweder die zeitlichen Beziehungen abgebildet, also die zeitliche Abfolge der Themen im Diskussionsverlauf, oder die logischen Beziehungen³². In letzterem Fall verdeutlicht ein Pfeil zwischen Normen, dass eine Norm zur Begründung einer anderen Norm im Sinne einer Elaboration (vgl. Abschnitt 4.3.2) herangezogen wurde. Dadurch werden die Beziehungen zwischen den Normen im Verständnis der Diskussionsteilnehmenden verdeutlicht, was Aufschlüsse über das Normenverständnis (als relational verstandenes Konstrukt, also als Beziehung zwischen Verständnissen einzelner Normen) im Sinne der ersten Forschungsfrage liefert. Weiterhin werden durch diese Darstellung potenzielle Einflussfaktoren auf die Entwicklung des intendierten situierten Verständnisses der jeweiligen Norm, im Sinne der dritten Forschungsfrage, direkt grafisch sichtbar. Diskrepanzen oder eine Abgrenzung von Normen wurden durch Doppelpfeile verdeutlicht.

Die intra- und interpersonellen Entwicklungen, im Sinne der zweiten Forschungsfrage, wurden durch eine farbliche Unterscheidung der Diskussionsteilnehmenden abgebildet. Normen und Beziehungen zwischen diesen wurden entsprechend farblich gezeichnet nach den Personen, die diese in die Diskussion einbringen. Das Benennen einer Norm wurde dabei durch einen entsprechend gefärbten Punkt kenntlich gemacht, für die Darstellung von Beziehungen wurde der Pfeil zwischen den Normen entsprechend gefärbt. Ein Beispiel ist in Abbildung 16 dargestellt:

³² Die konkrete Ausgestaltung der Analyseraster wird in der qualitativen Analyse in den Abschnitten zu den jeweiligen Normen erläutert.

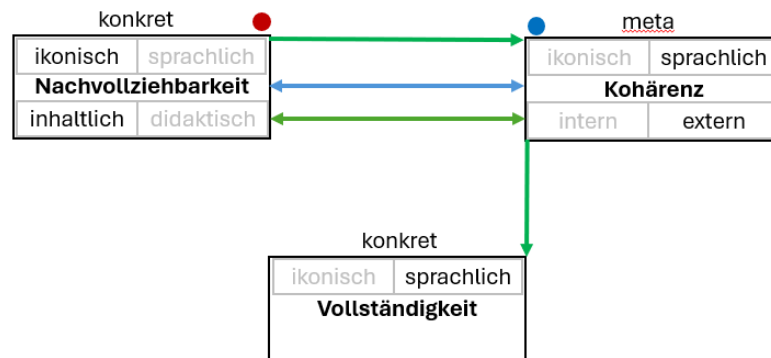


Abbildung 16 Beispielhafte grafische Veranschaulichung der Analyse von Interaktionsmustern (entspricht **Abbildung 34**)

4.3.4 Gütekriterien qualitativer Forschung

Ein Forschungsprozess kann als eine Art Beweisprozess verstanden werden: Die Ergebnisse dieses Prozesses sollen durch den Forschungsprozess in ihrer Gültigkeit nachgewiesen werden. Von daher lässt sich auch die Güte eines Forschungsprozesses untersuchen entlang der normativen Dimensionen aus Abschnitt 2.2, also durch Festlegung der Entitäten, deren Organisation und Verbindung sowie durch die erreichte Reichweite der Ergebnisse.

Zum Forschungsprozess gehören als Entitäten neben der eigentlichen Analyse und deren Argumentation, die verwendeten Methoden, die Forschungsfragen, der theoretische Rahmen, das empirische Material und der für die Forschung relevante Personenkreis. Diese Entitäten befinden sich dabei jeweils in bestimmten **Kohärenzebenen** (vgl. Abschnitt 2.4.4), die von ihrer Organisationslogik her ineinander eingebettet sind, beginnend mit der eigentlichen Analyse bis hin zum relevanten Personenkreis.

Für die qualitative Forschung wurden von Steinke (1999 und 2007) sieben³³ Gütekriterien formuliert. Diese Gütekriterien werden hier entlang der oben be-

³³ In der Darstellung im Rahmen dieser Arbeit wurde zusätzlich das Kriterium der *theoretischen Einbettung* hinzugefügt. Daher finden sich in der Auflistung unten acht Gütekriterien.

schriebenen Organisationslogik der Kohärenzebenen (aus Abschnitt 2.4.4) dargestellt:

1. Die Ebene der Analyse wird bei Steinke mit dem Kriterium der *Kohärenz* adressiert. Darunter versteht Steinke die innere Konsistenz und Widerspruchsfreiheit der dargelegten Argumentation. Es geht hier also um eine enge Beziehung des in der Analyse Dargelegten, in der Terminologie dieser Arbeit also um die **interne Kohärenz** der Arbeit. Dem wird in dieser Arbeit durch den logischen Aufbau der Analysen, die sich in mehreren Verdichtungsschritten auseinander ergeben, Rechnung getragen. Widersprüche werden direkt adressiert und es wird versucht, diese auf einem höheren Abstraktionsniveau aufzulösen. Wo dies nicht gelingt, insbesondere beim Vorliegen widersprüchlicher und unvereinbarer Verständnisse auf Studierendenseite, wird dies als Grundlage genommen, gezielte Vorschläge zu erarbeiten, wie künftige Interventionen in einer Weise weiterentwickelt werden können, um diese Widersprüche aufzulösen.
2. Die Ebene der verwendeten Methoden wird durch das Kriterium der *Indikation* adressiert. Laut Steinke sollten die Methoden gegenstandsangemessen gewählt werden. In der Terminologie dieser Arbeit geht es hier also um die **externe Kohärenz** der Analyse zum Gegenstand. Dem wird in dieser Arbeit durch Eingrenzung des Gegenstandes durch die Formulierung konkret untersuchbarer Forschungsfragen Rechnung getragen. Die Angemessenheit der zur Untersuchung der Forschungsfragen angewandten Methoden wird in Abschnitt 4.3.2 ausführlich begründet.
3. Die *theoretische Einbettung* wird von Steinke nicht explizit genannt, stellt aber einen wesentlichen Teil der Forschungsarbeit dar. Die Forschungsfragen selbst und der entsprechende Analysefokus wurden auf Grundlage der Analyse der bereits zum Gegenstand existierenden empirischen und theoretischen Arbeiten herausgearbeitet, es wurde hier also wieder Kohärenz auf der **externen Ebene** hergestellt. Die Ergebnisse wurden vor diesem Hintergrund präsentiert und dabei in diesen Rahmen eingebettet.
4. Weiterhin wird von Steinke eine *empirische Verankerung* der Analyse gefordert, das heißt eine Argumentation, die sich direkt aus dem empirischen Material heraus ergibt und aus diesem heraus begründet ist. Dies adressiert somit die Kohärenzebene der betrachteten empirischen **Beispiele**. Diese Beispiele bestehen dabei aus den Diskussionen in den für die Analyse ausgewählten Kleingruppen. Bei der Analyse dieser Beispiele wurde sehr nah am Textmaterial in Turn-by-Turn-Analysen gearbeitet. Deren Grundlage bildet ein

Kategoriensystem, das einerseits theoriebasiert hergeleitet wurde, jedoch zudem, im Rahmen einer Vorerhebung, durch eine induktive Kategorienbildung ausdifferenziert wurde. Diese Auswertungsgrundlage ist somit selbst empirisch verankert. Die Turn-by-Turn-Analysen wurden zur Beantwortung der Forschungsfragen hin verdichtet. Es wurde somit keine vorab festgelegte Theorie zum Normenverständnis an das Material herangetragen, sondern im Rahmen einer dokumentarischen Analyse das Verständnis aus dem Diskussionsmaterial heraus bestimmt.

5. Bei der *Verallgemeinerbarkeit/Limitation* steht im Sinne Steinke die Frage im Fokus, inwieweit sich die Ergebnisse der Analyse auf **andere Beispiele** in anderen Kontexten übertragen lassen, das heißt, inwieweit sich die untersuchten Fälle als beispielhaft für eine größere Klasse von Fällen betrachten lassen. In der Terminologie dieser Arbeit geht es also um die Frage nach der Reichweite und damit darum, inwieweit die Fälle klassifikatorisch verstanden werden können und somit eine Übertragbarkeit gewährleistet ist. Zentrales Analysemittel im Rahmen dieser Arbeit ist dabei der Fallvergleich, durch welchen im Sinne der dokumentarischen Methode gemeinsame und divergente Orientierungen herausgearbeitet werden können. Dadurch lassen sich Zusammenhänge herausarbeiten, die als Hypothesen formuliert, eine größere Reichweite beanspruchen als die untersuchten Fälle selbst. Durch die Kombination mit einer quantitativen Untersuchung im Rahmen eines Mixed-Methods-Ansatzes konnte die Reichweite der Untersuchung in dieser Arbeit noch weiter ausgedehnt werden (vgl. Abschnitt 4.2). Die Limitationen, die sich aus der Situierung der Intervention ergeben, sind in Abschnitt 8.4 explizit dargestellt.

Die oben vorgestellten Kriterien entsprechen somit einer Verortung des Forschungsprozesses innerhalb der in Abschnitt 2.4.4 eingeführten Kohärenzebenen³⁴. Steinke adressiert zudem die soziale Situierung des Forschungsprozesses. Diese kann als weitere Kohärenzebene, die **soziale Ebe-**

³⁴ Die Kohärenz der Darstellungsebenen aus Abschnitt 2.4.4 ist hier nicht explizit mit aufgeführt. Diese würde auf der Ebene der Bewertung der Güte eines Forschungsprozesses der *Triangulation* (vgl. Buchholtz, 2021, S. 222 ff.) von Forschungsmethoden entsprechen. Die Forschungsmethoden könnten in diesem Zusammenhang als verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der Forschungsergebnisse angesehen werden. Da sich dies explizit auf Mixed-Methods Studien bezieht und kein Gütekriterium nach Steinke darstellt, ist dies in Abschnitt 4.2. zum Mixed-Method-Design dieser Arbeit dargestellt.

ne des für die Forschung relevanten Personenkreises, angesehen werden. Diese wird bei Steinke durch die folgenden drei Kriterien adressiert:

6. Bei der *Reflektierten Subjektivität* nach Steinke wird die/der Forschende mit einbezogen in den Forschungsprozess. In der qualitativen Forschung wird dabei von dem Anspruch der Objektivität der quantitativen Forschung abgewichen, wonach eine Unabhängigkeit der Analyse von der forschenden Person gewährleistet sein soll. Vielmehr sollen die Rolle und die mögliche Beeinflussung des Forschungsprozesses durch die/den Forschende/n explizit thematisiert werden. Um diese Beeinflussung in dieser Arbeit möglichst gering zu halten, wurde das in der Intervention zu vermittelnde Verständnis der Normen nicht durch die forschende Person spezifiziert, sondern durch eine Vorerhebung auf Lehrendenseite.
7. Steinke weitet den Rahmen der sozialen Einbettung weiter aus und fordert über den Einbezug der/des Forschenden hinaus eine soziale Einbettung in die Forschungsgemeinschaft. In dieser soll eine *Intersubjektiven Nachvollziehbarkeit* des Forschungsprozesses gewährleistet werden. Zu diesem Zweck wurde der Forschungsprozess im Rahmen dieser Arbeit detailliert dargestellt und forschungsrelevante Entscheidungen und Interpretationen ausführlich begründet.
8. Schließlich wird bei Steinke über die Forschungsgemeinschaft hinaus auch der Kreis der (Schul-)Praktiker/innen mit einbezogen. In diesem Rahmen soll die *Relevanz* des Forschungsprozesses begründet werden. Im Fokus steht hier der praktische Nutzen der Forschungsarbeit. Für diese Arbeit ist dieser in dem Ziel formuliert, ein gemeinsames Normenverständnis auf Lehrenden- und Lernendenseite zu etablieren und damit auf Lernendenseite den Zugang zum Beweisen zu erleichtern. Die Ergebnisse werden vor diesem Hintergrund in einer zusammenführenden Analyse bewertet und daraus werden konkrete Hinweise für eine mögliche Weiterentwicklung der Intervention abgeleitet (vgl. Abschnitt 8.1).

4.4 Quantitative Auswertungsmethoden

4.4.1 Quantitative Forschungsfragen

Entsprechend der dritten Blumerschen Prämisse, wonach sich an ein interaktional etabliertes Verständnis ein intrapersoneller Verarbeitungsprozess anschließt, wurde im Rahmen der quantitativen Ausgangserhebung zur Intervention das intrapersonelle Verständnis erhoben. Dafür wurden die Studierenden in Einzelarbeit in einem Paper-und-Pencil-Test zur Bewertung von Beweisversuchen

aufgefordert. Die in den Beweisversuchen **intendierten Normbrüche** wurden in der Weise konzipiert, dass diese das auf Lehrendenseite erhobene Normenverständnis widerspiegeln (vgl. Abschnitte 1.5 und 3.4). Dadurch sollte ein Abgleich des auf Lernendenseite entwickelten Normenverständnisses mit dem auf Lehrendenseite intendierten Verständnis möglich gemacht werden.

Die Ergebnisse der Ausgangserhebung wurden mit den Ergebnissen aus der Eingangserhebung verglichen, die direkt vor der Intervention stattfand. Beide Erhebungen waren inhaltlich identisch. Weiterhin wurden die Ergebnisse aus der Interventionsgruppe verglichen mit den Ergebnissen aus einer Kontrollgruppe, welche im Interventionszeitraum nicht an der Intervention teilgenommen hat. Dieses Vorgehen entsprechend eines (Warte-)Kontrollgruppendesigns macht es möglich, den **Einfluss der Intervention** auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses zu untersuchen.

Die vor diesem Hintergrund quantitativ ausdifferenzierten Forschungsfragen sind in Tabelle 4, zusammen mit den in Abschnitt 4.3.1 qualitativ ausdifferenzierten Forschungsfragen, dargestellt.

Tabelle 4 Qualitative und quantitative Ausdifferenzierung der Forschungsfragen

FF 1	1. Welches situierte Normenverständnis entwickelt sich auf Lernendenseite in der Intervention?
qualitativ	1.1 Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?
quantitativ	1.2 Das Erkennen welcher der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite gefördert?
FF 2	2. Wie entwickelt sich die Interpersonalität im situierten Normenverständnis in der Intervention?
qualitativ	2.1 Welche intra- und interpersonellen Entwicklungen zeigen sich hinsichtlich der situierten Normenverständnisse in den Diskussionen in den Kleingruppen?
quantitativ	2.2 Welcher Grad an Interpersonalität im Erkennen der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite erreicht?
FF 3	3. Welche potenziellen Einflussfaktoren gibt es auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses in der Intervention?
qualitativ	3.1 Welche potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche zeigen sich in den Diskussionen in den Kleingruppen?
quantitativ	3.2 Wie groß und signifikant ist der Einfluss auf das Erkennen der intendierten Normbrüche durch die in der qualitativen Analyse herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren?

Forschungsfrage 1 zum auf Lernendenseite entwickelten situierten Normenverständnis kann dabei vor dem Hintergrund des Abgleichs mit dem intendierten Normenverständnis auf Lehrendenseite quantitativ spezifiziert werden zu

Forschungsfrage 1.2: Das Erkennen welcher der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite gefördert?

In der quantitativen Analyse sollte zudem die soziale Reichweite der Untersuchung auf die gesamte Lehr-Lern-Gemeinschaft für das Eingangssemester in der nicht-gymnasialen Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund ausgeweitet werden (vgl. Abschnitt 4.2). Entsprechend der Intention der Intervention sollte durch diese einerseits ein möglichst hoher Grad an intersubjektiver Übereinstimmung in den intrapersonellen Verständnissen der Lernenden erreicht werden und andererseits sollte eine möglichst hohe Übereinstimmung mit dem zuvor auf Lehrendenseite analysierten Verständnis erreicht werden.

Da das auf Lehrendenseite analysierte Verständnis als intendierte Normbrüche in den Beweisversuchen der quantitativen Erhebung zugrunde lag, kann die zweite Forschungsfrage zur Entwicklung der Interpersonalität für die quantitative Untersuchung wie folgt spezifiziert werden zu

Forschungsfrage 2.2: Welcher Grad an Interpersonalität im Erkennen der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite erreicht?

Neben dem Einfluss der Intervention interessierten entsprechend der dritten Forschungsfrage weitere potenzielle Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche. Diese ergaben sich als Hypothesen aus der vorherigen qualitativen Analyse. In der quantitativen Analyse sollten diese Hypothesen geprüft werden, das heißt die Größe und Signifikanz des Einflusses dieser Faktoren sollten analysiert werden. Die dritte Forschungsfrage kann daher für die quantitative Untersuchung wie folgt spezifiziert werden zu:

Forschungsfrage 3.2: Wie groß und signifikant ist der Einfluss auf das Erkennen der intendierten Normbrüche durch die in der qualitativen Analyse herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren?

4.4.2 Quantifizierung des Datenmaterials

Das Datenmaterial aus der Eingangs- und Ausgangserhebung wurde entlang des Kategoriensystems (vgl. Abschnitt 5.1.2) von der Autorin dieser Arbeit und zwei studentischen Hilfskräften kodiert. Die Hilfskräfte waren selbst als Studierender an der Pilotierung beziehungsweise als Übungsleiterin an der Haupterhebung beteiligt und waren somit bereits mit der Thematik vertraut. Das Datenmaterial wurde in Pakete zu Erhebungsdokumenten von je zwanzig Studierenden zerlegt. Um zu reliablen Ergebnissen zu gelangen, das heißt, um zu gewährleisten, dass die Kodierungen ohne größere Messfehler möglichst unabhängig von den Kodierenden ablaufen, wurde ein stufenweises Verfahren von *konsensuellen Kodieren* (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 105) und der Kontrollierung der *Intercoder-Reliabilität* (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 207) umgesetzt:

Da die studentischen Hilfskräfte noch keine Erfahrung mit der Anwendung des Kategoriensystems hatten, wurde zur Einarbeitung in das Kategoriensystem zunächst konsensuell kodiert. Dafür wurde das erste Paket unabhängig von jedem der drei Kodierenden kodiert und anschließend alle Fälle, in welchen unterschiedliche Kodierungen vorlagen, gemeinsam diskutiert, bis eine gemeinsame Kodierung festgelegt werden konnte. Wo nötig, wurden dafür entsprechende Beschreibungen im Kodiermanual konkretisiert. Außerdem wurden konkrete Ankerbeispiele für die Kodierung gemeinsam festgelegt. Die folgenden zwei Pakete wurden ausgehend von dem präzisierten Kategoriensystem in entsprechender Weise konsensuell kodiert.

Die weiteren Pakete wurden von jeweils einer studentischen Hilfskraft und der Autorin unabhängig voneinander kodiert. Stellen, an denen sich die Kodierenden unsicher waren, wurden weiterhin konsensuell kodiert. Die Interrater-Reliabilität wurde pro Paket bestimmt mit Hilfe verschiedener *Cohens Kappa* Werte (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 208 ff.), die unten detailliert dargestellt sind. Wurden ungleiche Segmentgrenzen gewählt (was selten vorkam), wurden die Segmente zerlegt in das Segment, das beide Kodierende kodiert hatten, sowie die beiden Randsegmente, die nur ein Kodierender kodiert hatte, und die Kodierungen jeweils auf die Segmente übertragen.

Zunächst wurde für die dichotomen Kategorien der Benennung eines Normbruchs der Grad an Übereinstimmung für die jeweilige Norm mit Hilfe von sogenannten *Kontingenztabellen* (auch „Übereinstimmungstabelle“ genannt, vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 208 ff.) bestimmt. In einer Kontingenztafel (vgl. Tabelle 5) wird jeweils die absolute Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens der jeweiligen Kodierungen der Kodierenden festgehalten und zeilen- sowie spaltenweise aufaddiert.

Tabelle 5 Kontingenztabelle mit absoluten Häufigkeiten für dichotome Variablen

Kodierender 1/2	kodiert	nicht kodiert	gesamt
kodiert	a_{11}	a_{12}	$a_{1*} = a_{11} + a_{12}$
nicht kodiert	a_{21}	a_{22}	$a_{2*} = a_{21} + a_{22}$
gesamt	$a_{*1} = a_{11} + a_{21}$	$a_{*2} = a_{12} + a_{22}$	$N = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$

Durch Division durch die Gesamtanzahl der Kodierungen N erhält man die relativen Häufigkeiten:

Tabelle 6 Kontingenztabelle mit relativen Häufigkeiten für dichotome Variablen

Kodierender 1/2	kodiert	nicht kodiert	gesamt
kodiert	h_{11}	h_{12}	h_{1*}
nicht kodiert	h_{21}	h_{22}	h_{2*}
gesamt	h_{*1}	h_{*2}	1

Ein erstes Maß für den Grad an Übereinstimmung zwischen den Kodierenden würde hier die Summe h der relativen Häufigkeit übereinstimmender Kodierungen und Nicht-Kodierungen darstellen (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 208):

$$h = h_{11} + h_{22} = \frac{a_{11}}{N} + \frac{a_{22}}{N}$$

Durch das Datenmaterial ist jedoch ein hoher Grad an zufälliger Übereinstimmung, vor allem bei der Nicht-Kodierung einer Norm, gegeben. Dadurch, dass einige Beweisversuche zu bestimmten Normen keinen Normbruch aufweisen, werden diese Normen dort aller Voraussicht nach übereinstimmend nicht kodiert. Daher wurde als Maß für die Übereinstimmung der Kodierungen das Cohens Kappa κ gewählt, welches die relative Häufigkeit korrigiert durch den Wert der zufälligen Übereinstimmung e . Diese errechnet sich aus der Summe der erwarteten Häufigkeiten für die Übereinstimmung in der Kodierung der jeweiligen Norm e_{11} und der Nicht-Kodierung dieser Norm e_{22} :

$$e = e_{11} + e_{22} = h_{*1}h_{1*} + h_{*2}h_{2*}$$

Das Cohens Kappa errechnet sich als:

$$\kappa = \frac{h-e}{1-e} = 1 - \frac{1-h}{1-e} = 1 - \frac{h_{12}+h_{21}}{e_{12}+e_{21}}$$

Analog kann für mehrere Unterkategorien zu einer Norm ein Cohens Kappa Wert bestimmt werden (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022, S. 210), der den Grad der Übereinstimmung innerhalb dieser Oberkategorie angibt. Dabei wurden

jeweils nur diejenigen Segmente betrachtet, zu welchen die jeweilige Norm kodiert wurde. Tabelle 6 wurde dafür wie folgt modifiziert:

Tabelle 7 Kontingenztafel mit relativen Häufigkeiten für nominalskalierte Variablen

Kodierender 1/2	Unterkategorie 1	Unterkategorie 2	...	gesamt
Unterkategorie 1	h_{11}	h_{12}		h_{1*}
Unterkategorie 2	h_{21}	h_{22}		h_{2*}
...				
gesamt	h_{*1}	h_{*2}		1

Das Cohens Kappa kann dann analog zum dichotomen Fall berechnet werden:

$$\kappa = 1 - \frac{\sum_{i \neq j} h_{ij}}{\sum_{i \neq j} e_{ij}}$$

Die Kodierung wurde so lange fortgeführt, bis alle Cohens Kappa Werte mindestens dreimal in Folge über 80 Prozent lagen. Laut Kuckartz & Rädiker (2022, S. 2010) gelten Werte über 80 Prozent als sehr gute Werte. Dies war nach etwa einem Drittel des Datenmaterials der Fall. Danach wurden die Pakete jeweils nur von einem Kodierenden kodiert. Bei Unsicherheiten in der Kodierung wurde entsprechend weiter konsensuell kodiert.

4.4.3 Logistische Regression

Zur Untersuchung des Einflusses einer Intervention in einem (Warte-)Kontrollgruppendesign wird in der Forschung in der Regel eine *Varianzanalyse* (englisch: analysis of variance, Kurzform: ANOVA) durchgeführt. Dabei soll die Gesamtvarianz einer abhängigen Zielvariablen durch unabhängige Variablen, sogenannte Prädiktoren, erklärt werden (vgl. Holtmann, 2010, S. 163). Die Varianzanalyse findet auf der Basis einer *linearen Regression* statt (vgl. Holtmann, 2010, S. 179 ff.). Dieses Verfahren setzt eine Normalverteilung einer metrischen (mindestens intervallskalierten) Zielvariable voraus (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 15). Der Erwartungswert dieser normalverteilten Zielvariable wird dabei durch eine Linearkombination aus den Prädiktoren modelliert (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 15). Schließlich wird der Anteil Gesamtvarianz der Zielvariable, welcher sich in diesem Modell durch die Prädiktoren ergibt, bestimmt (vgl. Holtmann, 2010, S. 179 ff.).

Die *Zielvariablen* im Rahmen dieser Arbeit sind die Normen, genauer gesagt, das **Benennen eines Normbruchs** hinsichtlich der normativen Kategorien aus Abschnitt 5.1.2. Zur Untersuchung des Einflusses der Intervention auf diese Zielvariablen (und damit zur Beantwortung der ersten und zweiten Forschungs-

frage) werden als *Prädiktoren* die **Gruppenzugehörigkeit** und die **Zeit** betrachtet, welche dichotom modelliert sind (0 = Kontrollgruppe, 1 = Interventionsgruppe, beziehungsweise 0 = vor der Intervention, 1 = nach der Intervention). Um den gleichzeitigen Einfluss der Gruppenzugehörigkeit und der Zeit untersuchen zu können, das heißt in diesem Kontext den tatsächlichen Einfluss der Intervention auf die Zielvariable, wird als weiterer Prädiktor ein Interaktionsterm aus Gruppenzugehörigkeit und Zeit, bestehend aus dem Produkt beider Variablen, hinzugefügt (vgl. Holtmann, 2010, S. 96 und S. 182 f.).

Auch bei den Zielvariablen handelt es sich um dichotome Variablen (1= Normbruch benannt, 0 = Normbruch nicht benannt). Die Variablen folgen daher keiner Normalverteilung, sondern einer *Bernoulli-Verteilung*. Bei dieser Verteilung ist der Erwartungswert gegeben durch die Erfolgswahrscheinlichkeit p , das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die entsprechende Variable den Wert 1 annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable den Wert 0 annimmt, beträgt somit $1-p$ und auch die Varianz der Variablen lässt sich mit $p \cdot (1-p)$ direkt aus dem Erwartungswert berechnen (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 20). Eine Varianzanalyse auf Grundlage einer linearen Regression macht in diesem Kontext somit keinen Sinn. Die jeweilige Zielvariable kann jedoch im Rahmen einer sogenannten *logistische Regression* auf Grundlage der Prädiktoren modelliert werden (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 16ff). Dies hat den weiteren Vorteil, dass weitere Prädiktoren für die jeweilige Zielvariable hinzugefügt werden können und damit weitere potenzielle Einflussfaktoren (im Sinne der dritten Forschungsfrage) im Rahmen dieser Modellierung untersucht werden können³⁵.

In einer logistischen Regression werden dichotome, Bernoulli-verteilte Zielvariablen modelliert. Der Erwartungswert einer solchen Variablen entspricht dabei der Erfolgswahrscheinlichkeit und kann somit, wie jeder Wahrscheinlichkeitswert, nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Eine Modellierung des Erwartungswertes durch eine Linearkombination der Prädiktoren (welche beliebige reelle Werte annehmen können) macht in diesem Zusammenhang keinen Sinn. Daher wird eine Transformation benötigt, die beliebige reelle Werte der Linearkombination der Prädiktoren in Werte im Intervall $(0,1]$ transformiert. In der logistischen Regression wird dafür die sogenannte *logistische Funktion* genutzt (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 17), die gegeben ist durch

35 Für diese Arbeit wurden folgende Beratungsleistungen des Bereichs Statistische Beratung und Analyse (SBAZ) des Zentrums für Hochschulbildung der TU Dortmund in Anspruch genommen: Datenvorbereitung und statistische Methodik. Dies umfasst Beratungen hinsichtlich der Wahl der logistischen Regression als statistisches Modell für die Behandlung der Forschungsfragen sowie die dafür notwendige Datenvorbereitung und die möglichen Anpassungen des Modells für weitere potenzielle Einflussfaktoren.

$$h: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}$$

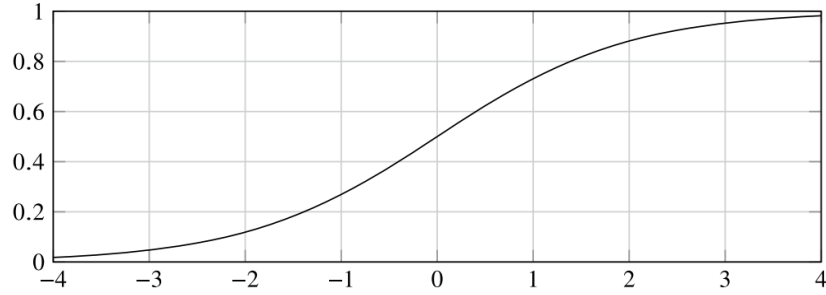


Abbildung 17 Logistische Funktion (aus Kalisch & Meier, 2021, S. 18)

Damit kann der Erwartungswert der Zielgröße beziehungsweise in diesem Fall gleichbedeutend die Erfolgswahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2)$ modelliert werden in Abhängigkeit von den Prädiktoren Gruppenzugehörigkeit x_1 und Zeit x_2 (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 17):

$$p(x_1, x_2) = h(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{1,2} x_1 x_2) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{1,2} x_1 x_2}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{1,2} x_1 x_2}}$$

Die Umkehrfunktion von h ist gegeben durch die sogenannte *Logit-Funktion* (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 18):

$$h^{-1}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

wobei $\log$ den natürlichen Logarithmus, das heißt den Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl e , bezeichnet.

Damit lässt sich obige Gleichung umwandeln zu der, im Rahmen der logistischen Regression gebräuchlicheren, Form (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 19):

$$\log\left(\frac{p(x_1, x_2)}{1 - p(x_1, x_2)}\right) = h^{-1}(p(x_1, x_2)) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{1,2} x_1 x_2 \quad (1)$$

Die Erfolgswahrscheinlichkeit wird hier zunächst über die Logit-Funktion so transformiert, dass sich diese durch einen linearen Zusammenhang der Prädiktoren modellieren lässt. Es wird über diesen Zusammenhang also nicht direkt die Erfolgswahrscheinlichkeit der Zielgröße modelliert, sondern ihre *logarith-*

mierte Chance, die sogenannte *Log-Odds* (englisch: odds = Chance), welche in Abschnitt 4.4.6 näher betrachtet wird.

In diesem Modell (Gleichung (1)) hängt der Wert der logarithmierten Chance (und damit auch der Erfolgswahrscheinlichkeit) nur von den Werten der Prädiktoren x_1 und x_2 ab. Es wird für jedes Individuum abhängig von den Prädiktoren somit die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit (beziehungsweise Log-Odds) angenommen.

Für die Schätzung der Parameter, logarithmierten Chancen und Erfolgswahrscheinlichkeiten wurde im Rahmen dieser Arbeit die Statistiksoftware R genutzt. Diese verwendet das *Maximum Likelihood Verfahren*, bei welchem die Wahrscheinlichkeit (englisch: Likelihood) für die Beobachtung des gegebenen Datenmaterials unter der Annahme der Gültigkeit des Modells (Gleichung (1)) bestimmt wird. Die Parameter des Modells werden dabei so bestimmt, dass diese Wahrscheinlichkeit maximal wird (vgl. Harrel (Jr.), 2015, S. 181 ff.). Die logarithmierten Chancen und die Erfolgswahrscheinlichkeit können dann aus diesen Parametern errechnet werden (vgl. Abschnitt 4.4.6).

4.4.4 Modellvoraussetzungen

Um die logistische Regression anwenden zu können, müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein, die im Folgenden gemäß Tabachnick & Fidell (2019, S. 350 ff.) diskutiert werden:

Linearität des Logits

Um die logistische Regression sinnvoll anwenden zu können, muss zunächst anhand der Daten geprüft werden, ob von einem linearen Zusammenhang zwischen dem Logit der Erfolgswahrscheinlichkeit der jeweiligen Zielvariable mit jedem der Prädiktoren ausgegangen werden kann. Da im Kontext dieser Arbeit die Prädiktoren selbst auch dichotom sind, also nur die zwei Werte 0 und 1 annehmen können, ist hier nichts weiter zu prüfen. Einen linearen Zusammenhang zu einem der Prädiktoren erhält man stets, indem man die durch den jeweiligen Prädiktor bedingten Odds Ratios nutzt³⁶.

Keine Multikollinearität der Prädiktoren

Die Prädiktoren sollten selbst nicht aus anderen Prädiktoren durch Linearkombinationen aus diesen vorhersagbar sein. Dies würde bedeuten, dass die so vorhersagbaren Prädiktoren für die Modellierung der Zielgröße nicht notwendig

³⁶ Die Odds Ratios können dafür direkt aus den Kontingenztabellen bestimmt werden. Die gemäß logistischer Regression geschätzten Odds Ratios können davon abweichen, liefern jedoch eine präzisere Schätzung, das heißt ein kleineres Konfidenzintervall (vgl. Agresti, 2007, S. 108).

sind, da diese durch die anderen Prädiktoren ersetzt werden können. Würde der vorhersagbare Prädiktor im Modell belassen, würde dies zu verzerrten Modellparametern führen. Die Multikollinearität kann post-hoc, das heißt nach der Parameterschätzung, geprüft werden über den sogenannten Variationsinflationindex (VIF) der einzelnen Prädiktoren (vgl. Backhaus et al., 2018, S. 123). Der Schwellenwert von 5 sollte dabei nicht überschritten werden (vgl. Backhaus et al., 2018, S. 123).

Ausreichend viele Fälle pro Prädiktor

Damit das Schätzverfahren der logistischen Regression zuverlässige Schätzwerte liefert, müssen ausreichend viele (mit 1 kodierte) Fälle pro Prädiktor vorliegen. Die meisten Autoren empfehlen dabei eine Mindestanzahl von 10 Fällen pro Prädiktor (vgl. z. B. Pavlou et al., 2015). Die Anzahl der Fälle pro Prädiktor wird daher vorab über Kontingenztabellen bestimmt, welche die Häufigkeit des gleichzeitigen Auftretens von Werten des jeweiligen Prädiktors und der Zielvariable in einer 2x2-Tabelle darstellen (vgl. Agresti, 2007, S. 21 f.).

Unabhängigkeit der Beobachtungen

Die Daten sollten im Grundmodell der logistischen Regression unabhängig sein, das heißt nicht aus gematchten oder wiederholten Messungen stammen. Dieses Grundmodell umfasst nur sogenannte *feste Effekte* der Prädiktoren, die für alle Fälle, das heißt hier für jede/n Teilnehmende/n an der Intervention, gleich sind. Im Modell im Rahmen dieser Arbeit stammen die Daten jedoch aus Messwiederholungen zum Zeitpunkt 0 vor der Intervention und zum Zeitpunkt 1 nach der Intervention. Die Daten weisen damit insofern eine Clusterstruktur auf, als es sich um dieselben Individuen vor und nach der Intervention handelt. In diesem Fall muss der Clusterstruktur dadurch Rechnung getragen werden, dass auch sogenannte *zufällige Effekte* berücksichtigt werden, welche innerhalb eines Clusters nicht variieren, aber zufällig zwischen den Clustern, also hier den Individuen, variieren (vgl. Agresti, 2007, S. 297). Dem wird durch ein sogenanntes *random intercept* Modell Rechnung getragen (vgl. Agresti, 2007, S. 249 ff.). Dabei wird der y-Achsenabschnitt der Regression, also der Koeffizient β_0 , als zufälliger Effekt modelliert, welcher für jedes Individuum fest vorgegeben ist, jedoch zwischen den Individuen zufällig variieren kann. Die anderen Koeffizienten werden weiterhin als feste Effekte, also unabhängig vom Individuum, modelliert. Das modifizierte Modell sieht dann wie folgt aus:

$$\log\left(\frac{p(x_{i1}, x_{i2})}{1 - p(x_{i1}, x_{i2})}\right) = \beta_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_{1,2} x_{i1} x_{i2} \quad (2)$$

wobei i jeweils für eine Beobachtung im Cluster i , also für das Individuum i , steht. Der y -Achsenabschnitt β_{i0} , genauso wie jede einzelne Beobachtung zu jedem der Prädiktoren x_{i1} und x_{i2} ist in diesem Modell von i abhängig, nicht jedoch die Koeffizienten der Prädiktoren. Jedes Individuum erhält dadurch eine eigenen Wahrscheinlichkeitsverteilung (mit eigener Erfolgswahrscheinlichkeit p), der Einfluss der Prädiktoren auf die Log-Odds (und damit auch die Erfolgswahrscheinlichkeit) ist jedoch unabhängig von den Individuen immer der gleiche. Für die Untersuchung interessiert dabei nur dieser Einfluss der Prädiktoren und nicht, welche Unterschiede zwischen den Individuen (unabhängig von den Prädiktoren) vorliegen.

Keine Ausreißer in den Daten und Güte des Modells

Ausreißer in den Daten, die sehr weit entfernt von der Regressionsgeraden liegen, können das Modell stark verzerren. Um die Daten auf Ausreißer zu prüfen, werden post-hoc die Residuen $y_i - p_i$ zwischen dem beobachteten Wert und der geschätzten Wahrscheinlichkeit für jedes Individuum bestimmt. Um diese in ihrer Größe besser vergleichen zu können, werden die Residuen in der Regel normiert über die Standardabweichung $\sqrt{p_i(1 - p_i)}$, zu sogenannten Pearson-Residuen (vgl. Backhaus et al., 2018, S. 331ff):

$$\frac{y_i - p_i}{\sqrt{p_i(1 - p_i)}}$$

In der Regel wird bei standardisierten Residuen, die betragsmäßig größer als 3 sind, von Ausreißern gesprochen (vgl. z. B. Pardoe, 2020, S. 166). Ausreißer im Datenmaterial sollten daraufhin im Hinblick auf ihre Hebelwirkung analysiert werden, das heißt, wie stark sie das Ergebnis der Parameterschätzung beeinflussen. Ausreißer mit großer Hebelwirkung sollten dahingehend näher untersucht werden, ob es sich um Fehler bei der Messung oder Dateneingabe handelt. Ist dies nicht der Fall, muss von einer zufälligen Fluktuation innerhalb des Forschungskontextes ausgegangen werden und der Ausreißer entsprechend im Datenmaterial belassen werden (vgl. Backhaus et al., 2018, S. 334 ff.).

4.4.5 Inferenzstatistik und Signifikanzniveaus

Ist das theoretische Modell spezifiziert und sind die Modellvoraussetzungen erfüllt, können die Parameter des Modells über die Maximum Likelihood Methode geschätzt werden. Hierbei geht es zunächst darum, das theoretische Modell möglichst gut an die gegebenen Daten anzupassen. Will man auf Grundlage dieser Daten darüber hinaus Aussagen über eine umfassendere **Grundgesamtheit** ziehen, aus welcher diese Daten stammen, muss man sich Methoden der *Inferenzstatistik* bedienen (vgl. z. B. Fahrmeir et al., 2016, S. 12). Dadurch ge-

langt man zu über das Datenmaterial hinausgehenden, allgemeingültigeren Aussagen, die die gesamte Grundgesamtheit betreffen.

Dafür werden die geschätzten Parameter daraufhin untersucht, ob sich diese signifikant von Null³⁷ unterscheiden. Das Vorgehen ergibt sich aus den Prinzipien des statistischen Testens, die hier gemäß Backhaus et al. (2021, S. 30ff) und Fahrmeir et al. (2016, 381ff) dargestellt sind. Es wird in diesem Zusammenhang zunächst die *Nullhypothese* formuliert, dass der untersuchte Parameter gleich Null ist (vgl. Backhaus et al., 2021, S. 31). Daraufhin wird statistisch untersucht, ob diese Nullhypothese verworfen werden kann und somit mit ausreichend großer Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden kann, dass der untersuchte Parameter von Null verschieden ist. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler 1. Art*, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl diese zutrifft, möglichst klein gehalten werden (vgl. Backhaus et al., 2021, S. 37 ff.). Im oben beschriebenen Kontext würde dies bedeuten, dass von einem von Null verschiedenen Wert ausgegangen wird, obwohl dies tatsächlich nicht der Fall ist.

Diese Wahrscheinlichkeit wird mit Hilfe einer sogenannten *Teststatistik* modelliert (vgl. Backhaus et al., 2021, S. 32). Dies ist eine Größe, die sich aus den Daten errechnen lässt und für welche sich unter der Annahme der Nullhypothese eine Verteilungsfunktion angeben lässt³⁸. Für einen Koeffizienten eines logistischen Regressionsmodells wird dabei die Teststatistik gewählt, bei welcher der entsprechende Koeffizient durch den Standardfehler geteilt wird. Diese Teststatistik ist bei großer Stichprobenanzahl näherungsweise standardnormalverteilt (vgl. Agresti, 2007, S. 107). Die Nullhypothese wird abgelehnt, das heißt es wird von einem signifikant von Null verschiedenen Ergebnis ausgegangen, wenn der Wert der Teststatistik (betragsmäßig³⁹) sehr weit von Null⁴⁰ entfernt liegt. Dafür muss ein konkreter kritischer Wert festgelegt werden, ab welchem

37 Die Koeffizienten β_i in der logistischen Regression sollen daraufhin untersucht werden, ob diese signifikant von Null verschieden sind, das heißt, ob der entsprechende Prädiktor einen signifikanten Einfluss auf die Log-Odds der Zielvariable hat. Die Odds Ratios sollen jedoch daraufhin überprüft werden, ob diese signifikant von 1 verschieden sind, das heißt, ob die jeweiligen Chancen sich signifikant voneinander unterscheiden.

38 Diese Verteilungsfunktion kann sich theoretisch aus den Modellannahmen ergeben oder empirisch aus den erhobenen Daten.

39 Die betragsmäßige Abschätzung ist nur bei zweiseitigen Tests nötig, wo die Teststatistik Werte größer und kleiner Null annehmen kann.

40 Beziehungsweise dem Wert der Teststatistik, wenn die Daten exakt der Nullhypothese entsprechen würden.

die Werte als „zu weit“ von Null entfernt angesehen werden⁴¹. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Teststatistik dennoch über diesem kritischen Wert liegt, obwohl sie auf Grundlage von Daten zustande kam, die der Nullhypothese entsprechen, wird als **Signifikanzniveau** α (Backhaus et al., 2021, S. 33) bezeichnet. Dies entspricht gerade dem Fehler 1. Art, dass die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird. In der Praxis wird zunächst das tolerierbare Signifikanzniveau festgelegt und davon ausgehend die kritischen Werte bestimmt.

Anstelle der Angabe der kritischen Werte, kann die Überschreitungswahrscheinlichkeit, der sogenannte **p-Wert** (Backhaus et al., 2021, S. 36 ff.), bestimmt werden⁴². Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass unter Annahme der Nullhypothese, Werte für die Teststatistik beobachtet werden, die (betragsmäßig) größer sind als der aus den Daten ermittelte Wert der Teststatistik (z in der Abbildung 18). Das Signifikanzniveau α gibt dagegen die Wahrscheinlichkeit an, dass unter Annahme der Nullhypothese, Werte für die Teststatistik beobachtet werden, die (betragsmäßig) größer sind als der kritische Wert ($z_{1-\alpha}$ in der Abbildung 18). Die Wahrscheinlichkeiten entsprechen der Fläche unterhalb der Dichtefunktion der Teststatistik (ϕ in der Abbildung 18).

Der Wert der Teststatistik liegt also genau dann über dem kritischen Wert, wenn der p-Wert kleiner ist als das Signifikanzniveau. Die Nullhypothese kann also genau dann mit einem Signifikanzniveau von α verworfen werden, wenn der p-Wert kleiner ist als α . Bei Erreichen eines Signifikanzniveaus von $\alpha = 0,1\%$, also einem p-Wert, der kleiner ist als $0,1\%$, wird in der Forschung in der Regel von einem **hoch signifikanten** Ergebnis gesprochen (Notation in R: ***). Bei Erreichen von $\alpha = 1\%$ wird von einem **sehr signifikanten** Ergebnis gesprochen (Notation in R: **), bei Erreichen von $\alpha = 5\%$ von einem **signifikanten** Ergebnis (Notation in R: *). Gelegentlich wird bei Erreichen eines Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%$ noch von einem schwach signifikanten Ergebnis gesprochen (Notation in R: .) (vgl. dazu z. B. Backhaus et al., 2021, S. 33).

41 Die Betrachtung nur eines kritischen Wertes ist streng genommen nur bei einseitigen Tests ausreichend. Bei zweiseitigen Tests mit symmetrischer Dichtefunktion wird der Wert und der negative Wert betrachtet. Das Konfidenzintervall beschreibt alle Werte, die (betragsmäßig) unterhalb des kritischen Wertes liegen. Außerhalb dieses Konfidenzintervalls wird die Nullhypothese abgelehnt und somit der untersuchte Parameter als signifikant von Null verschieden eingestuft.

42 Die Entscheidung auf Grundlage der kritischen Werte oder des p-Wertes führen zum gleichen Ergebnis, in der Praxis ist meist die Entscheidung über den p-Wert gebräuchlicher.

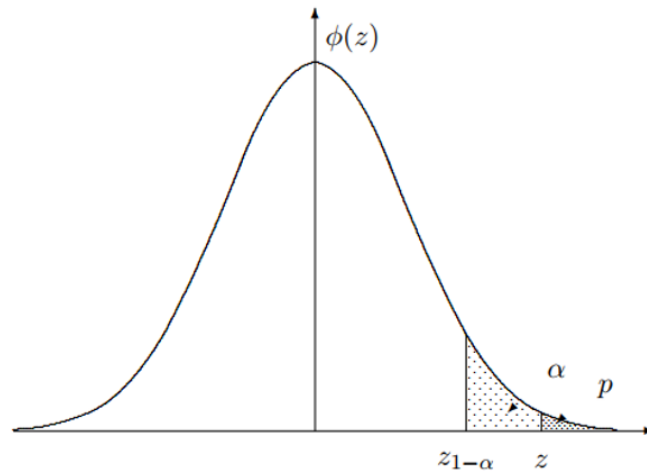


Abbildung 18 Zusammenhang zwischen p-Wert und Signifikanzniveau (aus Fahrmeir et al., 2016, S. 388)

4.4.6 Chancen und Chancenverhältnisse

Das logistische Regressionsmodell soll dazu dienen, den Einfluss der Intervention auf die Chance zu untersuchen, dass ein entsprechender Normbruch benannt wird. Die Chance ist eine Größe, die eng mit der Wahrscheinlichkeit zusammenhängt und sich unmittelbar aus dem logistischen Regressionsmodell ergibt. Dabei gibt die Chance (englisch: odds) eines Ereignisses A an, wie vielmal wahrscheinlicher das Eintreten des Ereignisses gegenüber dem Nicht-Eintreten des Ereignisses ist (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 4). Sie ergibt sich rechnerisch, indem die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Eintreten des Ereignisses geteilt wird durch die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des Ereignisses. Da beide Wahrscheinlichkeiten sich zu 1 addieren, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des Ereignisses als $1 - P(A)$. Dies führt zu der Gleichung (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 3):

$$\text{odds}(A) = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bekannt, kann somit direkt die Chance des entsprechenden Ereignisses errechnet werden. Umgekehrt kann

auch die Wahrscheinlichkeit aus der Chance errechnet werden über (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 4):

$$P(A) = \frac{\text{odds}(A)}{1 + \text{odds}(A)}$$

Wahrscheinlichkeit und Chance beinhalten also die gleiche Information. Im Rahmen der logistischen Regression wird jedoch die Chance (beziehungsweise deren logarithmierter Wert) durch eine lineare Gleichung modelliert, da die (logarithmierte) Chance beliebige reelle Werte annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit jedoch nur Werte zwischen 0 und 1.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Chancen modelliert werden für das Ereignis, dass ein Normbruch benannt wurde, das heißt die Zielvariable y zur entsprechenden Norm mit 1 kodiert wurde. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis entspricht der Erfolgswahrscheinlichkeit p . Damit ergibt sich die folgende Gleichung für das Ereignis $A = \{y = 1\}$:

$$\text{odds}(y = 1) = \frac{p}{1 - p}$$

Durch die Modellierung der Zielvariablen im Rahmen einer logistischen Regression mit den Prädiktoren Gruppenzugehörigkeit x_1 und Zeit x_2 (vgl. Abschnitt 4.4.3) soll der Einfluss dieser Prädiktoren auf die Chance $\text{odds}(y = 1)$ untersucht werden. Dafür können, analog zu bedingten Wahrscheinlichkeiten, bedingte Chancen betrachtet werden, das heißt in diesem Kontext die Chance $\text{odds}(y = 1 | x_1 = x_{i1}, x_2 = x_{i2})$, die sich unter der Bedingung ergibt, dass die Prädiktoren x_1 und x_2 die spezifischen Werte x_{i1} und x_{i2} annehmen. Die Regressionsgleichung (2) lässt sich damit umschreiben zu:

$$\log(\text{odds}(y = 1 | x_1 = x_{i1}, x_2 = x_{i2})) = \beta_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_{1,2} x_{i1} x_{i2}$$

Es wird hier also zunächst die logarithmierte Chance modelliert. Durch Exponenzieren kann daraus direkt die Chance errechnet werden:

$$\text{odds}(y = 1 | x_1 = x_{i1}, x_2 = x_{i2}) = e^{\beta_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_{1,2} x_{i1} x_{i2}}$$

Diese bedingten Chancen können miteinander verglichen werden, indem sogenannte *Chancenverhältnisse* (englisch: *Odds Ratio* (OR)) gebildet werden (vgl. Kalisch & Meier, 2021, S. 9). Wie stark sich der Prädiktor x_1 auf die Chance $\text{odds}(y = 1)$ auswirkt, kann so zum Beispiel über das folgende Chancenverhältnis bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
& \text{OR}(y = 1|x_1 = 1 \text{ vs. } x_1 = 0, x_2 = x_{i2}) \\
&= \frac{\text{odds}(y = 1|x_1 = 1, x_2 = x_{i2})}{\text{odds}(y = 1|x_1 = 0, x_2 = x_{i2})} \\
&= \frac{e^{\beta_{i0} + \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_{1,2} x_{i2}}}{e^{\beta_{i0} + \beta_2 x_{i2}}} \\
&= e^{\beta_1 + \beta_{1,2} x_{i2}}
\end{aligned}$$

Analog erhält man den Einfluss des Prädiktors x_2 auf die Chance, dass der Normbruch benannt wird, über das Chancenverhältnis

$$\begin{aligned}
& \text{OR}(y = 1|x_2 = 1 \text{ vs. } x_2 = 0, x_1 = x_{i1}) \\
&= e^{\beta_2 + \beta_{1,2} x_{i1}}
\end{aligned}$$

4.4.7 Quantitative Auswertung auf Lernendenseite

Zur Untersuchung von

Forschungsfrage 2.2: Welcher Grad an Interpersonalität im Erkennen der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite erreicht?

wurde für jede Norm zunächst untersucht, ob eine signifikante Interaktion zwischen den Interventionsvariablen Zeit und Gruppe vorliegt. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass die Intervention einen signifikanten Einfluss auf das Erkennen des jeweiligen Normbruchs hat, das heißt, dass auch für die Grundgesamtheit von einer Förderbarkeit des intendierten Normenverständnisses durch die Intervention ausgegangen werden kann. War dies nicht der Fall, wurde untersucht, ob zumindest die Zeit einen signifikanten Einflussfaktor darstellt. Dies liefert Aufschluss darüber, ob im Interventionszeitraum eine Entwicklung hinsichtlich des intendierten Normenverständnisses (in beiden Gruppen) stattfand.

Weiterhin wurden, unabhängig davon, ob ein signifikanter Interaktionseffekt zwischen der Zeit- und der Gruppenvariablen vorliegt, in entsprechenden Post-hoc-Analysen die Chancenverhältnisse in den einzelnen Gruppen und zu den verschiedenen Zeitpunkten untersucht. Dies kann einen Hinweis darauf geben, dass die Intervention an sich das Potenzial hat, entsprechende Entwicklungen zu fördern, sich dies aber aufgrund der Kürze der Interventionsdauer noch nicht in einem signifikanten Interaktionseffekt ausdrückt. In diesen Fällen sollte in künftigen Interventionen also nicht primär die inhaltliche Gestaltung der Interventi-

on, sondern lediglich die zeitliche Situierung, angepasst werden. Das entsprechend sequenziell gestaltete Vorgehen ist in Tabelle 8 dargestellt:

Tabelle 8 Sequenzielles Vorgehen bei der quantitativen Analyse der Intervention

Abfolge	Untersuchung	Folgerung
1.	Signifikanz Interaktion Zeit und Gruppe	Intervention fördert intendiertes Normenverständnis
2.	Signifikanz Zeit	In beiden Gruppen wurde in der Interventionszeit das intendierte Normenverständnis gefördert
3.	post hoc Analysen	Intervention hat das Potenzial, das intendierte Normenverständnis zu fördern (ggf. längere Interventionszeit nötig)

Bei den Post-hoc-Analysen interessierte zunächst, wie stark sich die Chancen des Erkennens der intendierten Normbrüche in den beiden Gruppen ($g1/g0$) nach dem Interventionszeitraum ($z1$) unterscheiden. Da es sich um ein quasi-experimentelles Design handelt, in welchem die Zuordnung zu Interventions- und Kontrollgruppe nicht vollständig randomisiert vorgenommen werden konnte, muss weiterhin geprüft werden, ob schon vor der Intervention ($z0$) signifikante Unterschiede zwischen Interventions- und Kontrollgruppe ($g1/g0$) vorlagen. Ist dies der Fall, sollten neben den Chancen nach dem Interventionszeitraum auch die jeweiligen Chancenverhältnisse vor der Intervention gegenüber nach der Intervention betrachtet werden. Hier wird verglichen, ob sich die Chancen vor und nach der Intervention ($z1/z0$) in der Interventionsgruppe ($g1$) stärker ändern als in der Kontrollgruppe ($g0$).

Da es um die Untersuchung des situierten Normenverständnisses geht, also insbesondere auch das Verständnis in Bezug auf räumliche Situierung in unterschiedlichen Beweisversuchen (vgl. Abschnitt 1.3) verglichen werden soll, wurden alle genannten Chancenverhältnisse für jeden Beweisversuch einzeln bestimmt.

Um im Rahmen dieser Analysen das Normenverständnis auf Lernendenseite differenzierter analysieren zu können und damit

Forschungsfrage 1.2: Das Erkennen welcher der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite gefördert?

beantworten zu können, wurde für jede Norm zunächst nach den entsprechenden Unteraspekten differenziert, die sich aus der Vorerhebung auf Lernendenseite ergeben hatten (vgl. Abschnitt 5.1.2). Dafür wurde für jeden Unteraspekt eine neue Regression gerechnet und entsprechend den oben beschriebenen Analyseschritten vorgegangen. Weiterhin wurde nach Beweisschritten und Darstellungs-

ebenen differenziert. Beweisschritt benannt beziehungsweise die entsprechende Darstellungsebene betrachtet wurde.

Tabelle 9 Chancenverhältnisse für die quantitative Analyse der Intervention

Inhaltliche Beschreibung	kurz	Operationalisiertes Chancenverhältnis	Berechnung aus Regressionsmodell
nach Intervention: Interventionsgruppe vs. Kontrollgruppe	z1 g1/g0	$OR(y = 1 x_1 = 1 \text{ vs. } x_1 = 0, x_2 = 1)$	$e^{\beta_1} e^{\beta_{1,2}}$
vor Intervention: Interventionsgruppe vs. Kontrollgruppe	z0 g1/g0	$OR(y = 1 x_1 = 1 \text{ vs. } x_1 = 0, x_2 = 0)$	e^{β_1}
Innerhalb Interventionsgruppe: vor Intervention vs. nach Intervention	g1 z0/z1	$OR(y = 1 x_2 = 1 \text{ vs. } x_2 = 0, x_1 = 1)$	$e^{\beta_2} e^{\beta_{1,2}}$
Innerhalb Kontrollgruppe: vor Intervention vs. nach Intervention	g0 z0/z1	$OR(y = 1 x_2 = 1 \text{ vs. } x_2 = 0, x_1 = 0)$	e^{β_2}

Dafür wurden diese sowie die entsprechenden Interaktionsterme mit den Interventionsvariablen Zeit und Gruppe in das Regressionsmodell aufgenommen und die Chancenverhältnisse unter der Einschränkung bestimmt, dass der entsprechende

Zur Untersuchung von

Forschungsfrage 3.2: Wie groß und signifikant ist der Einfluss auf das Erkennen der intendierten Normbrüche durch die in der qualitativen Analyse herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren?

wurden die entsprechend postulierten Einflussfaktoren und deren Interaktionsterme mit den Interventionsvariablen⁴³ als Prädiktoren für das jeweilige logistische Regressionsmodell gewählt. Zunächst wurde jeweils geprüft, ob die Interaktion der drei Variablen signifikant ist. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass der Einfluss des entsprechenden Faktors durch die Intervention gefördert werden konnte.

⁴³ Sofern die entsprechenden Modelle auf der Grundlage des Datenmaterials schätzbar waren.

In Post-hoc-Analysen wurden die Chancenverhältnisse für das Erkennen des jeweils intendierten Normbruchs (mit gegenüber ohne dem Einflussfaktor) bestimmt und damit die Höhe des Einflusses des untersuchten Faktors. Diese Chancenverhältnisse wurden differenziert aufgeschlüsselt nach Gruppenzugehörigkeit und Zeitpunkt der Erhebung. Es wurden also jeweils vier Chancenverhältnisse bestimmt (für $z0g0$, $z1g0$, $z0g1$ und $z1g1$), um die zeitlichen Entwicklungen in den einzelnen Gruppen besser nachvollziehen zu können.

Lagen hier keine signifikanten Werte vor, wurde geprüft, ob sich eine Signifikanz unabhängig von der Intervention ergibt. Die Interaktionsterme mit den Interventionsvariablen Zeit und Gruppe wurden dafür entsprechend wieder aus dem Modell herausgenommen. Eine Signifikanz bestätigt die entsprechende Hypothese dahingehend, dass es einen Einfluss gibt, der sich auf die Grundgesamtheit hin verallgemeinern lässt, dieser jedoch nicht durch die Intervention gefördert werden konnte. Dies gibt einen Hinweis dahingehend, dass es sich lohnt, diesen Einflussfaktor explizit in künftige Interventionen einzubeziehen, die aktuelle Intervention dazu jedoch noch nicht ausreichend in der Lage war. Das entsprechend sequenziell gestaltete Vorgehen ist in Tabelle 10 dargestellt:

Tabelle 10 Sequenzielles Vorgehen bei der Analyse potenzieller Einflussfaktoren

Abfolge	Untersuchung	Folgerung
0.	Qualitative Hypothese generiert	postulierte Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche
1.	Signifikanz Interaktion des Einflussfaktors mit Zeit und Gruppe	Intervention fördert Einfluss der postulierten Einflussfaktor
2.	post hoc Analysen	Intervention hat das Potenzial diesen Einfluss zu fördern (ggf. längere Interventionszeit nötig)
3.	Signifikanz Einflussfaktor	Einflussfaktor hat Einfluss auf Erkennen des intendierten Normbruchs (unabhängig von aktueller Intervention)

4.4.8 Gütekriterien quantitativer Forschung

Die zentralen Gütekriterien quantitativer Forschung sind: Objektivität, Validität und Reliabilität (vgl. z. B. Moosbrugger & Kelava, 2007, S. 8 ff.).

Bei der *Objektivität* geht es darum, dass die Durchführung (Durchführungsobjektivität) der quantitativen Erhebung sowie die Auswertung (Auswertungsobjektivität) und Interpretation (Interpretationsobjektivität) der entsprechenden Ergebnisse unabhängig von den durchführenden, auswertenden und interpretierenden Personen zum gleichen Ergebnis kommen sollen (vgl. Moosbrugger &

Kelava, 2007, S. 9ff). Um die Durchführungsobjektivität zu gewährleisten, wurde ein standardisiertes Erhebungsinstrument genutzt und dieses stets zum gleichen Zeitpunkt der Veranstaltung eingesetzt ohne weitere Impulse zur Bearbeitung zu geben als die auf dem Instrument genannten. Zur Gewährleistung der Auswertungsobjektivität wurde von allen Kodierenden auf das gleiche Kodiermanual zurückgegriffen. Für die Interpretation der Ergebnisse wurde auf standardisierte quantitative Verfahren zurückgegriffen.

Bei der *Validität*⁴⁴ muss sichergestellt werden, dass die Instrumente tatsächlich das Konstrukt messen, das untersucht werden soll, in dieser Arbeit also das Normenverständnis. Dafür wurde zunächst theoriebasiert aus der Literatur ein Kategoriensystem abgeleitet, welches die Aspekte dieses Konstruktes spezifiziert (Konstruktvalidität nach Moosbrugger & Kelava, 2007, S. 16). Das Kategoriensystem und die darauf aufbauend konstruierten Erhebungsinstrumente wurden mehrfach pilotiert, was zu weiteren Ausschärfungen des Kategoriensystems und einer empirischen Verankerung desselben führte. In der abschließenden Pilotierung wurden die intendierten Normbrüche von Expert/innen als solche erkannt (Inhaltsvalidität nach Moosbrugger & Kelava, 2007, S. 15).

Bei der *Reliabilität* (vgl. Moosbrugger & Kelava, 2007, S. 11 ff.) muss gewährleistet werden, dass die Messfehler möglichst geringgehalten werden. Dies wurde durch Mehrfachkodierungen des Materials und die Bestimmung von Interrater-Reliabilitäten gewährleistet (vgl. Abschnitt 4.4.2).

⁴⁴ In diesem Zusammenhang wird dieser Begriff anders genutzt als im Zusammenhang mit Beweisen (zur Validität von Beweisen vgl. Abschnitt 0 in dieser Arbeit).

5 Forschungsprozess

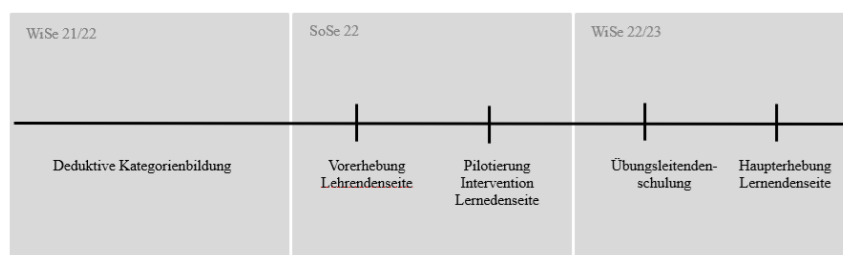


Abbildung 19 Zeitachse zum Forschungsprozess

Zu Beginn des Jahres 2022 wurde zunächst mit einer umfassenden Literaturlarbeit begonnen, um den normativen Rahmen für die Intervention theoriegestützt herzuleiten. Es sollten die Normen für beispielgebunden ikonische Beweise sowie die in Bezug auf diese Normen relevanten Begrifflichkeiten präzisiert werden, die dieser Arbeit zugrunde liegen. Davon ausgehend wurde ein erstes **Kategoriensystem** deduktiv entwickelt.

Ziel der Intervention ist es, ein geteiltes situiertes Normenverständnis zwischen Lehrenden und Lernenden im Eingangsemester der Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund zu etablieren. Dazu wurde, ausgehend von den Arbeiten von Cobb und Yackel (1996), ein Kreislaufmodell zur Aushandlung eines geteilten Normenverständnisses (vgl. Abschnitt 1.5) entwickelt. Ausgehend von diesem Modell wurde im Mai 2022 zunächst das **Normenverständnis auf Lehrendenseite** erhoben. Dies führte zu einer weiteren Ausdifferenzierung des Kategoriensystems.

Darauf aufbauend wurde eine Intervention entwickelt, die ein geteiltes Normenverständnis auf Lernendenseite fördern sollte, welches kompatibel mit dem auf Lehrendenseite erhobenen Verständnis ist. Im Rahmen einer **Pilotierung**, welche sich über vier Vorlesungssitzungen mit anschließenden Übungen im Juni 2022 erstreckte, wurden verschiedene Aufgabenformate und Vermittlungsweisen erprobt. Im Rahmen der Übungen wurden dabei einzelne Studierendengruppen und Plenumsdiskussionen audiografiert und für die Haupterhebung ausgewertet.

Weiterhin wurden Erhebungsdokumente für die Eingangs- und Ausgangserhebung vor und nach der Intervention pilotiert. Weitere Erkenntnisse zum Normenverständnis der Studierenden wurden aus der Abschlussklausur des Pilotierungssemesters gewonnen. Auf Grundlage dieser Ergebnisse wurden die Intervention sowie die Erhebungsinstrumente überarbeitet, welche im Rahmen der **Haupterhebung** im Dezember 2022 zum Einsatz kamen.

In der Pilotierung zeigte sich außerdem, dass die neue theoretische Ausrichtung auf Normen von Beweisen und die Leitung entsprechender Diskussionen in den Übungen die **Übungsleitenden** vor große Herausforderungen stellte. Zudem zeigten sich große Unterschiede in der Ausgestaltung der Diskussionen durch die entsprechende Leitungsperson. Um eine für alle Übungsleitenden gemeinsame Wissensbasis zu etablieren, wurde im Oktober 2022 eine **Schulung** durchgeführt. Dort wurden die für die Veranstaltung wesentlichen theoretischen Konzepte und Designprinzipien diskutiert. Anschließend wurde durch die Autorin eine Plenumsdiskussion zu den Beweisversuchen der Intervention angeleitet, die als Rollenmodell für die Gestaltung der Diskussionen in der Haupterhebung dienen sollte. Zudem wurden ausführliche Musterlösungen zu jedem der in der Haupterhebung zu diskutierenden Beweisversuche durchgesprochen, welche sich konsequent an den Normen und deren intendiertem Verständnis orientieren. Dadurch sollte eine möglichst große Standardisierung der Plenumsdiskussionen im Rahmen der Intervention erreicht werden.

5.1 Entwicklung des Kategoriensystems

5.1.1 Deduktive Kategorienbildung

Aus der theoretischen Auseinandersetzung mit der Forschungsliteratur ergaben sich deduktiv zwei Dimensionen des Kategoriensystems, die Normen selbst (vgl. Abschnitt 2.2) und die Ebenen der Betrachtung (vgl. Abschnitte 2.4.3 und 3.3), welche in Tabelle 11 dargestellt sind:

Tabelle 11 Deduktiv gebildetes Kategoriensystem der Normen und der Ebenen der Betrachtung

Normen	Ebenen der Betrachtung
Vollständigkeit	Darstellungsebene
	ikonisch
Kohärenz	sprachlich
Logische Struktur	Metaebene
	konkret
Allgemeingültigkeit	meta

Die Analyse der empirischen Studien zum situierten Beweisverständnis zeigte dabei, dass der Konstruktion der Beweisversuche und der Analyse des empirischen Datenmaterials immer implizit ein bestimmtes Verständnis dieser Normen zugrunde lag. Um im Rahmen dieser Arbeit nicht ebenfalls implizit vom Normenverständnis der Autorin auszugehen, wurde zunächst das Normenverständnis auf Lehrendenseite erhoben. Durch diese Vorerhebung sollte das obige Kategoriensystem induktiv ausdifferenziert und spezifiziert werden. Auf Grundlage dieses ausdifferenzierten Kategoriensystems wurden die Beweisversuche für die Intervention und die Erhebungen konstruiert und die Ergebnisse aus den Erhebungen analysiert.

5.1.2 Induktive Kategorienbildung

Im Sinne des in Abschnitt 1.5 dargestellten Kreislaufmodells zu Aushandlungsprozessen, sollten sich die Lehrenden mit konkreten Schwierigkeiten auseinandersetzen hinsichtlich der Normenumsetzung beim eigenständigen Beweisen der Studierenden im Eingangssemester an der Technischen Universität Dortmund. Zu diesem Zweck wurden den Lehrenden möglichst authentische und repräsentative Studierendenprodukte aus dem Eingangssemester vorgelegt. Dazu wurden die ersten Hausaufgabenbearbeitungen zur eigenständigen Beweiskonstruktion aus der Einführungsveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik 1 im Wintersemester 2021/2022 an der Technischen Universität Dortmund ausgewählt. Die Studierenden sollten hierbei die folgenden beiden Aussagen⁴⁵ durch ikonische⁴⁶ Beweise beweisen:

Aussage 1: „Die Summe zweier natürlicher Zahlen im Abstand 2 ist immer gerade“

⁴⁵ Diese Aussagen entsprechen typischen Aussagen, die in dieser oder ähnlicher Form in der Forschungsliteratur zum Einstieg in das Themenfeld des Argumentierens und Beweisens genutzt werden (vgl. u. a. Kempen, 2019 sowie Welsing, 2020).

⁴⁶ Es wurde in diesem Semester noch der Begriff „inhaltlich-anschaulich“ verwendet. Dabei wurde noch nicht klar unterschieden zwischen beispielgebunden ikonischen und formal ikonischen Beweisen.

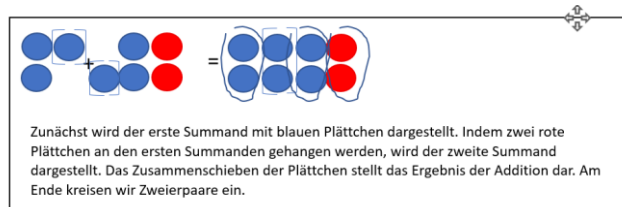


Abbildung 20 Beweisversuch einer/s Studierenden zu Aussage 1: „Die Summe zweier natürlicher Zahlen im Abstand 2 ist immer gerade.“

Aussage 2: „Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist immer ungerade.“

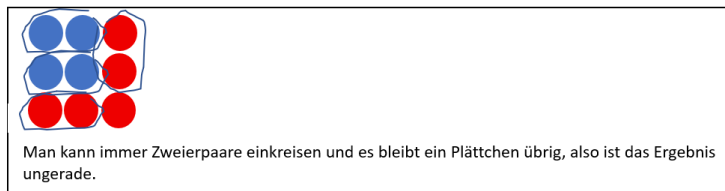


Abbildung 21 Beweisversuch einer/s Studierenden zu Aussage 2: „Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist immer ungerade.“

Zu jeder der Aussagen ist jeweils ein Beweisversuch einer/s Studierenden aufgeführt (vgl. Abbildung 20 bzw. Abbildung 21), der von den Lehrenden diskutiert werden sollte. Die Beweisversuche der Studierenden wurden hinsichtlich der Normbrüche bezüglich der in Abschnitt 2.2 herausgearbeiteten Normen kategorisiert, wobei jeweils die Norm⁴⁷ und die Darstellungsebene kodiert wurde, auf welcher der Normbruch vorliegt. Für jede Norm wurden die Beweisversuche hinsichtlich ähnlicher Vorgehensweisen und Fehler gruppiert und aus der jeweils größten Gruppe ein Beispiel ausgewählt. Durch dieses Vorgehen sollte sichergestellt werden, dass man repräsentative Beispiele für jeden Normbruch erhält, die typische Fehlvorstellungen der Lernenden widerspiegeln. Die Beweisversuche wurden insofern geglättet, dass nur die kodierten Normbrüche darin ersichtlich sind und weitere, nicht direkt argumentativ relevante Probleme, wie sprachliche Formulierungen, verbessert wurden. Für die Erhebung auf Lehrendenseite wurden diese Beweisversuche so kombiniert, dass über alle Beweisversuche hinweg

⁴⁷ Mehrfachkodierung sind dabei möglich.

jede Norm auf der sprachlichen oder auf der ikonischen Darstellungsebene verletzt wurde.

Die so ausgewählten Beweisversuche wurden in fünf Kleingruppen zu je drei bis vier Lehrenden des Primarbereichs der Technischen Universität Dortmund diskutiert und bewertet. Diese Lehrenden betreuen hauptverantwortlich Lehrveranstaltungen im Eingangssemester der Lehramtsausbildung und sind insofern die Hauptverantwortlichen für die Kommunikation des Normenverständnisses in Bezug auf Beweise an der Technischen Universität Dortmund zu Studienbeginn. Jede Gruppe erhielt dabei vier bis fünf verschiedene Beweisversuche, wobei manche der Beweisversuche in mehreren Gruppen diskutiert wurden. Außerdem sollten in jeder Gruppe ausgehend von der Bewertung konkrete Take-Home-Messages für die Studierenden formuliert werden, auf was bei einem Beweis zu achten ist, also die diskutierten Normen explizit auch auf der Metaebene formuliert werden.

Die Tonaufnahmen der Gruppendiskussionen wurden transkribiert (gemäß Kuckartz & Rädiker, 2022). Zu jeder Norm wurden die Diskussionsabschnitte bestimmt, in welchen diese thematisiert wurde, und in jedem Abschnitt weiterhin die Ebenen der Betrachtung kodiert (vgl. Abschnitt 4.3.3). Um auch in der Datenanalyse von möglichst wenig Vorannahmen zum Normenverständnis auszugehen, wurden die Kodierregeln möglichst breit und offen im Sinne von Abschnitt 2.2 formuliert: Vollständigkeit wurde kodiert beim Fehlen oder Vorhandensein bestimmter Entitäten, Kohärenz, wenn es um den Grad an Verbundenheit oder Unverbundenheit zwischen einzelnen Entitäten ging, logische Struktur, wenn die Organisation von einzelnen Entitäten im Beweis diskutiert wurde und Allgemeingültigkeit, wann immer die Reichweite der konkreten Darstellung zur Diskussion stand. Dabei ergaben sich die folgenden Spezifikationen:

Nachvollziehbarkeit

Die größte Uneinigkeit bei der Beweisbewertung lag dann vor, wenn der Beweisversuch nicht vollständig nachvollzogen werden konnte. Die Nachvollziehbarkeit stand damit häufig zur Diskussion und wurde daher als zusätzliche Norm in das Kategoriensystem aufgenommen. Beispielhaft für die Auseinandersetzung sei an dieser Stelle auf eine Äußerung aus Gruppe 5 verwiesen:

„Das ist vielleicht ein Punkt, es muss so aussagekräftig sein, dass jemand, der den Beweis noch nicht versteht, eigentlich dadurch nachvollziehen kann. [...]“ (Gruppe 5, Turn 186, A)

Hier wurde die Nachvollziehbarkeit explizit auf der Metaebene als Norm zur Beweisbewertung formuliert.

Vollständigkeit

Hinsichtlich des Verständnisses der Vollständigkeit eines Beweises gab es in allen Gruppen einen Konsens. Dabei wurden stets drei wesentliche **Beweisschritte** benannt, hier beispielhaft in Gruppe 1:

- 109 A Aber ich finde genau das [...] wäre für mich eine total wichtige Take-Home-Message, dass sowohl Anfangs- als auch Endzustand in der Zeichnung deutlich werden müssen. [...]
- ...
- 143 A Vielleicht ist das auch noch gut: Anfangszustand, Endzustand und wie man dahin kommt.

Das Beweisverständnis basiert hier auf der Beweiskonzeption des **operativen Beweises** (vgl. Abschnitt 2.3.4), bei welchem ein Anfangszustand durch eine gezielte operative Veränderung in den gewünschten Endzustand überführt wird. Dabei stellen Anfangs- und Endzustand zwei zentrale Beweisschritte dar. Diese ergeben sich aus der zu beweisenden Aussage („Behauptung“), wie dies hier in Gruppe 4 in Bezug auf das Quadrat einer ungeraden Zahl (Aussage 2) formuliert wird:

- 47 B [...] Einerseits, dass die beiden Faktoren ungerade sind und dass dann automatisch das Ergebnis ungerade ist. Das ist ja die Behauptung: Wenn die Faktoren einer Quadratzahl ungerade sind, dann ist das Ergebnis ungerade. Und das sind die beiden, die ich sehen wollen würde. [...]

Der Anfangszustand entspricht dabei der **Voraussetzung** in der als wenn-dann-Aussage umformulierten Aussage 2

„Wenn die Faktoren einer Quadratzahl ungerade sind, dann ist das Ergebnis ungerade“,

also dem wenn-Teil der Aussage. Der Endzustand entspricht dem **Endergebnis**, welches im dann-Teil der Aussage formuliert ist.

Neben dem Anfangs- und Endzustand stellt die Veränderung selbst den dritten Beweisschritt dar. Dies wird in Gruppe 2 explizit formuliert:

„Dann muss klar sein, wird die Operation ersichtlich, also wird wirklich gesehen, was getan wird, also wird die Handlung, wird das Wegschieben, Zusammenschieben, Umschieben deutlich?“ (Gruppe 2, Turn 115, B)

Im Allgemeinen wird dabei bei dem Beweisschritt der **Operation** einer dynamischen Darstellungsweise, wie hier beschrieben in Form einer konkreten Handlung, der Vorzug gegeben. In Beweisversuchen, in welchen eher über eine statische Strukturierung als über eine dynamische Veränderung der Zusammenhang zwischen Voraussetzung und Endergebnis hergestellt wird, wird diese Strukturierungsweise dem Beweisschritt der Operation zugerechnet. Dies wird in Gruppe 4 in Bezug auf die Summe zweier Zahlen im Abstand 2 (Aussage 1, vgl.

Abbildung 20) formuliert, wo durch die Strukturierung des „Einkreisen[s]“, das „gerade“ Ergebnis verdeutlicht wird:

„[...] und durch Einkreisen [...] und auch zusätzlich durch den Schrifttext dazu, wird belegt, dass es sich hierbei um eine gerade Menge handelt. [...]“ (Gruppe 4, Turn 30, B)

Hier wird gefordert, dass aus der Art der **Strukturierung** das Endergebnis ersichtlich wird und eine sprachliche und ikonische Darstellung der Strukturierungsweise eingefordert. Allgemein besteht in den Gruppen kein Konsens hinsichtlich der Rolle der sprachlichen Erläuterung bei der Vollständigkeit. Es bleibt in dieser Diskussion die Frage offen, auf welchen Darstellungsebenen, ikonisch oder sprachlich, die einzelnen Beweisschritte dargestellt sein sollten, um einen vollständigen Beweis zu liefern.

In das Kategoriensystem wurden neben der Vollständigkeit die dafür relevanten, hier herausgearbeiteten Entitäten der drei Beweisschritte der Voraussetzung, der Operation/Strukturierung und des Endergebnisses aufgenommen.

Kohärenz

Hinsichtlich der Kohärenz standen über alle Gruppen hinweg verschiedene Ebenen im Fokus, auf welchen Zusammenhänge diskutiert wurden: Die interne Beweisebene, die externe Ebene und die Darstellungsebenen.

Bei der **internen Kohärenz** ging es dabei um Zusammenhänge, die innerhalb des Beweises selbst hergestellt werden sollen:

- 35 B Sprachliche Beweisstrukturen zumindest.
- 36 A Okay, okay.
- 37 C Ja, genau, wenn-dann-Strukturen.
- 38 A Die sind ja nicht so richtig angewendet eigentlich, weil auch da ja die Kausalität eigentlich nicht so deutlich wird.

Es besteht allgemein Konsens dahingehend, wie in diesem Transkriptausschnitt formuliert, dass eine rein sprachliche Verknüpfung von Sätzen für das Herstellen der internen Kohärenz nicht ausreichend ist. Dafür müssen Kausalitäten explizit verdeutlicht werden. Was kausal verknüpft werden soll, sind wieder die Beweisschritte. Diese werden zwar als unabhängige, aber eng aufeinander bezogene Entitäten verstanden in der Weise, dass sich die Schritte logisch auseinander ergeben sollen. Dies wurde schon im vorangegangenen Abschnitt zur Vollständigkeit deutlich, wo der Beweisschritt der Operation/Strukturierung die Aufgabe hat, den globalen Gesamtzusammenhang zwischen Voraussetzung und Endergebnis herzustellen (vgl. Gruppe 1, Turn 143, A).

Weiterhin werden in allen Gruppen auch lokale Zusammenhänge aufeinanderfolgender Beweisschritte diskutiert, wie hier in Gruppe 2:

„Dann ist ja, weil ich vorher die gerade Zahl hatte, kann ich da auch wieder Zweier einkreisen [...]“ (Gruppe 2, Turn 174, A)

An dieser Stelle wird die Strukturierungsweise des Einkreisens von „Zweier[paaren]“ aus der Voraussetzung heraus begründet, dass es sich um eine „gerade Zahl“ handelt (vgl. Abbildung 21⁴⁸). Weiterhin wird, wie hier in Gruppe 3, gefordert, dass das Endergebnis, dass ein Plättchen „übrig bleibt“, aus der Strukturierungsweise heraus begründet wird:

„Genau. Aber trotzdem wird da dann nicht deutlich, warum ich, wenn ich da Zweier[...] einkreise, warum das eine übrig bleibt.“ (Gruppe 3, Turn 104, A)

Zur **externen Kohärenzebene** zählen alle Entitäten, die nicht direkt Teil der Argumentation des Beweises sind, sondern den (theoretischen) Rahmen dafür liefern. Über die Gruppen hinweg konnten dabei die folgenden drei Entitäten herausgearbeitet werden: Die zu beweisende Aussage selbst, die zugrunde liegenden Definitionen und mögliche weitere mathematische Aussagen, die als Lemmata bei der Beweisführung genutzt wurden.

In allen Gruppen wurde dabei vor allem der Zusammenhang des Beweisversuchs zur **Aussage** diskutiert. Dieser soll, wie hier in Gruppe 2 in Bezug auf den Beweisversuch in Abbildung 20 formuliert, durch einen abschließenden Satz explizit formuliert sein:

„Weil auch da steht hinterher: „Am Ende kreisen wir Zweierpaare ein“. Ja, das tun wir, aber was genau sagt uns das? Also darauf müsste ja noch folgen: „Das bedeutet, es ist durch zwei teilbar.““ (Gruppe 2, Turn 248, B)

Weiterhin soll der Zusammenhang zur Definition der Teilbarkeit herausgearbeitet werden. In Gruppe 2 wird dies wie folgt beschrieben:

112 C [...] Also, ich glaube, bei den ikonischen Darstellungen braucht man genauso in irgendeiner Form eine Definition, sei es durch Einkreisen, [...]

Dabei wird für ikonische Beweise explizit gefordert, dass mit **ikonischen Definitionen** gearbeitet wird. Diese können durch eine bestimmte Art des Einkreisens gegeben sein. Hier wird Bezug genommen auf das restlose Zerlegen in Zweierpaare als ikonische Definition einer geraden Zahl. An späterer Stelle wird in Gruppe 2 darüber hinaus explizit gefordert, dass diese ikonischen Definitionen zuvor in der Veranstaltung etabliert worden sein sollten:

226 B [...] Es gibt ja gewisse Dinge, die ich mir vorher auch erarbeite, wie ich halt [...] Zahlen darstelle. [...]

Über die verwendeten (ikonischen) Definitionen als fachlichen Hintergrund hinaus, wurde insbesondere in Gruppe 4 die Verwendung weiterer Aussagen als **Lemmata** in der Beweisführung diskutiert. In den in dieser Gruppe diskutierten

⁴⁸ Hier wird zunächst das innere, blaue Quadrat betrachtet, das das Quadrat einer geraden Zahl darstellt.

Beweisversuchen wurde die Gültigkeit bestimmter Aussagen als gegeben angenommen und ohne weitere Begründung genutzt. Dies wurde in Gruppe 4 erkannt und zum Thema gemacht:

„[...] Das wurde ja sowieso überall vorausgesetzt, dass ungerade plus gerade ungerade ist. Das ist ja auch noch die Voraussetzung, die quasi nirgendwo begründet wird. [...]“ (Gruppe 4, Turn 35, A)

An dieser Stelle wird explizit gefordert, dass jede verwendete Aussage auch selbst begründet werden muss. An späterer Stelle wird dies durch C (in Bezug auf den Beweisversuch in Abbildung 21) relativiert:

- 84 A Ja und das würdest du dann sagen, das ist okay? Ich nehme das Quadrat einer geraden Zahl. Davon gehe ich aus, dass die gerade ist. Das muss ich nicht mehr beweisen? [...]
- 85 C Das ist halt die Frage, was vorher schon an Sätzen durchgenommen wurde bei der Beweisführung. Auf was ich mich dann beziehen kann.

C schlägt dabei vor, dass die Aussagen, die genutzt werden dürfen, ohne selbst nochmals bewiesen werden zu müssen, durch die Veranstaltung vorgegeben sein sollten.

Neben der internen und externen Kohärenz wurde zudem in allen Gruppen der Zusammenhang zwischen ikonischer und sprachlicher **Darstellungsebene** diskutiert. Diesbezüglich wird in den Gruppen kein Konsens erreicht. Die Meinungen reichen dabei von der Unnötigkeit einer sprachlichen Darstellungsebene bis hin zur Deckungsgleichheit der Darstellungsebenen. In Gruppe 2 wird Ersteres von C explizit formuliert:

„[...] es wäre ein guter ikonischer Beweis, wenn die Darstellungen selbsterklärend wäre [...]“ (Gruppe 2, Turn 115, C)

Auch in anderen Gruppen besteht bei Einzelpersonen die Ansicht, dass es sich nicht mehr um einen rein ikonischen Beweis handelt, wenn dieser einer zusätzlichen sprachlichen Erläuterung bedarf. Eine gegensätzliche Ansicht wird in Gruppe 2 von B vertreten, wonach es in jedem Fall der sprachlichen Ebene bedarf, um die Nachvollziehbarkeit eines ikonisch dargestellten Beweises zu gewährleisten:

„[...] kann ich in alles das rein interpretieren, was ich sehen will [...], aber ohne Text sind die wenigsten verstehbar [...]“ (Gruppe 2, Turn 42, B)

Um die Beweisidee aus Sicht der/s Beweisenden nachvollziehen zu können und nicht von der eigenen Interpretation des Bildes auszugehen, braucht es laut B eine sprachliche Erläuterung. Wie eng der Zusammenhang zwischen sprachlicher und ikonischer Darstellungsebene dafür gestaltet sein muss, wird in den

einzelnen Gruppen unterschiedlich ausgelegt. In Gruppe 1 wird diesbezüglich die Frage aufgeworfen, ob die Darstellung des Beweisversuchs in beiden Darstellungsebenen kongruent sein soll:

- 92 B Ich habe mich auch gefragt, weil sowohl die ikonische Darstellung als auch der Text geben ja unterschiedliche Informationen wieder. Inwiefern da also eine Deckungsgleichheit sein muss? Weil ich habe halt echt überlegt, was bedeutet das jetzt mit dem Verschieben? Also das wurde mir, da musste ich erstmal länger überlegen, wie das vereinbar ist mit Bild und Text.

Hier geht es um die Frage, auf welcher Darstellungsebene die einzelnen Beweisschritte, hier die Operation, dargestellt werden sollen. In dieser Gruppe wird eine deckungsgleiche Darstellung auf beiden Darstellungsebenen gefordert. In Gruppe 5 wird dagegen explizit von D (in Bezug auf einen Beweisversuch von Aussage 1) gefordert, dass die sprachliche Darstellungsebene über die rein kongruente Beschreibung der ikonischen Darstellung hinausgehen soll:

- 17 B [...] Also, was ist eigentlich mit der Beschreibung, die da drunter ist. Was halten wir davon? [...]
18 D [...] Also, das ist einfach nur der Versuch, anstelle von einer Beschriftung wurde das halt in einen Text gepackt. Aber da ist gefühlt jetzt nicht mehr Info drin als in dem Bild
19 B Aber hätte euch das gereicht, wenn da jetzt die Bezüge drin sind. Also in denen erklärt wird, warum eine gerade Zahl durch zwei teilbar ist. Oder wenn man jetzt darin beschrieben würde, ich könnte jetzt halt diese zwei losen Plättchen noch drehen, um ein Rechteck daraus zu machen.

B schlägt vor, dass die sprachliche Darstellungsebene sowohl interne als auch externe Kohärenzen explizieren soll. Dazu wird in dieser Gruppe jedoch kein abschließender Konsens erreicht.

Ins Kategoriensystem wurden als Unterasspekte der Kohärenz die interne Kohärenz, die externe Kohärenz und die Kohärenz der Darstellungsebenen aufgenommen. Weiterhin zur Ausdifferenzierung der externen Kohärenzebene die Entitäten der Aussage, der (ikonischen) Definition und der Lemmata. Zudem wurde für die Konzeption der Intervention vorgesehen, dass im Rahmen einer Einführungsvorlesung zum Thema Beweisen die ikonischen Definitionen und Aussagen eingeführt werden sollen, auf welche bei künftigen Beweisen zurückgegriffen werden darf (vgl. Abschnitt 5.3.2).

Logische Struktur

Bezüglich der logischen Struktur eines Beweisversuchs wurde bereits in den beiden vorangegangenen Abschnitten zur Vollständigkeit und Kohärenz festgestellt, dass die **Beweisschritte** einer **festgelegten Reihenfolge** folgen sollen: Aus der Voraussetzung ergibt sich über die Operation beziehungsweise Strukturierung das Endergebnis. Entsprechende Normbrüche, wo diese Reihenfolge

nicht eingehalten wurde, wurden in allen Gruppen explizit thematisiert. In Gruppe 2 wird die logische Struktur dabei explizit als eigenständige Norm formuliert:

- 286 D Also das heißt, du hast ja [...] auch noch die logische Schlussrichtung. Was kann ich denn voraussetzen? Was darf ich nutzen? Und was ziehe ich daraus für Folgerungen? Diese Ebene musst du ja auch noch mit reinnehmen.

Die für den Beweis geforderte Reihenfolge wird hier zudem über die externe Kohärenzebene begründet, welche vorgibt, was vorausgesetzt und genutzt werden darf innerhalb des Beweises.

Neben der logischen Struktur auf interner Ebene wurde auch die Organisation

- 280 D „Die Summe ist durch zwei teilbar. Somit finden wir zwei gleich große Blöcke.“
...
283 B Nein, das ist andersherum
284 D In der Logik falsch.
285 B Zwei gleich große Blöcke und deswegen ist es durch zwei teilbar und dementsprechend gerade.

zwischen interner und externer Ebene thematisiert, wie hier in Gruppe 2:

Hier wurde festgestellt, dass die sprachliche Darstellung bezüglich des Endergebnisses eine falsche logische Struktur aufweist. In dem hier diskutierten Beweisversuch wird aus dem in der Aussage formulierten Endergebnis einer geraden Summe hergeleitet, wie diese Summe ikonisch dargestellt sein soll. In der korrekten Logik müsste aus der ikonischen Darstellung das Endergebnis im Sinne der Aussage begründet werden.

Für das Kategoriensystem wurden für die logische Struktur keine weiteren (Unter-)Aspekte aufgenommen. Eine Ausdifferenzierung des Verständnisses kann hier entlang der bereits zuvor eingeführten Entitäten auf der internen Kohärenzebene (das heißt der Beweisschritte) und externen Kohärenzebene (hier vor allem der Aussage) geschehen. Es wird dabei im Folgenden von einer Organisation entsprechend der *Beweislogik* gesprochen, wenn auf der internen und externen Ebene die Beweisschritte in der oben benannten Reihenfolge linear organisiert sind.

Allgemeingültigkeit

Die Allgemeingültigkeit wurde von allen Gruppen als die zentralste Norm eines Beweises angesehen. Dabei wurde Allgemeingültigkeit in der Weise verstanden,

dass deutlich gemacht werden soll, dass die ikonische Darstellung **übertragbar** sein soll auf beliebige Zahlen, wie hier in Gruppe 2 formuliert:

- 28 A Ja und ähm, ich meine, man müsste noch deutlich machen, dass das, äh, dass diese Zahlen ja auch unendlich größer sein können, also diese Verallgemeinerung fehlt noch.

Die Reichweite des Dargestellten soll also über das konkret dargestellte Beispiel hinausgehen und theoretisch auch unendlich große Zahlen umfassen. Hierbei geht es nicht um beliebige Zahlen, sondern um all diejenigen Zahlen, die die in der *Voraussetzung* der Aussage geforderten Eigenschaften erfüllen. A bezieht sich hier auf Zahlen, deren Eigenschaften von B an früherer Stelle konkretisiert wurden, in dem Sinne, dass zwei Zahlen im Abstand zwei als Voraussetzung (für Aussage 1, vgl. dazu Abbildung 20) gegeben sind:

- 13 B Aber es geht ja darum, dass die Zahlen einen Abstand von zwei haben an der Stelle, ne? Also das ist schon wichtig, dass da die zwei Roten noch dazukommen [...].

Die entsprechende ikonische Umsetzung dieser Eigenschaft mit Hilfe zweier zusätzlich dazukommender roter Plättchen soll dann auch in der von A in Turn 28 beschriebenen Verallgemeinerung deutlich werden.

Breiter Konsens herrscht in allen Gruppen diesbezüglich, dass diese Verallgemeinerung auf der **ikonischen Darstellungsebene** stattfinden soll durch die Verwendung geometrischer Variablen (vgl. Abschnitt 2.4):

- 89 B Auf jeden Fall. Aber was halt auch wieder fehlt, ist die Allgemeingültigkeit, ne?
[...]
91 C Da müssen irgendwie Pünktchen zwischen die Plättchen oder so.

„Allgemeingültig[e]“ (mit geometrischen Variablen) und „beispielgebunden[e]“ Beweise, die mit konkreten Zahldarstellungen arbeiten, werden dabei als Gegensätze betrachtet, wie hier in Gruppe 2:

- 147 B Ganz klar sind ja auch, dass eins und zwei nicht allgemeingültig sind. [...]

148 D Die sind beispielgebunden.

Die Diskussion spielt sich dabei eher auf der Metaebene ab, wenn Beweistypen begrifflich voneinander abgegrenzt werden. Auch beispielgebundenen Darstellungen wird von einzelnen Personen das Potenzial zugesprochen, allgemeingültige Zusammenhänge darstellen zu können. Dafür bedarf es jedoch, so der Konsens, in jedem Fall immer einer zusätzlichen **sprachlichen Darstellungsebene**, die diese explizit formuliert:

„[...] also selbst, wenn ich das jetzt grundschulgemäß beweise und ein repräsentatives Beispiel mache oder einen operativen Beweis, ist das ja immer, dass nochmal erläutert werden muss, warum gilt das für alles.“ (Gruppe 1, Turn 121, A)

Ein weiterer Konsens besteht dahingehend, wie auch hier formuliert, dass diese Art des beispielgebundenen Beweisens die für die Grundschule relevante Beweiskonzeption darstellt (vgl. dazu auch Abschnitt 2.4.1). Noch deutlicher wird dies in der folgenden Äußerung aus Gruppe 2:

„Wenn wir jetzt an die Grundschule denken, dann ist es ja durchaus so, [...] dass es da auch manchmal nur um Fälle geht und man da sagen würde, selbst da braucht man ja schon erste Beweise, aber da würde man jetzt durch die ikonische Darstellung nicht die Allgemeingültigkeit versuchen den Kindern klarzumachen.“ (Gruppe 2, Turn 195, B)

Hinsichtlich der sprachlichen Erläuterung besteht zudem Konsens dahingehend, dass hier keine **singulären** Formulierungen, wie konkrete Zahlenwerte, verwendet werden dürfen, sondern die Erläuterung für alle Zahlen (aus der Voraussetzung) funktionieren müsste. Hinsichtlich der ikonischen Darstellung eines solchen „repräsentative[n] Beispiel[s]“ wird in allen Gruppen die Generizität dieser Darstellung an den konkreten Beweisversuchen diskutiert. Dabei wurden die Zusammenhänge zwischen den abgebildeten Beweisschritten stets in einer **klassifikatorischen** Weise expliziert. Auf dieser Grundlage wird schließlich in Gruppe 4 der beispielgebundenen ikonischen Darstellung in Abbildung 21 ihre Generizität zugesprochen:

„Von daher ist das ja so eine Beweisidee, finde ich, die sich schon auch, sag ich mal, allgemein begründen lässt, und auch in der Darstellung, weil das doch so ist, dass ich den Rest⁴⁹ immer als gerade Päckchen teilen kann.“ (Gruppe 4, Turn 35, A)

Im Rahmen der Intervention soll das Normenverständnis nur bezüglich beispielgebunden ikonischer Beweise untersucht werden. Zur Vermeidung der Problematik hinsichtlich der begrifflichen Abgrenzung eines beispielgebundenen Beweises von einem „allgemeingültig[en]“ Beweis, welcher mit geometrischen Variablen arbeitet, wird im Rahmen dieser Arbeit eine andere Benennung der Beweistypen genutzt. Begriffe wie „allgemein“ oder „allgemeingültig“ werden bei der Klassifikation der Beweistypen in dieser Systematik ersetzt durch den Begriff des formal ikonischen Beweises (vgl. Abschnitt 2.4.).

Zur Differenzierung des Verständnisses der Allgemeingültigkeit wurden die Unterasspekte eines singulären und eines klassifikatorischen Verständnisses aufgenommen (vgl. dazu auch Abschnitt 2.3.5). Außerdem wurde der Unteraspekt der Übertragbarkeit aufgenommen, das heißt die Untersuchung der Kohärenz zwischen mehreren Beispieldarstellungen (vgl. dazu auch Abschnitt 2.4.4 zu Kohärenzebenen). Eine weitere Differenzierung des Verständnisses der All-

⁴⁹ Mit dem „Rest“ sind hier die roten Plättchen gemeint. Diese können in Zweierpaare („gerade Päckchen“) geteilt werden, wobei ein Plättchen übrig bleibt. Das übrige Plättchen wird hier jedoch nicht explizit benannt.

gemeingültigkeit ist auf der Grundlage der Kategorisierung entlang der Darstellungsebenen und der Beweisschritte möglich.

Minimalkonsens zum Normverständnis auf Lehrendenseite

Das hier analysierte Normenverständnis auf Lehrendenseite basiert auf einem operativen Beweisverständnis (vgl. Abschnitt 2.3.4). Ein Konsens wurde dabei meist hinsichtlich der strukturellen Beweismerkmale der Beweisschritte erreicht, die sich aus diesem Beweisverständnis ergeben: Um einen vollständigen, kohärenten und logisch strukturierten Beweis zu erhalten, sollten die Beweisschritte **Voraussetzung**, **Operation/ Strukturierung** und **Endergebnis** vollständig, zusammenhängend und in der oben genannten Reihenfolge dargestellt werden. Auch bei der Allgemeingültigkeit stellt sich die Frage, inwieweit durch eine solche Darstellung das allgemeine Prinzip hinter der beispielgebundenen Darstellung gut herausgearbeitet werden kann. Die Beweisschritte wurden daher als weitere Kategorie bezüglich der Ebenen der Betrachtung in das Kategoriensystem aufgenommen.

Hinsichtlich der Frage, in welcher Darstellungsebene, ikonisch oder sprachlich, diese Beweisschritte dargestellt sein sollen, wurde in der Vorerhebung jedoch noch kein Konsens erreicht. Dies wurde daher im Rahmen einer an diese Vorerhebung anschließenden Plenumsdiskussion auf Lehrendenseite zur Diskussion gestellt. Der Diskussionsverlauf zeigte dabei eine immer stärkere Fokussierung hin zur Einforderung einer vollständig kongruenten Darstellung auf beiden Darstellungsebenen.

In einer weiteren Sitzung wurden den Lehrenden, im Sinne einer abschließenden kommunikativen Validierung, Beweisversuche vorgelegt, die auf der Grundlage des entsprechend ausdifferenzierten Kategoriensystems konstruiert wurden. Dabei wurden alle Normbrüche wie intendiert erkannt.

Kategoriensystem

Das durch diese Erhebung ausdifferenzierte Kategoriensystem ist in Tabelle 12 dargestellt. Dabei sind die normativen Oberkategorien sowie die Ebenen der Betrachtung fett markiert und die jeweiligen Unterasspekte darunter notiert.

Tabelle 12 Induktiv vervollständigtes Kategoriensystem der Normen und ihrer Unterasspekte sowie der Ebenen der Betrachtung

Normen	Ebenen der Betrachtung
Nachvollziehbarkeit	Beweisschritte
	Voraussetzung
Vollständigkeit	Strukturierung
	Endergebnis
Kohärenz	
Interne Kohärenz	Darstellungsebene
Externe Kohärenz	ikonisch
<i>Definition</i>	sprachlich
<i>Lemma</i>	
<i>Aussage</i>	Metaebene
Kohärenz der Darstellungsebenen	konkret
(Kohärenz zwischen den Beispielen)	meta
Logische Struktur	
Allgemeingültigkeit	
Singuläres Verständnis	
Klassifikatorisches Verständnis	
Übertragbarkeit	

Die Norm der **Nachvollziehbarkeit** nimmt in zweierlei Hinsicht eine Sonderrolle im Rahmen dieser Arbeit ein. Diese Kategorie ergab sich, anders als die anderen normativen Oberkategorien, erst induktiv. Weiterhin wird in der Konstruktion der Beweisversuche diese Kategorie ausgeklammert (vgl. Abschnitt 5.2.1). Sie spielt jedoch in der Analyse des Verständnisses der Kohärenz eine zentrale Rolle (vgl. Abschnitt 6.1), weshalb sie im Kategoriensystem belassen wurde.

Die Norm der **Kohärenz** wurde durch die Vorerhebung am meisten aufgefächert. Die Kohärenzebenen aus Abschnitt 2.4.4 zeigten sich dabei auch in der qualitativen Analyse auf Lehrendenseite als Unterasspekte der Kohärenz.

Die *externe Kohärenz* ist dabei nochmals unterteilt nach den Entitäten der genutzten Definitionen und Lemmata und der (zu beweisenden) Aussage.

Die *interne Ebene* ließe sich entlang der *Beweisschritte* unterteilen, die *Darstellungsebenen* nach ikonisch und sprachlich. Da dies jedoch Ebenen der Betrachtung sind, die allen Normen zugrunde liegen können, wurden diese separat aufgeführt.

Die *Kohärenz zwischen den Beispielen* ist insofern eingeklammert, als dieser Unteraspekt eher der **Allgemeingültigkeit** zuzurechnen ist und dort durch den Unteraspekt der *Übertragbarkeit* gefasst ist. Ebenso lässt sich diese Ebene der Kohärenz zwischen den Beispielen untersuchen, indem *singuläre* und *klassifikatorische* Verständnisse unterschieden werden, das heißt die Betrachtung eines Beispiels als isoliertes Einzelbeispiel oder als Repräsentant für eine ganze Klasse von Beispielen.

Bei der **Ebene der Betrachtung** wurde zudem einbezogen, dass, wie auch in dieser Vorhebung festgestellt wurde, die Normen einmal konkret diskutiert werden können mit Bezug auf den diskutierten Beweisversuch oder auf der *Metaebene* ohne konkreten Bezug.

5.2 Entwicklung der Erhebungsinstrumente

Um die Effekte der Intervention messen zu können, sollte zunächst in einer Eingangserhebung das bereits vor der Intervention vorhandene Vorwissen im Hinblick auf Normen von Beweisen erhoben werden. Das Instrument für die Ausgangserhebung nach der Intervention war inhaltlich identisch zur Eingangserhebung. Die Studierenden sollten die entsprechenden Instrumente während der Vorlesungszeit in Einzelarbeit innerhalb von zwanzig Minuten schriftlich bearbeiten. Es wurde das Einverständnis zur Verwendung der Daten für Forschungszwecke eingeholt und zur Anonymisierung der Erhebungen Codes vergeben, welche für beide Erhebungen identisch waren. An demografischen Daten wurden erhoben: Das Alter, das Geschlecht, die Abiturnote in Mathematik, ob Mathematik als Leistungskurs besucht wurde, das Fachsemester, der Studiengang sowie, ob bereits zuvor die Veranstaltung besucht wurde, in welcher die Pilotierung durchgeführt wurde. In der Ausgangserhebung wurde zudem abgefragt, ob die Veranstaltungen (Vorlesung und Übung) im Interventionszeitraum besucht wurden und ob an der Interventionsgruppe (Übungen am Dienstag) oder der Kontrollgruppe (Übungen am Montag) teilgenommen wurde.

In den Erhebungen wurden drei Beweisversuche zur Diskussion gestellt zu der Aussage:

„Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade“⁵⁰

Der Inhaltsbereich der elementaren Zahlentheorie war dabei durch die Veranstaltung vorgegeben, in welcher die Intervention stattfinden sollte. Es wurde

⁵⁰ Auf die Spezifikation, dass es sich hierbei um natürliche Zahlen handeln muss, wurde verzichtet, da im Rahmen der Veranstaltung nur mit natürlichen Zahlen umgegangen wurde.

diese Aussage gewählt⁵¹, da zum Nachvollziehen der entsprechenden Beweisversuche keine weiteren Vorkenntnisse notwendig sind, als die Kenntnis ikonischer Darstellungsmöglichkeiten der Parität, welche in der Vorlesungssitzung vor der Eingangserhebung eingeführt wurden. Zudem stellt diese Aussage eine Variation der auch aus dem Grundschulbereich bekannten Betrachtung von Summen gerader beziehungsweise ungerader Zahlen dar⁵², welche damit für die Intervention selbst zur Verfügung standen. Zudem lässt sich diese Aussage sowohl dynamisch als auch statisch und mit allen in der Veranstaltung eingeführten ikonischen Definitionen der Parität beweisen (vgl. Abschnitt 5.2.2 zu Konstruktionsprinzipien). Die Beweisversuche wurden entsprechend der Prinzipien in Abschnitt 5.2.2 konstruiert.

Zu jedem Beweisversuch wurde zunächst auf einer vierstufigen Likert-Skala eine Selbsteinschätzung abgefragt, inwieweit der betreffende Beweisversuch verstanden wurde („Ich habe das Gefühl, den Beweisversuch verstanden zu haben“). Dadurch sollte auf niederschwellige Weise der Einfluss des (subjektiven) Beweisverstehens auf die Ergebnisse geringgehalten werden. In die Auswertung wurden daher nur die Antworten derjenigen Studierenden einbezogen, welche sich selbst ein mittleres bis hohes subjektives Beweisverstehen attestiert hatten (Likert-Skala 3-4).

Es wurde dann zu jedem der drei Beweisversuche abgefragt, inwieweit es sich um einen „guten Beweis“ handelt. Dies wurde gezielt sehr offen formuliert und in der Veranstaltung vorab nicht definierte Begriffe wie „gültig“, „valide“ oder „korrekt“ vermieden, da nicht das Verständnis dieser Begriffe untersucht werden sollte, sondern welche Normen für die Studierenden ohne Vorgabe von außen im Zentrum der eigenen Betrachtung stehen. Die oben genannten Begrifflichkeiten hätten die Auseinandersetzung mit den Beweisversuchen bereits in eine bestimmte Richtung hinsichtlich der Normen lenken können. Zur Beantwortung oben genannter Frage wurde im offenen Antwortformat zu jedem Beweisversuch explizit abgefragt: „Was ist bei diesem Beweisversuch **NICHT** gut umgesetzt“ (Hervorhebung im Original) und „Was ist bei diesem Beweisversuch gut

51 Diese Aussage entspricht einer der beiden Aussagen, die die Studierenden im Wintersemester 2021/2022 selbst beweisen sollten. Die entsprechenden Beweisprodukte wurden als Grundlage für die Vorerhebung auf Lehrendenseite gewählt (vgl. Abschnitt 5.1.2). Die zweite Aussage zum Quadrat einer ungeraden Zahl wurde an dieser Stelle nicht genutzt, da die entsprechenden Beweisversuche deutlich komplexer gewesen wären und daher das Beweisverstehen an dieser Stelle stärker ins Gewicht gefallen wäre.

52 Diese finden sich in vielen Studien zum Einstieg in das Thema des Argumentierens, und Beweisens (vgl. u. a. Kempen, 2019 sowie Welsing, 2020).

umgesetzt“⁵³. Die Antworten auf diese Fragen wurden entsprechend dem Kategoriensystem in Abschnitt 5.1.2 kodiert. Abschließend wurde das Erstellen eines eigenen Beweises zu oben genannter Aussage eingefordert. Dieser wurde jedoch nicht in die abschließende Analyse der Ergebnisse aufgenommen wurde, da im Rahmen dieser Arbeit der Fokus auf dem Normenverständnis und nicht der Umsetzung der Normen in eigenen Beweiskonstruktionen liegt (vgl. dazu auch Abschnitt 8.4).

5.2.1 Normbrüche

Einzelne Kategorien wurden zwar im Kategoriensystem für die Datenanalyse belassen, jedoch aufgrund der Beobachtungen in der Pilotierung nicht mehr genutzt für die Normbrüche in der Konstruktion der Beweisversuche für die Haupterhebung:

Nachvollziehbarkeit

Diese Norm stand in der Pilotierung häufig im Fokus. Wenn eine geringe Nachvollziehbarkeit festgestellt wurde, wurden andere Normen jedoch kaum noch thematisiert. Ziel der Haupterhebung war es daher, die Problematik einer erschwerten Nachvollziehbarkeit möglichst auszuklammern, um andere Normbrüche dadurch nicht zu überdecken.

Lemmata

In der Pilotierung kam es zu großen Verwirrungen, wenn zur Begründung einer Aussage eine andere zitiert wurde. Dies wurde meist als Normbruch beim Aspekt der externen Kohärenz gewertet, in dem Sinne, dass die zitierte Aussage nicht der zu beweisenden entspricht. Weiterhin wurden implizit verwendete Lemmata nicht als solche erkannt. Die Arbeit mit Lemmata zeigte sich damit in der Pilotierung als eigenes großes Lernfeld, das sich eher für eine weitergehende vertiefte Auseinandersetzung mit der Beweisthematik eignet, weniger jedoch für eine erste Einführung. In der Haupterhebung wurde daher lediglich einer der Beweisversuche so konstruiert, dass für eine vollständige Begründung ein Lemma auf der externen Kohärenzebene hinzugefügt werden müsste.

5.2.2 Konstruktionsprinzipien

Die Beweisversuche auf Lernendenseite wurden sowohl für die Intervention als auch für die Erhebungen durch die Autorin konstruiert. Dadurch sollte ein klarer Fokus auf das in der Vorerhebung auf Lehrendenseite herausgearbeitete Normenverständnis gewährleistet werden (vgl. Abschnitt 3.2). Die Konstruktion der

⁵³ Siehe dazu auch Abschnitt 5.2.3.

Beweisversuche für die Erhebungsinstrumente (und ebenso für das Interventionsinstrument) richtete sich dabei nach den folgenden Prinzipien der Vollständigkeit und Variation:

Vollständigkeit hinsichtlich der Normen

Es soll das situierte Normenverständnis gefördert beziehungsweise erhoben werden, also müssen alle Normen abgebildet sein. Dies muss nicht durch einen einzelnen Beweisversuch gewährleistet sein, sondern durch das gesamte Instrument. Das bedeutet, dass zu jeder Norm in mindestens einem der Beweisversuche des jeweiligen Dokumentes ein entsprechender Normbruch vorliegen sollte.

Vollständigkeit hinsichtlich der Darstellungsebenen

Die Normen sollen auf unterschiedlichen Ebenen diskutierbar sein. Bei der Darstellungsebene bedeutet dies, dass Normbrüche sowohl auf ikonischer als auch auf sprachlicher Ebene vorliegen sollten.

Variation bei der Kombination von Normbrüchen

Ein Beweisversuch sollte in der Regel mehr als einen Normbruch enthalten. Dies soll die Beweisversuche insofern authentischer machen, als tatsächliche Studierendenprodukte meist auch keine prototypischen Beispiele für genau einen Normbruch aufweisen. Zudem sollen Beziehungen zwischen dem Verständnis der einzelnen Normen untersucht werden, was erschwert ist, wenn die Normbrüche in einzelne Beweisversuche getrennt sind. Dabei soll die Kombination von Normbrüchen zwischen den Beweisversuchen variiert werden, um möglichst viele Beziehungen untersuchbar zu machen und zu vermeiden, dass bestimmte Beziehungen durch das Instrument selbst stärker in den Fokus gerückt werden.

Variation hinsichtlich der Darstellungsweisen

Es sollen alle in Abschnitt 5.3.2 eingeführten ikonischen Definitionen durch die Beweisversuche abgedeckt sein und die Darstellungsweise soll hinsichtlich statischer oder dynamischer Darstellungen variiert werden. Dadurch sollen die Beweisversuche einerseits die ganze Bandbreite möglicher Darstellungen abbilden und der Fehlvorstellung vorbeugen, dass nur eine bestimmte Darstellungsweise zu einem validen Beweis führt. Weiterhin kann dadurch die Abhängigkeit des situierten Beweisverständnisses von rein äußeren Darstellungsweisen untersucht werden.

Variation zwischen Interventions- und Erhebungsinstrument

Um zu vermeiden, dass in der Ausgangserhebung Beweisversuche nur aufgrund äußerlicher Ähnlichkeiten analog zur Intervention bewertet werden, sollte eine unterschiedliche Kombination an Normbrüchen, Darstellungsebenen und Darstellungsweisen in den Instrumenten zur Intervention und zur Erhebung gewählt werden. Dadurch soll die Messung von entsprechenden Scheineffekten vermieden werden.

Die entsprechend konstruierten Beweisversuche werden bei der Analyse des intendierten Normenverständnisses im Ergebnisteil (vgl. Abschnitte 7.1.1., 7.2.1, 7.3.1 und 7.4.1) hinsichtlich ihrer Normbrüche analysiert, um diese direkt mit dem auf Studierendenseite beobachteten Verständnis vergleichen zu können.

5.2.3 Erhebungsformate

In der Eingangs- und Ausgangerhebung wurden offene Fragen zu den Beweisversuchen gestellt. Eine konkrete Frage nach spezifischen Normen war an dieser Stelle noch nicht sinnvoll, da die entsprechenden Normen und Begrifflichkeiten erst in der Intervention eingeführt wurden. Zudem sollte eine zu starke Lenkung der Antworten durch die Fragestellung vermieden werden. Es wurden daher offene Fragen zu potenziellen Normbrüchen gestellt. In der Pilotierung wurde in den Fragestellungen dabei noch differenziert nach den Darstellungsebenen:

„Was sollte bildlich noch dargestellt werden?“ und

„Was sollte sprachlich noch erläutert werden?“

Dadurch sollte gewährleistet werden, dass möglichst viele Unter Aspekte der Normen auf Studierendenseite benannt werden und ein besonderer Fokus auf die Unterscheidung zwischen ikonischer und sprachlicher Ebene gelegt wird. In der Pilotierung hat sich jedoch herausgestellt, dass die Unter Aspekte beliebig den Fragen zugeteilt wurden, ohne die durch die Frage intendierte Differenzierung aufzugreifen.

In der Haupterhebung wurde diese Differenzierung daher wieder herausgenommen und die Fragestellungen wurden zusammengefasst zu

„Was ist bei diesem Beweisversuch **NICHT** gut umgesetzt?“ (Hervorhebung im Original),

Diese Frage wurde in der Haupterhebung an erster Stelle gestellt, da der Fokus primär auf dem Erkennen von Normbrüchen liegen sollte. Eine weitere Frage nach positiven Facetten des Beweises

„Was ist bei diesem Beweisversuch gut umgesetzt?“

erlaubt darüber hinaus jedoch eine noch differenzierte Analyse des situierten Beweisverständnisses, insbesondere im Hinblick auf die Beziehung der Normen im Verständnis der Studierenden⁵⁴.

5.3 Entwicklung der Intervention

5.3.1 Situierung der Intervention

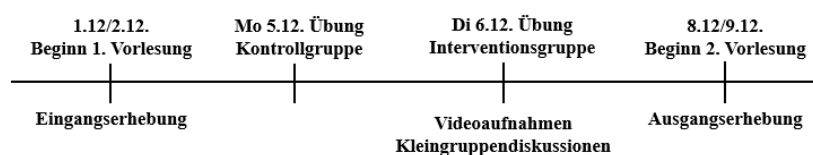


Abbildung 22 Zeitliche Situierung der Intervention

Die Intervention wurde in der mathematischen Einführungsvorlesung für Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund durchgeführt. Sie fand Ende 2022 statt, im Rahmen des ersten thematischen Blocks zum mathematischen Beweisen. An der Veranstaltung nahmen insgesamt 517 Studierende teil, von 384 liegen Daten sowohl aus der Eingangs- als auch der Ausgangserhebung vor, 327 davon weiblich, 55 männlich und 2 divers. 341 der 384 Studierenden waren Studierende des Grundschullehramtes, die übrigen studierten Haupt- und Realschullehramt. Dies beschreibt die **soziale Situierung** der Intervention.

Hinsichtlich der **inhaltlichen Situierung** wurde der Fokus an die Themen der Einführungsvorlesung angepasst. Es wurden Aussagen aus der elementaren Zahlentheorie gewählt, die wenig theoretische Vorkenntnisse aus diesem Bereich benötigten. Pro Erhebungs- beziehungsweise Interventionsdokument wurde sich dabei auf eine Aussage beschränkt.

Die **zeitliche Situierung** der Intervention ergab sich aus dem Zeitrahmen für die einführende Vorlesung⁵⁵ zum Thema (1. Vorlesung) und die daran anschließende

⁵⁴ In die Analyse wurde schließlich aus Zeitgründen nur die erste Frage aufgenommen, die explizit Normbrüche adressiert. Die Analyse der zweiten Frage nach positiv umgesetzten Aspekten wäre für eine weitergehende, vertiefte Auseinandersetzung interessant.

Übung. Vor und nach diesem Zeitraum wurde die Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung durchgeführt. Die Intervention wurde im Wartekontrollgruppendedesign angelegt. Dabei war aus organisatorischen Gründen nur ein quasi-experimentelles Design möglich: Die Übungen, die am Montag stattfanden, wurden in die Kontrollgruppe eingeteilt, die Übungen am Dienstag in die Interventionsgruppe. Dadurch war es möglich, etwa gleich große Gruppen zu generieren und den Aufwand auf Übungsleitendenseite gering zu halten. In der Übung während des Erhebungszeitraumes erhielt die Interventionsgruppe das Interventionsinstrument, in welchem die Diskussion von Beweisversuchen hinsichtlich der Normen angeregt wurde (vgl. Abschnitt 5.3.3). In der Kontrollgruppe sollten eigene Beweise (zu den gleichen Aussagen wie in der Interventionsgruppe) formuliert und die Beweisschritte in den eigenen Beweisversuchen markiert werden. Normen wurden in der Kontrollgruppe nicht explizit diskutiert. In den Übungen nach der Ausgangserhebung erhielt die Kontrollgruppe die Diskussionsaufgaben des Interventionsinstrumentes (zu neuen Aussagen) und die Interventionsgruppe die Beweisaufgaben (zu den gleichen neuen Aussagen). Von den 384 Studierenden gehörten 198 der Interventionsgruppe und 111 der Kontrollgruppe an, die übrigen Studierenden besuchten keine der angebotenen Übungen.

Didaktisch wurde die Auseinandersetzung in der Vorlesung zunächst sehr eng gerahmt durch explizites Vorführen der Diskussion durch Expert/innen (vgl. Abschnitt 2.1), in diesem Fall durch die Dozent/innen der Veranstaltung. In der Übung wurde eine Sequenzierung von einer offenen Rahmung hin zu einer stärker durch Impulse gerahmten Situation gewählt (vgl. Abschnitt 3.3).

Im Hinblick auf die **räumliche Situierung** wurden pro Instrument jeweils drei beispielgebunden ikonische Beweisversuche gewählt und die Normbrüche unterschiedlich kombiniert (vgl. Abschnitt 5.2.2). Dies erwies sich als gute Anzahl, um die Diskussion zeitlich einschränken zu können, alle Normen auf allen Ebenen abzubilden und durch Vergleich mehrerer Beweisversuche eine vertieftere Auseinandersetzung anzuregen.

5.3.2 Konzeption der Vorlesung

Vor der ersten Vorlesung zum Thema wurden in der vorangegangenen Vorlesung die verschiedenen **Beweistypen** (vgl. Abschnitt 2.4) exemplarisch vorgeführt am Beispiel des Konstanzgesetzes der Summe. Davon ausgehend wurden die

55 Die Vorlesung wurde von zwei Dozierenden parallel gehalten, wobei der/die eine Dozierende die Veranstaltung jeweils donnerstags hielt, der/die andere Dozierende jeweils freitags. Bei beiden Dozierenden wurden die identischen Inhalte behandelt.

Beweistypen mit den entsprechenden Begrifflichkeiten eingeführt und die Beziehungen untereinander anhand eines Rasters verdeutlicht (vgl. Abbildung 23).

Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	beispielgebunden symbolisch	beispielgebunden ikonisch
formal	formal symbolisch	formal ikonisch

Abbildung 23 Systematik der Beweistypen in der Vorlesung

In der ersten Vorlesung zum Thema wurde dann der Begriff des Beweises explizit definiert. Diese **Definition** hatte in der Pilotierung gefehlt, was die Diskussion über die Validität der diskutierten Beweisversuche erschwert hatte. Da die Normen für Beweise, die der Definition gemäß Abschnitt 2.4 zugrunde liegen, erst an späterer Stelle gemeinsam etabliert werden sollten, wurden diese hier nicht explizit benannt. Die Definition fokussierte an dieser Stelle nur auf die Beweisfunktion der Verifikation, da anhand dieser die Validität im Sinne der Erfüllung von Normen diskutiert werden kann:

Definition:
 Ein *Beweis* ist der Nachweis der Gültigkeit einer mathematischen Behauptung.
 D.h. durch einen Beweis muss gezeigt werden, dass, sobald die Voraussetzung (meist der Wenn-Teil der Behauptung) erfüllt ist, immer das gewünschte Endergebnis (meist der Dann-Teil der Behauptung) erreicht werden kann.

Abbildung 24 Definition eines Beweises in der Vorlesung

Dabei wurde die Definition dahingehend weiter expliziert, dass die typische Struktur einer mathematischen Aussage genutzt wurde, um anhand dieser die Grundstruktur eines (direkten) mathematischen Beweises zu erläutern: Der Beweis startet mit der Voraussetzung und endet mit dem gewünschten Endergebnis, wobei der Zusammenhang zwischen diesen Beweisschritten dargelegt werden soll. Dieser Zusammenhang muss allgemeingültigen Charakter haben in der Hinsicht, dass „immer“ das gewünschte Endergebnis erhalten wird. Damit

wurde versucht, die Normen der Vollständigkeit, Kohärenz, logischen Struktur und Allgemeingültigkeit über die Definition zu motivieren, ohne diese an dieser Stelle explizit formulieren zu müssen. Im Folgenden wurden alle zu beweisenden Aussagen konsequent als „wenn, dann“-Aussagen formuliert, um die Bestimmung von Voraussetzung und Endergebnis aus der Aussage heraus zu erleichtern.

In der Einführungsvorlesung zum Beweisen im Rahmen der Intervention wurde, entsprechend dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsinteresse, der Fokus auf **beispielgebunden ikonische Beweise** gelegt. Dabei wurde zu jedem Beweis oder Beweisversuch immer eine **sprachliche Erläuterung** explizit auf den Folien notiert. In der Pilotierung hatte diese in den Vorlesungsfolien meist gefehlt, wodurch nicht klar kommuniziert wurde, dass diese im Rahmen dieser Veranstaltung als integraler Bestandteil eines Beweises betrachtet wird. Zudem wurde explizit auf einer der Vorlesungsfolien notiert, dass zu jedem Beweis eine sprachliche Erläuterung gehört.

Als Grundlage für die ikonische Darstellung in Beweisen zur Parität wurde eine Auswahl an **ikonischen Definitionen** in der Vorlesung eingeführt. Diese wurden, um die Komplexität zu reduzieren, auf die Darstellung mit Plättchen beschränkt und auf die drei Möglichkeiten der Darstellung als Doppelreihe, Zweierpaare oder in zwei gleich großen Blöcken (vgl. Abbildung 25).

ikonische Definitionen: Parität

	Doppelreihe	Zweierpaare	Blöcke
Gerade Zahl	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen als Doppelreihe anordnen lassen.	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen restlos in Zweierpaare zerlegen lassen.	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen restlos in jeweils zwei gleich große Blöcke zerlegen lassen.
Beispiel			
Ungerade Zahl	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen als Doppelreihe anordnen lassen, wobei genau ein Plättchen übrig bleibt.	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen in Zweierpaare zerlegen lassen, wobei genau ein Plättchen übrig bleibt.	Die Anzahl Plättchen ist genau dann gerade, wenn sich die Plättchen restlos in jeweils zwei gleich große Blöcke zerlegen lassen, wobei genau ein Plättchen übrig bleibt.
Beispiel			

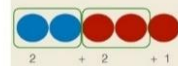
Abbildung 25 Ikonische Definitionen der Parität in der Vorlesung

In der Pilotierung hatte sich eine starke Präferenz für die Nutzung von Zweierpaaren gezeigt und andere Darstellungen wurden als inkorrekt abgelehnt. Um diesem Phänomen in der Haupterhebung vorzubeugen, wurden die ikonischen Definitionen in der Vorlesung und Übung konsequent variiert und valide Beweise in jeder Darstellungsweise präsentiert.

Zentrales Designelement der Einführungsvorlesung im Rahmen der Intervention ist das **exemplarische Diskutieren von Beweisversuchen** durch die Dozierenden, um die Normen und deren intendiertes Verständnis situiert anhand konkreter Beispiele einzuführen (vgl. Abbildung 26). Diese wurden in diesem Rahmen hinsichtlich ihrer Normbrüche analysiert und anschließend schrittweise verbessert in einer Weise, dass die entsprechenden Normen im fertigen Beweisprodukt erfüllt sind. In der Pilotierung hatte sich dabei die Schwierigkeit gezeigt, dass bei den Beweisversuchen nicht klar genug kommuniziert wurde, dass es sich dabei noch um unfertige und verbesserungswürdige Versuche handelt. Daher wurde in der Haupterhebung zu jedem Beweisversuch explizit notiert, welche Normen noch nicht erfüllt und welche bereits erfüllt sind. Dazu wurde die jeweilige Norm explizit benannt und am jeweiligen Beweisversuch konkret ausgeführt, inwiefern diese verletzt ist. Dabei wurde stets differenziert nach der Erfüllung der Norm auf der sprachlichen oder auf der ikonischen Darstellungsebene.

Behauptung: Wenn man zwei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, dann ist deren Summe immer ungerade.

Beweisversuch 3:



Die beiden Zahlen sind mit blauen und roten Plättchen dargestellt.
Man kann immer Zweierpaare einkreisen und ein Plättchen bleibt übrig.
Also ist die Summe der Zahlen immer ungerade.

Voraussetzung
↓ ?
Strukturierung
↓
Endergebnis

Gut umgesetzt:

- **vollständige** ikonische Darstellung: Voraussetzung (zwei aufeinanderfolgende Zahlen), Strukturierung, Endergebnis (ungerade Zahl durch Strukturierung in Zweierpaare)
- Erläuterung ist teilweise **kohärent**: es wird ein kausaler Zusammenhang zwischen der Strukturierung im Bild und der Behauptung (dem zu zeigenden Endergebnis) hergestellt

Hauptprobleme bei diesem Beweisversuch:

- **nicht allgemeingültige** ikonische Darstellung: diese Strukturierung in Zweierpaare funktioniert nur, wenn die erste Zahl gerade ist (diese könnte aber auch ungerade sein)
- **Unvollständige** Erläuterung: Beweisschritte sind zwar alle erwähnt, aber die Voraussetzung ist nicht vollständig erläutert (die zweite Zahl hat genau ein Plättchen mehr)
- Erläuterung ist teilweise **nicht kohärent**: es wird nicht klar, wie sich die Strukturierung in Zweierpaare aus der Voraussetzung ergibt, dass man zwei aufeinanderfolgende Zahlen hat

Abbildung 26 Beispielhafte Diskussion eines Beweisversuchs in der Vorlesung

Dies sollte das situierte Normenverständnis fördern und außerdem den Standard etablieren, das eigene Verständnis in der Auseinandersetzung mit Beweisversuchen immer am konkreten Beweisversuch zu spezifizieren.

Zur Analyse der **logischen Struktur** eines Beweises wurde in der Pilotierung noch ein umfangreiches Analyseraster genutzt, das die einzelnen Beweisschritte und deren Abfolge und Zusammenhänge schematisch darstellt. Dieses hatte sich in der Pilotierung als zu komplex für den Einstieg in das Thema Beweisen herausgestellt. In der Haupterhebung wurden daher nur noch die Beweisschritte der Voraussetzung, des Endergebnisses und der Strukturierung/Operation expliziert und Zusammenhänge zwischen diesen Schritten durch Pfeile verdeutlicht (vgl. Abbildung 26). Dadurch konnten fehlende Beweisschritte, fehlende Zusammenhänge sowie eine inadäquate Reihenfolge der Beweisschritte grafisch verdeutlicht werden. Das auf Lehrendenseite herausgearbeitete Verständnis der Normen (vgl. Abschnitt 5.1.2) der **Vollständigkeit**, der **Kohärenz** und der logischen Struktur konnte damit auf übersichtliche und kurz zusammengefasste Weise kommuniziert werden.

In der Pilotierung stellte sich außerdem heraus, dass die **Allgemeingültigkeit** für die Studierenden in der Diskussion der Beweisversuche selten im Fokus stand. Außerdem war die Mehrheit der Studierenden auch nach der Pilotierung noch der Überzeugung, dass beispielgebundene Beweise keinen allgemeingültigen Nachweis liefern können. Um dieser Einstellung vorzubeugen, wurde explizit auf einer der ersten Vorlesungsfolien zum Thema notiert, inwiefern auch beispielgebunden ikonische Beweise die Norm der Allgemeingültigkeit erfüllen können und dass dafür die ikonische Darstellung generisch sein muss und es einer sprachlichen Erläuterung bedarf, die dieses generische Moment expliziert (vgl. Abschnitt 2.4.3). Zudem lag in der Vorlesung (und den darauffolgenden Übungen) im Rahmen der Haupterhebung ein starker Fokus auf dem Vergleich generischer und nicht generischer Darstellungen. Bereits in der ersten Vorlesung zum Thema wurde eine Strukturierungsweise, die sich auf andere Beispiele übertragen lässt, mit einer Strukturierungsweise verglichen, die nur in bestimmten Fällen funktioniert (vgl. Abbildung 27).

Behauptung: Wenn man zwei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, dann ist deren Summe immer ungerade.

Beweisversuch 4:



Die Summe der beiden Zahlen ist ungerade. Es lassen sich immer 2 Zweierpaare einkreisen.

Beweisversuch 5:



Die erste Zahl lässt sich restlos in Zweierpaare zerlegen, beim Nachfolger bleibt dabei genau ein Plättchen übrig. Somit ist die Summe immer ungerade.

Gut umgesetzt bei Beweisversuch 5:

- **vollständige** ikonische Darstellung: Voraussetzung und Endergebnis
- Erläuterung ist **logisch strukturiert**: aus der Voraussetzung wird das Endergebnis hergeleitet, indem erläutert wird, wie genau strukturiert wurde
- Die Erläuterung ist **kohärent**: der Zusammenhang zur Behauptung wird klar herausgearbeitet

Hauptproblem bei Beweisversuch 5:

Nicht allgemeingültig: diese Strukturierung in Zweierpaare funktioniert nur, wenn die erste Zahl gerade ist (diese könnte aber auch ungerade sein)
-> kein zielführender Beweisversuch

Abbildung 27 Diskussion der Generalität in der Vorlesung

In der Pilotierung zeigte sich außerdem, dass die meisten Studierenden dynamische Darstellungen des Beweisschrittes der Operation/Strukturierung bevorzugen und statischen Darstellungen zunächst ihre Validität absprechen. Deshalb wurde in der Haupterhebung mit statischen Darstellungen gestartet und dynamische erst an späterer Stelle eingeführt.

5.3.3 Konzeption der Übung

In der Übung sollten weitere Beweisversuche betrachtet werden zur Aussage:

„Wenn man eine ungerade und eine gerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“⁵⁶

Diese sollten hinsichtlich der darin enthaltenen Normbrüche diskutiert werden, um ein gemeinsames situiertes Normenverständnis zu etablieren. Die Übung war dabei in der folgenden Weise sequenziert:

⁵⁶ Dies ist eine Aussage, die in der Forschungsliteratur zum Argumentieren und Beweisen häufig genutzt wird (vgl. u. a. Kempen, 2019 sowie Welsing, 2020). Es wurde hier auf die Spezifikation verzichtet, dass es sich um natürliche Zahlen handeln muss, da im Rahmen der Veranstaltung nur mit natürlichen Zahlen umgegangen wurde.

1. Vorbereitungsaufgaben in Einzelarbeit: Vergleich der Beweisversuche
2. Präsenzaufgaben in Kleingruppen (erste Arbeitsphase):
 - a. Offene Diskussion im Hinblick auf die Validität der Beweisversuche
 - b. Impulse zu den Normen
3. Plenumsdiskussion in der Übung: Fokussierung der Diskussion auf Normen und gewünschtes Verständnis
4. Präsenzaufgaben in Kleingruppen (zweite Arbeitsphase): Verbessern der Beweisversuche

Diese Sequenzierung ergab sich zum einen aus theoretischen Überlegungen, zum anderen aus den Erfahrungen der Pilotierung. Vor dem Hintergrund der Beziehung von intra- und interpersonellen Verstehensprozessen gemäß der Blumerschen Prämissen (vgl. Abschnitt 1.2.1) erschien es sinnvoll, zunächst intrapersonelle Verstehensprozesse im Anschluss an die erste Vorlesung anzuregen. Dabei sollte sich zunächst individuell mit dem neu vermittelten Stoff auseinandergesetzt werden. Die Beweisversuche sollten daher zunächst in der **vorbereitenden Hausaufgabe** in Einzelarbeit bewertet werden. Daran sollte sich ein interpersoneller Prozess der gemeinsamen Diskussion anschließen, um ein gemeinsames Verständnis der Normen zu etablieren.

In der Pilotierung erwies sich die Aufgabensequenzierung einer an die Einzelarbeit anschließenden Plenumsdiskussion als sehr produktiv in der Hinsicht, dass in der gemeinsamen Diskussion auf die eigene Auseinandersetzung zurückgegriffen werden konnte. Allerdings erwies sich die Diskussion im Plenum als problematisch, da sich nur wenige Einzelpersonen an der Diskussion beteiligten und so nicht klar erhoben werden konnte, wie sich die Verstehensprozesse und die Etablierung gemeinsamer Verständnisse bei den einzelnen Studierenden entwickelten. Auch blieb unklar, ob die an der Diskussion Unbeteiligten sich überhaupt aktiv mit der Thematik auseinandersetzen. Zudem wurden die Diskussionen in sehr unterschiedlicher Weise von den einzelnen Übungsleitenden geleitet, weshalb eine Vergleichbarkeit schwierig war.

Daher wurde in der Haupterhebung eine **Diskussion in Kleingruppen** vorgeschaltet. Dadurch sollte eine größere Partizipation aller Studierenden erreicht werden und eine stärkere Förderung eines interpersonell geteilten situierten Normenverständnisses. Weiterhin sollten im Sinne von breaching experiments (vgl. Abschnitt 1.1.2) durch die Diskussion erhoben werden, von welchen „Erwartungen“ an einen validen Beweis („Normen“) die Studierenden nach der Vorlesung ausgehen und wie sich die entsprechenden Normenverständnisse in der gemeinsamen Diskussion entwickeln. Um eine noch differenziertere Auseinandersetzung mit den Normbrüchen und eine

stärkere Partizipation aller Studierenden in den Kleingruppen zu erreichen, wurden diese in der Haupterhebung zudem explizit aufgefordert, die Beweisversuche hinsichtlich ihrer Validität zu vergleichen und sich in der Gruppe auf einen in dieser Hinsicht am besten gelungenen Beweis zu einigen.

Die Diskussion in den Kleingruppen sollte dabei in allen Übungen möglichst standardisiert ablaufen. Daher wurden für alle Studierenden einheitlich Impulse in der Aufgabenstellung notiert (vgl. Abbildung 28).

- a) Inwiefern liefern die Beweisversuche einen Nachweis der Gültigkeit der Behauptung? Welchen Beweisversuch finden Sie in dieser Hinsicht am besten gelungen? Versuchen Sie sich in Ihrer Gruppe auf einen Beweis zu einigen.
- b) Begründen Sie, warum Sie die beiden anderen Beweisversuche für weniger gut gelungen halten.
- c) Markieren Sie in jedem Beweisversuch, an welchen Stellen es in der Erläuterung um Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis geht. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Erläuterungen vergleichen?
- d) Stellen Sie jeden Beweisversuch für die Zahlen 2 und 7 dar. Versuchen Sie dabei, die Strukturierungsweise des Beweisversuches unverändert zu lassen. Bei welchen Beweisversuchen ist das gut möglich? Wo treten Schwierigkeiten auf? Was bedeutet das für die Qualität der Beweisversuche?

Abbildung 28 Impulse entsprechend der Aufgabenstellung in der Übung

In den Impulsen a) und b) wird zunächst eine sehr offene Diskussion über die Validität der Beweisversuche angeregt. Durch Impuls c) soll dann die Struktur der Beweisversuche in den Blick genommen werden und die Beweisschritte explizit gekennzeichnet. Dies soll helfen, Normbrüche auf der Ebene der Vollständigkeit (fehlende Beweisschritte), logischen Struktur (falsche Reihenfolge der Beweisschritte) und Kohärenz (kein Zusammenhang zwischen den Beweisschritten) zu erkennen. Impuls d) zielt auf die Allgemeingültigkeit des jeweiligen Beweisversuchs. Durch diesen Impuls wird die (empirische) Übertragbarkeit in den Blick genommen, indem die Übertragung auf ein weiteres Beispiel eingefordert wird⁵⁷ (vgl. Abschnitt 2.3.5).

⁵⁷ Ein weiterer Impuls e) hatte in der Intervention zur Formulierung von Qualitätskriterien für Beweise aufgefordert. Dadurch sollte die vorherige Diskussion auf eine Metaebene gehoben werden. Es zeigte sich jedoch, dass lediglich die in der Vorlesung genannten Normen wiederholt wurden ohne Bezug zur vorherigen Diskussion. Da dies keinen weiteren Aufschluss über das Normenverständnis der Diskussionsteilnehmenden liefert, wurden diese Diskussionsabschnitte nicht mit einbezogen in die qualitative Analyse.

In der anschließenden **Plenumsphase** sollte dies gesammelt und hinsichtlich des gewünschten Normenverständnisses strukturiert werden, um einen noch größeren Grad an Übereinstimmung zwischen Lehrenden- und Lernendenseite zu erreichen. Um das so etablierte Normenverständnis wieder auf eine konkretere Ebene zu heben und die Umsetzung der Normen bei eigenständigen Beweisen vorzubereiten, wurde in einer **zweiten Kleingruppenphase** die Verbesserung der Beweisversuche hinsichtlich dieser Normen eingefordert.

Aus organisatorischen und technischen Gründen wurden nur die Kleingruppenphasen videografiert und entsprechend analysiert, nicht jedoch die Plenumsphase.

5.3.4 Beweisversuche

Paarbeweis

Beweisversuch 1:

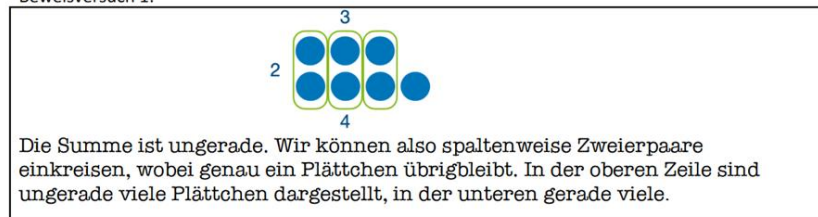


Abbildung 29 Paarbeweis (Beweisversuch 1) aus der Intervention

Der erste Beweisversuch arbeitet mit der ikonischen Definition einer ungeraden Zahl, wonach bei der Paarbildung genau ein Plättchen übrig bleibt. Dieser wird daher im Folgenden kurz *Paarbeweis*⁵⁸ genannt.

Bei diesem Beweisversuch ist der vordergründigste Normbruch derjenige hinsichtlich der **logischen Struktur**. Die Beweisschritte sind auf der sprachlichen Darstellungsebene in umgekehrter Reihenfolge dargestellt.

Der Beweisversuch kann insofern als **vollständig** betrachtet werden, als jeder Beweisschritt dargestellt ist. Die Strukturierungsweise („spaltenweise“) und das

⁵⁸ Der einfacheren Benennung wegen werden die Beweisversuche hier als Beweise bezeichnet. Dabei ist stets zu bedenken, dass es sich bei diesen nicht um valide Beweise im Sinne der Erfüllung aller Normen im intendierten Verständnis handelt, sondern lediglich um den Versuch eines Beweises, welcher Normbrüche hinsichtlich dieser Normen enthält.

sich daraus ergebende Endergebnis werden sprachlich expliziert. Auch auf ikonischer Ebene sind das Endergebnis und die Strukturierung vollständig dargestellt. Lediglich die Voraussetzung kann insofern als unvollständig dargestellt angesehen werden, als einmal die Unterscheidung der einzelnen Zahlen nur sprachlich erläutert, aber nicht explizit ikonisch verdeutlicht wird, zum Beispiel durch eine entsprechende farbliche Unterscheidung. Außerdem ist nicht über eine entsprechende ikonische Definition dargestellt, dass die Anzahl Plättchen in der einen Zeile gerade und in der anderen ungerade ist. Wie diese in der Voraussetzung geforderten Eigenschaften im Bild erkennbar sind, wird auch sprachlich nicht expliziert.

Die Strukturierung wird aus dem gewünschten Endergebnis abgeleitet. Insofern wird hier ein lokaler Zusammenhang hergestellt, dessen Nachvollziehbarkeit jedoch durch die inadäquate logische Struktur erschwert wird. Auch ist unklar, warum sich aus dem Endergebnis zwangsläufig eine spaltenweise Strukturierung ergeben muss. Eine Begründung dieser Strukturierungsweise aus der Voraussetzung heraus fehlt, wodurch hier kein globaler Zusammenhang zwischen Endergebnis und Voraussetzung hergestellt werden kann. Der Zusammenhang zur zu beweisenden Aussage wird explizit formuliert, wobei auch hier durch die inadäquate logische Struktur und den fehlenden globalen Zusammenhang die Nachvollziehbarkeit der externen **Kohärenz** erschwert wird. Die sprachliche Darstellungsebene ist beim Beweisschritt der Voraussetzung insofern inkohärent mit der ikonischen, als die erläuterten Eigenschaften (zwei unterschiedliche Zahlen) nicht im Bild dargestellt sind.

Die spaltenweise Strukturierung funktioniert nicht für beliebige gerade beziehungsweise ungerade Zahlen, sondern nur, wenn diese Zahlen aufeinanderfolgen. Hier müsste mit einer zeilenweisen Strukturierung in Zweierpaare gearbeitet werden, welche sich direkt aus der Voraussetzung heraus begründen ließe. Die ikonische Darstellung ist damit nicht generisch und es liegt somit ein Normbruch hinsichtlich der **Allgemeingültigkeit** vor.

Pfeilbeweis

Dies ist der einzige Beweisversuch der Intervention, welcher eine dynamische Darstellung nutzt. Durch einen Pfeil wird hier das Verschieben von Plättchen verdeutlicht. Dieser Beweis wird im Folgenden daher kurz *Pfeilbeweis* genannt.

Beweisversuch 2:

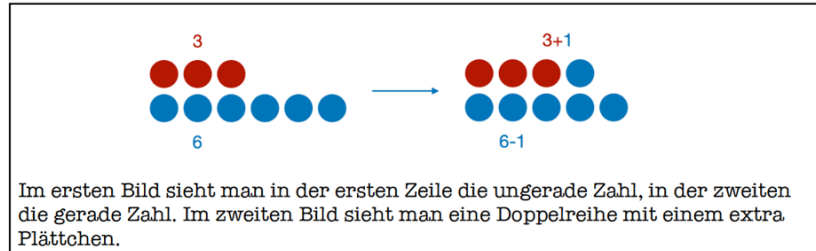


Abbildung 30 Pfeilbeweis (Beweisversuch 2) aus der Intervention

Da diese Darstellungsweise in der Vorlesung nur am Rande thematisiert wurde, könnte dies zunächst zu Verwirrung auf Studierendenseite geführt haben. Spätestens in der Plenumsdiskussion sollte diese dynamische Darstellungsweise jedoch als eine mögliche Darstellungsweise etabliert werden.

Der Beweisversuch ist insofern **logisch strukturiert**, als dass die dargestellten Beweisschritte in der korrekten Reihenfolge aufeinander folgen.

Er ist deutlich **unvollständiger** als der Paarbeweis. Die Voraussetzung und das Endergebnis sind hier in zwei getrennten Bildern dargestellt. Sprachlich wird erläutert, was in beiden Bildern zu sehen ist. Das Endergebnis ist in beiden Darstellungsebenen vollständig dargestellt über den Bezug zur ikonischen Definition der Parität über eine Doppelreihe. Die Unterscheidung der beiden Zahlen ist hier durch eine farbliche Unterscheidung verdeutlicht. Bezüglich der Voraussetzung ist jedoch wieder weder ikonisch noch sprachlich verdeutlicht, dass die eine Zahl gerade und die andere ungerade ist. Die Strukturierung/Operation wird weder sprachlich noch ikonisch ausreichend expliziert. Lediglich durch die Beschriftung wird implizit suggeriert, dass ein Plättchen von der größeren Zahl zur kleineren verschoben wird.

Dadurch kann auch kein globaler Zusammenhang hergestellt werden zwischen der Voraussetzung und dem Endergebnis. Auch lokal zwischen den dargestellten Beweisschritten werden keine inhaltlichen Begründungszusammenhänge formuliert. Sprachliche Verknüpfungsstrukturen fehlen ganz. Es handelt sich um eine reine Bildbeschreibung, eine **interne Kohärenz** liegt nicht vor. Die sprachliche und die ikonische Darstellungsebene sind insofern kohärent, als genau die Beweisschritte erläutert werden, die auch ikonisch dargestellt werden. Der Zusammenhang zur zu beweisenden Aussage – das ungerade Ergebnis – wird, anders als beim Paarbeweis, nicht explizit formuliert, weshalb auch keine **externe Kohärenz** vorliegt.

Die ikonische Darstellung suggeriert, dass durch die Verschiebung eines Plättchens von der größeren Zahl zur kleineren eine Doppelreihe mit einem extra Plättchen entsteht. Dies funktioniert allerdings nur, wenn die beiden Zahlen einen Abstand von drei haben. Daher ist auch in diesem Beweisversuch die ikonische Darstellung nicht generisch und der Beweisversuch somit nicht **allgemeingültig**. Für eine generische Darstellung, die über die ikonische Definition der Doppelreihe arbeitet, müssten die einzelnen Zahlen von Anfang an in Doppelreihen dargestellt werden, wodurch sich durch Zusammenschieben insgesamt eine Doppelreihe mit einem übrigen Plättchen ergeben würde.

Blockbeweis

Beweisversuch 3:

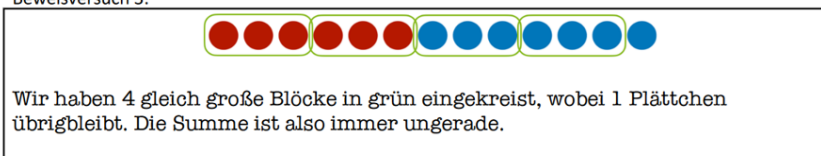


Abbildung 31 Blockbeweis (Beweisversuch 3) aus der Intervention

Dieser Beweisversuch arbeitet über die Bildung gleich großer Blöcke, weshalb dieser im Folgenden kurz als *Blockbeweis* bezeichnet wird.

Auch dieser Beweisversuch ist insofern **logisch strukturiert**, als die dargestellten Beweisschritte in der korrekten Reihenfolge notiert sind.

Er stellt insofern den **unvollständigsten** der drei Beweisversuche dar, als in diesem Beweisversuch die sprachliche Erläuterung der Voraussetzung gänzlich fehlt. Auf ikonischer Ebene ist die Voraussetzung insofern vollständig dargestellt, als die beiden Zahlen farblich unterschieden werden und die gerade Zahl durch die Zerlegung in zwei gleich große Blöcke, die ungerade Zahl durch die Zerlegung in zwei gleich große Blöcke mit einem extra Plättchen verdeutlicht wird. Die Strukturierung und das Endergebnis werden auf beiden Ebenen vollständig dargestellt.

Da die Erläuterung der ikonischen Darstellung der Voraussetzung fehlt, liegt in dieser Hinsicht keine Kohärenz der Darstellungsebenen vor. Auch ein globaler Zusammenhang zwischen Voraussetzung und Endergebnis kann dadurch nicht hergestellt werden. Und auch lokal werden keine Begründungszusammenhänge hergestellt: Die Strukturierungsweise wird in keiner Weise aus der Voraussetzung heraus erklärt, dass die eine Zahl gerade ist und die andere Zahl ungerade. Sprachliche Verknüpfungsstrukturen werden nicht genutzt und lediglich eine Beschreibung des Endergebnisses geliefert. Es liegen also vielfältige Probleme

hinsichtlich der **internen Kohärenz** vor. Die **externe Kohärenz** zur Aussage – das ungerade Ergebnis – wird zwar im letzten Satz formuliert, aber nicht explizit sprachlich in Verbindung gesetzt mit der Erläuterung der ikonischen Darstellung des Endergebnisses. Diese Erläuterung beschreibt vier gleich große Blöcke mit einem extra Plättchen, was keiner der in der Vorlesung eingeführten ikonischen Definitionen ungerader Zahlen entspricht. Für eine Argumentation über vier gleich große Blöcke müsste ein Lemma auf der externen Kohärenzebene hinzugefügt werden, wonach auch eine gerade Anzahl an Blöcken eine gerade Plättchenanzahl verdeutlichen kann.

Die ikonische Darstellung an sich wäre **generisch**, wenn sie in der richtigen Weise interpretiert worden wäre. Man erhält stets paarweise gleich große Blöcke und ein extra Plättchen. Dies entspricht auch direkt einer der in der Vorlesung eingeführten ikonischen Definitionen der Parität. Vier gleich große Blöcke erhält man jedoch nur bei aufeinanderfolgenden Zahlen.

Ergebnisteil

6 Qualitative Analyse

Im Folgenden werden die Diskussionen in den Kleingruppen, die im Rahmen der Intervention stattfanden, qualitativ analysiert. Die allgemeine Methodik der qualitativen Analyse wurde in Abschnitt 4.3 dargestellt. Die methodischen Aspekte, die sich stärker auf die konkreten Inhalte der qualitativen Analyse und die sich daraus ergebende **Gliederung** der Ergebnisse beziehen, werden der leichteren Nachvollziehbarkeit wegen erst an dieser Stelle dargestellt.

Eine erste mögliche Gliederung der Analyseergebnisse ergibt sich durch die Impulse, die die Studierenden für die Diskussion erhielten (vgl. Abschnitt 5.3.3). Dabei zeigte sich, dass bei jedem Impuls ein bis zwei Normen (aus Abschnitt 2.2) als Zentralthemen im Sinne der dokumentarischen Methode (vgl. Abschnitt 4.3.3) im Fokus standen. Um den Bezug zum situierten Normenverständnis und damit zu den Forschungsfragen klarer herausarbeiten zu können, wurde die Analyse daher in Abschnitte entlang dieser **Normen** gegliedert. Die Reihenfolge der Abschnitte richtet sich dabei nach dem zeitlichem Auftreten der ersten Benennung der jeweiligen Norm. Um dabei der (didaktischen) Situierung durch die für die Intervention gewählten Impulsen weiterhin gerecht werden zu können, wurde

Forschungsfrage 1.1: Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?

entsprechend den jeweiligen Impulsen **ausdifferenziert**. Dies ist in den Abschnitten zu den einzelnen Normen ausgeführt.

Forschungsfrage 2.1: Welche intra- und interpersonellen Entwicklungen zeigen sich hinsichtlich der situierten Normenverständnisse in den Diskussionen in den Kleingruppen?

wurde nicht weiter ausdifferenziert. Hier wurde die Entwicklung der Interpersonalität des Verständnisses der im jeweiligen Abschnitt im Zentrum stehenden Norm untersucht.

Für die Untersuchung dieser Forschungsfragen wurden drei Kleingruppen exemplarisch ausgewählt, eine Dreiergruppe, eine Vierergruppe und eine Sechsergruppe. Die Auswahl von drei Gruppen ist dabei besonders geeignet für eine komparative Analyse, da dies das Herausarbeiten von paarweisen Gemeinsamkeiten und Unterschieden zur jeweils dritten Gruppe ermöglicht. Die Gruppen

wurden so ausgewählt, dass zwischen diesen eine möglichst große Diversität besteht hinsichtlich Gruppengröße, Übungsleitendem und interpersoneller Prozesse innerhalb der Gruppe. In der Analyse zeigten sich für diese Gruppen hinsichtlich des letzten Punktes große Unterschiede.

In der Dreiergruppe kam es zu sehr viel Interaktion zwischen den Diskussionspartizipierenden und Verständnisse entwickelten und veränderten sich in diesem Rahmen stark. Diese Gruppe wird daher im Folgenden kurz als *Interaktionsgruppe* bezeichnet. In der Vierergruppe kam es dagegen häufiger zu isolierten Verständnissen, die nur von einer Person vorgebracht und von den anderen Diskussionspartizipierenden nicht weiter aufgegriffen wurden. Diese Gruppe wird daher im Folgenden kurz als *Inselgruppe* bezeichnet. In der Sechsergruppe wurden häufig präinteraktionale Verständnisse in die Diskussion eingebracht, ohne dass sich diese im Verlauf der Diskussion weiterentwickelten. Diese Gruppe wird daher im Folgenden kurz als *Präinteraktionsgruppe* bezeichnet. Im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage zu intra- und interpersonellen Prozessen in den Diskussionen wurden diese Charakteristiken der einzelnen Gruppen jeweils mitbetrachtet und entsprechend hervorgehoben.

Zu jeder Norm wurden für jede **Gruppe** im Sinne der dokumentarischen Methode diejenigen Transkriptausschnitte ausgewählt, in welchen die jeweilige Norm diskutiert wurde. Diese Ausschnitte wurden zunächst in einer **Turn-by-Turn-Analyse** untersucht. Schlüsselwörter für die Analyse der Transkriptausschnitte sind dabei kursiv markiert. Auf dieser Grundlage wurden für die jeweilige Gruppe jeweils die erste und zweite **Forschungsfrage** (siehe oben) beantwortet.

Weiterhin wurde das in Abschnitt 4.3.3 eingeführte Analyseraster für jede Norm individuell ausgestaltet. Die Analyseraster dienen dabei der Verdichtung der Ergebnisse der Turn-by-Turn-Analysen im Sinne der Forschungsfragen. Deren konkrete Ausgestaltung ist in den entsprechenden Abschnitten zur jeweiligen Norm ausführlich dargestellt. Die Bedeutung der Darstellungselemente wird dabei vor der Analyse im jeweiligen Abschnitt allgemein dargelegt. Eine Eins-zu-Eins-Zuordnung der Analyseschritte zu den Darstellungselementen findet nicht statt, da die Analyseraster lediglich als Zusammenfassung der Turn-by-Turn-Analysen angesehen werden.

Diese dienen vor allem dem einfacheren abschließenden **Vergleich** der drei Gruppen hinsichtlich der ersten und zweiten Forschungsfrage. Auf Grundlage dieses Vergleichs wurden potenzielle Einflussfaktoren auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses herausgearbeitet. Diese stellen einen **Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung** dar und sollen in diesem Rahmen untersucht werden im Sinne von

Forschungsfrage 3.1: Welche potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche zeigen sich in den Diskussionen in den Kleingruppen?

6.1 Kohärenz

Im ersten Teil diskutierten die Gruppen die Beweisversuche zur Aussage

„Wenn man eine ungerade und eine gerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“

auf Grundlage der ersten beiden Impulse:

- a) Inwiefern liefern die Beweisversuche einen Nachweis der Gültigkeit der Behauptung? Welchen Beweisversuch finden Sie in dieser Hinsicht am besten gelungen? Versuchen Sie sich in Ihrer Gruppe auf einen Beweis zu einigen.
- b) Begründen Sie, warum Sie die beiden anderen Beweisversuche für weniger gut gelungen halten.

Abbildung 32 Impulse a) und b) entsprechend der Aufgabenstellung in der Übung

Diese Impulse sind bewusst sehr offen gehalten. In der Analyse dieses Abschnittes ergab sich als Zentralthema die Norm der **Kohärenz**. Da an dieser Stelle keine Impulse gegeben wurden, die die Diskussion in die Richtung bestimmter Normen lenken sollten, interessierte hier vor allem, wie es zur Etablierung dieser Norm im Diskussionsverlauf kam und welche Verständnisse davon etabliert wurden. Forschungsfrage 1.1: „Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?“ wurde vor dem Hintergrund dieser didaktischen Situierung in diesem Teil spezifiziert zu den beiden Unterforschungsfragen:

Forschungsfrage 1.1 a): Wie wird die Kohärenz als Norm etabliert?

Forschungsfrage 1.1 b): Welche situierten Verständnisse der Kohärenz entwickeln sich?

Die Ergebnisse der Turn-by-Turn-Analyse der einzelnen Gruppen wurden im Sinne von Abschnitt 4.3.3 grafisch dargestellt. Bei einem ersten Materialdurchgang zeigten sich als Nebenthemen zur Kohärenz die **Nachvollziehbarkeit** und die **Vollständigkeit**. Um diese Normen in ihren Beziehungen zueinander zu untersuchen, wurden diese im Analyseraster für diesen Abschnitt als Entitäten gewählt. Mögliche Unterasspekte der Normen und die möglichen Darstellungs-

ebenen (ikonisch und sprachlich) wurden für jede Entität mit aufgenommen. Hervorgehoben in schwarzer Schriftfarbe wurden diese jedoch nur, wenn sie im entsprechenden Diskussionsabschnitt auch benannt wurden. Weiterhin wurde für jede Entität unterschieden, ob es sich um eine Betrachtung des konkreten Beweisversuchs oder um eine Auseinandersetzung auf der Metaebene handelt. Die Entitäten wurden durch Pfeile verbunden. Da insbesondere im Hinblick auf Forschungsfrage 1.1a) die zeitliche Entwicklung der Normen interessiert, wurde die **Pfeilrichtung** in der Weise festgelegt, dass die **zeitliche Abfolge** des Auftretens der Normen dargestellt wird. Eine Ausnahme bilden Doppelpfeile, welche eine Abgrenzung zweier Entitäten voneinander verdeutlichen sollen. Eine Farbe steht dabei für eine/n Diskussionsteilnehmende/n. Die Farbwahl deutet hierbei auf die Rolle hin, die die Person in diesem Teil einnimmt: Grün für eine dominante Rolle, Blau und Violett für die die dominante Rolle unterstützenden Rollen sowie rot und orange für Nebenrollen. Diese Farbwahl wird auch in den weiteren Abschnitten der qualitativen Analyse beibehalten, um einen direkten visuellen Eindruck zu erhalten, inwiefern die Rollen sich verändern oder gleich bleiben. Ein farbiger Pfeil verdeutlicht, dass die entsprechende Person selbst den Wechsel von einer Norm zur anderen vollzogen hat, ein farbiger Punkt dagegen, dass von der jeweiligen Person nur die entsprechende Norm angesprochen wurde. Die Interpunktionszeichen bedeuten, dass eine Frage (Fragezeichen) aufgeworfen wurde beziehungsweise eine Antwort (Ausrufungszeichen) auf diese Frage gegeben wurde.

6.1.1 Interaktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

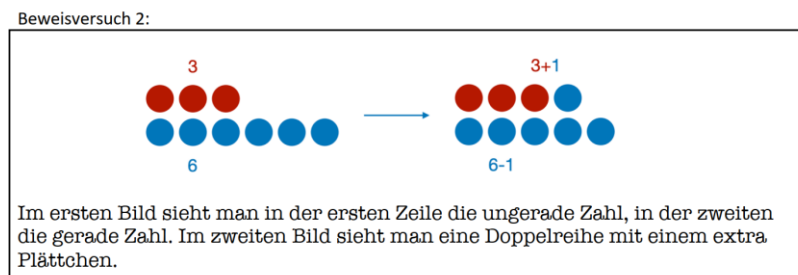


Abbildung 33 Pfeilbeweis (entspricht Abbildung 30)

In der Interaktionsgruppe wird zunächst der Beweisschritt der Operation im Pfeilbeweis diskutiert:

„[...] Also ich hatte persönlich jetzt den für am gelungensten gehalten. Also den habe ich zumindest auf den ersten Blick direkt verstanden. Da fand ich immer ein bisschen verwirrend, also was heißt verwirrend, aber wenn man jetzt so über den ersten Blick redet, dann fand ich halt irgendwie, das mit diesem Einen nach oben holen und das dann halt auch hier so darstellen, ein bisschen *verwirrend*. [...]“ (Turn 1, A, Herv. d. Ver.)

Es wird in Turn 1 in die Evaluation eingestiegen, indem die **Nachvollziehbarkeit** der ikonischen Darstellung dieses Beweisversuchs angesprochen wird. Dabei wird konkret formuliert, was nicht nachvollziehbar ist, nämlich das Verschieben eines Plättchens vom ersten Bild zum zweiten Bild, es wird also hier lokal die interne Struktur dieses Beweisschrittes betrachtet, das Verschieben eines Plättchens⁵⁹. In Turn 2 knüpft B konkret an das an, was A auf ikonischer Ebene als „verwirrend“, also wenig nachvollziehbar, beschreibt und vollzieht daraufhin zwei **Ebenenwechsel** von der konkreten Erläuterung auf der ikonischen Ebene zu einer Betrachtung der sprachlichen Darstellung auf der Metaebene:

„[...] und den finde ich aber auch nicht gut, weil das fand ich irgendwie auch *verwirrend* mit diesem Hochziehen. Vor allem dieser Text dazu hat gar nicht *geholfen*, der war total *sinnlos*. [...]“ (Turn 2, B, Herv. d. Ver.)

Hier wird die Position der geringen Nachvollziehbarkeit weiter durch Einbezug der sprachlichen Ebene bekräftigt und begründet. Die Evaluation der sprachlichen Ebene bleibt hier, im Gegensatz zu derjenigen der ikonischen Ebene, wenig konkret. Es wird nicht expliziert, was sprachlich nicht nachvollziehbar ist, sondern durch das Wort „geholfen“ die sprachliche Darstellung als Gesamtes in Bezug gesetzt zur ikonischen Ebene. Implizit wird hier eine mangelnde Kohärenz der beiden Darstellungsebenen angesprochen, wobei die sprachliche Darstellung laut B die Aufgabe hat, die Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung zu erhöhen, ansonsten ist sie „sinnlos“. Die mangelnde Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung wird hier also durch die mangelnde Nachvollziehbarkeit der sprachlichen Darstellung und die mangelnde Kohärenz beider Darstellungsebenen begründet. Im gleichen Turn bekräftigt B diese Position, indem eine Begründung für die mangelnde Qualität der sprachlichen Darstellung gegeben wird:

„[...] Der hat ja nichts *erklärt*, deswegen ja.“ (Turn 2, B, Herv. d. Ver.)

Über das Wort „deswegen“ wird sich zwar begründend auf die vorherige Äußerung bezogen, es bleibt aber unklar, welche Norm hier genau adressiert wird.

⁵⁹ Diese Art der dynamischen Darstellung, in welcher über das Umsortieren von Plättchen argumentiert wird, wurde nicht thematisiert in der Einführungsvorlesung zum Thema und stellt daher an dieser Stelle eine neue Darstellungsmöglichkeit für die Studierenden dar.

Auch wird nicht spezifiziert, worauf sich das Wort „erklär[en]“ bezieht. Ob es sich hierbei um eine Bekräftigung der Position handelt und erklären im Sinne der Erhöhung der Nachvollziehbarkeit (der ikonischen Darstellung) zu verstehen ist. Oder ob hier bereits ein Wechsel zur Norm der internen Kohärenz stattfindet und „erklär[en]“ im Sinne des Erklärens von internen Zusammenhängen zu verstehen ist. In Turn 3 macht C den Bezug zur Kohärenz deutlicher:

„Also ich fand den Text auch hier, das hat einfach nur die Situation *beschrieben* und den Kontext gar nicht *erklärt*. [...]“ (Turn 3, C, Herv. d. Ver.)

Hier knüpft C durch das Aufgreifen und Spezifizieren des Wortes „erklär[en]“ an B an, versteht dieses Wort jedoch in etwas anderer Weise und öffnet hier einen neuen Bedeutungshorizont. Die enge Bezogenheit der sprachlichen Darstellungsebene auf die ikonische wird von C eher als problematisch betrachtet. Erklären wird hier in Kontrast gesetzt zu „beschr[e]iben“, wobei dem Text eine rein beschreibende Qualität der (ikonisch dargestellten) Situation zugesprochen wird. „Erklär[en]“ wird dabei in Bezug gesetzt zum „Kontext“, also der Aussage, die bewiesen werden soll. Der sprachlichen Darstellung wird damit die Aufgabe zugesprochen, den Bezug von der ikonischen Darstellung zur zu beweisenden Aussage herzustellen, also die externe Kohärenz zu gewährleisten. Im weiteren Verlauf stellt C auch den Bezug zur eingangs formulierten mangelnden Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung her, nimmt hier aber eine andere Position ein:

„[...] Also es ist eigentlich *verständlich*, dass man einen dazunimmt und einen wegnimmt. [...] Aber die *Beschreibung* ist ja nicht so der *Beweis* davon.[...]“ (Turn 3, C, Herv. d. Ver.)

Hier wird eine Differenzierung zwischen den Normen der **Nachvollziehbarkeit** und der (externen) Kohärenz vorgenommen, welche durch eine Differenzierung zwischen ikonischer und sprachlicher Darstellungsebene präzisiert wird: Es kommt an dieser Stelle zu einer Neubewertung der ikonischen Ebene. Was im Beweisschritt der Operation hier passiert, wird als nachvollziehbar bezeichnet. Auf sprachlicher Ebene wird jedoch kein Bezug hergestellt zu dem, was eigentlich bewiesen werden soll.

In Turn 8 und 9 wird die Position aus Turn 3 wieder aufgegriffen und von B und C gemeinsam formuliert:

8 B Der ist auch nicht schlecht, aber ich finde halt die Erklärung dazu schlecht, weil ich finde das Bild, man *versteht* es, aber der Text dazu ist halt irgendwie so ...

9 C ... *beschreibend*.

Die Differenzierung zwischen der Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung und der Kohärenz der sprachlichen Darstellung wird hier nun auch von B formuliert. Betrachtet man den weiteren Verlauf der Diskussion, scheint B hier weiterhin bei dem eingangs formulierten Verständnis von „beschreiben“ (oder

von B synonym verwendet: „erklär[en]“) im Sinne von eine Beziehung zur ikonischen Darstellungsebene herzustellen zu bleiben und nicht die Deutung von C im Sinne der externen Kohärenz zu übernehmen. In Turn 10 greift B den Begriff „beschreibend“ auf und formuliert hier wieder ein Verständnis von Kohärenz im Sinne der Kohärenz der Darstellungsebenen:

„Also es wird halt nicht beschrieben, dass man den einen verschiebt.“ (Turn 10, B, Herv. d. Ver.)

Sprachlich soll laut B formuliert werden, was ikonisch zu sehen ist. Hier findet nun wieder ein **Wechsel** von der Metaebene zur Betrachtung des konkreten Beweisversuchs statt. Dass durch das Verschieben des Plättchens der Zusammenhang der beiden Bilder hergestellt werden kann im Sinne der internen Kohärenz, wird hier jedoch nicht explizit formuliert. Vielmehr wird die Norm der **Vollständigkeit** auf sprachlicher Ebene in die Diskussion eingebracht. Diese wird jedoch nicht als von der Kohärenz (der Darstellungsebenen) unabhängige Norm formuliert, sondern eher als Unteraspekt dieser aufgefasst. Über die mangelnde sprachliche Vollständigkeit wird die mangelnde Kohärenz begründet. Dieser Zusammenhang wird konkret am Beweisversuch festgemacht insofern, als das Verschieben eines Plättchens nicht sprachlich expliziert wird.

In den folgenden Turns wird, wie in der Aufgabenstellung gefordert, eine Einigung auf einen Beweisversuch angestrebt, welcher am besten gelungen ist. Es werden jedoch keine weiteren Argumente auf Grundlage der Normen ausgetauscht.

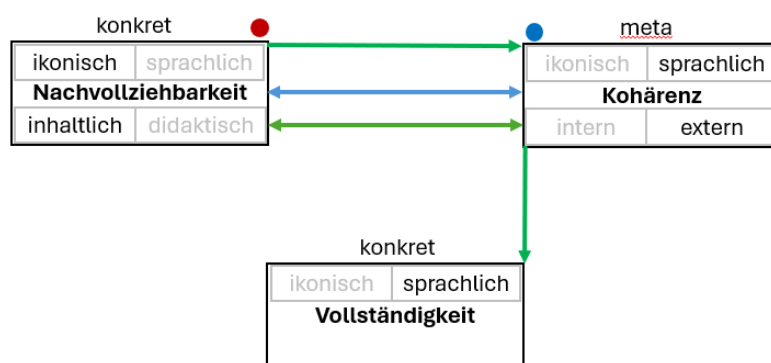


Abbildung 34 Interaktionsgruppe zur Kohärenz

Etablierung der Kohärenz als Norm zur Beweisbewertung

Die Auseinandersetzung mit der Norm der **Kohärenz** wird hier über die mangelnde **Nachvollziehbarkeit** der ikonischen Darstellung motiviert. Die geringe Akzeptanz dieses Beweisversuchs aufgrund der geringen Nachvollziehbarkeit wird von allen Diskussionsteilnehmenden immer weiter bekräftigt. Es werden weitere Begründungen gesucht für diese geringe Nachvollziehbarkeit, was zu immer weiteren Elaborationen führt, die sich immer weiter von der Nachvollziehbarkeit hin zur Kohärenz bewegen. Dies wird weiterhin durch einen Wechsel von der ikonischen zur sprachlichen Darstellungsebene sowie von der Betrachtung des konkreten Beweisversuchs hin zur Metaebene begünstigt. Die weitere Elaboration entwickelt sich zudem durch ein Anknüpfen an bestimmte Begrifflichkeiten aus der vorherigen Äußerung. Zentral sind dabei die Begriffe „beschreiben“ und „erklär[en]“, die immer wieder aufgegriffen und unterschiedlich elaboriert werden. Die Kohärenz wird letzten Endes als eigenständige Norm etabliert, indem diese explizit von der Nachvollziehbarkeit abgegrenzt wird. Diese Abgrenzung wird wieder durch einen **Ebenenwechsel** begünstigt, indem zwischen der Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung und der Kohärenz der sprachlichen Darstellung unterschieden wird.

Verständnis der Kohärenz

Die Kohärenz wird hier rein auf der sprachlichen Darstellungsebene betrachtet und als von der Nachvollziehbarkeit unabhängige Norm angesehen. Dabei wird ein noch recht vages Verständnis der **externen Kohärenz** formuliert, das nicht spezifiziert, was unter dem „Kontext“ der Aussage zu verstehen. Die **interne Kohärenz** im Sinne des Herstellens von internen Zusammenhängen wird nicht explizit adressiert und klingt nur implizit an, wenn Begriffe wie „Beschreibung“ und „Erklär[ung]“ gegeneinandergestellt werden. Auch diese Begriffe werden jedoch nicht am konkreten Beweisversuch spezifiziert. Die Norm der **Vollständigkeit** wird nicht klar von der der Kohärenz abgegrenzt, sondern eher als Unteraspekt der Kohärenz verstanden.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Es wird von A die Norm der Nachvollziehbarkeit als präinteraktionales Bewertungskriterium aufgeworfen, was die weitere Interaktion anstößt. Im weiteren Diskussionsverlauf bringt sich A jedoch nicht weiter zu diesem Thema ein, weshalb unklar bleibt, welches Verständnis A im Verlauf dieses Diskussionsabschnittes entwickelt. A hat damit lediglich eine **Nebenrolle** in diesem Diskussionsabschnitt. B knüpft sprachlich und inhaltlich über das Wort „verwirrend“ an die Äußerung von A an, vollzieht den Wechsel von der ikonischen zur sprachlichen Darstellungsebene und führt die Diskussion über den Begriff der „Erklär[ung]“ hin zur Kohärenz. C grenzt diesen Begriff von dem einer „Beschrei-

bung“ ab und etabliert darauf aufbauend die Kohärenz als von der Nachvollziehbarkeit unabhängige Norm. Diese Abgrenzungen übernimmt B und fügt die Norm der Vollständigkeit, als Unteraspekt der Kohärenz verstanden, hinzu.

B hat in diesem Abschnitt insofern eine **dominante** Rolle, als durch B die Ebenenwechsel vollzogen werden und dabei wesentlich neue Normen in die Diskussion eingebracht werden, die der Kohärenz und der Vollständigkeit. C folgt dieser Bewegung zunächst, formuliert die Kohärenz als unabhängige Norm und spezifiziert diese weiter aus entlang des Unteraspekts der externen Kohärenz. C hat in diesem Diskussionsabschnitt damit eine wichtige **unterstützende** Rolle für den Diskussionsverlauf.

Oberflächlich betrachtet scheinen B und C am Ende dieses Diskussionsabschnittes das gleiche Verständnis der Kohärenz etabliert zu haben, als einer von der Nachvollziehbarkeit abgegrenzten Norm. Es werden die gleichen Begrifflichkeiten verwendet, um diese Abgrenzung zu formulieren. Betrachtet man die Diskussion um die zentralen Begriffe „beschreiben“ und „erklär[en]“, wird jedoch deutlich, dass B und C bis zum Ende kein geteiltes Verständnis entwickeln. C grenzt diese Begriffe klar voneinander ab und versteht „erklär[en]“ eher im Sinne einer externen Kohärenz zum Kontext. C sieht dabei eine zu enge Beziehung der sprachlichen zur ikonischen Darstellung im Sinne einer reinen Beschreibung als eher problematisch an. B versteht „beschreiben“ dagegen im Sinne einer engen Kohärenz von der sprachlichen zur ikonischen Darstellungsebene und bewertet dies bis zum Ende hin als positiv. „Erklär[en]“ scheint von B als synonym zu „beschreiben“ verwendet zu werden, eine Spezifikation im Sinne der externen Kohärenz findet bei B nicht statt.

Es tauchen in der Diskussion neue **interaktionale** Facetten auf, wie die Abgrenzung der Nachvollziehbarkeit und der Kohärenz sowie die Vollständigkeit als weitere Norm zur Beweisbewertung. Das grundlegende intrapersonale Verständnis der Kohärenz, die externe Kohärenz bei C im Gegensatz zur Kohärenz der Darstellungsebenen bei B, scheint sich jedoch nicht zu ändern.

6.1.2 Inselgruppe

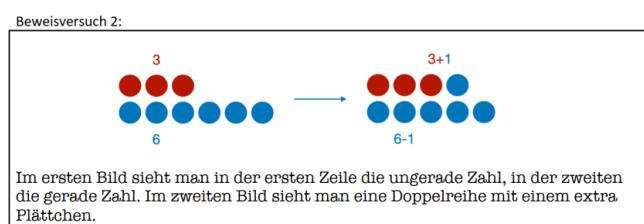


Abbildung 35 Pfeilbeweis (entspricht Abbildung 30)

Turn-by-Turn-Analyse

In der Inselgruppe werden zunächst, ohne das Anführen von Argumenten, die eigenen präinteraktionalen Evaluationen verglichen, bis in Turn 12 explizit nach Argumenten gefragt wird. In Turn 13 wird dann in die Diskussion auf normativer Ebene eingestiegen. Dabei wird ebenfalls, wie in der Interaktionsgruppe, über die **Nachvollziehbarkeit** der ikonischen Darstellung der Operation im Pfeilbeweis diskutiert:

„Ich fand das so *verwirrend*. Also *woher* das plus eins und minus eins kommt.[...]“ (Turn 13, A, Herv. d. Ver.)

Anders als in der Interaktionsgruppe, wird hier nicht nur ein rein ikonischer Darstellungsaspekt angesprochen, sondern bereits nach dem Zusammenhang gefragt zwischen der Veränderung um plus beziehungsweise minus eins in der Operation und dem Rest des Beweises. In dieser präinteraktionalen Position von A wird die Nachvollziehbarkeit somit in enger Beziehung zur internen Kohärenz formuliert. Durch das „woher“ wird auch eine Richtung formuliert, wonach etwas dieser Veränderung vorausgehen müsste, was diese begründen könnte. Es folgt dann durch eine andere Person das Vorstellen der präinteraktionalen Bewertung des Blockbeweises auf Grundlage der **Allgemeingültigkeit**, die zunächst in keinem Zusammenhang steht zu dem vorher Diskutierten. In Turn 18 wird diese Norm von D übertragen auf den in Turn 13 diskutierten Darstellungsaspekt:

„Und hier finde ich halt diese *Allgemeingültigkeit*, weil die das da nochmal mit diesem einen Faktor verändert haben.“ (Turn 18, D, Herv. d. Ver.)

In Turn 19 führt C schließlich die Normen der internen Kohärenz und Allgemeingültigkeit zusammen:

„Also dieses plus Eins und minus Eins ist halt dafür da, dass die Doppelreihen wirklich gleich viele sind. Wenn man das halt nicht macht, kann man ja nur bis nach hier diese senkrechten Paare einkreisen und dann bleiben halt drei über. [...]“ (Turn 19, C)

C liefert die Antwort auf die von A aufgeworfene Frage nach der internen Kohärenz, indem C die Darstellung der Operation konkret aus dem heraus begründet, was man als Endergebnis erhalten möchte. Diese Organisation der Beweisschritte ist *entgegengesetzt* zur eigentlichen Beweislogik⁶⁰, wonach das Endergebnis aus der Strukturierung heraus erklärt werden müsste. Am Ende geht C auf die Allgemeingültigkeit der geschilderten Zusammenhänge ein (die interne Struktur dieses Argumentes wird in Abschnitt 6.4 zur Allgemeingültigkeit eingehender analysiert werden):

⁶⁰ Die Beweislogik beschreibt dabei die lineare Organisation der Entitäten der internen und externen Kohärenzebene, wie diese in der Analyse des Verständnisses der logischen Struktur in der Vorerhebung auf Lehrendenseite zutage getreten ist (vgl. Abschnitt 5.1.2).

„[...] Und wenn man das so ausgleicht, dann funktioniert es halt wieder. Und da könnte man ja auch plus fünf und minus fünf rechnen.“ (Turn 19, C)

Auf diese Ausführungen von C reagieren A und B durch eine kurze zustimmende Äußerung. Erst in Turn 22 wird explizit zur sprachlichen Ebene gewechselt:

„Wobei, ich finde eigentlich auch, dass man da in die Beschreibung vielleicht noch dazu schreiben sollte, dass man die Plättchen verschiebt in den Reihen.“ (Turn 22, C)

Hier bringt C die Norm der **Vollständigkeit** auf der sprachlichen Darstellungsebene in die Diskussion ein. Demnach soll die konkrete Operation sprachlich erläutert werden. An dieser Stelle formuliert C keinen direkten Bezug zu dem vorher Geäußerten. Dies passiert erst in Turn 23 durch B:

„Ja, das hat mir da nämlich gefehlt, dass da eine *Begründung* ist dafür, *warum* wird da jetzt plus und minus eins gerechnet.“ (Turn 23, B, Herv. d. Ver.)

Hier wird von B die Norm der sprachlichen Vollständigkeit in enger Beziehung zur internen Kohärenz formuliert. Die von B geforderte „Begründung“ für die Veränderung um plus und minus eins wurde dabei von C in Turn 22 aus der logisch vorgelagerten Operation des Verschiebens eines Plättchens gegeben. Der sprachlichen Darstellung kommt dabei die Rolle zu, diese (ikonisch dargestellten) internen Zusammenhänge zu explizieren.

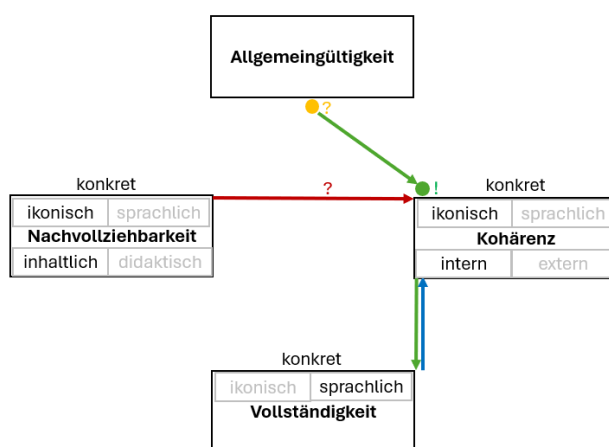


Abbildung 36 Inselgruppe zur Kohärenz

Etablierung der Kohärenz als Norm zur Beweisbewertung

Die Norm der **Kohärenz** wird in Turn 13 direkt zu Beginn von A als präinteraktionale Position in die Beweisbewertung eingebracht, indem nach einer Begründung für die ikonische Darstellung der Operation gefragt wird. Diese Norm ist an dieser Stelle aber noch nicht klar abgegrenzt von der Norm der **Nachvollziehbarkeit**. Der Fokus wird weiter auf die Kohärenz gelenkt, indem C in Turn 19, als Antwort auf A, eine Begründung liefert, in welcher Zusammenhänge am konkreten Beweisversuch festgemacht werden. Auch hier ist noch nicht klar, ob die Erläuterungen von C der Erhöhung der Kohärenz, der Nachvollziehbarkeit oder der Allgemeingültigkeit dienen. Diese Normen werden hier nicht auf die Metaebene gehoben und können an dieser Stelle somit auch nicht klar voneinander abgegrenzt werden. Explizit als Norm formuliert wird die Kohärenz erst in Turn 23 durch B, indem eine „Begründung“ für die ikonische Darstellung explizit eingefordert wird.

Verständnis der Kohärenz

Die Kohärenz wird in dieser Gruppe nicht klar abgegrenzt von der Nachvollziehbarkeit. Der Fokus liegt hier auf der **internen Kohärenz**: Es werden von C interne Zusammenhänge am konkreten Beweisversuch erläutert. Dabei wird die Begründung für die ikonische Darstellung der Operation durch logisch nachgelagerte Beweisschritte geliefert, die eigentliche Begründungsrichtung im Beweis ist hier also *umgekehrt*. Dagegen betrachtet B, in logisch korrekter Reihenfolge, lokale Zusammenhänge nur innerhalb des Beweisschrittes der Operation. Durch die sprachliche Beschreibung dieser soll die (interne) Kohärenz gewährleistet werden. Hier wird also die (sprachliche) **Vollständigkeit** als für die Beweisbewertung relevante Norm über die (interne) Kohärenz begründet. Diese beiden Normen werden an dieser Stelle nicht klar voneinander abgegrenzt.

Intra- und interpersonelle Prozesse

In diesem Diskussionsabschnitt bringt A die Norm der Kohärenz bereits als präinteraktionale Position in die weitere Diskussion ein. Diese Diskussion wird stark von C **dominiert**. C antwortet auf die von A und D als Fragen aufgeworfenen Normen der Kohärenz und Allgemeingültigkeit und erklärt den übrigen Teilnehmenden die entsprechenden Zusammenhänge am konkreten Beweisversuch. Dabei vollzieht C den Ebenenwechsel hin zur sprachlichen Darstellungsebene und bringt als weitere Norm die (sprachliche) Vollständigkeit in die Diskussion ein.

Diese wird durch B wieder in Bezug gesetzt zur Kohärenz. Erst durch B wird die Kohärenz als Norm in der Beweisbewertung etabliert. B hat damit eine wichtige **unterstützende** Rolle in diesem Diskussionsabschnitt. A und D äußern

sich nicht weiter zu den Normen der Kohärenz und der Vollständigkeit und nehmen somit in diesem Diskussionsabschnitt **Nebenrollen** ein.

Die von B und C etablierten Verständnisse dieser Normen stehen damit **isoliert** in der Diskussion. Auch zwischen B und C gibt es diesbezüglich Unterschiede, vor allem hinsichtlich der Organisation der internen Kohärenzen. Während C einen eher globalen Blick einnimmt und die Operation, in logisch umgekehrter Reihenfolge, aus dem gewünschten Endergebnis heraus erklärt, zielt die Äußerung von B eher auf eine lokale Betrachtung in logisch korrekter Reihenfolge.

6.1.3 Präinteraktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

In der Präinteraktionsgruppe beginnt die Diskussion zunächst damit, dass die verschiedenen präinteraktionalen Bewertungen der Beweisversuche verglichen werden, jedoch noch ohne Argumente auf der Grundlage der Normen zu liefern. Es wird dann explizit Bezug auf die Aufgabenstellung genommen und in diesem Zusammenhang nach Argumenten gesucht.

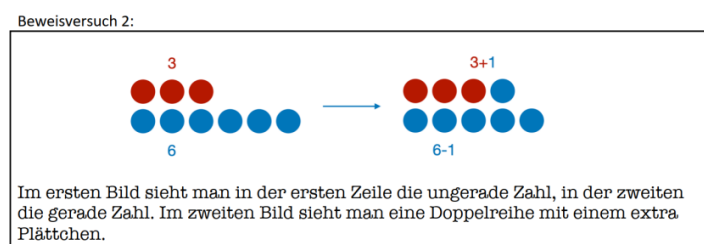


Abbildung 37 Pfeilbeweis (entspricht Abbildung 30)

Dabei wird ebenfalls der Beweisschritt der Operation im Pfeilbeweis diskutiert:

„Aber ich muss sagen, ich finde da nicht gut gekennzeichnet, dass die den einen von unten nach oben nehmen.“ (Turn 59, F)

Anders als in den vorherigen Gruppen, wird hier von F zunächst die lokale **Vollständigkeit** auf ikonischer Ebene in den Blick genommen. Demnach ist laut F durchaus nachvollziehbar, was in diesem Schritt passiert, nämlich dass ein Plättchen von unten nach oben verschoben wird. Diese Operation wird aber laut F nicht ausreichend ikonisch deutlich gemacht. Erst an späterer Stelle wird von F auf die **Nachvollziehbarkeit** dieses Beweisschrittes eingegangen:

„Ja, das habe ich auch gar nicht *verstanden*.“ (Turn 62, F, Herv. d. Ver.)

Vor dem Hintergrund der Interpretation von Turn 59 geht es hier nicht um die Nachvollziehbarkeit dessen, was in diesem Beweisschritt passiert, dies wurde bereits von F geklärt, sondern darum, warum dies passiert. Die Frage zielt also schon in Richtung einer Klärung auf der Ebene der Kohärenz. Diese Ebene adressiert auch A in der Antwort auf F:

„Damit einer hier übrig bleibt, damit man sieht, dass das ungerade ist.“ (Turn 63, A)

Hier wird von A, in ähnlicher Weise wie in der Inselgruppe, die Operation aus dem gewünschten Endergebnis heraus begründet, also einem der Operation *logisch nachgelagerten* Schritt. Aus diesem Endergebnis wird dann, in *logisch korrekter* Abfolge, der Bezug zur Aussage hergestellt, dass durch diese Darstellung eine ungerade Zahl dargestellt wird. A bringt also zunächst implizit den normativen Unteraspekt der internen Kohärenz in die Diskussion ein und wechselt dann selbst zum normativen Unteraspekt der externen Kohärenz. Die internen Zusammenhänge werden weniger ausführlich dargelegt als in der Inselgruppe, da das gewünschte Endergebnis hier nicht vollständig beschrieben wird: Es fehlt der Verweis auf die Doppelreihe, welche ja der eigentliche Grund für das Verschieben des Plättchens ist. Auch wird in dieser Gruppe, anders als in der Inselgruppe, die Allgemeingültigkeit der Zusammenhänge nicht adressiert. Die Auseinandersetzung ist bis zu diesem Punkt auf den konkreten Beweisversuch bezogen. In Turn 67 hebt D diese auf die **Metaebene**:

„Also, *deswegen* fand ich den eigentlich ganz – Erstmal fand ich den doof, als ich den so gesehen habe, aber je länger ich mir den angeguckt habe, desto mehr – also am meisten *erklärt* dieses Beispiel, finde ich.“ (Turn 67, D, Herv. d. Ver.)

Wie in der Interaktionsgruppe wird hier über den Begriff des „Erklär[ens]“ die Norm der Kohärenz explizit etabliert. Da über das Wort „deswegen“ an die vorherigen Äußerungen angeknüpft wird, ist davon auszugehen, dass „erklär[en]“ hier sowohl im Sinne von interne Zusammenhänge erklären als auch den Bezug zur Aussage klären verstanden wird, also im Sinne der internen und der externen Kohärenz, wie in Turn 63 formuliert. Diese Äußerung führt zur Formulierung einer Gegenposition durch F:

„Aber natürlich, aber für die Kinder, wenn die das das erste Mal sehen, *verwirrt* das einfach nur komplett.“ (Turn 68, F, Herv. d. Ver.)

Hier wird nicht, wie durch A intendiert, die geringe Nachvollziehbarkeit durch das Herstellen von Kohärenz aufgelöst, sondern von F auf dem Standpunkt der geringen Nachvollziehbarkeit trotz Erklärung der Zusammenhänge beharrt. Die zentrale Rolle der Nachvollziehbarkeit, als von der Kohärenz unabhängige Norm, wird hier von F explizit betont. Dabei geht es F an dieser Stelle zunächst um die Nachvollziehbarkeit für Lernende in einem schulischen Kontext, die soziale Situierung wird hier somit sehr weit gefasst. Dies wird im Folgenden als **didaktische Nachvollziehbarkeit** bezeichnet. In Turn 70 wechselt F dann zu

einer engeren sozialen Situierung, bei welcher nur die persönliche **inhaltliche Nachvollziehbarkeit** betrachtet wird:

„Ja, aber ich fand es auch am *Anfang* direkt verwirrend. Und wenn das erst *verwirrend* ist, was bringt mir das?“ (Turn 70, F, Herv. d. Ver.)

In Turn 71 wird von A wieder an die Norm der **Vollständigkeit** aus Turn 59 angeknüpft, wobei hier zum ersten Mal in diesem Diskussionsverlauf ein **Wechsel** von der ikonischen zur sprachlichen Darstellungsebene stattfindet:

„Hier wurde *auch* gar nicht geschrieben, was überhaupt gemacht wurde. Das habe ich nämlich da *aufgeschrieben*, da hätte man ja wenigsten schreiben können, dass ein Plättchen dann hochgeht.“ (Turn 71, A, Herv. d. Ver.)

Es wird hier von A nicht direkt Bezug genommen auf die vorher diskutierte Abgrenzung der Nachvollziehbarkeit von der Kohärenz. Durch den Partikel „auch“ wird deutlich, dass es sich hierbei um einen Einwurf zum Anführen einer neuen Position handelt. Dass es sich hierbei um die präinteraktionale Sichtweise von A handelt, bekräftigt A im zweiten Satz, wo betont wird, dass dies von A in der Vorbereitung bereits so „aufgeschrieben“ wurde. Das Verschieben eines Plättchens soll laut A sprachlich beschrieben werden. Implizit wird hier der sprachlichen **Vollständigkeit** die Rolle zuteil, die Kohärenz der Darstellungsebenen zu gewährleisten. Daran knüpft F an späterer Stelle wieder an:

„Die hätten noch einen *Zwischenschritt* irgendwie machen müssen, dass man zeigt, neben ein Plättchen von das oben“ (Turn 91, F, Herv. d. Ver.)

Wie in Turn 59 spricht F hier die Norm der Vollständigkeit auf ikonischer Ebene an. Durch den Begriff „Zwischenschritt“ wird an dieser Stelle eine Bedeutungsverschiebung hin zur internen Kohärenz der Beweisschritte deutlich. Dies formuliert F in Turn 93 noch expliziter:

„Zeigen, dass sie das da oben hinlegen, *damit* da diese Einteilung ist.“ (Turn 93, F, Herv. d. Ver.)

Der Zusammenhang zwischen dem Beweisschritt der Operation (das Verschieben eines Plättchens) und dem Endergebnis (Einteilung in eine Doppelreihe mit einem extra Plättchen) wird hier, in logisch korrekter Reihenfolge, explizit angesprochen.

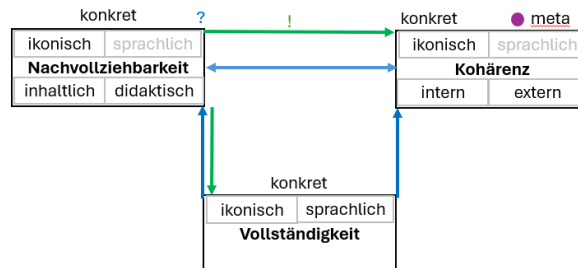


Abbildung 38 Präinteraktionsgruppe zur Kohärenz

Etablierung der Kohärenz als Norm zur Beweisbewertung

Die Frage von F nach der **Nachvollziehbarkeit** des Beweisschrittes der Operation zielt bereits implizit auf eine Klärung der Rolle dieses Beweisschrittes im Sinne der Gesamtkohärenz des Beweisversuchs. Darauf reagiert A durch die Erläuterung der **Kohärenz** zum gewünschten Endergebnis und der Kohärenz dieses Endergebnisses zur Aussage. Die Nachvollziehbarkeit soll dabei durch das Herstellen von Kohärenz erhöht werden. Die Diskussion bleibt hier noch konkret auf den Beweisversuch bezogen. In Turn 67 hebt D die Diskussion auf die Metaebene und etabliert die Norm der Kohärenz explizit, indem D den diskutierten Beweisversuch vor dem Hintergrund seines erklärenden Charakters bewertet. Dies geschieht in Reaktion auf die vorherigen konkreten Erklärungen zur Kohärenz von A, weshalb davon auszugehen ist, dass Erklären hier im Sinne von Kohärenz herstellen verstanden wird. Als eigenständige Norm tritt die Kohärenz auch durch die Abgrenzung zur Nachvollziehbarkeit zutage. Die Abgrenzung findet auf der Ebene der Beweisbewertung statt, welche für den diskutierten Beweisversuch unterschiedlich ausfällt, je nachdem, auf welche der beiden Normen der Fokus gelegt wird.

Verständnis der Kohärenz

Es liegt eine klare Abgrenzung zwischen der Norm der Nachvollziehbarkeit und der Norm der Kohärenz vor. Je nachdem, welche Norm im Fokus steht, wird der Beweisversuch von einzelnen Teilnehmenden verschieden bewertet. Konkret diskutiert werden Aspekte der **internen Kohärenz** der Beweisschritte. Die **externe Kohärenz** wird nur in Turn 63 kurz erwähnt, wenn der Bezug zur Aussage konkret formuliert wird, aber nicht auf der Metaebene als Unteraspekt der Kohärenz formuliert. In Bezug auf die interne Kohärenz wird auch hier zunächst die ikonische Darstellung der Operation aus dem *logisch nachgelagerte* Ender-

gebnis heraus begründet. Erst am Ende der Diskussion, in Turn 93, wird diese Beziehung in *logisch korrekter* Reihenfolge formuliert.

Die **Vollständigkeit** wird hier klarer abgegrenzt von der Kohärenz, aber in engem Bezug zu dieser gesehen. Dabei wird bereits zu Beginn der Diskussion von F unterschieden zwischen einer ausreichenden ikonischen Verdeutlichung dessen, was passiert (also der ikonischen Vollständigkeit) und der Frage danach, warum dies passiert (also der Kohärenz). Am Ende, in Turn 93, wird von F die vollständige ikonische Darstellung der Operation als Voraussetzung dafür formuliert, die Kohärenz auf ikonischer Ebene verdeutlichen zu können. Parallel dazu fordert A in Turn 72 die sprachlich vollständige Darstellung der Operation, ohne den Bezug zur internen Kohärenz zu explizieren. Vielmehr soll laut A durch die sprachliche Vollständigkeit die Kohärenz der Darstellungsebenen gewährleistet werden.

Intra- und interpersonelle Prozesse

In diesem Diskussionsverlauf nimmt A eine **dominante** Rolle ein. A erklärt den anderen Diskussionsteilnehmenden die internen und externen Zusammenhänge und vollzieht einen Ebenenwechsel zur sprachlichen Darstellungsebene, wodurch der Aspekt der Vollständigkeit erneut in den Fokus gerückt wird. A selbst entwickelt im Diskussionsverlauf keine neuen Verständnisse der diskutierten Normen, sondern bringt den eigenen **präinteraktionalen** Standpunkt in den Diskussionsverlauf ein. Dies passiert stets in Reaktion auf Äußerungen von F.

F spielt dabei für die Entwicklung der Diskussion eine wichtige **unterstützende** Rolle. Durch F wird die Diskussion von der Nachvollziehbarkeit in die Richtung der Kohärenz gelenkt. F trennt dabei klar zwischen den Normen der Nachvollziehbarkeit, der Vollständigkeit und der Kohärenz, was von den anderen Diskussionsteilnehmenden nicht explizit übernommen wird. Dabei bleibt F bei der Betrachtung der ikonischen Ebene. Die Richtung des Zusammenhanges der Beweisschritte der Operation und des Endergebnisses, die von A in umgekehrter Reihenfolge eingebracht wurden, werden von F aufgegriffen und in logisch korrekter Reihenfolge formuliert. F entwickelt somit **interaktional** im Diskussionsverlauf in Auseinandersetzung mit den präinteraktionalen Verständnissen von A und D ein ausdifferenziertes und mit den beiden stärker übereinstimmendes Verständnis der Kohärenz.

Durch D wird der Wechsel zur Metaebene vollzogen, wobei D die eigene **präinteraktionale** Bewertung des Beweisversuchs auf der Grundlage der Kohärenz einbringt. Dies geschieht anknüpfend an die konkreten Erläuterungen von F zur Kohärenz. Die Verständnisse scheinen hier also übereinzustimmen. D spielt in diesem Diskussionsabschnitt somit eine (gegenüber F untergeordnet) **unterstützende** Rolle.

6.1.4 Vergleich der Gruppen

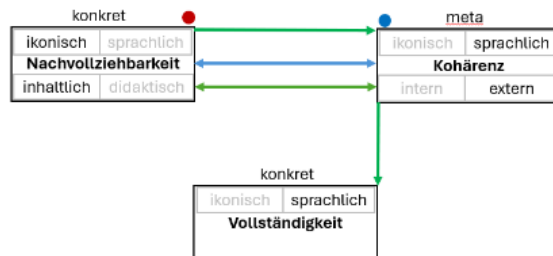


Abbildung 39 Interaktionsgruppe zur Kohärenz (entspricht Abbildung 34)

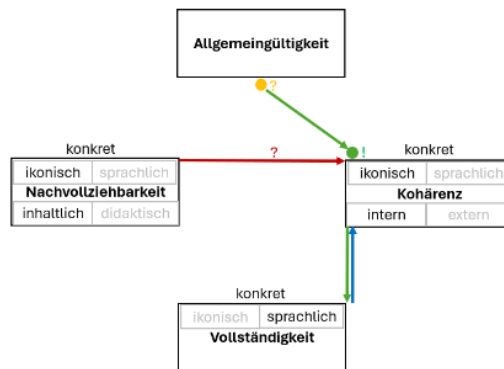


Abbildung 40 Inselgruppe zur Kohärenz (entspricht Abbildung 36)

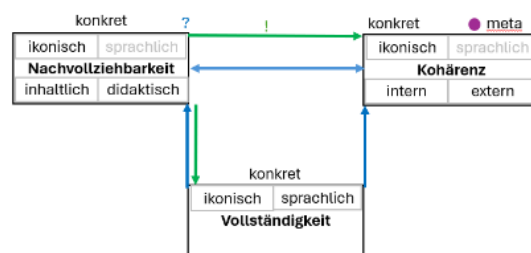


Abbildung 41 Präinteraktionsgruppe zur Kohärenz (entspricht Abbildung 38)

Etablierung der Kohärenz als Norm zur Beweisbewertung

In allen drei Gruppen liegt der Fokus in diesem Abschnitt auf der Diskussion der ikonischen Darstellung der Operation im Pfeilbeweis. In die Evaluation wird eingestiegen über die Norm der (mangelnden) **Nachvollziehbarkeit** der ikonischen Darstellung der Operation und dann werden die Beziehungen zur **Kohärenz** erarbeitet. Allen Diskussionen liegt die von den meisten der Diskussions teilnehmenden geteilte Grundannahme zugrunde, dass die Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung über das Herstellen von Kohärenz erhöht werden kann.

Die Frage nach der Kohärenz, nach einer Begründung des Warums und Woher der ikonischen Darstellung der Operation, ist dabei in der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe bereits in der Frage nach der Nachvollziehbarkeit der Darstellung explizit (in der Inselgruppe) beziehungsweise implizit (in der Präinteraktionsgruppe) enthalten. In beiden Gruppen fokussiert sich die weitere Diskussion dadurch auf die Kohärenz, dass auf diese aufgeworfene Frage eine andere Person aus der jeweiligen Gruppe antwortet, indem diese konkrete interne Zusammenhänge von Operation und Endergebnis erläutert.

Im Vergleich der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe zeigt sich ein zentraler Unterschied darin, dass in der Präinteraktionsgruppe die Kohärenz explizit als Norm etabliert wird, in der Inselgruppe diese aber eher implizit thematisiert bleibt. Zentrale Mechanismen sind dabei in der Präinteraktionsgruppe einerseits der **Wechsel auf die Metaebene**: Es werden die Zusammenhänge nicht nur am konkreten Beweisversuch erläutert, sondern auch die Kohärenz als für die Beweisbewertung relevante Norm auf der Metaebene formuliert. Weiterhin wird die Kohärenz klar abgegrenzt von der Nachvollziehbarkeit: Der Beweisversuch wird, je nachdem auf welche der beiden Normen fokussiert wird, unterschiedlich bewertet.

Ähnlich wird in der Interaktionsgruppe die Kohärenz schließlich als Norm etabliert, indem diese explizit von der Nachvollziehbarkeit abgegrenzt wird. Anders als in der Präinteraktionsgruppe wird der Beweisversuch hier jedoch nicht auf Grundlage dieser Differenzierung (nachvollziehbar versus kohärent) unterschiedlich bewertet, sondern die Kohärenz als für die Beweisbewertung zentrale Norm herausgearbeitet. Hier wird im Verlauf der Diskussion der Beweis als grundsätzlich (auf der ikonischen Ebene) nachvollziehbar bewertet, jedoch nicht als ausreichend kohärent (auf sprachlicher Ebene). Die Entwicklung hin zur Kohärenz entspinnt sich in der Interaktionsgruppe eher um die Frage nach einer Begründung für die mangelnde Nachvollziehbarkeit der ikonischen Darstellung, welche über die mangelnde Kohärenz erklärt wird. Zentrale Mechanismen bei der stärkeren Fokussierung auf die Kohärenz sind dabei weniger die Frage-Antwort Dynamik wie in der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe, sondern ein Ebenenwechsel von der ikonischen Darstellungsebene (Betrachtung der

Nachvollziehbarkeit) hin zur sprachlichen Darstellungsebene (Betrachtung der Kohärenz). Dieser Ebenenwechsel wird weiterhin unterstützt durch einen Wechsel von der konkreten Betrachtung hin zur Metaebene.

Weiterhin werden die Normen der Nachvollziehbarkeit und der Kohärenz abgegrenzt durch die Begrifflichkeiten „beschreiben“ und „erklär[en]“. Diese Begriffe werden bis zum Ende des Diskussionsabschnittes jedoch nicht von allen Teilnehmenden in gleicher Weise verstanden werden. Dieses starke Anknüpfen an Äußerungen auf der Grundlage einzelner Begrifflichkeiten ist in diesem Maße nur in der Interaktionsgruppe aufgetreten.

Verständnis der Kohärenz

In allen drei Gruppen ist den Diskussionen gemeinsam, dass die Kohärenz in enger Beziehung zur Nachvollziehbarkeit und Vollständigkeit diskutiert wird. Dabei wird die Nachvollziehbarkeit in den unterschiedlichen Gruppen mehr oder weniger stark von der Kohärenz als Norm abgegrenzt (siehe dazu auch den vorangegangenen Abschnitt zur Etablierung der Kohärenz als Norm).

Die **Vollständigkeit** wird in allen drei Gruppen auf der sprachlichen Darstellungsebene betrachtet, wonach der Beweisschritt der Operation vollständig sprachlich erläutert werden sollte in der Weise, dass die Kohärenz zu den anderen Beweisschritten deutlich wird. Es geht an dieser Stelle also weniger darum, dass der entsprechende Beweisschritt als fehlend benannt wird. Vielmehr wird hier die **lokale Vollständigkeit** in Bezug auf diesen Beweisschritt betrachtet, wonach dieser nicht nur dargestellt, sondern auch vollständig dargestellt sein soll. Lediglich in der Präinteraktionsgruppe wird die Vollständigkeit als Norm klar abgegrenzt von der Kohärenz und nicht, wie in den anderen Gruppen, implizit als Unteraspekt der Kohärenz dargelegt. Wesentlicher Unterschied ist hier, dass in der Präinteraktionsgruppe die Vollständigkeit auch auf ikonischer Ebene betrachtet wird und bereits zu Beginn der Diskussion eingebracht und abgegrenzt wird von der Kohärenz.

In der Interaktionsgruppe liegt der Fokus bei der Betrachtung der Kohärenz auf der sprachlichen Darstellungsebene. Die Kohärenz wird hier rein auf der Metaebene diskutiert. Ihr situiertes Verständnis bleibt dadurch sehr vage. Es werden Aspekte der internen Kohärenz beziehungsweise der externen Kohärenz durch die Begrifflichkeiten „Beschreibung“ und „Erklär[ung]“ beziehungsweise Kontext angerissen, aber nicht näher erläutert oder am Beweisversuch festgemacht, was konkret damit gemeint ist.

Im Gegensatz dazu werden in der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe konkrete, ikonisch dargestellte Zusammenhänge zwischen den Beweisschritten der Operation und dem Endergebnis erläutert. Kohärenz wird hier also primär **intern** verstanden als **Zusammenhang von aufeinanderfolgenden Beweisschritten**, nur in der Präinteraktionsgruppe klingt am Rande noch der **Bezug zur Aussage**, also die **externe Kohärenz**, an.

Sowohl in der Inselgruppe als auch in der Präinteraktionsgruppe wird dabei zunächst die Operation aus dem *logisch nachgelagerten* Beweisschritt des Endergebnisses heraus begründet. In der Präinteraktionsgruppe wird am Ende des Diskussionsabschnittes dieser Zusammenhang nochmals in *logisch korrekter* Reihenfolge formuliert. In der Inselgruppe passiert dies nicht, es werden jedoch interne Zusammenhänge innerhalb des Beweisschrittes der Operation in logisch korrekter Reihenfolge dargelegt. In Bezug auf die Norm der **logischen Struktur** zeigen sich an dieser Stelle also uneinheitliche Verständnisse.

Intra- und interpersonelle Prozesse

In allen drei Gruppen zeichnen sich ähnliche Rollenmuster ab. Es gibt, zumindest in der Interaktionsgruppe und der Inselgruppe, **Nebenrollen** (in Rot und Gelb markiert), welche am Anfang ihre präinteraktionale Beweisbewertung (mit Fokus auf die Nachvollziehbarkeit als Norm) einbringen, sich jedoch im weiteren Verlauf des jeweiligen Diskussionsabschnittes nicht mehr einbringen. Insofern bleibt unklar, wie sich die Verständnisse in diesen Nebenrollen entwickeln. Die Äußerungen der Nebenrollen dienen als Impulsgeber für die weitere Diskussion. In der Interaktionsgruppe wird daran auf der Ebene der verwendeten Begrifflichkeiten angeknüpft und das Verständnis der Kohärenz dadurch weiter elaboriert. In der Inselgruppe wird eine direkte Antwort auf die aufgeworfenen Fragen formuliert und so die Kohärenz am konkreten Beweisversuch erläutert.

In jeder Gruppe gibt es eine dominante Person, die wesentlich neue Normen, die der Kohärenz und der Vollständigkeit, in die Diskussion einbringt (in Grün markiert) sowie eine (oder in der Präinteraktionsgruppe auch mehrere) Person(en), die eine unterstützende Rolle spielen bei der Elaboration dieser Aspekte (in Blau beziehungsweise Violett markiert).

Durch die **dominante** Person werden wesentliche Ebenenwechsel vollzogen und dabei neue Aspekte in die Diskussion eingebracht. In dieser Rolle werden vor allem eigenen präinteraktionale Standpunkte formuliert, diese im Diskussionsverlauf jedoch wenig verändert. Das Verständnis, das sich am Ende in der Gruppe entwickelt, ist stark geprägt vom Verständnis der dominanten Person. Besonders deutlich wird dies in der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe, wo es die dominante Person ist, welche die konkreten internen Zusammenhänge im Beweisversuch den anderen Diskussionsteilnehmenden erklärt und dadurch versucht die Nachvollziehbarkeit für die anderen zu erhöhen. Lediglich in der Interaktionsgruppe scheint sich die Abgrenzung von Nachvollziehbarkeit und Kohärenz als unabhängige Normen auch für die dominante Person als interaktional neu etabliertes Verständnis zu entwickeln. Bei der Norm der Vollständigkeit bleibt in der Interaktionsgruppe und der Inselgruppe offen, ob es sich hierbei um einen präinteraktionalen Aspekt im Verständnis der dominanten Person

handelt, oder ob sich dies aus dem Diskussionsverlauf ergibt im Versuch, die Nachvollziehbarkeit weiter zu erhöhen.

Die **unterstützenden** Rollen zeigen sich in den einzelnen Gruppen in unterschiedlichen Ausprägungen. In der Interaktionsgruppe folgt die unterstützende Person der Bewegung der dominanten Person von der Nachvollziehbarkeit zur Kohärenz und spezifiziert diese weiter aus im Sinne der externen Kohärenz. Außerdem bringt die unterstützende Person die Abgrenzung der Normen der Nachvollziehbarkeit und der Kohärenz in die Diskussion ein. Während in der Interaktionsgruppe die von der dominanten Person eingebrachte Norm der Vollständigkeit von den anderen Teilnehmenden nicht weiter aufgegriffen wird, ist es in der Inselgruppe die unterstützende Person, welche diese explizit in Beziehung zur Kohärenz bringt und als notwendig für diese darlegt. In der Präinteraktionsgruppe gibt es eine übergeordnet unterstützende Person, welche die Diskussion von Anfang an in Richtung Kohärenz lenkt und die Abgrenzung der Nachvollziehbarkeit und der Vollständigkeit von der Kohärenz in die Diskussion einbringt, was von den anderen Teilnehmenden jedoch nicht explizit aufgegriffen wird. Eine weitere unterstützende Rolle, hier als untergeordnet bezeichnet, da weniger den Gesamtverlauf der Diskussion lenkend, vollzieht einen Ebenenwechsel und formuliert die Kohärenz als Norm auf der Metaebene.

In Bezug auf die Frage nach einem interpersonell geteilten Verständnis, das sich in den Diskussionen entwickelt, können nur Aussagen zur dominanten und unterstützenden Rolle getroffen werden, da sich die Nebenrollen zu wenig am Diskussionsverlauf beteiligen. In der Interaktionsgruppe etablieren beide Rollen gemeinsam in der **Interaktion** ein Verständnis der Kohärenz als von der Nachvollziehbarkeit getrennte Norm. Jedoch werden die Begriffe „beschreiben“ und „erklären“ nicht in gleicher Weise verstanden, die **Unterschiede im Verständnis** (externe Kohärenz versus enge Kohärenz der Darstellungsebenen) bleiben den beiden Rollen jedoch durch das Verwenden der gleichen Begrifflichkeiten unbewusst.

In der Inselgruppe bringen beide Rollen ihre **präinteraktionalen** Sichtweisen zusammen und etablieren dadurch ein **gemeinsames Verständnis** von interner Kohärenz im Sinne eines Zusammenhanges aufeinanderfolgender Beweisschritte. Jedoch gibt es hier **implizit Unterschiede**, was die Organisation in logisch umgekehrter oder logisch korrekter Reihenfolge der Beweisschritte betrifft.

In der Präinteraktionsgruppe bringt die **dominante** Rolle die Normen von Kohärenz und Vollständigkeit als **präinteraktionale** Sichtweisen ein und zeigt **keine Änderung** im Diskussionsverlauf hinsichtlich des Verständnisses. Die untergeordnet unterstützende Rolle bringt ihre eigene präinteraktionale Sichtweise damit in Zusammenhang und formuliert dadurch eine gemeinsame Position. Die übergeordnet **unterstützende** Rolle setzt die von der dominanten Rolle eingebrachten Aspekte explizit in Beziehung mit der eigenen eingangs formulierten

Position und bildet dadurch ein **interaktional** neues, ausdifferenziertes Verständnis der Kohärenz, das in Übereinstimmung ist mit dem der dominanten Rolle.

6.1.5 Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung

Im Vergleich der Gruppen haben sich zwei zentrale potenzielle Einflussfaktoren zur Etablierung der Kohärenz als Norm für die Beweisbewertung herausgestellt: Die Entwicklung aus der Betrachtung der **Nachvollziehbarkeit** heraus und der **Wechsel** zwischen der sprachlichen und der ikonischen Darstellungsebene und der konkreten und der Metaebene. Dies hat sich erst in der Interaktion im Rahmen der Intervention herausgebildet, wobei die dominante Person in jeder Gruppe die Entwicklung maßgeblich vorangetrieben hat. Es sollen daher in der quantitativen Analyse die folgenden beiden Hypothesen untersucht werden:

1.1 Die Betrachtung der Nachvollziehbarkeit fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz.

1.2 Wechselprozesse fördern das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz.

Weiterhin zeigte sich in der vergleichenden Analyse der Gruppen, dass die interne Kohärenz im Sinne des Zusammenhanges aufeinanderfolgender Beweisschritte im Fokus der Betrachtungen stand und die externe Kohärenz im Sinne des Bezugs zur Aussage eher im Hintergrund. Die externe Kohärenz wurde dabei nur von einer einzelnen Person benannt und von den anderen Diskussions teilnehmenden nicht weiter aufgegriffen. Um dies auch quantitativ untersuchbar zu machen, soll in der quantitativen Analyse daher differenziert werden zwischen interner und externer Kohärenz. Bei den Darstellungsebenen lag ein Fokus auf der sprachlichen Explikation ikonisch dargestellter Zusammenhänge. In der quantitativen Analyse soll hier explizit unterschieden werden zwischen der ikonischen und der sprachlichen Darstellungsebene.

Der Vergleich der Gruppen hat darüber hinaus einen weiteren potenziellen Einflussfaktor in Bezug auf die Norm der **Vollständigkeit** gezeigt. Diese ist bei einer Betrachtung der Kohärenz in allen Gruppen automatisch mehr in den Fokus gerückt. Auch dies entwickelte sich interaktional in der Gruppendiskussion, wurde in jeder der Gruppen jedoch vor allem von der dominanten Person in die Diskussion eingebracht.

Bei der quantitativen Analyse hinsichtlich der Vollständigkeit soll daher auch die folgende Hypothese untersucht werden:

1.3 Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit.

6.2 Vollständigkeit

Im zweiten Teil diskutierten die Gruppen die Beweisversuche zur Aussage

„Wenn man eine ungerade und eine gerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“

auf Grundlage des dritten Impulses:

- c) Markieren Sie in jedem Beweisversuch, an welchen Stellen es in der Erläuterung um Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis geht. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Erläuterungen vergleichen?

Abbildung 42 Impuls c) entsprechend der Aufgabenstellung in der Übung

Dieser Impuls zielt insbesondere auf die explizite Diskussion der Normen der Vollständigkeit und der logischen Struktur ab. Deren Verständnis (auf Lehrendenseite) gründet sich auf das Vorhandensein und die Reihenfolge der in diesem Impuls direkt adressierten **Beweisschritte**. Entsprechend ergaben sich in der qualitativen Analyse für diesen Diskussionsabschnitt als Zentralthemen die Vollständigkeit und die logische Struktur. In diesem Kapitel soll zunächst die **Vollständigkeit** untersucht werden und erst im folgenden Kapitel die logische Struktur.

Für die qualitative Analyse ausgehend von dem oben genannten Impuls interessierte dabei insbesondere, wie genau und auf Grundlage welcher Überlegungen die Beweisschritte abgegrenzt wurden und welche Rolle dies für die Entwicklung der Verständnisse der Vollständigkeit hatte. Forschungsfrage 1.1: „Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?“ wurde daher spezifiziert zu:

Forschungsfrage 1.1 c): Welche situierten Verständnisse der Beweisschritte entwickeln sich und welchen Einfluss haben diese auf die Entwicklung der situierten Verständnisse der Vollständigkeit?

Um die Abgrenzung der in den Gruppen diskutierten Spezifitäten, das heißt der spezifischen Eigenschaften des konkret dargestellten Beispiels (vgl. Abschnitt 2.3.5), entlang der Entitäten der Beweisschritte Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis zu untersuchen, wurde für diesen Abschnitt ein neues Analyseraster entwickelt. In diesem Raster wurden als Entitäten die Beweisschritte gewählt. Neben der internen Ebene wurde auch die externe Ebene der Aussage mit aufgenommen. Die in den Diskussionen benannten Spezifitäten wurden entsprechend ihrer von Studierendenseite vorgenommenen Zuordnung zum

jeweiligen Beweisschritt im Analyseraster positioniert. Eine Positionierung zwischen den Entitäten bedeutet dabei, dass an dieser Stelle keine eindeutige Entscheidung für eine Zuordnung zu einer der beiden Entitäten getroffen wurde. Doppelpfeile verdeutlichen eine Abgrenzung der Entitäten und ein Strich ohne Pfeilspitzen eine Vermischung. Direktionale Beziehungen der Entitäten zueinander wurden durch einen Pfeil mit entsprechender Richtung verdeutlicht. Die **Pfeilrichtung** gibt hier also nicht die zeitliche Beziehung an, wie bei der Analyse der Kohärenz, sondern die **logische Beziehung**, also welche Entität aus welcher begründet wurde. Die Farbgebung entspricht den Rollenverteilungen aus der Analyse des ersten Abschnittes (siehe dort). Grau hinterlegte Felder deuten auf Entitäten hin, die nur implizit benannt wurden.

6.2.1 Interaktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

In der Interaktionsgruppe wird zunächst, unabhängig von den Beweisversuchen, festgelegt, was **Voraussetzung** und was **Endergebnis** ist:

„[...] Also deswegen meine ich ja, ähm, dass es ungerade und gerade ist, das ist ja die Voraussetzung [...] und das Endergebnis ist dann die Summe, die immer ungerade ist.“ (Turn 29, C, Herv. d. Verf.)

Hier wird nicht explizit auf einen der Beweisversuche Bezug genommen, sondern implizit auf der Ebene der zu beweisenden Aussage der wenn-Teil abgegrenzt von dem dann-Teil der Aussage: „Wenn man eine gerade und eine ungerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“ Dies wurde zur Unterscheidung von Voraussetzung und Endergebnis genutzt⁶¹. Dieser Bezug zur Aussage und damit zur externen Kohärenz wird jedoch von den Diskussionspartizipierenden nicht explizit formuliert. In Turn 30 wird diese Unterscheidung dann auf den Blockbeweis angewendet. Dies ist der einzige Beweisversuch, in welchem nicht erwähnt wird, dass es sich um eine ungerade und eine gerade Zahl handelt:

„Wird *ja* in Beweisversuch drei nicht erwähnt.“ (Turn 30, B, Herv. d. Verf.)

Durch das Wort „ja“ wird deutlich, dass hier direkt an das vorher Gesagten angeknüpft wird. In Turn 31 bringt A beide Äußerungen zusammen und stellt auf dieser Grundlage einen Normbruch hinsichtlich der Vollständigkeit auf sprachlicher Ebene fest:

„[...] Also die Voraussetzung ist hier nicht gegeben.“ (Turn 31, A, Herv. d. Verf.)

⁶¹ In dieser Weise wurde die Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Endergebnis auch in der vorangegangenen Vorlesung vermittelt.

Vollständigkeit wird hier somit vor dem Hintergrund der Einteilung in die Beweisschritte so verstanden, dass jeder Beweisschritt, wie er in der Aussage selbst formuliert ist, auch explizit sprachlich formuliert sein muss.

Beweisversuch 3:

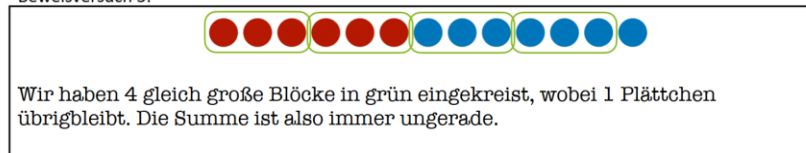


Abbildung 43 Blockbeweis (entspricht Abbildung 31)

Parallel dazu wird, ebenfalls in Bezug auf den Blockbeweis, geklärt, was zum Beweisschritt der **Strukturierung** zählt. Dies wird zunächst auf ikonischer Ebene betrachtet:

„[...] die Strukturierung sind die Dreierpaare, in denen sie *eingekreist sind* [...]“ (Turn 29, C, Herv. d. Verf.)

Hier wird nicht der Wortlaut aus der sprachlichen Erläuterung des Beweisversuchs aufgegriffen, welcher von der Anzahl gleich großer Blöcke spricht, sondern die konkret an diesem Beispiel im Bild auftretende Einkreisung in Dreierblöcke. In dem Wortlaut „eingekreist sind“ wird deutlich, dass hier das Produkt der Einkreisung und nicht der Prozess des Einkreisens adressiert wird. Von B wird an späterer Stelle stärker Bezug genommen auf die sprachliche Darstellungsebene, wenn die Frage aufgeworfen wird, ob das übrige Plättchen, das sprachlich im Beweisversuch erwähnt wird, bereits zum Endergebnis zählt oder auch noch Teil des Beweisschrittes der Strukturierung ist:

„Jetzt ist halt noch die Frage, ob zum Endergebnis auch noch zählt, dass ein Plättchen übrig bleibt. Oder gehört das zur Strukturierung?“ (Turn 40, B)

Es wird hier versucht, in der sprachlichen Erläuterung eine klare Abgrenzung zu treffen zwischen dem Beweisschritt der **Strukturierung** und dem des **Endergebnisses**. Dieser Bewegung folgt C in Turn 41, indem das übrige Plättchen der Strukturierung zugerechnet wird, und A begründet dies in Turn 42 wie folgt:

„Die Strukturierung *ist* doch die *Einkreisung*.“ (Turn 42, A, Herv. d. Verf.)

Hier wird, unabhängig vom Beweisversuch, nach einem Kriterium gesucht, wodurch sich der Beweisschritt der Strukturierung festlegen lässt. Es wird nicht mehr von der konkreten Art der Einkreisung gesprochen, sondern stärker abstrahiert und nur noch der Fokus auf das Produkt der Einkreisung beibehalten. Zu diesem zählt auch das übrige Plättchen, welches somit der Strukturierung zugewiesen wird. B stimmt dieser Argumentation zunächst zu und markiert die ent-

sprechenden Stellen in der Erläuterung als zur Strukturierung gehörig. An späterer Stelle wird diese Abgrenzung in Bezug auf das übrige Plättchen infrage gestellt:

„Ich finde das halt irgendwie schwierig, weil das mit einem Extraplättchen ist ja irgendwie ein *Endergebnis* [...]“ (Turn 67, B, Herv. d. Verf.)

Hier wird das übrige Plättchen nun als „ein Endergebnis“ aufgefasst, als ein Ergebnis, das man am Ende erhält, nachdem man die Strukturierung vorgenommen hat. Implizit liegt hier ein eher prozesshaftes Verständnis der Strukturierung zugrunde. Aus dem Prozess ergibt sich das übrige Plättchen als Ergebnis. Dies steht im Widerspruch zu der Abgrenzung der anderen Teilnehmenden und der von B selbst zuvor geäußerten Abgrenzung. Die anderen Teilnehmenden beziehen dazu nicht explizit Stellung. B greift dies in Turn 81 selbst noch einmal auf:

„Ach, ich finde, Struktur und irgendwie das Endergebnis ist *das Gleiche*. [...]“ (Turn 81, B, Herv. d. Verf.)

Hier wird eine klare Trennung zwischen den Beweisschritten Strukturierung und Endergebnis aufgegeben. Auffallend ist, dass hier von „Struktur“ und nicht „Strukturierung“ gesprochen wird und damit der produkthafte, statische Charakter stärker im Vordergrund steht. C führt dies wie folgt weiter aus:

„[...] Weil in der Struktur wird das Endergebnis auch *dargestellt*. Das ist, das kann ich *nicht trennen*.“ (Turn 81, B, Herv. d. Verf.)

Bei einem derart produkthaften Verständnis scheint eine klare Unterscheidung der Beweisschritte schwierig. Es wird an dieser Stelle von B keine Aussage zur Vollständigkeit getroffen. Implizit wird hier jedoch durch das Wort „dargestellt“ Bezug genommen zur internen Kohärenz, indem der enge Zusammenhang der beiden aufeinanderfolgender Beweisschritte benannt wird. Das Endergebnis ist demnach bereits in der Struktur(ierung) enthalten. Konkret bezogen ist diese Auseinandersetzung an dieser Stelle auf den Pfeilbeweis, bei welchem, anders als bei dem Blockbeweis, die Strukturierung dynamisch über das Verschieben von Plättchen dargestellt ist. In diesem Beweisversuch werden die Plättchen zu einer Doppelreihe (mit extra Plättchen) strukturiert, woraus sich direkt erkennen lässt, dass es sich um eine ungerade Zahl handelt. Sprachlich ist in diesem Beweisversuch nur das Strukturierungsprodukt beschrieben und nicht der Prozess, der eigentliche Beweisschritt der Strukturierung (das Verschieben von Plättchen).

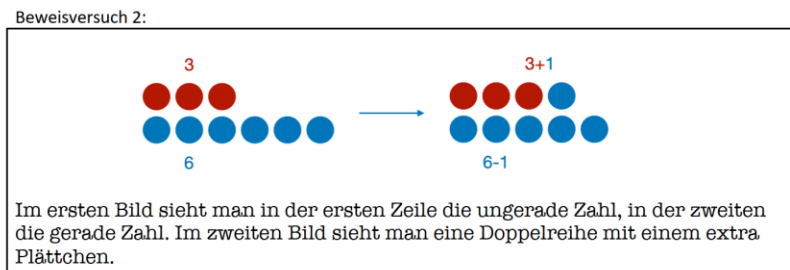


Abbildung 44 Pfeilbeweis (entspricht Abbildung 30)

In Bezug auf die sprachliche Darstellungsebene in diesem Beweisversuch führt B weiter aus:

„[...] Aber es sagt halt nicht aus, ja es wird deswegen ungerade. Also ja, es ist irgendwie alles so halb gesagt. Die haben es angeschnitten, aber nicht wirklich ausformuliert.“ (Turn 67, B)

Anders als im Blockbeweis wird im Pfeilbeweis nicht explizit formuliert, dass es sich um eine ungerade Summe handelt. Dies fällt auch B auf. B bewertet den Beweisversuch an dieser Stelle auf Grundlage der externen Kohärenz. Danach sollte ungerade Summe nicht nur implizit über das übrige Plättchen sprachlich begründet werden, sondern daraus explizit der Bezug zum in der Aussage geforderten Endergebnis formuliert werden. Diese beiden Aspekte – Formulierung dessen, wie das Endergebnis ikonisch dargestellt ist (Doppelreihe mit extra Plättchen) und der Bezug zur Aussage (deshalb ist die Summe ungerade) – werden an dieser Stelle jedoch nicht klar voneinander getrennt. Auf Grundlage dieser unklaren Trennung formuliert C in Reaktion auf die Darlegungen von B:

„Also Endergebnis fehlt, oder?“ (Turn 68, C)

Was als Norm der Beweisbewertung hier zugrunde liegt, ist eigentlich die externe Kohärenz, die fehlende Explikation des Bezugs zur Aussage. C greift hier aber auf die in Turn 29 festgelegte Trennung der Beweisschritte zurück und bewertet den Beweisversuch auf der Grundlage der Vollständigkeit. Die beiden Aspekte sind hier nicht klar voneinander getrennt.

Auch in Bezug auf die Beweisschritte der **Voraussetzung** und der **Strukturierung** möchte B in Bezug auf den Pfeilbeweis eine klare Trennung vermeiden und fasst daher beides zu einem Schritt zusammen:

„Also ich würde sagen, „die erste Zeile ist ungerade und die zweite gerade“ ist Voraussetzung und Strukturierung.“ (Turn 57, B, Herv. d. Verf.)

Hier wird versucht, die Zuordnung zu den Beweisschritten satzweise vorzunehmen. Begründet wird die Zuordnung zu den Beweisschritten an früherer Stelle durch ein vom konkreten Beweisversuch unabhängig formuliertes Kriterium:

„Das ist *sowohl* Strukturierung *als auch* Voraussetzung, weil die sagen dann, wir haben eine gerade, ungerade Zahl und die sagen, wo was ist.“ (Turn 53, B, Herv. d. Verf.)

Es wird einmal, wie schon in Turn 29 von C thematisiert, die Voraussetzung gemäß der Aussage (gerade und ungerade Zahl) formuliert. Weiterhin wird die Anordnung der Zahlen, also wieder das Produkt eines Strukturierungsprozesses, der Strukturierung zugerechnet. Dabei wird nicht explizit formuliert, welcher Teil welchem Beweisschritt zugeordnet wird, sondern beide Teile werden beiden Beweisschritten zugeordnet. Dies wird von C nicht geteilt, sondern die Teile werden klar nach Beweisschritten abgegrenzt:

„Ungerade und gerade wäre die Voraussetzung. Der Rest wäre dann Strukturierung.“ (Turn 58, C)

Die Voraussetzung wird hier von C genauso festgelegt wie in Turn 29 und folgerichtig alles, was darüber hinausgeht dem nächsten Beweisschritt, der Strukturierung. Explizit begründet wird diese Trennung jedoch nicht in dieser Weise.

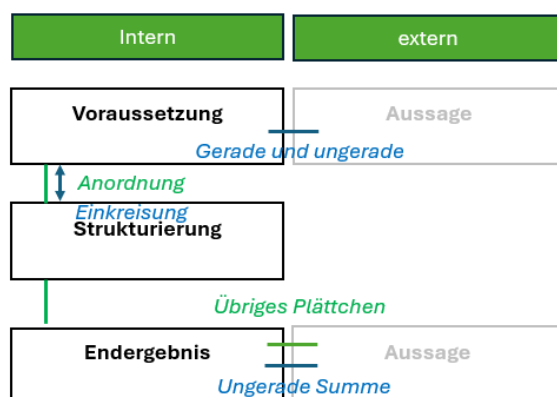


Abbildung 45 Interaktionsgruppe zur Vollständigkeit

Verständnis der Beweisschritte und der Vollständigkeit

Die Beweisschritte werden, entsprechend dem Impuls, auf der sprachlichen Darstellungsebene unterschieden. Auf dieser Grundlage werden Aussagen über die Vollständigkeit der jeweiligen Beweisversuche getroffen: Explizit als feh-

lend benannt werden im Blockbeweis die Voraussetzung, dass es sich um eine ungerade und eine gerade Zahl als Ausgangszahlen handelt und im Pfeilbeweis das Endergebnis, dass man am Ende eine ungerade Zahl erhält. Das Verständnis von Vollständigkeit baut sich also anhand dieser Differenzierung der Beweisschritte auf und wird in dem Sinne verstanden, dass **jeder Beweisschritt sprachlich explizit formuliert** sein muss. Implizit wird hier auch die externe Kohärenz thematisiert. Die Teile, die als fehlend benannt werden, sind genau diejenigen, die durch die zu beweisende Aussage (als wenn- und dann-Teil der Aussage) vorgegeben sind.

Die Beweisschritte **Voraussetzung** und **Endergebnis** werden in der Weise verstanden, dass diese entsprechend der Formulierung in der Aussage sprachlich expliziert werden müssen. Sie werden nicht in dem Sinne verstanden, dass deren ikonische Umsetzung versprachlicht werden muss, also woran im Bild zu erkennen ist, dass es sich um eine ungerade und gerade Ausgangszahl und eine ungerade Summe handelt. Diese Aspekte werden nicht klar voneinander getrennt. Lediglich an einer Stelle verweist B darauf, dass die alleinige Beschreibung dessen, wie eine ungerade Zahl im Bild zu erkennen ist, nämlich durch das übrige Plättchen, noch nicht ausreicht, um den Bezug zur Aussage zu explizieren. Auch hier wird aber nicht auf der Metaebene unterschieden, dass es sich bei Ersterem um eine Frage der sprachlichen Vollständigkeit in Bezug auf das Endergebnis handelt und bei Letzterem um eine Frage der externen Kohärenz zur Aussage.

Weiterhin bestehen Schwierigkeiten im Verständnis des Beweisschrittes der **Strukturierung** und dessen Abgrenzung zu den anderen Beweisschritten. Zunächst ist unklar, ob das „übrige Plättchen“ der Strukturierung oder dem Endergebnis zuzurechnen ist. Je nachdem, ob die Strukturierung eher als Produkt verstanden wird im Sinne einer statischen Art der Einkreisung oder eher prozesshaft im Sinne des Einkreisens, wird die Zuordnung unterschiedlich vorgenommen. Im ersten Fall wird auch das übrige Plättchen als Teil des Produktes verstanden und somit der Strukturierung zugerechnet. Im zweiten Fall wird es eher als das Ergebnis des Prozesses verstanden und somit dem Endergebnis zugerechnet. Weiterhin wird von dem Wunsch nach einer klaren Trennung dieser Beweisschritte abgewichen und die starke Bezogenheit dieser Beweisschritte, also implizit die interne Kohärenz, thematisiert.

Auch die sprachliche Beschreibung der Anordnung der Zahlen in zwei Zeilen wird im Sinne eines Strukturierungsproduktes verstanden und diesem Beweisschritt zugerechnet. Die (geringe) Relevanz dieses Darstellungsaspektes für den weiteren Argumentationsverlauf wird von den Diskussionsteilnehmenden dabei nicht problematisiert.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Die Interaktion findet im Wesentlichen zwischen B und C statt, A hat eine **Nebenrolle**. Insofern zeigt sich eine ähnliche Rollenverteilung, wie schon im ersten Abschnitt.

Das Verständnis der (sprachlichen) Vollständigkeit, dass jeder Beweisschritt explizit sprachlich formuliert sein muss, wird von allen drei Diskussionsteilnehmenden formuliert. Dies ist eine Sichtweise, die sich erst **interaktional** in der Auseinandersetzung mit dem Impuls und dem konkreten Bestimmen der Beweisschritte in den Beweisversuchen ergibt.

Von C wird von Anfang an auf eine klare Trennung der Beweisschritte in den jeweiligen Beweisversuchen hingearbeitet, wobei C zufrieden ist, sobald diese festgehalten ist. In der Bestimmung von Voraussetzung und Endergebnis orientiert sich C dabei stark an der Formulierung entsprechend der Aussage, wie dies auch in der Einführungsvorlesung zum Thema vermittelt wurde. Von daher ist davon auszugehen, dass C hier auf das eigene präinteraktionale Verständnis zurückgreift, welches sich im Diskussionsverlauf wenig ändert.

B setzt sich mit dem Impuls und der Vorgehensweise von C auseinander und stellt diese klare Trennung in Beweisschritte wiederholt in Frage. Dabei entwickelt sich bei B **interaktional** eher ein Verständnis, wonach aufeinanderfolgende Beweisschritte in ihrer Kohärenz betrachtet werden und damit weniger klar voneinander unterschieden werden können. B nimmt in Bezug auf die Entwicklung dieses Verständnisses der Beweisschritte eine **dominante** Rolle ein. A bezieht zu dieser Diskrepanz keine Stellung.

Es kann sich zwar oberflächlich geeinigt werden, was jeweils als welcher Beweisschritt markiert werden soll, die eigentliche **Diskrepanz** zwischen klarer Trennung beziehungsweise Verbundenheit der Beweisschritte wird aber nicht adressiert und damit auch nicht aufgehoben.

Eine weitere Diskrepanz ergibt sich daraus, ob der Beweisschritt der Strukturierung eher im Sinne eines Produktes oder eines Prozesses verstanden wird. Für den oberflächlichen Konflikt, welchem Beweisschritt das übrige Plättchen und die Anordnung in zwei Zeilen zugerechnet werden soll, wird zwar eine Einigung erzielt, aber die tieferliegende Unterscheidung zwischen Produkt- und Prozesscharakter wird nicht explizit thematisiert und somit auch hier keine Einigung erzielt. C (und auch A) sehen die Strukturierung eher im Sinne eines Produktes und rechnen diesem auch die Anordnung der Zahlen in Zeilen und das übrige Plättchen zu. B formuliert implizit ein eher prozesshaftes Verständnis, bei welchem das übrige Plättchen sich als das Ergebnis eines Strukturierungsprozesses darstellt.

6.2.2 Inselgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

Beweisversuch 2:

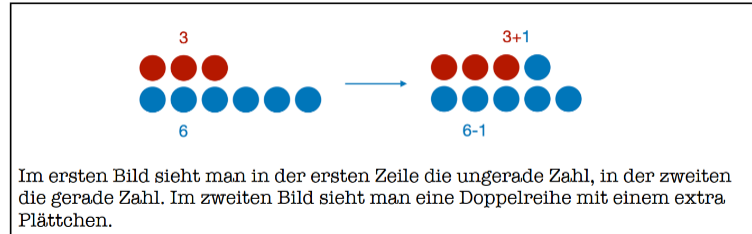


Abbildung 46 Pfeilweis (entspricht Abbildung 30)

In der Inselgruppe werden zunächst für den Pfeilbeweis die Beweisschritte in der sprachlichen Erläuterung bestimmt. Dies passiert in einer gemeinsamen Entwicklung von C und D. Als Erstes wird die **Voraussetzung** bestimmt:

„Ja als Voraussetzung ist ja, eine Zahl ist gerade, die andere ist ungerade.“ (Turn 109, C)

Auch hier wird, wie in der Interaktionsgruppe, nicht auf den expliziten Wortlaut in der sprachlichen Darstellung des Beweisversuchs Bezug genommen. Es kann auch hier daher davon ausgegangen werden, dass diese Zuordnung eher von der zu beweisenden Aussage abgeleitet wurde. Erst bei der **Strukturierung** wird explizit auf den Pfeilbeweis Bezug genommen:

„Strukturierung ist ja die Doppelreihe.“ (Turn 160, D)

Hier wird sich auf eine Begrifflichkeit aus der sprachlichen Darstellung des Beweisversuchs bezogen. Diese beschreibt das Produkt des eigentlichen Strukturierungsprozesses, welcher in diesem Beweisversuch nicht versprochen wurde und der Beweislogik folgend eigentlich dem Endergebnis zugerechnet werden müsste. Das übrige Plättchen wird in diesem produkthaften Verständnis der Strukturierung ebenfalls diesem Beweisschritt zugeordnet:

„Mit einem Extraplättchen, oder?“ (Turn 161, C)

Dies wird zwar hier als Frage aufgeworfen, im weiteren Verlauf aber nicht infrage gestellt und damit implizit legitimiert. In dieser Festlegung der Beweisschritte kommt D zu dem Schluss, dass das Endergebnis fehlt und nicht die Strukturierung, wie eigentlich intendiert:

„[...] Dann haben wir allerdings nur kein Endergebnis.“ (Turn 166, D)

Dies wird von B nochmals bekräftigt. Vollständigkeit wird in dem Sinne verstanden, dass alle Beweisschritte sprachlich expliziert werden müssen. Erst anschließend wird spezifiziert, was genau in diesem Beweisversuch fehlt, was also hier konkret das **Endergebnis** wäre:

„Und das ist das Ergebnis? Die Summe ist immer ungerade.“ (Turn 180, D)

Auch das Endergebnis wird also wieder, wie in der Interaktionsgruppe, unabhängig vom konkreten Beweisversuch, über die zu beweisende Aussage festgelegt.

Erst in der zweiten Arbeitsphase nach der Plenumsdiskussion wird diese Zuordnung zu den Beweisschritten nochmals diskutiert. In der Plenumsphase wurde besprochen, dass die Doppelreihe mit dem übrigen Plättchen dem Endergebnis zuzurechnen ist, woran sich in dieser Gruppe eine kontroverse Diskussion anschließt. D bekräftigt dabei nochmals den eigenen Standpunkt aus Turn 160, dass die Doppelreihe der Strukturierung zuzurechnen ist:

„Nein, ich finde, eine Doppelreihung ist doch *eine Strukturierung*.“ (Turn 390, D, Herv. d. Verf.)

und begründet dies in Turn 392 wie folgt:

„[...] Man hat sich doch was dabei gedacht, dass die Plättchen genauso aufgemalt worden sind.“ (Turn 392, D)

Auch hier wird wieder die **Strukturierung** im Sinne einer Anordnung, eines Produktes eines Strukturierungsprozesses, verstanden. B reagiert darauf, indem B eine Begründung für den in der Plenumsphase diskutierten Standpunkt vorbringt:

„Ja, aber die Strukturierung ist nicht, von der Strukturierung ist jetzt nicht gemeint, ja ich strukturiere es in einer Doppelreihe, sondern wie komme ich von A nach B und wie beweise ich das.“ (Turn 405, B)

Hier wird, unabhängig vom konkreten Beweisversuch, die argumentative Bedeutung des Beweisschrittes im Sinne der internen Gesamtkohärenz im Beweis erläutert. Danach hat der Beweisschritt der Strukturierung die Aufgabe, eine Verbindung zwischen Voraussetzung (1. Bild bzw. „A“) und Endergebnis (2. Bild bzw. „B“) zu schaffen. Dass dem ein eher prozesshaftes Verständnis dieses Beweisschrittes zugrunde liegt, im Gegensatz zum produkthaften Verständnis von D, wird nicht explizit thematisiert.

Durch C wird der Bezug zur Norm der Vollständigkeit hergestellt, indem ein Vorschlag zur Vervollständigung der sprachlichen Darstellung des diskutierten Beweisversuchs gemacht wird:

„Ja, genau. Ja. Ich finde, wir schreiben einfach eine neue Erläuterung, wo wir reinschreiben: Die Plättchen werden *so* angeordnet, *dass* eine Doppelreihe entsteht. Und dann ist es eine Strukturierung.“ (Turn 430, C, Herv. d. Verf.)

Die Strukturierung wird dabei prozesshaft so formuliert, dass der Bezug zum Endergebnis klar wird. Sie wird also implizit aus dem logisch nachgelagerten Beweisschritt des Endergebnisses heraus erklärt und nicht aus dem logisch vorgelagerten Beweisschritt der Voraussetzung. Dieser Vorschlag wird von den anderen nicht in Frage gestellt und damit implizit legitimiert.

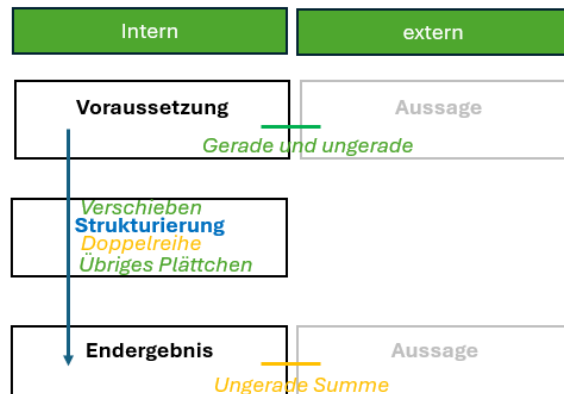


Abbildung 47 Inselgruppe zur Vollständigkeit

Verständnis der Beweisschritte und der Vollständigkeit

Auch in der Inselgruppe wird, entsprechend dem Impuls, auf sprachlicher Ebene nach den Beweisschritten unterschieden. **Voraussetzung** und **Endergebnis** werden entsprechend der Formulierung in der zu beweisenden Aussage bestimmt. Die **Strukturierung** wird als Produkt verstanden und diesem Beweisschritt werden sowohl die Doppelreihe als auch das übrige Plättchen zugerechnet. Diese Trennung wird in der ersten Arbeitsphase nicht in Frage gestellt. Auf dieser Grundlage wird festgestellt, dass das Endergebnis im diskutierten Beweisversuch fehlt. Vollständigkeit wird also in dem Sinne verstanden, dass **jeder Beweisschritt sprachlich expliziert** werden muss.

Erst in der zweiten Arbeitsphase wird diese Trennung in die Beweisschritte und die Rolle des Beweisschrittes der Strukturierung innerhalb des Beweisversuchs neu diskutiert. Danach hat die Strukturierung die Aufgabe, die globale interne Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis herzustellen und wird vor diesem Hintergrund eher prozesshaft verstanden.

Intra- und interpersonelle Prozesse

C und D haben hier eine zentrale **unterstützende** Rolle. Die Trennung in die Beweisschritte für den diskutierten Beweisversuch wird in der ersten Arbeitsphase von C und D gemeinsam entwickelt und von den anderen Teilnehmenden implizit akzeptiert. Geteilt wird in dieser Gruppe, dass Voraussetzung und Endergebnis entsprechend der zu beweisenden Aussage festgelegt werden und die Strukturierung als Produkt verstanden wird. Weiterhin wird dem von D formulierten Verständnis von Vollständigkeit, dass jeder Beweisschritt explizit sprachlich formuliert sein muss, nicht widersprochen, weshalb davon auszugehen ist, dass hier ein impliziter Konsens vorliegt.

Auch in der zweiten Arbeitsphase nach dem Plenum wird an einer klaren Trennung in die Beweisschritte und an der Art der Festlegung von Voraussetzung und Endergebnis festgehalten. Hinsichtlich der Strukturierung kommt es jedoch zu Kontroversen. Während D weiter am produkthaften Verständnis festhält, formuliert B, anknüpfend an das in der Plenumsphase Diskutierte, ein eher prozesshaftes Verständnis der Strukturierung. B formuliert die Rolle dieses Beweisschrittes vor dem Hintergrund der globalen internen Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis, geht aber nicht explizit auf die Diskrepanz zum produkthaften Verständnis von D ein. B hat insofern eine **dominante** Rolle, als dass B das zentrale Verständnis der Rolle der Strukturierung im Beweis formuliert, aber insofern eine Nebenrolle, als dieses ziemlich **isoliert** steht in der gesamten Diskussion. Die Diskrepanz zum Verständnis von D wird nicht aufgelöst und es ist daher davon auszugehen, dass zwischen B und D kein Konsens erreicht wird, sondern beide an ihren jeweiligen Verständnissen festhalten.

C übernimmt das prozesshafte Verständnis von B und macht einen konkreten Vorschlag, wie der fehlende Beweisschritt der Strukturierung ergänzt werden kann, nimmt hier also wieder eine eher **unterstützende** Rolle ein. Das Verständnis der Vollständigkeit im Sinne einer sprachlichen Explikation aller Beweisschritte bleibt, trotz veränderter Trennung in die einzelnen Beweisschritte, als Konsens unter den Teilnehmenden erhalten.

In diesem konkreten Vervollständigungsversuch zeigt sich weiterhin bei C die Schwierigkeit, die Strukturierung so zu formulieren, dass tatsächlich der Zusammenhang von Voraussetzung und Endergebnis klar wird. Dieses Verständnis der Strukturierung scheint von C zwar geteilt zu werden, die konkrete Umsetzung bereitet aber noch Schwierigkeiten. Die Strukturierung wird aus dem gewünschten Endergebnis heraus erklärt, also einem logisch nachgelagerten Beweisschritt. Zum logisch vorangehenden Beweisschritt der Voraussetzung wird kein Zusammenhang expliziert.

6.2.3 Präinteraktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

Beweisversuch 1:

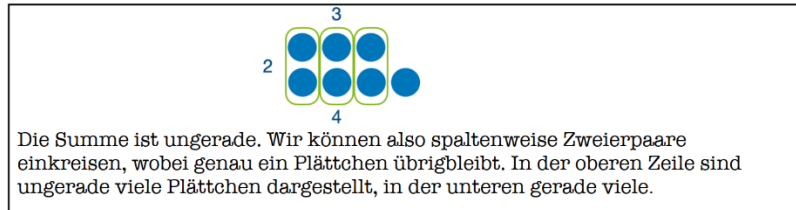


Abbildung 48 Paarbeweis (entspricht Abbildung 29)

In der Präinteraktionsgruppe wird zunächst in Bezug auf den Paarbeweis eine konkrete Trennung der Beweisschritte anhand der Satzstruktur durch A vorgenommen:

„Also ist es jetzt beim ersten, also bei dem hier jetzt, das Endergebnis ist ja quasi „die Summe ist ungerade“, oder? Dann würde ich also als Strukturierung sagen, „wir können also spaltenweise Zweierpaare einkreisen, wobei genau ein Plättchen übrig bleibt“ und dann als Voraussetzung, „in der oberen Zeile sind ungerade viele Plättchen dargestellt und in der unteren gerade viele.““ (Turn 362, A)

Diese Trennung wird ganz konkret an den Formulierungen im Beweisversuch festgemacht und nicht auf eine Metaebene gehoben. Die Trennung selbst wird von den anderen Diskussionsteilnehmenden nicht in Frage gestellt (deren Reihenfolge jedoch schon, siehe dazu den Abschnitt zur logischen Struktur). **Voraussetzung** und **Endergebnis** werden wieder, wie in den anderen Gruppen, implizit an dem in der Aussage Geforderten festgemacht und nicht daran, wie dieses konkret ikonisch in dem Beweisversuch dargestellt ist. Dies wird auch daran deutlich, dass bei der Unterscheidung von Voraussetzung und Endergebnis der logischen Reihenfolge gemäß der Aussage gefolgt wird und nicht der Reihenfolge im Beweisversuch.

Beweisversuch 3:

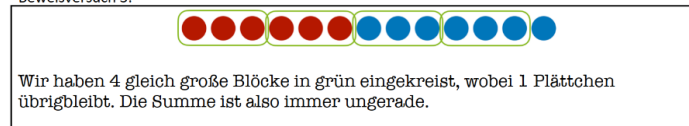


Abbildung 49 Blockbeweis (entspricht Abbildung 31)

In der Auseinandersetzung mit dem Blockbeweis stellt B fest, dass hier die Voraussetzung fehlt:

Und irgendwie finde ich beim dritten fehlt quasi diese Voraussetzung. Oder ist das einfach „Wir haben vier gleich große Blöcke in grün eingekreist“? Weil das ist ja eigentlich schon das, was die gemacht haben. [...] Das wäre ja eher die Strukturierung, oder? (Turn 374, B, Herv. d. Verf.)

Vollständigkeit wird also auch hier in dem Sinne verstanden, dass alle Beweisschritte sprachlich expliziert werden müssen. Weiterhin wird auch hier wieder eine klare Trennung zwischen den Beweisschritten Voraussetzung und Strukturierung angestrebt. Dabei ist die Frage, welchem Beweisschritt das Einkreisen in gleich große Blöcke zuzurechnen ist. B formuliert dies als Prozess, was durch das Verb „gemacht haben“ deutlich wird. Daraus schlussfolgert B, dass das Einkreisen dem Beweisschritt der **Strukturierung** zuzurechnen ist. Dem stimmt D zu:

„Ja, das ist eine Strukturierung.“ (Turn 375, D)

D führt dabei keine eigene Begründung an und geht auch nur auf den Aspekt der Trennung der Beweisschritte und nicht auf die Norm der Vollständigkeit ein.

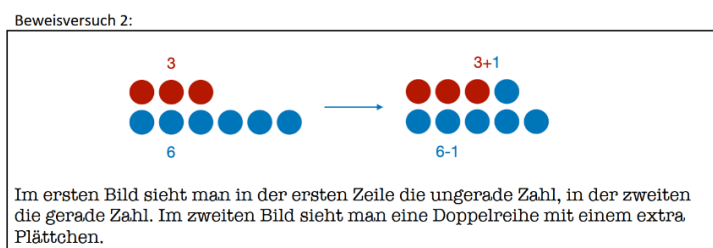


Abbildung 50 Pfeilweis (entspricht Abbildung 30)

In der Diskussion des Pfeilbeweises wird die Doppelreihe jedoch wieder dem Beweisschritt der **Strukturierung** zugeordnet:

„Im zweiten Bild ist eine Doppelreihe“, das ist die Strukturierung.“ (Turn 386, F, Herv. d. Verf.)

Dies entspricht wieder einem eher produkthaften Verständnis der Strukturierung. Daraufhin stellt D fest, dass das Endergebnis fehlt:

„Ja, da fehlt das Endergebnis, das wird nicht gesagt, dass man, dass das ungerade ist.“ (Turn 389, D)

Auch hier wird Vollständigkeit in dem Sinne verstanden, dass jeder Beweisschritt versprochen sein muss. Das Endergebnis wird, wie beim Paarbeweis,

als die sprachliche Explikation der ungeraden Summe verstanden. Die Vollständigkeit wird also wieder mit der externen Kohärenz zur Aussage vermischt.

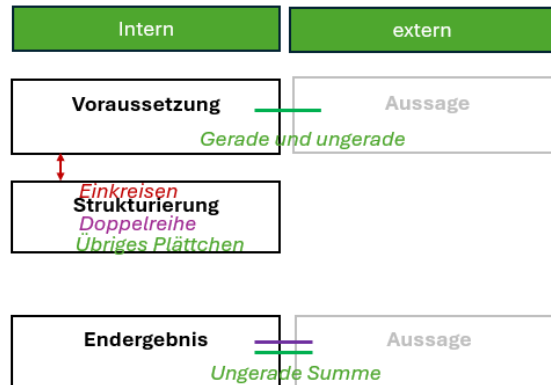


Abbildung 51 Präinteraktionsgruppe zur Vollständigkeit

Verständnis der Beweisschritte und der Vollständigkeit

Auch in der Präinteraktionsgruppe wird von Anfang an, entsprechend dem Impuls, eine klare Trennung der Beweisschritte in der sprachlichen Erläuterung angestrebt. Diese wird in dieser Gruppe konkret am Wortlaut des entsprechenden Beweisversuchs festgemacht. Vor dem Hintergrund, dass trotz umgekehrter Reihenfolge der Beweisschritte im Paarbeweis diese korrekt zugeordnet worden sind, ist aber auch in dieser Gruppe davon auszugehen, dass die Trennung in **Voraussetzung** und **Endergebnis** implizit über den Bezug zur Aussage bestimmt wurde. Bei der **Strukturierung** wird an einer Stelle explizit ein prozesshaftes Verständnis formuliert, für die anderen Beweisversuche verläuft die Trennung aber eher auf der Grundlage eines produkthaften Verständnisses dieses Beweisschrittes. Vollständigkeit wird wieder in dem Sinne verstanden, dass **alle Beweisschritte sprachlich expliziert** werden müssen.

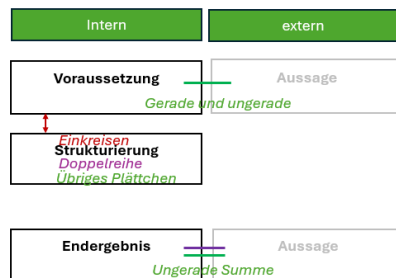
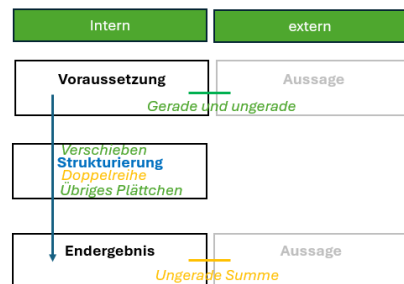
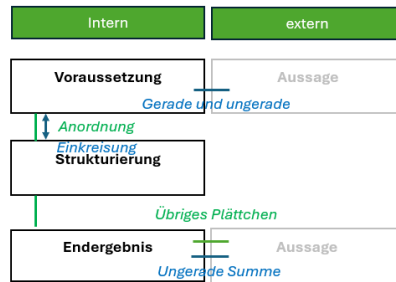
Intra- und interpersonelle Prozesse

Die Trennung in die Beweisschritte, die Festlegung von Voraussetzung und Endergebnis mit Hilfe der zu beweisenden Aussage und das Verständnis der Vollständigkeit, dass alle Beweisschritte sprachlich expliziert werden müssen, scheint von allen Teilnehmenden geteilt zu werden.

A schlägt eingangs eine konkrete Trennung der Beweisschritte entlang der Satzstruktur vor, die sich implizit an der zu beweisenden Aussage orientiert und gibt

damit den Anstoß zur weiteren Diskussion, hat hier also eher eine **unterstützende** Rolle. Bei A kann hierbei von einem **präinteraktionalen** Verständnis ausgegangen werden, das sich an dem in der Vorlesung Vermittelten orientiert. Im weiteren Diskussionsverlauf äußert sich A nicht mehr, weshalb nicht von einer weiteren interaktionalen Entwicklung des Verständnisses auszugehen ist. Unterschiede zeigen sich in der weiteren Diskussion im Verständnis des Beweisschrittes der Strukturierung. B formuliert explizit ein prozesshaftes Verständnis dieses Beweisschrittes, indem B das Einkreisen als Prozess darstellt. B nimmt also insofern eine **dominante** Rolle ein, als B das zentrale Verständnis in Bezug auf die Rolle der Strukturierung explizit formuliert. Allerdings hat B auch insofern eine **Nebenrolle**, als an dieses Verständnis nicht explizit angeknüpft wird und es somit **isoliert** bleibt.

F ordnet ein Produkt, die Doppelreihe, der Strukturierung zu und formuliert dadurch implizit ein anderes Verständnis dieses Beweisschrittes. Die Unterscheidung in Produkt oder Prozess der Strukturierung wird in dieser Gruppe nicht explizit auf der Metaebene thematisiert und die dadurch implizit vorhandenen, unterschiedlichen Verständnisse bleiben bis zum Ende erhalten. D scheint diese Unterscheidung so unbewusst zu sein, dass D diesbezüglich parallel vorliegende Verständnisse zeigt. So stimmt D beiden Zuordnungen zu den Beweisschritten zu, sowohl derjenigen, die auf einem prozesshaften Verständnis beruht, als auch derjenigen, die auf einem produkthaften Verständnis beruht. D und F nehmen hinsichtlich der konkreten Einteilung in die Beweisschritte eine damit unterstützende Rolle ein, hinsichtlich des Aufbaus des Verständnisses der Beweisschritte innerhalb eines Beweis(versuch)es jedoch eher eine **Nebenrolle**.



Verständnis der Beweisschritte und der Vollständigkeit

In allen Gruppen wird, entsprechend dem Impuls, auf eine strikte **Trennung der Beweisschritte** in der sprachlichen Erläuterung hingearbeitet. Das Verständnis von Vollständigkeit baut sich auf der Grundlage dieser Trennung in der Weise auf, dass dies als **sprachliche Explikation aller Beweisschritte**, Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis, verstanden wird.

Lediglich in der Interaktionsgruppe wird diese strikte Trennung von einer Person infrage gestellt, was sich als sehr produktiv hinsichtlich des Verständnisses der internen Kohärenz und dessen Beziehung zur Vollständigkeit herausstellt. Die enge Bezogenheit und das Auseinanderhervorgehen aufeinanderfolgender Beweisschritte werden dadurch herausgearbeitet.

In allen Gruppen werden die Beweisschritte **Voraussetzung** und **Endergebnis** auf gleiche Weise voneinander abgegrenzt: Die Voraussetzung und das Endergebnis werden über die externe Kohärenz zur zu beweisenden Aussage bestimmt. Eine Differenzierung zwischen dem Wortlaut aus der zu beweisenden Aussage und dem, wie dies entsprechend in der ikonischen Darstellung zu erkennen ist, wird für die Voraussetzung gar nicht vorgenommen und für das Endergebnis nur durch eine Person in einer Gruppe implizit formuliert.

In allen Gruppen tritt bei unterschiedlichen Personen und an unterschiedlichen Stellen im Diskussionsverlauf ein eher produkthaftes oder ein eher prozesshaftes Verständnis des Beweisschrittes der **Strukturierung** auf. Dabei führt nur das prozesshafte Verständnis auch zu einer Trennung der Beweisschritte, wie diese entsprechend der Konzeption der Intervention intendiert war. Im Allgemeinen scheint der Begriff der Strukturierung missverständlich und in beiderlei Hinsicht interpretierbar zu sein. Einmal im produkthaften Sinne eines Strukturiertseins. Und einmal im prozesshaften Sinne eines Strukturierens.

Die Bedeutung der Strukturierung als Beweisschritt innerhalb eines Beweises wird nur in der Inselgruppe explizit auf der Metaebene diskutiert und dies erst nach einem entsprechenden Input in der Plenumsphase. Dieser Beweisschritt hat demnach die Aufgabe, die globale interne Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis herzustellen. Auch dieser Sichtweise liegt somit ein prozesshaftes Verständnis der Strukturierung zugrunde.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Das Verständnis der Vollständigkeit in dem Sinne, dass **alle Beweisschritte sprachlich expliziert** sein müssen, entwickelt sich in allen Gruppen interaktional als Konsens in der Auseinandersetzung mit dem entsprechenden Impuls. Bis auf eine Person in der Interaktionsgruppe, arbeiten alle Teilnehmenden gemeinsam, entsprechend dem Impuls, auf eine klare **Trennung der Beweisschritte** in der sprachlichen Erläuterung des jeweiligen Beweisversuchs hin. Auch die Fest-

legung von **Voraussetzung** und **Endergebnis** entsprechend dem Wortlaut der zu beweisenden Aussage führt in keiner Gruppe zu Kontroversen.

Vordergründig wird sich in jeder Gruppe auf eine Einteilung der Erläuterung entlang der Beweisschritte geeinigt. Es zeigen sich dabei jedoch in allen Gruppen Unterschiede, ob die **Strukturierung** als eher prozess- oder eher produkthaft verstanden wird. Diese Unterschiede werden in allen Gruppen nicht explizit thematisiert, weshalb diese unterschiedlichen Verständnisse bis zum Ende bestehen bleiben und zu keinem Konsens gebracht werden. Teilweise scheinen beide Verständnisse bei einzelnen Personen auch parallel nebeneinander vorzuliegen.

6.2.5 Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung

In allen Gruppen basierte die Entscheidung über die Vollständigkeit der diskutierten Beweisversuche auf der expliziten Unterscheidung der **Beweisschritte** Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis in der sprachlichen Darstellungsebene. Dies entwickelte sich interaktional in der Auseinandersetzung mit dem entsprechenden Impuls, der auf eben diese Unterscheidung hin ausgelegt war. Dies legt die folgende Hypothese nahe, die in der quantitativen Analyse untersucht werden soll:

2.1 Die Betrachtung der Beweisschritte fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit.

Außerdem wurde in der vergleichenden qualitativen Analyse festgestellt, dass insbesondere der Beweisschritt der Strukturierung unterschiedlich verstanden wurde und, je nach Verständnis, die Einteilung in die Beweisschritte unterschiedlich vorgenommen wurde. Die Vollständigkeit hinsichtlich der Beweisschritte der Voraussetzung und des Endergebnisses wurde stark vermischt mit der Formulierung der externen Kohärenz. Um dies auch quantitativ untersuchbar zu machen, wird in der quantitativen Analyse nach den Beweisschritten differenziert. Im Vergleich der einzelnen Beweisversuche lässt sich so differenzierter untersuchen, wie die entsprechenden Beweisschritte zugeordnet und verstanden wurden.

6.3 Logische Struktur

In diesem Kapitel soll nun das zweite Zentralthema analysiert werden aus dem Diskussionsabschnitt, in welchem der folgende Impuls zum Markieren der **Beweisschritte** diskutiert wurde:

- c) Markieren Sie in jedem Beweisversuch, an welchen Stellen es in der Erläuterung um Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis geht. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Erläuterungen vergleichen?

Abbildung 55 Impuls c) entsprechend der Aufgabenstellung in der Übung (entspricht **Abbildung 42**)

Als zweites Zentralthema ergab sich hier, wie intendiert (vgl. Abschnitt 5.3.3), die **logische Struktur**. Auch hier interessierten in der qualitativen Analyse, ausgehend von dem oben genannten Impuls, insbesondere die sich in den Diskussionen entwickelnden Verständnisse der Beweisschritte und der Zusammenhang zur Entwicklung der Verständnisse der logischen Struktur. Forschungsfrage 1.1: „Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernenden-seite in den Diskussionen in den Kleingruppen?“ wurde daher spezifiziert zu:

Forschungsfrage 1.1 d): Welche situierten Verständnisse der Beweisschritte entwickeln sich und welchen Einfluss haben diese auf die Entwicklung der situierten Verständnisse der logischen Struktur?

Die Zuordnung der Spezifitäten zu den Beweisschritten fand dabei bereits bei der Diskussion Vollständigkeit statt. Bei der Diskussion der logischen Struktur konnte auf diese Zuordnung dann zurückgegriffen werden. Die entsprechenden Analyseraster wurden daher nur in der Analyse der Verständnisse der Vollständigkeit genutzt und bei der logischen Struktur weggelassen.

6.3.1 Interaktionsgruppe

Beweisversuch 1:

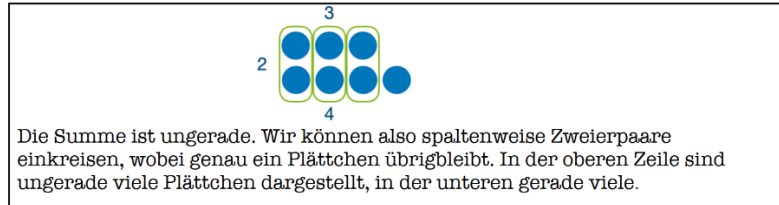


Abbildung 56 Paarbeweis (entspricht Abbildung 29)

Turn-by-Turn-Analyse

In der Interaktionsgruppe wird bei der Diskussion des Paarbeweises festgelegt, was in der Erläuterung zur Voraussetzung (gerade und ungerade Ausgangszahlen) und was zum Endergebnis (ungerade Summe) zählt. Es wird dann von B explizit betont, an welcher Stelle in der Erläuterung die Voraussetzung genannt wird:

„Der *letzte Satz* ist die Voraussetzung, meiner Meinung nach.“ (Turn 83, B, Herv. d. Verf.)

Durch diese explizite Benennung der Stelle, welche sonst bei keinem der anderen Beweisversuche auftritt, wird deutlich, dass dies als Besonderheit erachtet wird. Bekräftigt wird dies nochmals durch die Reaktion von C, in welcher der Fokus auf die **Reihenfolge der Beweisschritte** noch direkter gelegt wird:

„Wir *fangen* mal nicht bei der Voraussetzung an, ...“ (Turn 84, C, Herv. d. Verf.)

Davon ausgehend entspinnt sich eine Diskussion um die Zulässigkeit dieser Besonderheit. Zunächst liefert C eine mögliche Begründung für die Zulässigkeit der vertauschten Reihenfolge von Voraussetzung und Endergebnis:

„... sondern bei dem Endergebnis, weil wir sind uns ja alle sicher, dass die Summe ungerade ist, ja?“ (Turn 86, C, Herv. d. Verf.)

Hier schlägt C vor, dass sich die Reihenfolge nach dem Grad an Gesicherheit des Wissens richtet. Dass am Ende eine ungerade Summe herauskommt, wird als gesichertes Wissen angesehen. Dem liegt ein eher autoritäres Beweisverständnis zugrunde, wonach ein Satz gilt, weil er von Autoritäten (den Lehrpersonen beziehungsweise dem Lehrbuch) als gültiger Satz formuliert wurde. Es handelt sich damit um ein extrapersonell gegebenes Wissen, welches sich somit auf der **externen Kohärenzebene** des Beweisversuchs befindet. Ein Bezug zu internen Zusammenhängen zu anderen Beweisschritten wird hier nicht hergestellt. Die Tatsache, dass C dies als Frage aufwirft, zeigt zugleich, dass diese

Sichtweise von C selbst nicht vollumfänglich vertreten wird, sondern lediglich als eine mögliche, diskutierbare Position aufgeworfen wird.

Die vertauschte Reihenfolge wird auch im weiteren Diskussionsverlauf als Problem angesehen. Als weiterer Lösungsversuch wird von D vorgeschlagen, die vorherige Einteilung in die Beweisschritte zu überdenken, um dadurch zu gewährleisten, dass das Endergebnis am Ende steht:

„Ist nicht irgendwie der *letzte Satz* auch das Ergebnis?“ (Turn 87, A, Herv. d. Verf.)

Dies wird von C im folgenden Turn weiter aufgegriffen:

„Das ist halt die Frage, ob die das *vertauscht* haben und die Voraussetzung „die Summe ist ungerade“ ist.“ (Turn 88, C, Herv. d. Verf.)

Die Trennung von Voraussetzung und Endergebnis wird hier nicht mehr entsprechend der Organisation der zu beweisenden Aussage in wenn- und dann-Teil vorgenommen, sondern entsprechend der Reihenfolge in der sprachlichen Erläuterung. Hier liegt der Fokus also eher auf der internen Stimmigkeit, die externe Kohärenz wird in dieser Betrachtung außen vor gelassen. Auch dies wird aber lediglich als Frage aufgeworfen und stellt keine feste Position von C dar. B bringt nun die zuvor geäußerten Aspekte der internen und externen Kohärenz zusammen und entwickelt auf dieser Grundlage ein vertiefteres Verständnis der **Bedeutung der Beweisschritte** der Voraussetzung und des Endergebnisses innerhalb eines Beweises. Zunächst wird von B auf die Bedeutung des Endergebnisses im Gesamtzusammenhang des Beweises verwiesen:

„Ich würde sagen, dass das das Endergebnis ist, weil daran *erkennst* du ja noch nichts. [...]“ (Turn 89, B, Herv. d. Verf.)

Hier wird implizit die externe Kohärenz zu der zu beweisenden Aussage angesprochen, die an dem Endergebnis erkennbar sein muss. „Erkenn[barkeit]“ wird aber auch im Sinne der Folgerichtigkeit, die sich aus der Voraussetzung ergibt, verstanden, also der globalen **internen Kohärenz** zugerechnet:

„[...] Weil du erkennst ja nichts daran, dass oben gerade, äh ungerade viele, und unten gerade viele, daran *erkennst* du ja nichts, das ist ja nur eine Voraussetzung, dass es überhaupt so ist.“ (Turn 89, B, Herv. d. Verf.)

B unterscheidet zwischen einer Voraussetzung, die die Rahmenbedingungen liefert, und dem Endergebnis, das sich daraus ergibt. Die Voraussetzung ist demnach dafür da, das Endergebnis erhalten („erkenn[en]“) zu können. Weiterhin wird laut B auch die Voraussetzung über die **externe Kohärenz** zur Aussage festgelegt:

„Weil die *Behauptung* ist ja, dass man eine gerade und ungerade Zahl addiert. [...]“ (Turn 99, B, Herv. d. Verf.)

Die „Behauptung“ kann hier verstanden werden als das im wenn-Teil der zu beweisenden Aussage Gegebene. Abschließend betont B nochmals die direktionale Beziehung von Voraussetzung und Endergebnis und präzisiert diese dazu, dass die Voraussetzung eine notwendige Bedingung für das Endergebnis darstellt:

„[...] Es geht ja auch *nur, wenn* es so dargestellt ist.“ (Turn 99, B, Herv. d. Verf.)

Verständnis der Beweisschritte und der logischen Struktur

Der Diskussion liegt das Verständnis zugrunde, dass die Voraussetzung als Erstes in der sprachlichen Erläuterung genannt werden sollte und das Endergebnis als Letztes, dass es also eine feste **Reihenfolge der Beweisschritte** gibt. Die Voraussetzung sollte den Rahmen liefern und das Endergebnis sich daraus folgerichtig ergeben. Die **interne Kohärenz** von Voraussetzung und Endergebnis wird hier somit direktional organisiert und den Beweisschritten in diesem Zusammenhang eine klare **Rolle** innerhalb des Beweis(versuch)es zugeschrieben. Weiterhin orientiert sich diese Organisation der internen Kohärenz an der Organisation externer Gegebenheiten, also an der **externen Kohärenz**. Extern gegebenes, gesichertes Wissen als eine solche Gegebenheiten anzusehen, wird nicht weiterverfolgt. Hier würde implizit auch eine kreisförmige Organisation zwischen interner und externer Ebene vorliegen: Die internen Zusammenhänge (gemäß des in der noch zu beweisenden Aussage formulierten Endergebnisses) werden zu extern gesichertem Wissen erhoben, welches wiederum die interne Organisation festlegt. Vielmehr wird über die Organisation der zu beweisenden Aussage in wenn-Teil und dann-Teil festgelegt, was gegeben ist und was daraus hergeleitet werden soll.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Konsens scheint in der Hinsicht zu herrschen, dass ein Beweis so organisiert sein sollte, dass die Voraussetzung am Anfang und das Endergebnis am Ende steht. Dies liegt allen Lösungsvorschlägen zum Umgang mit der vertauschten Reihenfolge im Paarbeweis implizit zugrunde, weshalb hier von einem bereits **präinteraktional** geteilten Verständnis ausgegangen werden kann. Es handelt sich um eine gemeinsame Suchbewegung der Beteiligten, wie mit dieser vertauschten Reihenfolge der Beweisschritte umgegangen werden kann, die stark von B und C geleitet wird.

A wirft eine Frage ein, die zu einem alternativen Lösungsvorschlag führt, welcher stärker auf die interne Kohärenz fokussiert, beteiligt sich aber nicht an der Diskussion der weiteren Lösungsvorschläge. Insofern nimmt A hier eine **Nebenrolle** ein. Über das Verständnis von A lässt sich damit wenig aussagen.

C gibt verschiedene Anstöße, die sich sowohl auf Grundlage der internen als auch der externen Kohärenz ergeben, formuliert diese jedoch in Frageform als

Denkanstöße, nicht als festgelegte eigene Positionen. C nimmt in diesem Abschnitt eine **unterstützende** Rolle ein, indem C den Aspekt der vertauschten Reihenfolge und dessen Zulässigkeit explizit in die Diskussion einbringt.

B entwickelt durch das Zusammenbringen der Positionen der anderen Diskussteilnehmenden **interaktional** ein sehr ausdifferenziertes Verständnis der Rolle der Voraussetzung und des Endergebnisses in einem Beweis(versuch). Aus diesem Verständnis leitet B die Organisationsstruktur eines Beweises ab, wonach die Voraussetzung am Anfang steht und direktional auf das Endergebnis bezogen ist, welches am Ende steht. B nimmt in der Entwicklung des Verständnisses der logischen Struktur damit eine **dominante** Rolle ein. Inwieweit die anderen Teilnehmenden dieses Verständnis übernehmen, bleibt unklar, widersprochen wird diesem nicht explizit.

6.3.2 Inselgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

Auch in der Inselgruppe wird erkannt, dass im Paarbeweis die Reihenfolge der Beweisschritte vertauscht ist:

„Ich finde, ich muss sagen, es ist super *unlogisch*, eigentlich, weil, wenn man jetzt mal sieht, da ist ja sogar das umgedreht. Du hast ja *als Letztes* die Voraussetzung, in der *Mitte* die Strukturierung und *als Erstes* das Endergebnis. Man hätte halt die Sätze auch mal *umdrehen* sollen. Und zuerst anfangen sollen.“ (Turn 137, B, Herv. d. Verf.)

Anders als in der Interaktionsgruppe, wird hier auch die Strukturierung mit benannt und die gesamte Organisation aller drei Beweisschritte festgelegt. Eine Begründung, warum dies die richtige Organisation ist, wird jedoch nicht geliefert. Lediglich das Wort „unlogisch“ weist darauf hin, dass eine gewisse Folgerichtigkeit erwartet wird, mit welcher sich ein Beweisschritt aus dem jeweils vorherigen ergeben müsste, also eine direktionale Beziehung eines Beweisschrittes zum darauffolgenden.

Verständnis der Beweisschritte und der logischen Struktur

Über das Verständnis der Beweisschritte wird hier nichts ausgesagt. Die logische Struktur wird verstanden im Sinne einer festen **Reihenfolge der Beweisschritte**: Erst die Voraussetzung, dann die Strukturierung, als Letztes das Endergebnis. Eine explizite Begründung dafür wird nicht geliefert.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Nur B äußert sich an einer Stelle zur Organisation des Paarbeweises und hat somit eine **dominante** Rolle. Das oben beschriebene Verständnis der logischen

Struktur entwickelt sich hier in der Auseinandersetzung mit dem Impuls zur Markierung der Beweisschritte jedoch nicht in Interaktion mit den anderen Diskussionsteilnehmenden. Damit steht B an dieser Stelle **isoliert** mit dem eigenen Verständnis, über das Verständnis der anderen Diskussionsteilnehmenden lässt sich nichts aussagen.

6.3.3 Präinteraktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

Auch in der Präinteraktionsgruppe wird die vertauschte Reihenfolge der Beweisschritte im Paarbeweis diskutiert:

„Ich finde irgendwie dieser Aufbau von dieser Erläuterung ist voll *falsch*. Also so die *Reihenfolge* ist voll durcheinandergeworfen.“ (Turn 363, A, Herv. d. Verf.)

Dies bezieht sich auf die im vorherigen Turn von A explizierte Differenzierung der Beweisschritte. Auch hier wird also gefordert, dass die Beweisschritte in einer bestimmten Reihenfolge aufeinanderfolgen, ohne eine Begründung dafür zu liefern. Hier wird, anders als in der Inselgruppe, von einer falschen und nicht von einer unlogischen **Reihenfolge** gesprochen, also auch keine Folgerichtigkeit oder damit einhergehende directionale Beziehung der Beweisschritte impliziert.

Erst im Folgenden liefert D implizit eine Begründung dafür, warum das Endergebnis am Ende stehen muss:

„Deswegen habe ich ja auch gesagt, „die Summe ist ungerade“ ist das, *was am Ende raus-* was am Ende stehen müsste, ne?“ (Turn 367, D, Herv. d. Verf.)

Dies wird implizit durch den durch die Aussage festgelegten Zusammenhang der Beweisschritte begründet, wonach das Endergebnis das ist, was am Ende herauskommen sollte und daher auch am Ende stehen müsste. Es wird hier also über die **externe Kohärenz** zur Aussage argumentiert. Außerdem erkennt D die **Zirkularität** in diesem Beweisversuch:

„Das Endergebnis wird schon *vorweggenommen*.[...]“ (Turn 424, D, Herv. d. Verf.)

Laut D darf das, was gezeigt werden soll, nicht schon vorweggenommen werden.

Verständnis der Beweisschritte und der logischen Struktur

Auch in dieser Gruppe wird schließlich die **Reihenfolge** über die Richtung der internen Kohärenz begründet, welche sich aus der **externen Kohärenz** zur Aussage ergibt. Danach ist klar vorgegeben, dass das Endergebnis das ist, was am Ende herauskommen muss. Nur in dieser Gruppe wird das Problem der **Zirku-**

larität erkannt: Was am Ende herauskommen soll, darf nicht schon „vorweggenommen“ werden.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Nur D formuliert in diesem Abschnitt ein vertieftes Verständnis der logischen Struktur, indem D die Reihenfolge der Beweisschritte implizit über die externe Kohärenz begründet. D spielt für den Aufbau dieses Verständnisses somit eine **dominante** Rolle. Dagegen stellt A lediglich eine falsche Reihenfolge der Beweisschritte fest, begründet dies jedoch nicht näher und geht auch auf die Ausführungen von D nicht weiter ein. Die anderen Diskussionsteilnehmenden äußern sich an dieser Stelle ebenfalls nicht. Das Verständnis von D, was ein Endergebnis in einem Beweis(versuch) ausmacht, entwickelt sich somit interaktional nicht weiter.

6.3.4 Vergleich der Gruppen

Verständnis der Beweisschritte und der logischen Struktur im Beweisversuch

Basierend auf einer Differenzierung der Beweisschritte in der sprachlichen Erläuterung des Paarbeweises, wird in allen Gruppen festgestellt, dass bei diesem Beweisversuch die **Reihenfolge der Beweisschritte** vertauscht ist. In der Interaktionsgruppe und der Präinteraktionsgruppe wird die falsche Reihenfolge auf der Grundlage der Betrachtung **externer (und interner) Kohärenzen** begründet. Nur in der Präinteraktionsgruppe wird darauf aufbauend das Problem der Zirkularität erkannt.

Intra- und interpersonelle Prozesse

In allen Gruppen entsteht das Verständnis der logischen Struktur in der Auseinandersetzung mit dem entsprechenden Impuls zur Abgrenzung der Beweisschritte. Dabei besteht Konsens dahingehend, dass die **Beweisschritte** in einer fest vorgegebenen **Reihenfolge** sprachlich dargestellt sein sollen.

Nur in zwei der drei Gruppen wird dabei ein vertieftes, auf der **Kohärenz** des Beweis(versuch)es beruhendes, Verständnis der logischen Struktur entwickelt. Dieses vertiefte Verständnis wird dabei stets maßgeblich von einer Person formuliert. Es bleibt unklar, inwieweit die anderen Diskussionsteilnehmenden in der jeweiligen Gruppe dieses Verständnis teilen.

6.3.5 Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung

Aus der vergleichenden qualitativen Analyse der Gruppen haben sich die Betrachtung der **Beweisschritte** und die Betrachtung der **Kohärenz** als potenzielle Einflussfaktoren auf das Verständnis der logischen Struktur ergeben. In der quantitativen Analyse sollen daher die folgenden beiden Hypothesen untersucht werden:

3.1 Die Betrachtung der Beweisschritte fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur.

3.2 Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur.

6.4 Allgemeingültigkeit

In dem hier analysierten Abschnitt diskutierten die Gruppen die Beweisversuche zur Aussage

„Wenn man eine ungerade und eine gerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“

auf Grundlage des vierten Impulses:

- d) Stellen Sie jeden Beweisversuch für die Zahlen 2 und 7 dar. Versuchen Sie dabei, die Strukturierungsweise des Beweisversuches unverändert zu lassen. Bei welchen Beweisversuchen ist das gut möglich? Wo treten Schwierigkeiten auf? Was bedeutet das für die Qualität der Beweisversuche?

Abbildung 57 Impuls d) entsprechend der Aufgabenstellung in der Übung

Dieser Impuls zielt auf eine Auseinandersetzung mit der Norm der **Allgemeingültigkeit** ab, welche sich auch in der qualitativen Analyse als Zentralthema zeigte. Dafür sollte explizit die Übertragbarkeit, also die Kohärenz zu (mindestens) einem weiteren Beispiel, untersucht werden. Neben der Kohärenz der Beispiele sind für die Untersuchung von Verständnissen der Allgemeingültigkeit die Kohärenzebenen der internen Kohärenz, der externen Kohärenz und der Kohärenz der Darstellungsebenen zentral (vgl. dazu Abschnitt 2.4.4). Weiterhin interessierte, wie die Entitäten der einzelnen Kohärenzebenen innerhalb und zwischen den Ebenen organisiert wurden. Dadurch wird es darüber hinaus möglich, das Verständnis der logischen Struktur weiter auszudifferenzieren (vgl. Abschnitt 2.4.4). Forschungsfrage 1.1: „Welche situierten Normenverständnisse entwickeln sich auf Lernendenseite in den Diskussionen in den Kleingruppen?“ wurde daher für diesen Abschnitt modifiziert zu

Forschungsfrage 1.1. e): Welche situierten Verständnisse der Allgemeingültigkeit entwickeln sich entlang der Kohärenzebenen? Welche Organisationsformen liegen dabei innerhalb und zwischen den Kohärenzebenen vor?

Zur Untersuchung dieser Forschungsfrage wurde die Analyse der Verständnisse der Allgemeingültigkeit gegliedert nach den oben benannten **Kohärenzebenen**. Für jede Kohärenzebene wurden daher in jeder Gruppe zunächst die Transkriptausschnitte ausgewählt, die die entsprechende Kohärenzebene im Fokus haben und in denen diese in Bezug auf die Allgemeingültigkeit diskutiert wurde⁶². Für jede Gruppe wurden diese zunächst turn by turn analysiert. Einzelne Turns wurden dabei teilweise mehrfach kodiert und wurden daher unter der jeweiligen Fokussierung auf die entsprechende Kohärenzebene erneut betrachtet. Anschließend wurden die Entitäten in der jeweiligen Kohärenzebene sowie deren Beziehung und Organisation, im Sinne der obigen Forschungsfrage, analysiert. Für jede Kohärenzebene wurde zudem die folgende, unverändert gebliebene

Forschungsfrage 2.1: Welche intra- und interpersonellen Entwicklungen zeigen sich hinsichtlich der situierten Normenverständnisse in den Diskussionen in den Kleingruppen?

beantwortet. Abschließend wurden die Gruppen für jede Kohärenzebene hinsichtlich der obigen Forschungsfragen verglichen. Am Ende dieser Analysen wurden daraus Hypothesen für die quantitative Untersuchung abgeleitet auf Grundlage von

Forschungsfrage 3.1: Welche potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen der intendierten Normbrüche hinsichtlich der Allgemeingültigkeit zeigen sich in den Diskussionen in den Kleingruppen?

Um die Kohärenzebenen und deren Organisationsformen im Hinblick auf das Verständnis der Allgemeingültigkeit zu untersuchen, wurde ein Analyseraster entwickelt, in welchem alle oben genannten Kohärenzebenen aufgeführt sind. Als Entitäten auf der **internen Ebene** wurden die Beweisschritte gewählt. Die entsprechend benannten Spezifitäten wurden in diesem Raster angeordnet entsprechend der auf Studierendenseite vorgenommenen Zuordnung zu den Beweisschritten. Auf der **externen Ebene** wurden, neben der Aussage, auch die

⁶² Da die einzelnen Kohärenzebenen sehr stark zusammenhängen, werden in jedem Abschnitt mehrere Kohärenzebenen betrachtet. Es steht jedoch stets eine Kohärenzebene in Fokus.

Definition und das Lemma als Entitäten aufgenommen, auf der Ebene der **Darstellung** die Darstellungsebenen ikonisch und sprachlich (vgl. dazu das auf Lehrendenseite induktiv ausdifferenzierte Kategoriensystem in Abschnitt 5.1.2). Im Rahmen der qualitativen Analyse auf Lernendenseite wurde hier die Darstellungsebene *symbolisch* hinzugefügt. Auf der Ebene der **Beispielnutzung**, wo das Vergleichen der Beispiele stattfindet, ergaben sich aus der Analyse als Entitäten das Feststellen eines *Unterschieds* und das einer *Gemeinsamkeit*. Weiterhin wurde unterschieden, ob die jeweilige Feststellung aus einer singulären oder klassifikatorischen Betrachtung der Beispiele heraus entstanden ist (vgl. dazu ebenfalls Abschnitt 5.1.2).

Um die Organisationsformen innerhalb und zwischen den Kohärenzebenen untersuchen zu können, wurden **Pfeile** hinzugefügt, die die **logische Beziehung** der Entitäten zueinander verdeutlichen, das heißt, welche Entität aus welcher Entität begründet wurde. Ein Doppelpfeil verdeutlicht, dass ein Widerspruch zwischen den Entitäten festgestellt wurde. Kreise oder kreisförmige Pfeile deuten auf eine entsprechend kreisförmige Organisation hin. Die Farbgebung entspricht der Farbgebung aus dem ersten Abschnitt und den dort analysierten Rollen.

6.4.1 Interne Kohärenzebene

Bei der internen Kohärenzebene in Bezug auf das Verständnis der Allgemeingültigkeit standen die **Beweisschritte** und deren Kohärenzen im Fokus. Dabei ging es zudem um die Frage, welche dieser Entitäten singulär, welche klassifikatorisch verstanden wurden und in Bezug auf welche Darstellungsebene diese diskutiert wurden. Daher wurden in die Analyse auch die Kohärenzebenen der Beispielnutzung und der Darstellung einbezogen.

Interaktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

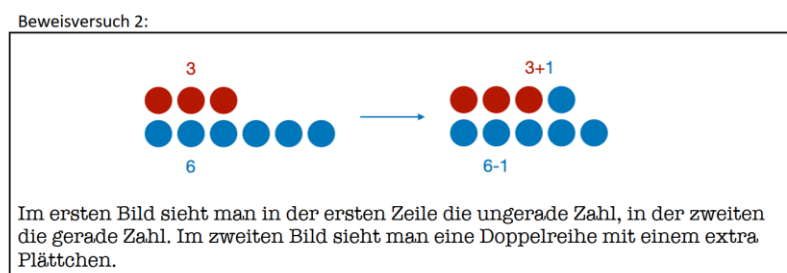


Abbildung 58 Pfeilbeweis (entspricht Abbildung 30)

Bei der Diskussion des Pfeilbeweises zeigt sich in der Interaktionsgruppe zunächst eine kreisförmige Organisation in der internen Kohärenzebene:

„Vielleicht können wir schreiben, *um* eine Doppelreihe zu bilden, schieben wir zwei Plättchen der unteren Reihe nach oben, *sodass* eine Doppelreihe entsteht, bei der genau ein Plättchen übrig bleibt.“ (Turn 391, A, Herv. d. Verf.)

Hier wird von A die Art der Strukturierung, also wie viele Plättchen verschoben werden, aus dem Endergebnis heraus begründet, dass am Ende eine Doppelreihe mit einem zusätzlichen Plättchen entstehen soll. Diese der Beweislogik *umgekehrte* Richtung wird durch die Verknüpfung der Teile durch „um ... zu“ deutlich. Daraus wird dann über das Wort „sodass“ wiederum das Endergebnis begründet. Es liegt hier also auf interner Ebene eine *kreisförmige* Organisation vor. Das **Endergebnis** selbst wird dabei *klassifikatorisch* verstanden: Es soll am Ende immer eine Doppelreihe mit einem übrigen Plättchen herauskommen. Der Zusammenhang zur **Strukturierung** wird jedoch rein *singulär* nur in dem neuen Beispiel betrachtet und keine Gemeinsamkeit in der Strukturierung gesucht zum ursprünglichen Beispiel oder anderen Beispielen.

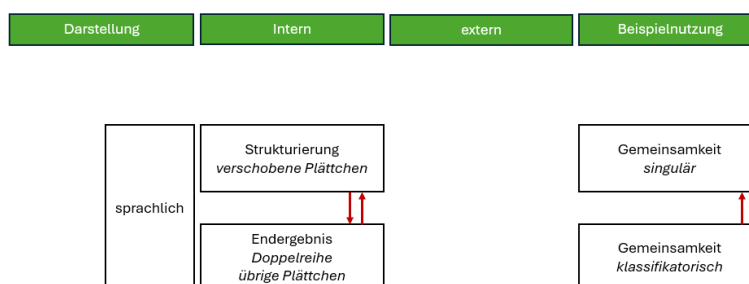


Abbildung 59 Interaktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 391, Kreisförmige Organisation der internen Kohärenzebene

Dies führt zu Verwirrung bei B und B schlägt daraufhin eine Formulierung vor, die auch die *klassifikatorisch* verstandene Gemeinsamkeit in der **Strukturierung** formuliert:

„Genau. Müssen die *Erklärungen* dazu auch *allgemeingültig* formuliert sein. Weil dann müsste man ja schreiben von wegen, man zieht so viele Plättchen nach oben, bis eine Doppelreihe mit einem Extraplättchen entsteht. Das verstehe ich jetzt nicht, ob man das *allgemeingültig* oder *auf die Zahlen beziehen* soll. Das ergibt irgendwie beides keinen Sinn.“ (Turn 392, B, Herv. d. Verf.)

Im Versuch, die Zusammenhänge in klassifikatorischer Weise zu formulieren, übernimmt B dabei die von A eingebrachte *umgekehrte* Organisation, die aus

dem Endergebnis die Strukturierung begründet. Dadurch sind die Zusammenhänge zwar allgemeingültig aber in logisch umgekehrter Reihenfolge: Die Strukturierung müsste aus der Voraussetzung heraus erklärt werden und daraus dann das Endergebnis. B stellt am Ende selbst fest, dass auch die eigene Formulierung „keinen Sinn“ ergibt, was einen Hinweis darauf liefert, dass diese Organisation als unstimmig empfunden wird, der Grund dafür auf der Metaebene aber noch nicht benannt werden kann. A und C stimmen dem Formulierungsvorschlag von B schließlich ohne weitere Begründung zu.

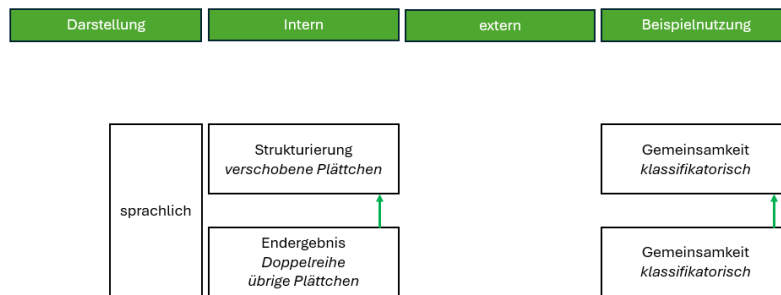


Abbildung 60 Interaktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 392, Umgekehrte Organisation von Endergebnis und Strukturierung, klassifikatorische Betrachtung

Beweisversuch 1:

Die Summe ist ungerade. Wir können also spaltenweise Zweierpaare einkreisen, wobei genau ein Plättchen übrigbleibt. In der oberen Zeile sind ungerade viele Plättchen dargestellt, in der unteren gerade viele.

Abbildung 61 Paarbeweis (entspricht **Abbildung 29**)

Auch bei der Diskussion des Paarbeweises wird auf die Spezifität im Endergebnis eingegangen, dass dort ein Plättchen übrig bleiben soll:

- 206 A Ja und bei dem war halt jetzt das Problem, dass, ähm, hier sind es ja zwei aufeinanderfolgende Zahlen und da ja nicht bei zwei und sieben und deswegen ...

207 B ... bleibt mehr als ein Plättchen übrig. [...]

Hier wird bei der Übertragung auf das andere Zahlenbeispiel ein Unterschied in dieser Spezifität erkannt. Dieser wird nun in einer gemeinsamen Entwicklung von A und B über den Unterschied in der **Voraussetzung** erklärt. Dies ist die erste Stelle, an welcher die Voraussetzung explizit in die Betrachtung der Allgemeingültigkeit einbezogen wird. Dabei werden sowohl Voraussetzung, **Endergebnis** als auch deren Zusammenhang *klassifikatorisch* betrachtet: Immer, wenn die Zahlen aufeinanderfolgend sind, bleibt ein Rest größer als eins übrig. Der Fokus liegt dabei auf der ikonischen Darstellung, die sprachliche Erläuterung wird hier nicht explizit thematisiert. Die Organisation der internen Kohärenzebene *entspricht* hier der Beweislogik.

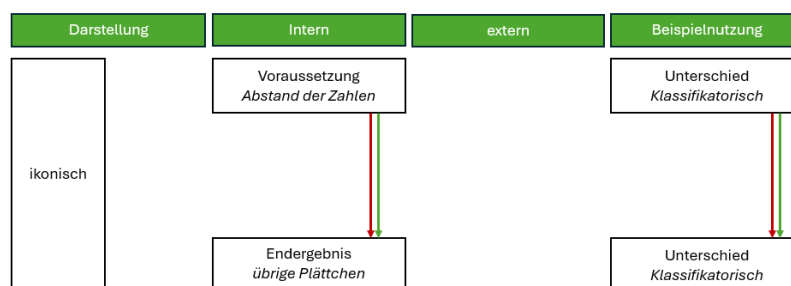


Abbildung 62 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turns 206 und 207, Korrekte Organisation von Voraussetzung und Endergebnis

In der zweiten Arbeitsphase, beim Versuch, den Paarbeweis zu verbessern, wird schließlich von C eine zeilenweise Strukturierung vorgeschlagen, statt der bisherigen spaltenweisen. B stellt zu diesem Vorschlag fest:

„Also kreisen wir die Zahlen einzeln ein.“ (Turn 356, B, Herv. d. Verf.)⁶³

B stellt hier fest, dass sich die vorgeschlagene **Strukturierung** nun nach der **Voraussetzung** richtet, dass es zwei verschiedene Zahlen gibt. Die zwei Zahlen werden als *klassifikatorische* Gemeinsamkeit verstanden, jedoch nicht explizit der Voraussetzung als Beweisschritt zugeordnet. Auch wird nicht auf die weiteren, gemäß Voraussetzung geforderten, Spezifitäten eingegangen, wonach die eine Zahl gerade, die andere ungerade sein soll. Die entsprechende Strukturie-

⁶³ Dieser Turn ist Teil einer ausführlicheren Analyse in Gayer (2023), die in ähnlicher Weise, aber mit einem anderen Fokus als in Gayer (2023), in dieser Arbeit in Abschnitt 6.4.2. vorgenommen wird.

ung wird dabei *klassifikatorisch* beschrieben und ist nicht auf die konkrete Darstellung beschränkt. Die Organisation in der Interaktion zwischen B und C läuft hier auch wieder *umgekehrt* zur Beweislogik: Es wird strukturiert und daraus implizit ein Bezug zur Voraussetzung hergeleitet. Der Fokus ist hier weiterhin auf der ikonischen Darstellung.

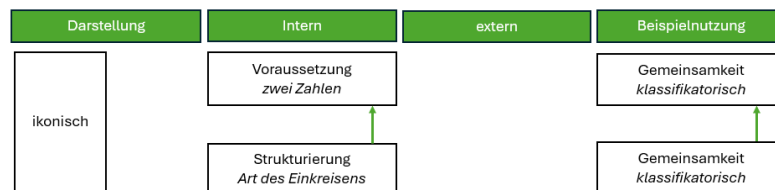


Abbildung 63 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 356, Umgekehrte Organisation von Strukturierung und Voraussetzung, klassifikatorische Betrachtung

Entitäten der internen Kohärenzebene und deren Organisation

Der Fokus bezüglich der internen Kohärenzebene ist zunächst stark auf das **Endergebnis** gerichtet. Dieses wird von Anfang an *klassifikatorisch* verstanden. In der weiteren Entwicklung wird auch der Zusammenhang zur **Strukturierung** vor dem Hintergrund klassifikatorischer Gemeinsamkeiten verstanden. Dieser Zusammenhang wird auf der sprachlichen Ebene betrachtet. Die Organisation dieser beiden Beweisschritte ist jedoch bis zum Ende der Diskussion hin *umgekehrt* zur Beweislogik.

Die **Voraussetzung** wird ohne expliziten Impuls von außen eigenständig von den Diskussionsteilnehmenden in die Betrachtung der internen Kohärenzen mit einbezogen. Dabei wird zunächst ein *klassifikatorischer* Zusammenhang zwischen Voraussetzung und **Endergebnis** *entsprechend* der Organisation der Beweislogik hergestellt. Dabei stehen klassifikatorisch verstandene Unterschiede zwischen den Beispielen auf der ikonischen Ebene im Fokus.

Gegen Ende der Diskussion wird die **Voraussetzung** auch mit der **Strukturierung** in Beziehung gesetzt. Der Zusammenhang wird *klassifikatorisch* verstanden, wobei nun der Fokus auf den ikonisch dargestellten Gemeinsamkeiten liegt. Die Beweisschritte sind hier in einer der Beweislogik *umgekehrten* Organisation. Diese Zusammenhänge bleiben allerdings sehr implizit und werden von den Diskussionsteilnehmenden nicht auf der Metaebene diskutiert.

Insgesamt werden alle Beweisschritte und deren Zusammenhänge am Ende klassifikatorisch verstanden, jedoch bis zum Ende hin noch teilweise umgekehrt zur Beweislogik organisiert. Es gibt eine Entwicklung von einem eher singulären zu einem klassifikatorischen Verständnis und von Unterschieden zu Gemeinsamkeiten.

Intra- und interpersonelle Prozesse

B hat hier eine **dominante** Rolle, insofern als B die wesentlichen, hier formulierten, Aspekte im Verständnis der Allgemeingültigkeit entwickelt. Dies geschieht stets **interaktional** in Auseinandersetzung mit den Äußerungen von A oder C.

Inselgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

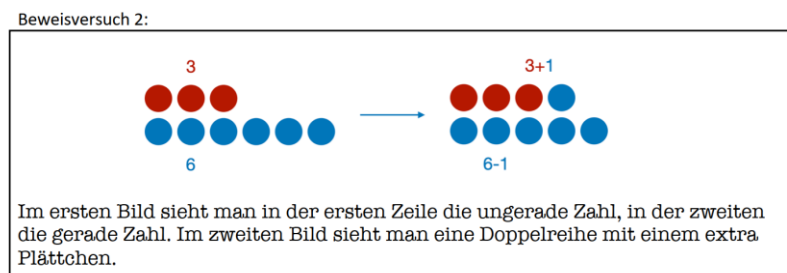


Abbildung 64 Pfeilbeweis (entspricht **Abbildung 30**)

Bereits im ersten Abschnitt, bei der Evaluation der Beweisversuche, wird die Allgemeingültigkeit der ikonischen Darstellung der Strukturierung des Pfeilbeweises von D angesprochen:

„Und hier finde ich halt diese *Allgemeingültigkeit*, weil die das da nochmal mit diesem *einen Faktor* verändert haben.“ (Turn 18, D, Herv. d. Verf.)

D erklärt hier nicht genauer, was aus Sicht von D das Problem hinsichtlich der Allgemeingültigkeit ist, möglicherweise die Verwendung von konkreten Zahlen („ein Faktor“). C reagiert darauf, indem C die ikonisch dargestellten internen Zusammenhänge von der Strukturierung und dem Endergebnis erklärt:

„Also dieses plus eins und minus eins ist halt *dafür* da, *dass* die Doppelreihen wirklich gleich viele sind. *Wenn* man das halt *nicht* macht, *dann* kann man ja nur bis nach hier diese senkrechten Paare

einkreisen und dann bleiben halt drei über. *Und wenn man das so ausgleicht, dann funktioniert es halt wieder.* [...]“ (Turn 19, C, Herv. d. Verf.)

Das **Endergebnis** wird hier *klassifikatorisch* verstanden: Es soll immer eine Doppelreihe mit genau einem übrigen Plättchen herauskommen. Die **Strukturierung** ist „dafür da, dass“ dieses Endergebnis erhalten wird. Es wird also die Strukturierung aus dem Endergebnis heraus begründet. Es wird dann eine Äquivalenzbeziehung für dieses Beispiel behauptet: Genau dann, wenn man diese Plättchenanzahl verschiebt, erhält man eine Doppelreihe mit genau einem übrigen Plättchen. Die eine Richtung wird konkret am Beispiel begründet: Wenn man nicht in der Weise verschiebt, bleiben drei Plättchen übrig und nicht eines. Die andere Richtung wird über ein „und“ angeschlossen, was nahelegt, dass dies aus Sicht von C keiner weiteren Begründung bedarf, sondern bedeutungsgleich ist mit der ersten Richtung. Hier liegt in Bezug auf die internen Kohärenzen eine *richtungsauflösende* Organisation auf der *logischen Metaebene* vor: Aus einer Äquivalenzbeziehung wird eine einzige wenn-dann-Beziehung gemacht, deren Richtung nicht klar definiert ist. Dies bleibt zunächst alles singulär auf die konkrete ikonische Beispieldarstellung bezogen. C zieht dann abschließend einen Vergleich zu einem hypothetischen weiteren Beispiel heran:

„[...] Und da könnte man ja auch plus fünf und minus fünf rechnen.“ (Turn 19, C)

An dieser Stelle wird nun zum ersten Mal die Allgemeingültigkeit der dargestellten Zusammenhänge adressiert. C geht hier davon aus, dass sich durch ein Verschieben von Plättchen immer das gewünschte Endergebnis erreichen lässt. Die Anzahl der verschobenen Plättchen ist dabei jedoch verschieden. Dieser Unterschied in der **Strukturierung** wird nur *singulär* im Vergleich zu einem weiteren Beispiel beschrieben.

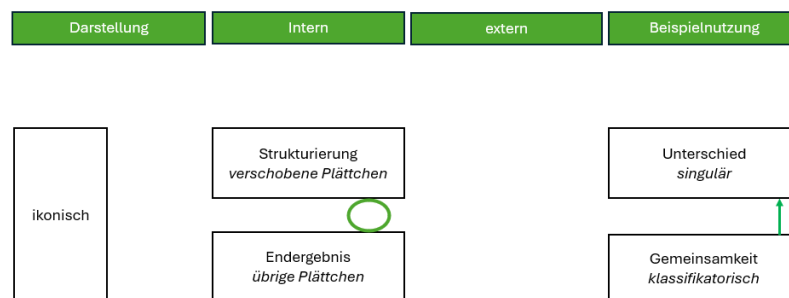


Abbildung 65 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Turn 19, Richtungsauflösende Organisation von Endergebnis und Strukturierung

Beim Übertragen auf die Zahlen 2 und 7 wird diese Spezifität der Anzahl der zu verschiebenden Plättchen von D wieder aufgegriffen:

„Dann kann man nicht auch einfach auch zwei plus eins? Sieben minus eins?“ (Turn 240, D)

D schlägt hier vor, die exakt gleiche ikonische Strukturierung wie im ursprünglichen Beispiel zu wählen. Daraufhin verweist C auf die bereits zuvor erläuterten Zusammenhänge zum Endergebnis:

„Dann hat man nicht, dass es mit den Doppelreihen genauso aufgeht, dass nur ein Plättchen übersteht.“ (Turn 241, C)

Die Strukturierung wird hier über das klassifikatorisch verstandene Endergebnis erklärt, also in einer der Beweislogik *umgekehrten* Organisation. Im weiteren Verlauf stellt C außerdem einen klassifikatorischen Unterschied in allen Beispielen heraus:

„Aber auch nur, wenn man nicht *immer* plus und minus eins rechnet, sondern halt *immer* mit anderen Zahlen addiert. [...]“ (Turn 280, C, Herv. d. Verf.)

Man müsste in jedem Beispiel immer andere Zahlen wählen. C nimmt diese Art der Strukturierung weiterhin als unstimmig wahr:

„Ja, aber die Sache ist, ich fand das gerade schon gar nicht so einfach herauszufinden, plus wie viel ich jetzt rechnen muss, damit das hinterher rauskommt. Und ich glaube für so einen Grundschüler ...“ (Turn 292, C)

Hier wird nun ein sehr breiter (sozialer) Kohärenzrahmen aufgemacht und die intersubjektive Nachvollziehbarkeit für die Zielstufe der Grundschüler/innen infrage gestellt. Was implizit darin auch formuliert ist, ist, dass die zu verschiebende Plättchenanzahl „gar nicht so einfach herauszufinden ist“, also, dass dem kein allgemeines Prinzip zugrunde liegt, sondern dies in jedem Einzelfall neu entschieden werden müsste. Der Fokus liegt hier auf der ikonischen Darstellungsebene.

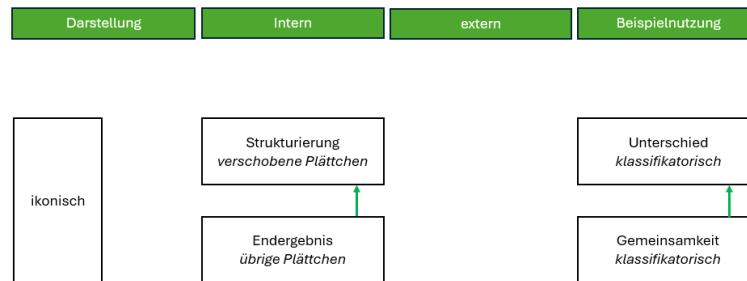


Abbildung 66 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Turns 243, 280 und 292, Umgekehrte Organisation von Endergebnis und Strukturierung

An sehr viel späterer Stelle wird von C schließlich eine sprachliche Formulierung vorgeschlagen, die sowohl die interne Kohärenz zwischen **Strukturierung** und **Endergebnis** als auch die Kohärenz zwischen den Beispielen beachtet:

„Aber bei der Strukturierung muss man halt wirklich darauf achten, dass man daran denkt, nicht einfach zu schreiben, dass plus eins und minus eins gerechnet wird, sondern dass die Zahlen so aneinander angepasst werden, dass eine Doppelreihe mit einem Extraplättchen entsteht. [...]“ (Turn 474, C)

Dies entspricht dem Vorschlag, der auch in der Interaktionsgruppe formuliert wurde und folgt einer der Beweislogik *umgekehrten* Organisation von Strukturierung und Endergebnis.

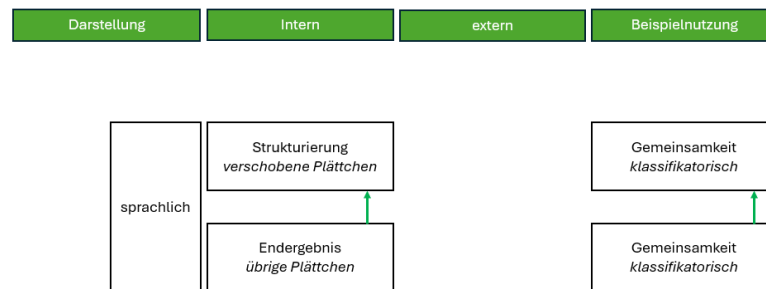


Abbildung 67 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Turn 474, Umgekehrte Organisation von Endergebnis und Strukturierung, klassifikatorische Betrachtung

Die **Voraussetzung** wird erst auf einen konkreten Vorschlag der Übungsleiterin hin in die Betrachtung der internen Kohärenz einbezogen. Bezüglich des Pfeil-

beweises schlägt die Übungsleiterin in der zweiten Arbeitsphase dabei eine Strukturierung vor, wonach bereits die Ausgangszahlen in Doppelreihen angeordnet werden. Darauf reagiert C wie folgt:

„[...] Dass dann die einzelnen Zahlen bewiesen werden, *dass* sie gerade oder ungerade sind, aber ich finde, das *Endergebnis* ist nicht so *klar erkennbar*.“ (Turn 511, C, Herv. d. Verf.)

Die ikonische Darstellung wird hier weiterhin sehr stark vor dem Hintergrund dessen gesehen, was als **Endergebnis** erhalten werden soll. Die Voraussetzung, dass es sich um eine gerade und eine ungerade Zahl handelt, wird als davon getrennter und weniger zentraler Beweisschritt verstanden. Eine interne Kohärenz, wonach sich das Endergebnis aus dieser Voraussetzung heraus herleiten lassen soll, wird hier nicht explizit formuliert. Andere Beispiele, und damit die Kohärenz zwischen den Beispielen, werden hier nicht explizit betrachtet.

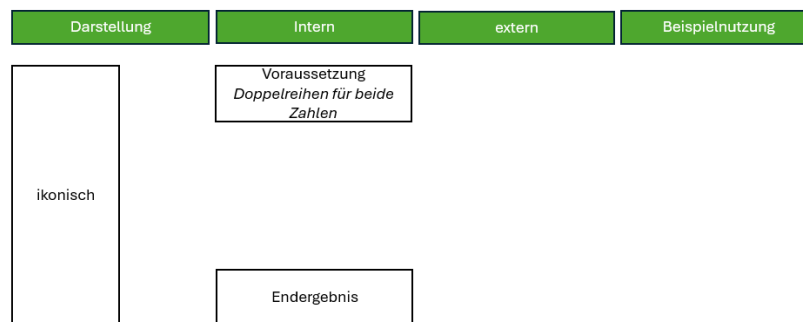


Abbildung 68 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Turn 511, Keine Kohärenz von Voraussetzung und Endergebnis

Entitäten der internen Kohärenzebene und deren Organisation

In der Inselgruppe liegt der Fokus sehr stark auf dem **Endergebnis**, welches auch hier von Anfang an klassifikatorisch verstanden wird. Von Anfang an wird dieser Beweisschritt mit dem der **Strukturierung** in Beziehung gesetzt, wobei auch hier eine Entwicklung von *singulären Unterschieden* hin zu *klassifikatorisch verstandenen Gemeinsamkeiten* stattfindet.

Die Organisation der Beweisschritte ist zunächst *ohne klare Richtung*, dann *kreisförmig* und schließlich *linear*, jedoch, wie in der Interaktionsgruppe, in einer der Beweislogik *umgekehrten Organisation*. Der Übergang zu einer klar linearen Organisation geschieht erst beim Wechsel von der ikonischen zur sprachlichen Ebene. Weiterhin kommt es in dieser Gruppe auf der logischen

Metaebene der internen Kohärenzen zu Vermischungen von Begründungsrichtungen.

Die **Voraussetzung** wird von den Diskussionsteilnehmenden nicht eigenständig in die Betrachtung interner Kohärenzen einbezogen. Erst auf einen Impuls der Übungsleiterin hin, wird dieser Beweisschritt auf der ikonischen Ebene betrachtet, jedoch keine explizite Kohärenz zu den anderen Beweisschritten formuliert.

Intra- und interpersonelle Prozesse

C hat hinsichtlich der Entwicklung des Verständnisses der Allgemeingültigkeit bezüglich der internen Kohärenzebene hier eine sehr **dominante** Rolle, insofern, dass C diese an dieser Stelle alleine und relativ **isoliert** von den anderen Diskussionsteilnehmenden vollzieht.

D spielt hier eine wichtige unterstützende Rolle, weil D den ersten Anstoß zur Auseinandersetzung mit der Allgemeingültigkeit dieses Beweisversuchs gibt. D beteiligt sich dann jedoch nicht weiter an der Diskussion, scheint sich der Norm der Allgemeingültigkeit aber sehr bewusst zu sein und diese zu hinterfragen. Inwieweit das Verständnis von C von den anderen Teilnehmenden übernommen wird, bleibt unklar, weil an dieser Stelle wenig Interaktion stattfindet.

Präinteraktionsgruppe

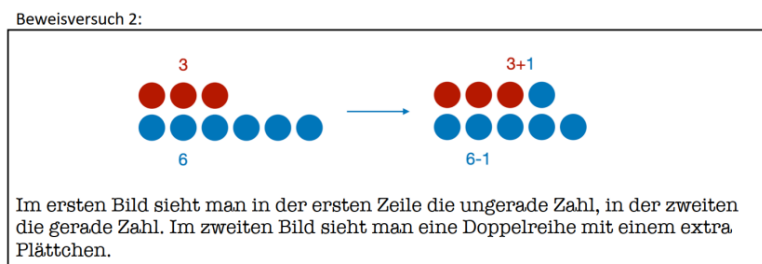


Abbildung 69 Pfeilbeweis (entspricht **Abbildung 30**)

Turn-by-Turn-Analyse

Der Pfeilbeweis wird in der Präinteraktionsgruppe erst in der zweiten Arbeitsphase nach der Plenumsdiskussion im Hinblick auf die Allgemeingültigkeit diskutiert. In Turn 705 schlägt B zunächst eine Vervollständigung vor, indem die **Strukturierung** sprachlich expliziert wird:

„[...] Und dann schreibe ich, äh, ein Plättchen wird von der unteren Reihe in die obere verschoben [...]“ (Turn 704, **B**)

Hier wird noch kein Zusammenhang zum **Endergebnis** hergestellt und das Beispiel rein *singulär* betrachtet, wenn von einem Plättchen die Rede ist, das verschoben wird.

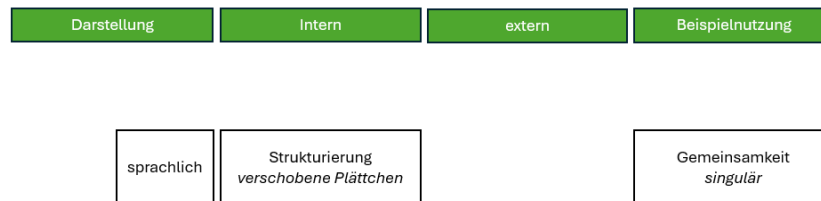


Abbildung 70 Präinteraktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 704, Singuläre Betrachtung der Strukturierung

A reagiert auf B, bringt dabei jedoch eine schon präinteraktional⁶⁴ geformte Feststellung ein, was durch die Worte „eben schon“ deutlich wird. Bei der Überprüfung der Übertragung auf die Zahlen 2 und 7 in der ersten Phase wurde von A dabei bereits festgestellt, dass für diese Spezifität, das eine verschobenen Plättchen, keine empirische Übertragbarkeit vorliegt, dies aber erst jetzt kommuniziert:

„Ist mir *eben schon* aufgefallen. Zum Beispiel bei zwei und sieben, muss man ja so viele Plättchen nach oben machen bis hier eine gerade Zahl ist.“ (Turn 709, A)

Es wird sich hier von A zwar nur auf das eine neue Beispiel konkret bezogen, der Zusammenhang von Strukturierung und Endergebnis aber direkt *klassifikatorisch* beschrieben, jedoch in einer der Beweislogik *umgekehrten* Organisation. Dies entspricht dem Motiv in den beiden anderen Gruppen. Der Fokus liegt an dieser Stelle auf der ikonischen Darstellung.

⁶⁴ „Präinteraktional“ wird hier weiter gefasst als nur in Bezug auf Verständnisse, die in der Einzelarbeit vor der Übungssitzung entstanden sind. „Präinteraktional“ beschreibt hier auch Verständnisse, die intrapersonell in der Übungssitzung, aber nicht aus einer Interaktion mit den anderen Diskussionsteilnehmende heraus, entstehen.

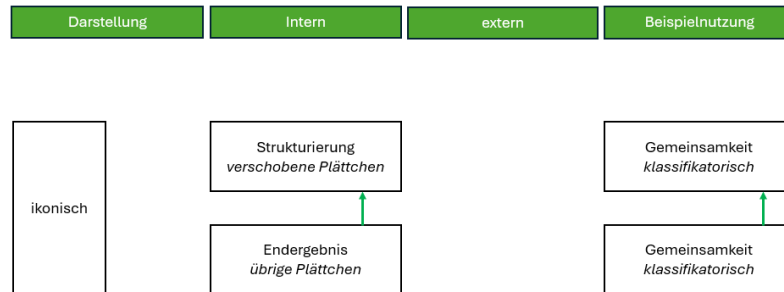


Abbildung 71 Präinteraktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 709, Umgekehrte Organisation von Endergebnis und Strukturierung, klassifikatorische Betrachtung (ikonisch)

Von B wird daraufhin in Turn 715 gefragt, wie dies in allgemeingültiger Weise versprachlicht werden soll. E und F wiederholen daraufhin den von A bereits in Turn 709 eingebrachten Vorschlag als konkrete sprachliche Beschreibung des Zusammenhanges:

- 715 E Es werden so viele Plättchen nach oben verschoben, damit ...
 716 F ... immer Zweierpaare gebildet werden können.

E und F scheinen an dieser Stelle somit das Verständnis von A übernommen zu haben.

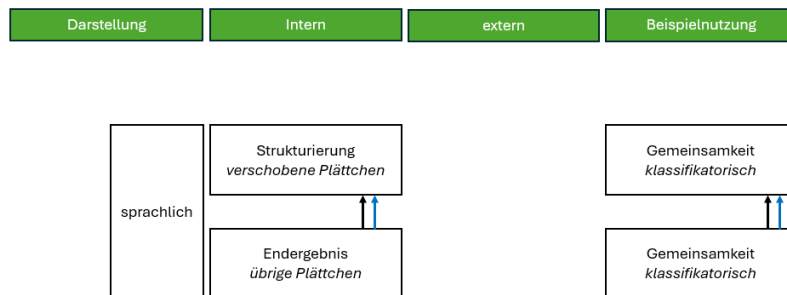


Abbildung 72 Präinteraktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 715f, Umgekehrte Organisation von Endergebnis und Strukturierung, klassifikatorische Betrachtung (sprachlich)

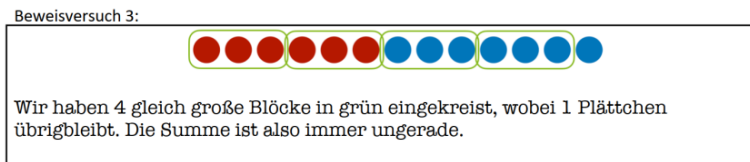


Abbildung 73 Blockbeweis (entspricht Abbildung 31)

Bei der Diskussion des Blockbeweises bringt D bereits im ersten Abschnitt bei der Evaluation der Beweisversuche das eigene präinteraktionale Verständnis von Allgemeingültigkeit in die Diskussion ein, indem D das gegebene Beispiel mit dem Zahlenbeispiel von 3 und 6 vergleicht:

„Das ist mir auch noch aufgefallen. Weil so kannst du natürlich gleich große Blöcke in einer Reihe bilden, aber wie würde das aussehen, wenn du jetzt zum Beispiel das machen würdest: drei plus sechs. Das würde in Beweis 3 [Blockbeweis, Anm. d. Verf.] dann ja anders aussehen. Also könnte man dann nicht den roten noch, dann müsste man den roten mit einem blauen zusammen in einem verbinden. [...]“ (Turn 321, D)

D stellt fest, wenn man die **Strukturierung** gleich großer Blöcke auf das andere Beispiel überträgt, dass sich dann ein grundlegender Unterschied im **Endergebnis** ergibt. In diesem würden die Blöcke nicht mehr ausschließlich aus gleichfarbigen Plättchen bestehen, was aber für D die gewünschte ikonische Darstellung des Endergebnisses wäre. Implizit wird hier der Bezug zur **Voraussetzung** angesprochen, weil die Blöcke damit nicht mehr nach den einzelnen Ausgangszahlen getrennt sind. Diesen Bezug formuliert D ganz explizit in Turn 333:

„Weil das ist *nur* für die darauffolgenden Zahlen, für zwei darauffolgende Zahlen, eindeutig zu sehen. Und das ist nämlich gut, wenn man das allgemein für alle ungerade und geraden Zahlen dann sieht.“ (Turn 333, D)

D stellt hier den klassifikatorischen Unterschied bezüglich des Abstandes der Zahlen in der Voraussetzung heraus, aus welchem sich ein klassifikatorischer Unterschied im Endergebnis ergibt. Dieses ist nur dann nach Farben getrennt ikonisch dargestellt, wenn die Ausgangszahlen aufeinanderfolgend sind. Es werden dabei *klassifikatorische* Zusammenhänge zwischen allen Beweisschritten hergestellt, wonach das gewünschte Endergebnis über die dargestellte Strukturierung nur für die Voraussetzung aufeinanderfolgender Zahlen funktioniert. D sieht dies als Widerspruch zur Allgemeingültigkeit. Nach dem Verständnis von D müssten die Zusammenhänge dafür für alle Zahlen entsprechend der in der Aussage formulierten Voraussetzung (ungerade und gerade Zahlen) gelten.

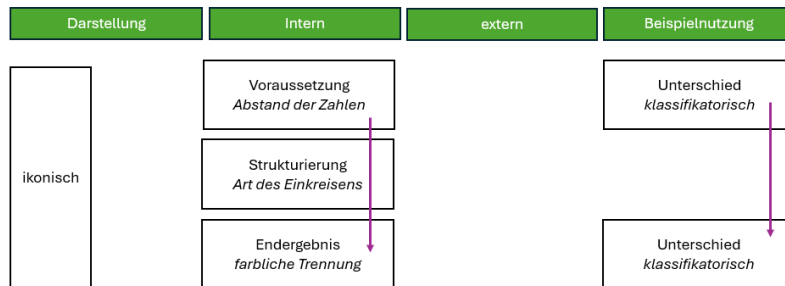


Abbildung 74 Präinteraktionsgruppe, Blockbeweis, Turns 321 und 333, Klassifikatorischer Zusammenhang aller Beweisschritte in korrekter Organisation

Bei dem Versuch, den Blockbeweis entsprechend des Impulses aus der Aufgabenstellung auf die Zahlen 2 und 7 zu übertragen, wird schließlich vorgeschlagen, die Größe der Blöcke, also eine Spezifität der Strukturierung, zu ändern. Dies stellt einen klassifikatorisch verstandenen Unterschied dar, den B und F vor dem Hintergrund der von D bereits zuvor eingebrachten gewünschten farblichen Trennung im Endergebnis wie folgt thematisieren:

- 496 B Ja, aber dann geht das mit den Roten an sich ja nicht.
 497 F Aber ich verstehe das ja schon so, dass es nach Farben unterteilt ist. [...]

Dass es sich bei der Trennung nach den Farben um eine Trennung nach den unterschiedlichen Zahlen im Sinne der Voraussetzung handelt, wird an dieser Stelle nicht explizit thematisiert. Deshalb bleibt unklar, ob B und F dies rein aufgrund ästhetischer Gründe anbringen oder ob diese das Verständnis von D an dieser Stelle übernommen haben, wonach auch die Voraussetzung in die klassifikatorischen Zusammenhänge einbezogen werden sollte.

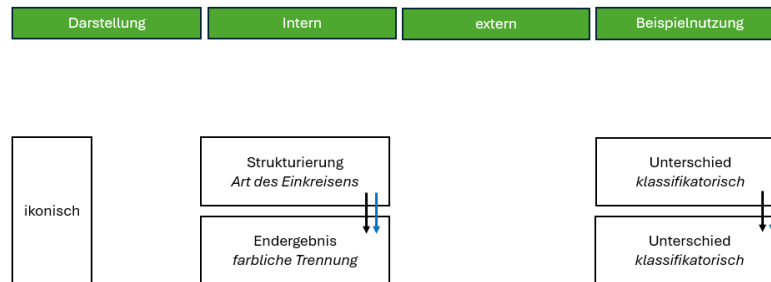


Abbildung 75 Präinteraktionsgruppe, Blockbeweis, Turn 496, Klassifikatorischer Zusammenhang von Strukturierung und Endergebnis in korrekter Organisation

Entitäten der internen Kohärenzebene und deren Organisation

Hier wird zunächst die Strukturierung *singulär* und ohne Beziehung zu den anderen Beweisschritten betrachtet, was direkt aufgelöst wird in einen *klassifikatorisch* beschriebenen Zusammenhang zwischen **Endergebnis** und **Strukturierung**. Es gibt also auch hier wieder eine Bewegung hin zu klassifikatorisch verstandenen Gemeinsamkeiten. Diese Entwicklung wird sowohl auf der ikonischen als auch auf der sprachlichen Ebene vollzogen. Es entwickelt sich dabei die gleiche *umgekehrte* Organisationsform wie in den anderen beiden Gruppen, wo die Strukturierung aus dem Endergebnis heraus begründet wird.

Die **Voraussetzung** wird in dieser Gruppe von Anfang an mit einbezogen und die internen Kohärenzen zwischen allen Beweisschritten werden in *klassifikatorischer* Weise auf der ikonischen Darstellungsebene betrachtet. Diese Zusammenhänge werden am Ende der Diskussion auch im Widerspruch gesehen zu einer Strukturierung in vier gleich großen Blöcken, welche keine Kohärenz zur Voraussetzung erlaubt.

Intra- und interpersonelle Prozesse

In diesem Diskussionsabschnitt hat zunächst A eine **dominante** Rolle bezüglich des Aufbaus eines klassifikatorischen Verständnisses der internen Kohärenzen. Bezüglich des Einbezugs der Voraussetzung hat D eine dominante Rolle. D formuliert dabei die internen Kohärenzen zwischen allen Beweisschritten in klassifikatorischer Weise. Diese Verständnisse bringen A und D bereits als **präinteraktionale** Verständnisse in die Diskussion ein.

F (und auch E beziehungsweise B) übernimmt diese Verständnisse am Ende, zumindest auf einer oberflächlichen Ebene, die anderen Diskussionsteilnehmenden äußern sich nicht dazu.

Vergleich der Gruppen

Entitäten der internen Kohärenzebene und deren Organisation

Hinsichtlich der internen Kohärenzen zwischen den Beweisschritten konnte in allen Gruppen festgestellt werden, dass meist zunächst das **Endergebnis** in *klassifikatorischer* Weise verstanden wurde. Erst nach und nach werden auch die anderen Beweisschritte und deren Kohärenzen mit einbezogen und mehr und mehr in klassifikatorischer Weise betrachtet.

Dabei liegt in allen Gruppen schließlich eine der Beweislogik *umgekehrte* Organisation vom **Endergebnis** zur **Strukturierung** hin vor. Dieser Zusammenhang wird in allen Gruppen am Ende explizit auf der sprachlichen Darstellungsebene formuliert.



Abbildung 76 Alle Gruppen, Pfeilbeweis, Schlussendlich klassifikatorisch verstandene interne Kohärenzen zwischen Endergebnis und Strukturierung in umgekehrter Organisation

Die **Voraussetzung** wird in der Interaktionsgruppe und der Präinteraktionsgruppe in einer der Beweislogik folgenden Organisation mit dem **Endergebnis** (und der Strukturierung) in Bezug gesetzt. Die entsprechenden internen Kohärenzen werden in diesen Gruppen explizit formuliert, wohingegen in der Inselgruppe diese Beweisschritte nicht in Beziehung gesetzt werden. In der Inselgruppe wird, anders als in der Interaktionsgruppe und der Präinteraktionsgruppe, die Voraussetzung auch erst auf einen Impuls der Übungsleiterin einbezogen. In allen Gruppen wird die Voraussetzung rein auf der ikonischen Darstellungsebene betrachtet.

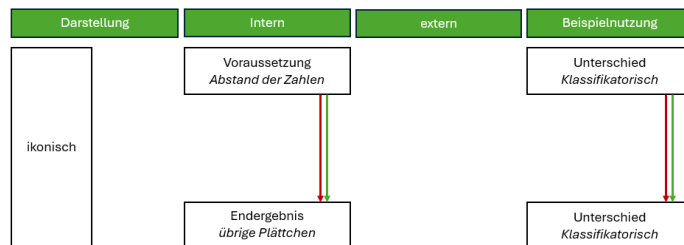


Abbildung 77 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Korrekte Organisation von Voraussetzung und Endergebnis (entspricht **Abbildung 62**)

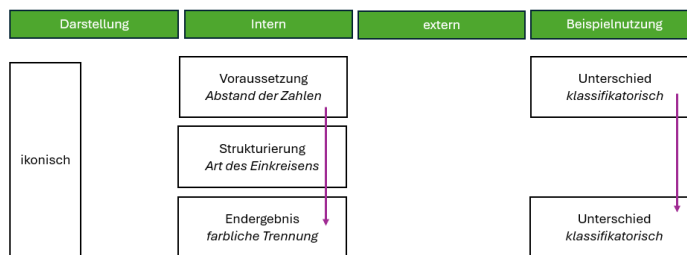


Abbildung 78 Präinteraktionsgruppe, Blockbeweis, Korrekte Organisation aller Beweisschritte (entspricht **Abbildung 74**)

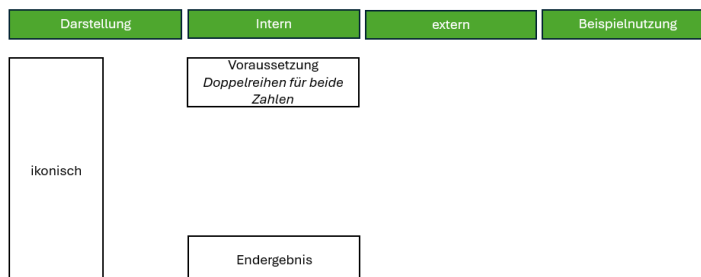


Abbildung 79 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Keine Kohärenz von Voraussetzung und Endergebnis (entspricht **Abbildung 68**)

In der Interaktionsgruppe wird zudem, am Ende der Diskussion, der Bezug der Strukturierung zur Voraussetzung herausgearbeitet, jedoch in zur Beweislogik umgekehrter Organisation.

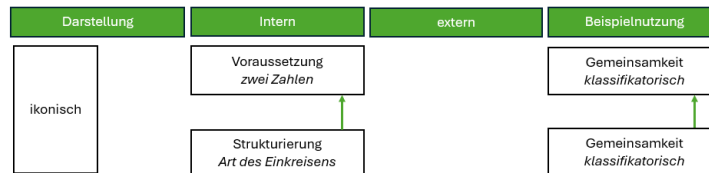


Abbildung 80 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Umgekehrte Organisation von Strukturierung und Voraussetzung (entspricht **Abbildung 63**)

Intra- und interpersonelle Prozesse

Die sprachliche Formulierung interner Zusammenhänge zwischen den Beweisschritten Strukturierung und Endergebnis in klassifikatorischer Weise geschieht in jeder Gruppe durch die **dominante** Person. Nur in der Präinteraktionsgruppe übernehmen dies die anderen Diskussionsteilnehmenden teilweise explizit.

Der Einbezug der Voraussetzung geschieht in der Interaktionsgruppe durch die **dominante** Person in **Interaktion** mit den beiden anderen Diskussionsteilnehmenden und ohne expliziten Impuls von außen.

In der Inselgruppe wird dies nur am **Rande** thematisiert von der **dominanten** Person und erst durch einen **Impuls der Übungsleiterin**. Die anderen Diskussionsteilnehmenden äußern sich nicht dazu.

In der Präinteraktionsgruppe bringt dies eine Person in einer **Nebenrolle** als **präinteraktionales** Verständnis ein, welches teilweise von den anderen Diskussionsteilnehmenden übernommen wird.

6.4.2 Kohärenz der Beispiele

Bereits bei der Analyse im vorherigen Abschnitt zur internen Kohärenzebene ist aufgefallen, dass es in allen Gruppen bei der Diskussion des Pfeilbeweises eine Entwicklung von einem singulären zu einem klassifikatorischen Verständnis gab. Dies betrifft bereits die Ebene der Kohärenz zwischen den Beispielen, da bei einer klassifikatorischen Betrachtung einer Spezifität des konkret dargestellten Beispiels, dieses Beispiel bereits als Repräsentant für eine ganze Klasse von Beispielen angesehen wird. Die Beispiele in dieser Klasse werden somit als kohärent bezüglich dieser Spezifität angesehen.

Bei der Übertragung auf ein weiteres Zahlenbeispiel entsprechend des Impulses der Aufgabenstellung gab es in allen Gruppen zudem eine Entwicklung von Unterschieden, die zwischen den Beispielen festgestellt wurden, hin zu entsprechenden Gemeinsamkeiten. Die Entwicklung ging also von einer Unterscheidung der Beispiele als einzelne Entitäten hin zur Feststellung der Kohärenz zwischen den Beispielen hinsichtlich bestimmter Spezifitäten.

Wie **Unterschiede in Gemeinsamkeiten** aufgelöst wurden, soll im Folgenden anhand der Diskussion des Paarbeweises in der Interaktionsgruppe genauer untersucht werden. Dieser Beweisversuch wurde nur in dieser Gruppe ausgiebig diskutiert. Bei der Diskussion des Pfeilbeweises ging die Entwicklung hin zu klassifikatorisch verstandenen Gemeinsamkeiten in allen Gruppen von der dominanten Person aus (vgl. Abschnitt 6.4.1). Bei der Diskussion des Paarbeweises zeigten sich in der Interaktion zwischen den Diskussionsteilnehmenden jedoch unterschiedliche Ansätze, zu Gemeinsamkeiten zwischen den Beispielen zu kommen, weshalb diese im Folgenden näher analysiert werden sollen⁶⁵.

Turn-by-Turn-Analyse

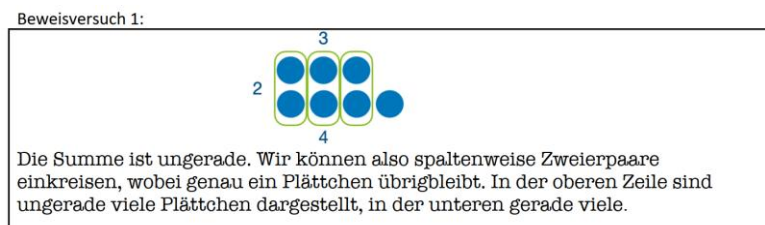


Abbildung 81 Paarbeweis (entspricht Abbildung 29)

In der Interaktionsgruppe wird bereits im ersten Abschnitt, der Evaluation der Beweisversuche, an einer Stelle von A die Norm der Allgemeingültigkeit angesprochen, an dieser Stelle aber nicht weiter aufgegriffen:

⁶⁵ Die im Folgenden analysierten Transkriptausschnitte wurden bereits von Gayer (2023) mit einem anderen Fokus als in dieser Arbeit, aber auf der Grundlage der gleichen Konzeptualisierung von Allgemeingültigkeit (vgl. Abschnitt 2.3.5), analysiert.

„Ist halt die Frage, inwiefern die Beweisversuche einen Nachweis *Allgemeingültigkeit* liefern. Ich glaube, dass dann sogar vom Text her noch der am besten ist, weil da halt nur *generell* steht, „wir können also spaltenweise Zweierpaare einkreisen“, *ohne*, dass steht *wie viele*, weil dadurch ist es ja *für alle Zahlen möglich*. [...]“ (Turn 4, A, Herv. d. Verf.)

Dieser Ausführung liegt implizit die Beobachtung zugrunde, dass nicht immer gleich viele Zweierpaare am Ende herauskommen, wenn man spaltenweise Zweierpaare einkreist. Wie zu dieser Einsicht gekommen wurde, wird nicht angesprochen, daher kann nicht klar entschieden werden, ob dieser Unterschied singulär durch Vergleich einzelner Beispiele oder klassifikatorisch als grundsätzlich immer vorliegender Unterschied festgestellt wurde. Der Unterschied bezieht sich eigentlich auf das Ergebnis des Strukturierungsprozesses, müsste von der Organisationslogik des Beweises also dem Endergebnis zugerechnet werden. A differenziert bei den beiden Spezifitäten des spaltenweisen Einkreisens, was der Strukturierung zuzurechnen wäre, und der Anzahl der erhaltenen Zweierpaare jedoch nicht zwischen den Beweisschritten und vermischt diese hier zu einem Schritt im Beweis.

Weiterhin stellt A fest, dass das spaltenweise Einkreisen eine Gemeinsamkeit in den Beweisversuchen darstellt und formuliert diese in klassifikatorischer Weise: „dadurch ist es ja für alle Zahlen möglich“. A argumentiert nun, dass die sprachliche Darstellungsebene des Beweisversuchs dadurch einen generellen Charakter erhält, dass nur die **Gemeinsamkeiten** benannt werden und die **Unterschiede** sprachlich eliminiert werden. Hier wird implizit über das Endergebnis (beziehungsweise die Unterschiedlichkeit darin) begründet, wie die Strukturierung formuliert sein muss. Die Organisation folgt also wieder einer zur Beweislogik umgekehrten Organisation.

Die sprachliche Darstellung hat laut A die Aufgabe die Allgemeingültigkeit sicherzustellen, indem dasjenige benannt wird, was für alle Zahlen gleich ist. Dies bezieht sich nur auf einzelne ikonisch dargestellte Spezifitäten (spaltenweises Einkreisen), nicht auf interne oder externe Zusammenhänge. Daher wird auch nicht in den Blick genommen, welche Spezifität tatsächlich relevant ist für den Beweis der Aussage (die Anzahl der Zweierpaare ist dafür nicht relevant).

Die ikonische Darstellung wird nicht explizit von A angesprochen, sondern liegt dem nur implizit zugrunde, weil sich die sprachliche Darstellung auf eine Auswahl des ikonisch Dargestellten bezieht. Auf singulärer Ebene eines Beispiels betrachtet würde auf sprachlicher Ebene eigentlich Unvollständigkeit herrschen und keine Kohärenz zur ikonischen Ebene, da nicht alles, was ikonisch dargestellt wird, auch versprochen ist. Dies wird von A jedoch nicht problematisiert.

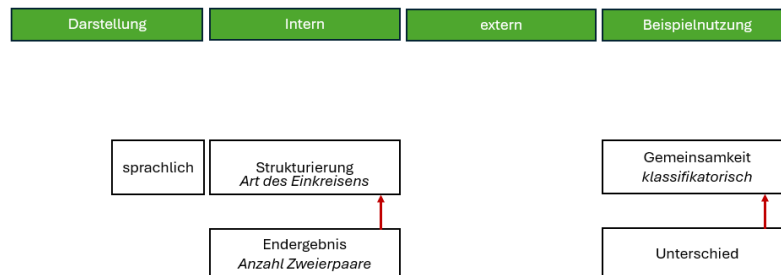


Abbildung 82 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 4, Unterschied sprachlich eliminieren

In der Diskussion um die Übertragung der Beweisversuche auf die Zahlen 2 und 7 wird dann in Bezug auf den Paarbeweis die Spezifität, wie genau eingekreist wurde, näher betrachtet:

„Achso, hier habe ich das ein bisschen *anders* gemacht. Ähm, weil ich habe ja hier einmal zwei Zweierpaare *und dann* geht das ja weiter *und dann* habe ich die für mich nochmal anders eingekreist.“ (Turn 179, C, Herv. d. Verf.)

Hier liegt der Fokus nun auf der ikonischen und nicht mehr auf der sprachlichen Darstellungsebene. In Turn 179 wird eine mögliche Modifikation der Strukturierung des Paarbeweises für die Zahlen 2 und 7 erläutert. Diese wird verglichen mit der ursprünglichen Strukturierung und als **unterschiedlich** eingestuft. Beide Beispiele werden hier als einzelne *singuläre* Beispiele betrachtet und noch keine verallgemeinernden Aussagen getroffen.

Es werden verschiedene Spezifitäten angesprochen: die Art des Einkreisens und die übrigen Plättchen („dann geht das ja weiter“). Diese Spezifitäten werden auch hier nicht klar getrennt gemäß der Beweisschritte. Die übrigen Plättchen stellen eigentlich ein Ergebnis des Strukturierungsprozesses dar und müssten entsprechend der Logik des Beweises dem Endergebnis zugerechnet werden.

Auf der internen Kohärenzebene liegt eine kreisförmige Organisation vor: Es wird zunächst ein Teil strukturiert, das daraus resultierende Ergebnis betrachtet (die übrigen Plättchen), um dann entsprechend die Strukturierung anzupassen.

Die von C beschriebenen Zusammenhänge werden hier rein singulär betrachtet und es wird nicht über das hier betrachtete Beispiel hinausgegangen. Die Bedeutung, die dies für die Übertragbarkeit dieser Spezifität auf andere Beispiele hat, wird hier noch nicht in den Blick genommen.

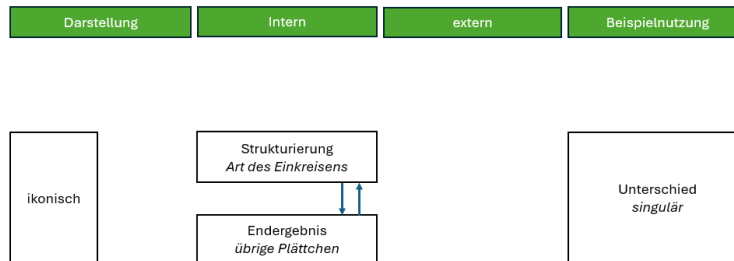


Abbildung 83 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 179, Singulärer Unterschied

In Turn 180 werden diese *singulären Unterschiede*, die sich im Zusammenhang von Strukturierung und Endergebnis ergeben, von B aufgegriffen:

„Achso, ich glaube, [...] *deswegen* sollte man es ja machen, dass man nicht weiter einkreist, *weil* damit zeigt man dieses *Problem*, dass halt nicht genau eins übrig bleibt. Man kann auch *sagen*, dass fünf übrig bleiben und das ist ja auch eine ungerade Zahl. Das ist halt so ein *Formulierungsaspekt*.“ (Turn 180, B, Herv. d. Verf.)

Hier wird zunächst die von C vorgeschlagene Strukturierung problematisiert, weil sich laut C daraus nicht das gewünschte Endergebnis ergibt, dass ein Plättchen übrig bleibt. Die Beweisschritte werden über die Konjunktionen „weil“ als Grund und „deswegen“ als Folgerung *umgekehrt* zur Beweislogik organisiert: Die Strukturierung (man soll nicht weiter einkreisen) wird daraus begründet, dass das Endergebnis verdeutlicht werden soll, dass mehr als ein Plättchen übrig bleibt.

Außerdem stellt B hier einen *klassifikatorischen Unterschied* im Zusammenhang von Strukturierung und Endergebnis fest: Es soll durch diese Strukturierung das grundsätzliche „Problem“ gezeigt werden, dass mehr als ein Plättchen übrig bleibt. Im weiteren Verlauf versucht B, dennoch eine Gemeinsamkeit zwischen den beiden Beispielen herzustellen. Dafür wird zunächst der *singuläre Unterschied* zwischen den Beispielen hinsichtlich der Spezifität der Anzahl der übrigen Plättchen beschrieben. An dieser Stelle findet ein Wechsel von der ikonischen zur sprachlichen Darstellungsebene statt. Es wird dann ausgehend von dem singulären Vergleich festgestellt, was beiden Beispielen gemeinsam ist: Es handelt sich in beiden Fällen um eine ungerade Anzahl an Plättchen. Diese **Gemeinsamkeit** ergibt sich hier jedoch nur aus dem *singulären* Vergleich zweier Beispiele. Es kann somit an dieser Stelle noch nicht von einem klassifikatorischen Verständnis der Spezifität ausgegangen werden. Die Darstellung dieser Gemeinsamkeit soll laut B auf explizit der sprachlichen Ebene stattfinden.

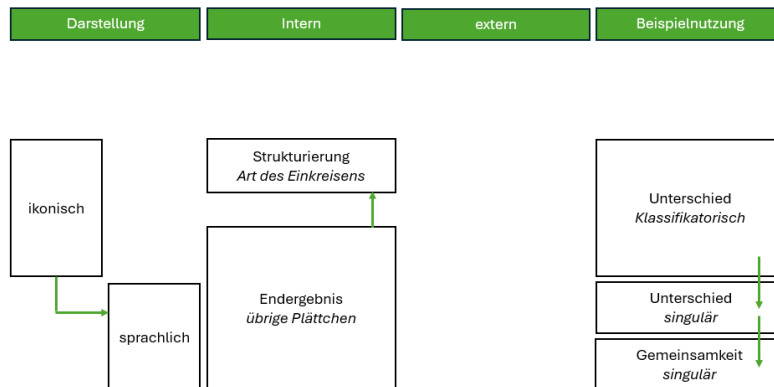


Abbildung 84 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 180, Unterschied aufgelöst in Gemeinsamkeit

In der zweiten Arbeitsphase wird die Art der Strukturierung, die nötig ist, um die Allgemeingültigkeit des Beweisversuchs zu gewährleisten, weiter diskutiert. Dabei entwickeln sich zwischen A einerseits und B und C andererseits unterschiedliche Herangehensweisen.

A knüpft an die eigene, bereits zu Beginn vorgeschlagene, Verbesserung an. Laut A soll die allgemeine Übertragbarkeit dadurch gewährleistet werden, dass die sprachlich beschriebene Spezifität, wie strukturiert wird, eliminiert wird:

„[...] Dass wir einfach „zeilenweise“ weglassen und einfach Zweierpaare einkreisen.“ (Turn 351, A)

Dies folgt derselben Denkweise wie schon zu Anfang in Turn 4, dass nur **Gemeinsamkeiten** sprachlich benannt werden. Die Spezifität des zeilenweisen Einkreisens auf ikonischer Ebene wird in diesem Verständnis als nicht relevant für die Argumentation betrachtet.

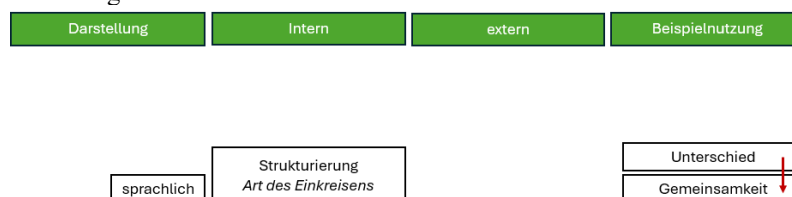


Abbildung 85 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 351, Unterschied sprachlich eliminieren

Das Endergebnis wird dabei von A klassifikatorisch verstanden in dem Sinne, dass am Ende „immer“ Zweierpaare herauskommen sollen:

„Aber so bekomme ich *immer* Zweierpaare.“ (Turn 353, A, Herv. d. Verf.)

Im Endergebnis wird also in dieser Hinsicht eine *klassifikatorisch* verstandene **Gemeinsamkeit** hinsichtlich dieser Spezifität erwartet. Es wird wieder implizit aus dem gewünschten Endergebnis heraus begründet, wie strukturiert werden darf. Die Art der Strukturierung und deren Zusammenhang zum Endergebnis wird dabei jedoch rein singulär betrachtet:

„Tatsächlich könnten wir das kreuz und quer machen, am Ende bekommen wir immer Zweierpaare.“ (Turn 357, A)

Für A besteht hier keine Notwendigkeit, ein allgemeines Prinzip zu erkennen, das der Strukturierung zugrunde liegt. Die Strukturierung kann laut A in jedem Beispiel **unterschiedlich** sein, hier muss also laut A keine Kohärenz zwischen den Beispielen vorliegen. Dass tatsächlich immer das gewünschte Endergebnis herauskommt, kann nur rein *singulär* entschieden werden. Das Endergebnis wird hier unvollständig beschrieben, auf das übrige Plättchen wird nicht eingegangen und es ist unklar, ob dieses mitgedacht wurde.

In der formulierten Weise ist die Organisation der Begründung *punktförmig*, das heißt tautologisch in dem Sinne, dass zwei Dinge auseinander begründet werden, die eigentlich bedeutungsgleich sind: Wenn ich Zweierpaare einkreise, bekomme ich am Ende Zweierpaare.

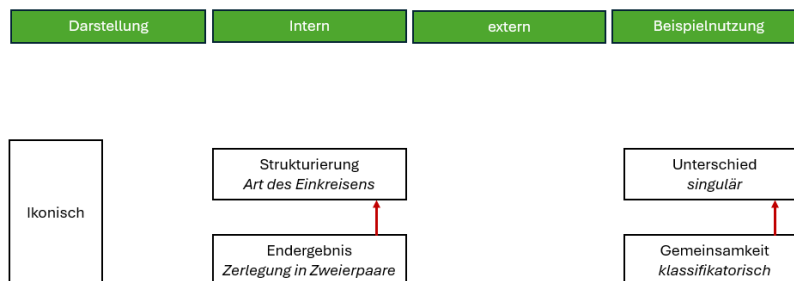


Abbildung 86 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turns 353 und 357

Dagegen etablieren B und C gemeinsam ein anderes Verständnis, das auch die Voraussetzung in die Überlegungen mit einbezieht. C fehlt eine Begründung für die Art der Strukturierung und schlägt daher eine andere Strukturierung vor:

„Könnten wir das nicht einfach anders strukturieren? Weil so macht das keinen *Sinn*.“ (Turn 352, C, Herv. d. Verf.)

Der fehlende „Sinn“ kann in der Weise interpretiert werden, dass in der bisherigen Art der Strukturierung, wo erst innerhalb der Doppelreihe eingekreist wurde und dann die übrigen Plättchen, sich kein grundlegendes, allgemeines Prinzip zeigt. Diese Interpretation wird durch die daran anknüpfende Äußerung von B bestätigt:

„Was ich komisch finde, ist, dass wir erst zeilenweise einkreisen und dann wieder ... das macht keinen *Sinn*.“ (Turn 354, B, Herv. d. Verf.)

Laut B gibt es keine Stimmigkeit, keine interne Kohärenz innerhalb des Beweisschrittes der Strukturierung. C schlägt daraufhin eine konkrete andere Strukturierungsweise vor und B hebt dies schließlich auf die Metaebene und stellt fest:

„Also kreisen wir die Zahlen einzeln ein.“ (Turn 356, B, Herv. d. Verf.)

B stellt hier fest, dass sich die vorgeschlagene Strukturierung nun nach der *klassifikatorisch* verstandenen **Gemeinsamkeit** in der Voraussetzung richtet, dass es zwei verschiedene Zahlen gibt. Dadurch ergibt sich eine klassifikatorische Gemeinsamkeit hinsichtlich der Strukturierung.

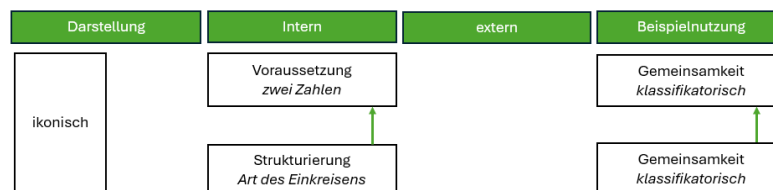


Abbildung 87 Interaktionsgruppe zur Allgemeingültigkeit, Paarbeweis, Turn 356, Unterschied in Gemeinsamkeit aufgelöst

Kohärenzebene der Beispielnutzung und deren Organisation

Auf der Ebene der Beispielnutzung zeigt sich durch die ganze Diskussion hindurch eine Bewegung vom Unterschied hin zur Gemeinsamkeit und von einer eher singulären Betrachtung hin zu einer klassifikatorischen Betrachtung der Beispiele. Dabei zeigen sich zwei unterschiedliche Mechanismen: Die **Unterschiede** werden entweder sprachlich eliminiert und nur die Gemeinsamkeiten benannt oder die Unterschiede werden auf einem höheren Abstraktionsniveau in **Gemeinsamkeiten** aufgelöst.

In letzterem Fall werden dafür zunächst *singuläre Gemeinsamkeiten* festgestellt zwischen dem ursprünglichen Zahlenbeispiel und dem Zahlenbeispiel, auf das die Darstellung entsprechend des Impulses übertragen werden soll. Im wei-

teren Verlauf in der zweiten Arbeitsphase wird dann nach einem allgemeinen Prinzip hinter der Strukturierungsweise gesucht. Durch den Einbezug der Voraussetzung⁶⁶ können schließlich *klassifikatorische Gemeinsamkeiten* in den anderen Beweisschritten benannt werden. Dies wird jedoch nur implizit thematisiert und es bleibt unklar, inwiefern sich die Diskussionsteilnehmenden über diesen Aspekt selbst bewusst sind.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Alle Diskussionsteilnehmenden scheinen das Verständnis zu teilen, dass, um Allgemeingültigkeit herstellen zu können, Unterschiede zwischen den Beispielen aufgehoben und Gemeinsamkeiten hergestellt werden müssen.

B nimmt in dieser Diskussion wieder eine **dominante Rolle** ein. Zu Beginn der Diskussion bringt B die von C betrachteten singulären Unterschiede in den internen Zusammenhängen zwischen Strukturierung und Endergebnis zusammen mit den von A hervorgehobenen klassifikatorischen Gemeinsamkeiten. B vollzieht dadurch eine Entwicklung von der singulären Betrachtungsweise von C zu einer stärker klassifikatorischen Betrachtung und von den Unterschieden zwischen den Beispielen hin zu deren Gemeinsamkeiten.

Darüber hinaus versucht B in der zweiten Arbeitsphase ein allgemeines Prinzip hinter der Strukturierungsweise zu erkennen. Daraus motiviert B schließlich den Einbezug der Voraussetzung in die Betrachtung.

Diese Aspekte im Verständnis von B entwickeln sich **interaktional** in Auseinandersetzung mit den von C (beziehungsweise in der Plenumsphase) vorgeschlagenen Strukturierungen. C macht diesbezüglich im Verlauf der Diskussion ebenfalls eine Entwicklung durch. Während am Anfang rein singuläre Unterschiede festgestellt werden, sucht auch C am Ende, gemeinsam mit B, nach einem allgemeinen Prinzip in der Strukturierungsweise.

A formuliert eingangs ein Verständnis, das auf dem Eliminieren von Unterschieden beruht, folgt dann der Entwicklung der beiden anderen Rollen und kommt abschließend wieder zurück zum eingangs formulierten Verständnis. Das Verständnis von A zeigt sich hier somit als zeitlich nicht robust.

Die **Verständnisse** von A einerseits und B und C andererseits liegen bis zum Ende **unaufgelöst nebeneinander** vor.

⁶⁶ Bereits in der ersten Arbeitsphase wird der Einbezug der Voraussetzung explizit bei der Betrachtung interner, klassifikatorisch verstandener Kohärenzen thematisiert, worauf später jedoch nicht mehr explizit Bezug genommen wird (vgl. dazu auch Abschnitt 6.4.1 zur internen Kohärenzebene).

6.4.3 Externe Kohärenzebene

Bei der Diskussion des Blockbeweises (in der Interaktionsgruppe auch bei der Diskussion des Paarbeweises) wurde vermehrt auch die externe Kohärenzebene in die Diskussion der Allgemeingültigkeit einbezogen. Diese zeigte dabei eine ähnlich differenzierte Binnenstruktur wie die bereits analysierte interne Kohärenzebene. Dies soll in diesem Abschnitt detailliert dargelegt werden

Interaktionsgruppe

Turn-by-Turn Analyse

Beweisversuch 1:

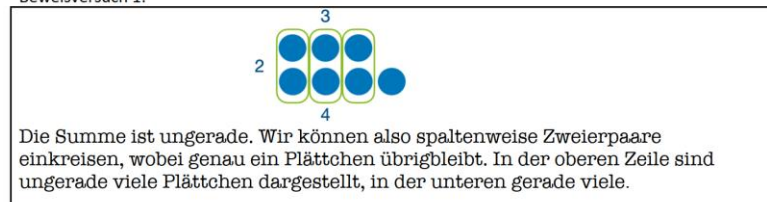


Abbildung 88 Paarbeweis (entspricht Abbildung 29)

In der Interaktionsgruppe wird, anders als in den anderen Gruppen, bereits bei der Diskussion des Paarbeweises ein Lemma etabliert:

„Ach so, ich glaube, [...] *deswegen* sollte man es ja machen, dass man nicht weiter einkreist, *weil* damit zeigt man dieses *Problem*, dass halt nicht genau eins übrig bleibt. Man kann auch *sagen*, dass fünf übrig bleiben und das ist ja auch eine ungerade Zahl. Das ist halt so ein *Formulierungsaspekt*.“⁶⁷ (Turn 180, B, Herv. d. Verf.)

Die Gemeinsamkeit, dass es sich in beiden Beispielen um eine ungerade Anzahl an Plättchen handelt, wird hier implizit als **Lemma** formuliert. Dies wird deutlich im letzten Satz, wo diesbezüglich von einem „Formulierungsaspekt“ gesprochen wird.

Hier ist, sehr implizit, die Organisationslogik auf der externen Ebene *umgekehrt* zur Beweislogik: Aus der zu beweisenden Aussage, wonach am Ende eine ungerade Anzahl an Plättchen erhalten werden soll, wird die Gemeinsamkeit motiviert, die im Endergebnis beider Beispiele zu sehen sein soll, nämlich dass die übrigen Plättchen eine ungerade Anzahl haben. In Abbildung 89 ist dieser Zusammenhang auf der externen Ebene dargestellt, zusätzlich zu den Zusammen-

⁶⁷ Dieser Turn ist ebenfalls Teil der Analyse in Gayer (2023).

hängen, die bezüglich der anderen Kohärenzebenen bereits analysiert wurden (vgl. Abbildung 111 im Abschnitt zur Kohärenzebene der Beispielnutzung).

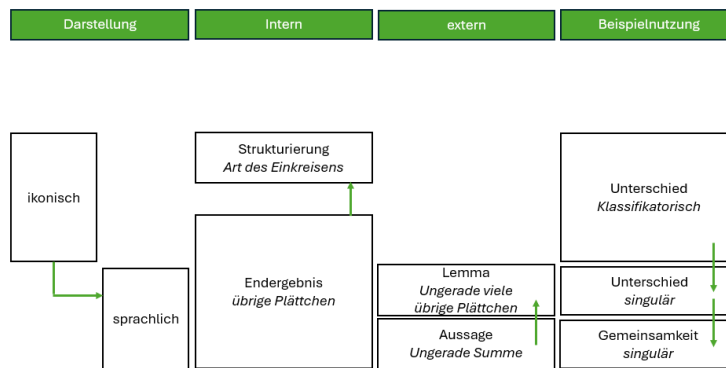


Abbildung 89 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 180, Lemma implizit aus Aussage heraus motiviert

In Turn 207 wird das zuvor eher implizit formulierte **Lemma** explizit als solches formuliert:

„[...] Ist halt die Frage, ob man dann bei dem Text hätte einfach schreiben können, dass dann nicht genau ein Plättchen übrig bleibt, sondern genau ungerade viele Plättchen *immer* übrig bleiben.“ (Turn 207, B, Herv. d. Verf.)

Durch das Wort „immer“ wird deutlich, dass diese Spezifität im Endergebnis als *klassifikatorisch* verstanden wird und hier somit eine Allgemeingültigkeit für das formulierte Lemma angenommen wird. Da B hier an die eigene Äußerung anknüpft, ist davon auszugehen, dass B dieses **Lemma** weiterhin implizit aus der **Aussage** heraus begründet. A organisiert diese Entitäten auf der externen Ebene in der anderen Richtung, welche auch der Beweislogik entspricht:

„Also, dass da die Anzahl der übrig gebliebenen Plättchen auch ungerade ist und es *deswegen* es dann *beweist*, dass es ungerade ist. [...]“ (Turn 208, A, Herv. d. Verf.)

Hier wird über das Wort „deswegen“ nun explizit der Zusammenhang innerhalb der externen Ebene formuliert, dass aus dem Lemma die zu beweisende Aussage folgt. Insgesamt liegt also eine *kreisförmige* Organisation auf der externen Ebene vor. Warum das Lemma gilt, wird von A nicht begründet. Wie genau sich aus dem Lemma die Aussage folgern lässt ebenfalls nicht.

Auf der *logischen Metaebene* betrachtet, wird hier *tautologisch* argumentiert: Implizit wird hier der Zusammenhang genutzt, dass eine gerade Zahl (die Dop-

pelreihe) und eine ungerade Zahl (die restlichen Plättchen) eine ungerade Summe ergeben, was genau die Aussage ist, die bewiesen werden soll. C stimmt den Ausführungen durch eine kurze zustimmende Äußerung zu.

Darstellung	Intern	extern	Beispielnutzung
sprachlich	Endergebnis übrige Plättchen	Lemma Ungerade viele übrige Plättchen Aussage Ungerade Summe	Gemeinsamkeit klassifikatorisch

Abbildung 90 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turns 207 und 208, Kreisförmige Organisation auf der externen Ebene

In der Interaktionsgruppe wird bereits am Ende der ersten Arbeitsphase mit dem Verbessern der Beweisversuche begonnen. Dabei wird erneut auf das oben formulierte **Lemma** Bezug genommen. Es wird zunächst von A, welche selbst zuvor dieses Lemma formuliert hatte, die allgemeine Übertragbarkeit des Paarbeweises infrage gestellt:

„Ja, aber wie soll ich den verbessern? Wenn der *bei manchen Zahlen gar nicht aufgehen* kann?“
(Turn 294, A, Herv. d. Verf.)⁶⁸

A wird daraufhin von C an das **Lemma** erinnert:

„Genau, was du gesagt hattest mit diesen Plättchen, die übrig bleiben, dass die halt ungerade sind, und das kann man ja sehen, *indem* man die auch nochmal in Zweierpaare unterteilen könnte oder so.“ (Turn 298, C, Herv. d. Verf.)⁶⁹

Hier wird aus dem Endergebnis heraus eine Strukturierung begründet. Diese Organisation entspricht der bereits bei der Analyse der internen Kohärenzebene (vgl. Abschnitt 6.4.1) analysierten typischen Denkrichtung. Während diese Denkrichtung vom Endergebnis hin zur Strukturierung dabei insofern weniger problematisch war, als diese nur singular betrachtet wurde oder lediglich als heuristische Strategie genutzt wurde, ist sie in klassifikatorisch verstandener Weise als Begründungsrichtung im Beweis inkorrekt und folgt einer falschen logischen Struktur. Da diese jedoch an den früheren Stellen nicht problematisiert wurde, bleibt sie den Teilnehmenden auch an dieser Stelle unbewusst.

⁶⁸ Diese Turns wurden ebenfalls bereits von Gayer (2023), mit einem anderen Fokus als in diesem Abschnitt, analysiert.

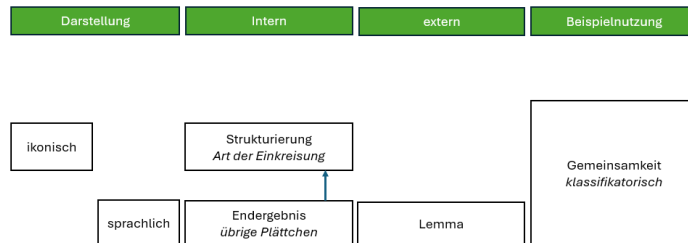


Abbildung 91 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 298, Falsche logische Schlussrichtung

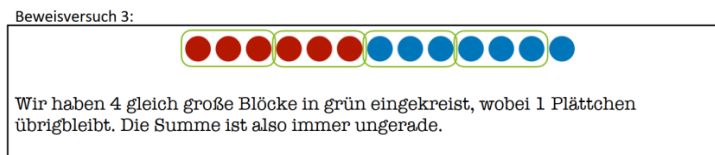


Abbildung 92 Blockbeweis (entspricht **Abbildung 31**)

In Bezug auf den Blockbeweis werden in der Interaktionsgruppe beim Vergleich des ursprünglichen Beispiels mit dem neuen Beispiel mit den Zahlen 2 und 7 Unterschiede hinsichtlich der Anzahl der Blöcke festgestellt:

„[...] da werden ja alle, ähm, da das ja durch drei teilbar ist, die neun, werden ja, äh, gibt es ja drei Dreierpaare.“ (Turn 187, C)

Hier geht C zunächst implizit von einer Gemeinsamkeit in der Größe der Blöcke aus, die klassifikatorisch verstanden wird. Auch im neuen Beispiel werden daher wieder Dreierblöcke betrachtet. Dabei stellt C jedoch *singulär* einen Unterschied in der Anzahl der Blöcke fest, wo nun drei Blöcke statt zuvor vier erhalten werden. Die Anzahl der Dreierblöcke wird dabei nicht aus den vorherigen Beweisschritten hergeleitet, sondern auf Grundlage einer *kreisförmigen* Organisation aus dem Endergebnis selbst heraus: Aus dem singulären Endergebnis der Gesamtanzahl wird die Anzahl der Dreierblöcke hergeleitet. B denkt dies weiter, indem B dies in Beziehung setzt zur zu beweisenden Aussage:

„Ja, gut, da haste halt drei Blöcke und drei ist nicht gerade, deswegen.“ (Turn 188, B)

B gleicht diesen singulären Unterschied mit der **Aussage** ab und stellt auf dieser Grundlage den *klassifikatorisch* verstandenen Unterschied fest, dass es sich

nicht um konkret drei, sondern um ungerade viele Blöcke handelt. C folgt B in dieser Argumentation:

„[...] Deswegen passt das ja nicht, es gibt drei gleich große Blöcke.“ (Turn 189, C)

Es wird versucht, die **Kohärenz zwischen den beiden Beispielen** hinsichtlich einer Spezifität herzustellen und festgestellt, dass dann die **externe Kohärenz** zur Aussage nicht mehr gegeben ist.

B fokussiert nun auf die problematische Stelle in der vorherigen Argumentationskette:

„Aber ich habe das anders gemacht. Wir haben vier gleich große Blöcke, das heißt, ich habe jetzt wieder in vier gleich große Blöcke unterteilt und dann ist noch ein Plättchen übrig. [...]“ (Turn 190, B)

B versucht hier die **Kohärenz zwischen beiden Beispielen** herzustellen, also an dieser Stelle für eine empirische Übertragbarkeit zu sorgen. Die Schwachstelle in der vorherigen Argumentation gegen die Übertragbarkeit ist laut B die Auswahl der Spezifität, die übertragen werden sollte. Laut B sollte nicht die Größe der Blöcke übertragen werden, sondern die Anzahl der Blöcke. Die **externe Kohärenz** zur Aussage begründet B über das Lemma, dass mit einer geraden Anzahl an gleich großen Blöcken eine gerade Zahl verdeutlicht wird:

„[...] Du musst ja immer eine gerade Anzahl an Blöcken haben.“ (Turn 190, B)

Warum immer eine gerade Anzahl an Blöcken benötigt wird, wird von B nicht explizit begründet. Auch hier wird vermutlich wieder implizit von dem in der Aussage geforderten Endergebnis ausgegangen, dass die Gesamtzahl der Plättchen (ohne das übrige Plättchen) gerade sein soll.

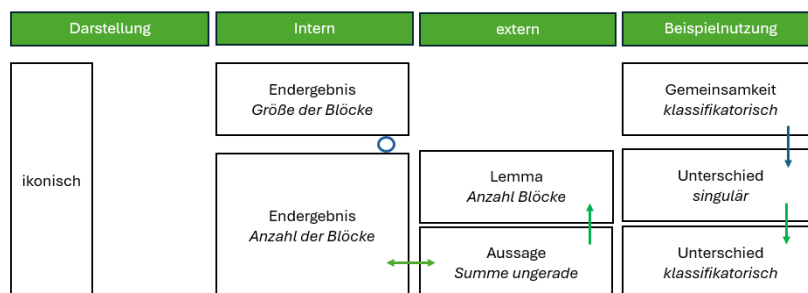


Abbildung 93 Interaktionsgruppe, Blockbeweis, Turns 187-190, Lemma implizit aus Aussage heraus motiviert

B bringt in diese Diskussion um die Zusammenhänge auf der externen Ebene noch die Definition der Parität ein, was A wie folgt aufgreift:

„Also, das können wir ja vielleicht auch als Kritik anmerken, dass es besser gewesen wäre, hätte man, wenn man das halt, weil die Definition ist ja, eine Zahl ist dann durch zwei teilbar, wenn sie ohne Rest in Zweierpäckchen aufgeteilt werden kann, und das hätte man hier, glaube ich, besser hätte machen sollen [...]“ (Turn 197, A)

A bringt hier die **ikonische Definition** der Parität ins Spiel, welche auf der Größe der Blöcke („Zweierpäckchen“) basiert. Laut A sollte eigentlich über diese Definition die Kohärenz zwischen der ikonischen Darstellung des Endergebnisses und der Aussage hergestellt werden, also die externe Kohärenz gewährleistet werden sollte. A setzt dies nun in Beziehung zur vorangegangenen Diskussion und kommt zu dem Schluss, dass dies auch über den Zwischenschritt eines Lemmas möglich ist:

„[...] aber weil vier ist ja auch durch zwei teilbar ist, ist es ja letztlich nicht egal, aber es geht halt auch mit vier, geht auch mit sechs und auch mit acht.“ (Turn 197, A)

A begründet das zuvor formulierte Lemma, dass eine gerade Anzahl an Blöcken eine gerade Zahl verdeutlicht, nun über die **symbolische Definition** einer geraden Zahl, dass diese durch zwei teilbar ist. Hier werden mehrere Ebenen vermischt. Einmal wird nicht klar unterschieden zwischen der Größe der Blöcke, die zuvor von A benannt wurde, und der Anzahl der Blöcke, die beide als Begründungsgrundlage dienen können. Weiterhin wird hier zum ersten Mal die symbolische Darstellungsebene mit einbezogen und nicht klar getrennt von der ikonischen: Über die symbolische Definition werden hier ikonische Zusammenhänge begründet. Die Organisation der Argumentation *entspricht* dabei auf externer Ebene der Beweislogik: Aus einer grundlegenden **Definition** wird ein **Lemma** abgeleitet und daraus die **Aussage** begründet. Insgesamt wird es dadurch möglich, aus der ikonischen Darstellung des Endergebnisses die Kohärenz zur Aussage zu begründen.

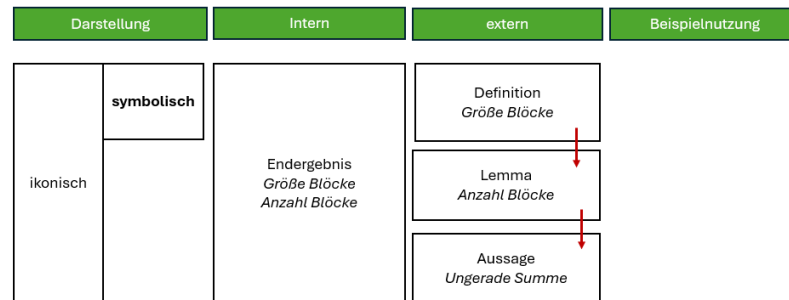


Abbildung 94 Interaktionsgruppe, Blockbeweis, Turn 197, Korrekte Organisation auf externer Ebene durch Einbezug der Definition

Entitäten der externen Kohärenzebenen und deren Organisation

Die Interaktionsgruppe ist die einzige Gruppe, die schon bei der Diskussion des Paarbeweises ein **Lemma** formuliert. Die in Bezug auf diesen Beweisversuch festgestellte Gemeinsamkeit im Endergebnis, dass immer ungerade viele Plättchen übrig bleiben (vgl. Abschnitt 6.4.2 zur Kohärenz der Beispiele), wird zunächst eher *singulär* betrachtet und das entsprechende Lemma nur implizit formuliert. Durch einen Wechsel zu einer *klassifikatorischen* Betrachtungsweise wird das Lemma schließlich explizit sprachlich formuliert.

Die Gültigkeit des Lemmas wird dabei jedoch nicht explizit begründet, sondern eher implizit aus der Aussage heraus motiviert. Auf externer Ebene liegt hier somit eine zur Beweislogik *umgekehrte* Organisation vor.

In Bezug auf den Blockbeweis werden unterschiedliche Spezifitäten im Endergebnis – die Größe der Blöcke und die Anzahl der Blöcke – in den Blick genommen, diese aber nicht klar voneinander getrennt. Um **Kohärenz zwischen den Beispielen** herzustellen und gleichzeitig die Kohärenz auf der **externen Ebene** weiterhin zu gewährleisten, wird eine zusätzliche Entität auf der externen Ebene hinzugefügt: Es wird ein Lemma formuliert, wonach die Anzahl der Blöcke gerade sein soll. Außerdem wird auch die Definition gerader Zahlen explizit mit in die Betrachtung einbezogen. Hier kommt es jedoch implizit zu einer **Vermischung der Darstellungsebenen** ikonisch und symbolisch.

Während das Lemma zunächst implizit aus der Aussage heraus motiviert wird, also auf externer Ebene zunächst eine der Beweislogik *umgekehrte* Organisation vorliegt, *folgt* die Organisation auf der externen Kohärenzebene am Ende der

Beweislogik: Aus der **Definition** wird das **Lemma** hergeleitet und darüber die **Aussage** begründet.

Intra- und interpersonelle Prozesse

B hat eine **dominante** Rolle. Die Lemmata werden im Wesentlichen von B entwickelt. Dies geschieht **interaktional** in der Auseinandersetzung mit dem von C eingebrachten, eher singulären Verständnis (für den Paarbeweis vgl. dazu auch Abschnitt 6.4.2).

C hat hier wieder eine **unterstützende** Rolle für die Entwicklung des Verständnisses. C bringt bei der Diskussion des Blockbeweises die Spezifität der Anzahl der Blöcke zum ersten Mal zur Sprache und verweist auf eine mangelnde Kohärenz zur externen Kohärenzebene. Dies greift B auf und löst dies durch Formulierung eines Lemmas in Bezug auf diese Spezifität. Inwieweit C der Argumentation von B folgt, bleibt unklar, da C sich im weiteren Verlauf dazu nicht mehr äußert. Bei der Diskussion des Paarbeweises übernimmt C schließlich das von B formulierte Lemma in die eigene Argumentation.

A folgt bei der Diskussion des Paarbeweises zeitweise der Argumentation von B, weicht am Ende jedoch wieder davon ab. Bei der Diskussion des Blockbeweises spielt A schließlich eine wichtige **unterstützende** Rolle. A denkt die von B eingebrachte Position weiter, indem auch die Definition der Parität als Entität in der externen Kohärenzebene einbezogen wird und die Kohärenzen auf der externen Ebene, der Organisation der Beweislogik folgend, explizit formuliert werden. Da sich die anderen Diskussionsteilnehmenden zu diesem von A eingebrachten Aspekt nicht weiter äußern, bleibt unklar, inwieweit dieses Verständnis in dieser Gruppe geteilt wird.

Inselgruppe

Beweisversuch 3:

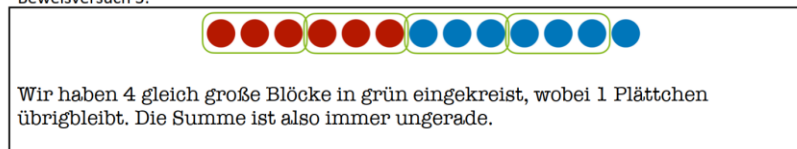


Abbildung 95 Blockbeweis (entspricht **Abbildung 31**)

Turn-by-Turn-Analyse

Bereits im Diskussionsabschnitt zum ersten Impuls der Aufgabenstellung, also beim Vergleich der Beweisversuche hinsichtlich ihrer Validität, wird in der In-

selbste Gruppe in der Diskussion des Blockbeweises ebenfalls zunächst auf die Größe der Blöcke fokussiert:

„Ja, weil wie erklärst du denn jemandem, warum denn da gar drei eingekreist sind und nicht zwei. [...]“ (Turn 78, A)

Hier macht A zunächst einen sehr weiten sozialen Kohärenzrahmen auf, indem die Nachvollziehbarkeit für beliebige weitere Personen infrage gestellt wird. Dies begründet A durch einen Bezug auf die **ikonische Definition** einer geraden Zahl:

„[...] Weil zwei zeigt doch viel besser, dass das immer gerade Zahlen sind [...]“ (Turn 78, A, Herv. d. Verf.)

A spricht hier implizit die ikonische Definition an, dass eine gerade Zahl dadurch verdeutlicht wird, dass sie restlos in Zweierpaare zerlegbar ist. Ein expliziter Bezug zur **Aussage**, dass eine ungerade Zahl herauskommen soll, wird hier nicht vorgenommen. C reagiert darauf und formuliert in Opposition zu A das gleiche **Lemma**, wie schon in der Interaktionsgruppe formuliert wurde:

„Ja, aber es geht darum, dass man eine gerade Anzahl gleich großer Blöcke hat.“ (Turn 79, C, Herv. d. Verf.)

Durch das Wort „aber“ wird deutlich, dass es sich für C hier um eine gegenüber A gegensätzliche Position handelt. Es wird nun von C, ohne dies explizit zu thematisieren, der Fokus von der Größe der Blöcke zur Anzahl der Blöcke gelenkt. Dabei wird das **Lemma** formuliert, dass die Anzahl gerade sein muss, um eine gerade Zahl zu verdeutlichen. A äußert dazu ein kurzes „Ach so ...“ (Turn 80, A), was auf einen gedanklichen Shift bei A hinweist. C begründet daraufhin das Lemma wie folgt:

„Weil die sind ja dann auch immer durch zwei teilbar. [...]“ (Turn 81, C, Herv. d. Verf.)

Wie in der Interaktionsgruppe wird hier, ohne dies explizit zu thematisieren, von der ikonischen auf die symbolische Darstellungsebene gewechselt. Das **Lemma**, das auf die ikonische Darstellungsebene zielt, wird hier nun über eine **Definition** auf symbolischer Ebene, die Teilbarkeit durch zwei, begründet. Auch hier wird der Bezug zur **Aussage** nicht explizit formuliert.

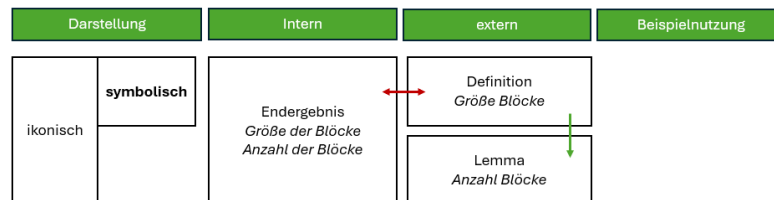


Abbildung 96 Inselgruppe, Blockbeweis, Turn 78-81, Motivation Lemma aus Definition

Bei der Übertragung des Blockbeweises auf die Zahlen 2 und 7 wirft B erneut die Frage auf, welche Spezifität hinsichtlich Blockgröße oder Blockanzahl übertragen werden soll:

„Was für Blöcke würdet ihr jetzt bei dem Dritten nehmen?“ (Turn 223, B)

C verweist daraufhin wieder auf die Anzahl der Blöcke und begründet dies an dieser Stelle aus der **Kohärenz der Darstellungsebenen**:

„Naja, da steht ja man muss vier gleich große Blöcke machen, ne?“ (Turn 224, C)

Die sprachliche Darstellung gibt also laut C vor, was ikonisch dargestellt werden soll. Daraufhin stellt C zunächst eine Diskrepanz fest, löst diese dann aber für sich selbst auf:

„Ja, aber es geht halt nicht, oder? Ach, doch, es geht. Es sind dann ja Zweierblöcke, oder?“ (Turn 226, C)

C stellt fest, dass, um hinsichtlich der Anzahl der Blöcke eine *klassifikatorisch* verstandene Gemeinsamkeit herzustellen, eine Unterschiedlichkeit in der Größe der Blöcke akzeptiert werden muss. Hier wird zum ersten Mal explizit unterschieden zwischen diesen beiden Spezifitäten:

Ab Turn 327 entspringt um diesen Punkt eine Diskussion zwischen B und C: B stellt zunächst die von C formulierte streng direktionale Beziehung von der sprachlichen zur ikonischen Darstellungsebene infrage:

„Es ist halt die Frage, es ist da generell einfach nur gleich große Blöcke mit gemeint oder unbedingt vier Blöcke. Das ist halt, vier Blöcke ist halt nicht immer möglich [...]“ (Turn 327, B)

Laut B ist es nicht möglich, eine **Kohärenz zwischen den Beispielen** herzustellen, wenn man die **Kohärenz der Darstellungsebenen** im strengen Sinne auffasst und erneut versucht vier gleich große Blöcke zu markieren. Daraus motiviert B ein **Lemma**, wonach die Anzahl der Blöcke beliebig ist und nicht notwendigerweise auf vier festgelegt.

Darauf, dass dies laut C durchaus möglich ist, geht B hier nicht ein, was darauf schließen lässt, dass diese Äußerung von C für B im Diskussionsverlauf untergegangen ist.

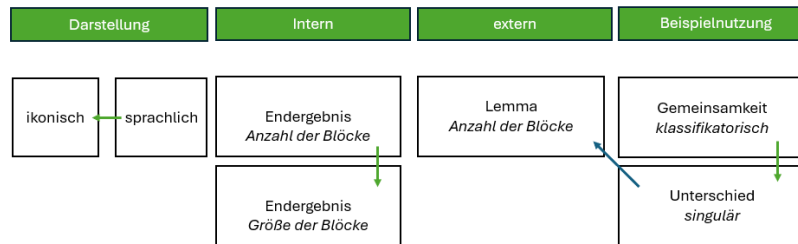


Abbildung 97 Inselgruppe, Blockbeweis, Turns 224, 226 und 327

C geht nun aber nicht darauf ein, dass die **Kohärenz zwischen den Beispielen** hinsichtlich der Spezifität von vier gleich großen Blöcken durchaus gegeben ist, sondern liefert stattdessen zwei voneinander unabhängige Begründungen dafür, warum es vier gleich große Blöcke sein müssen. Der erste Begründungsstrang läuft über eine Art **Kontraposition**:

„Naja, drei gleich große Blöcke würde ja nicht funktionieren. Wenn du die hier wegnimmst, hast du drei mal drei, das sind neun.[...]“ (Turn 328, C)

Der Fokus bleibt weiterhin auf der Anzahl der Blöcke. Es wird hier ein Beispiel für die folgende Aussage genannt: Wenn die Anzahl der Blöcke nicht vier beziehungsweise nicht gerade ist, dann funktioniert es nicht, das heißt, dann erhält man nicht das gewünschte Endergebnis. Dies wird hier jedoch nicht allgemein begründet, sondern durch ein rein singulär betrachtetes Beispiel. Dabei liegt eine ähnliche, *kreisförmige* Organisation innerhalb des Beweisschrittes des Endergebnisses vor wie in der Interaktionsgruppe, wenn aus dem singulären Endergebnis von neun Plättchen die Anzahl und Größe der Blöcke hergeleitet wird. Außerdem stellt die obige Aussage nicht die korrekte Kontraposition dar zu dem Lemma: Wenn die Anzahl der Blöcke vier ist, dann erhält man das gewünschte Endergebnis. Dass „drei gleich große Blöcke [...] nicht funktionieren“, begründet C weiter wie folgt:

„[...] Aber die Anzahl der Blöcke muss ja gerade sein. Das heißt, es kann nur eine gerade Anzahl gleich großer Blöcke sein.“ (Turn 328, C)

Hier wird das bereits in Turn 79 formulierte Lemma genutzt, um dessen Kontraposition zu begründen. Diese Kontraposition wiederum sollte aber ursprünglich

das Lemma begründen. Hier liegt in der externen Kohärenzebene auf der *logischen Metaebene* eine *kreisförmige* Organisation vor.

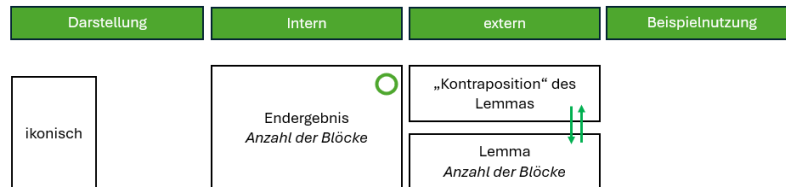


Abbildung 98 Inselgruppe, Blockbeweis, Turn 328, Kreisförmige Organisation auf logischer Metaebene

C argumentiert hier nur dafür, dass die vier gleich großen Blöcke notwendig sind für die Argumentation, bleibt also auf der Ebene der **internen** und **externen Kohärenz**. Auf die von B formulierte Problematik, dass sich auf Grundlage dieser Spezifität keine **Kohärenz zwischen den Beispielen** herstellen lässt, geht C dabei nicht ein. Dies formuliert B auch weiterhin im Anschluss an die Argumentation von C:

„Ja, klar, aber trotzdem. Vier gleich große Blöcke ist ja nicht immer möglich. [...]“ (Turn 329, B)

Das Grundproblem ist für B hier nicht gelöst. Die Diskussion geht an dieser Stelle in eine andere Richtung, sodass diese Diskrepanz zwischen B und C nicht aufgelöst wird.

Bei der Diskussion des Blockbeweises ist der Fokus die meiste Zeit auf das Endergebnis gerichtet. Von der Übungsleiterin wird für diesen Beweisversuch in der zweiten Arbeitsphase eine Strukturierung vorgeschlagen, wonach die Zahlen einzeln in Blöcke zerlegt werden, also die Voraussetzung ikonisch dargestellt wird. C sieht auch dies zunächst in Bezug zum Endergebnis, nicht zur Voraussetzung:

„Aber ich finde es irgendwie schon sinnvoll, weil es zeigt ja, dass am Ende ein Plättchen überbleibt.“ (Turn 495, C)

Erst D lenkt den Fokus diesbezüglich auf den Beweisschritt der Voraussetzung:

„Und es wurde nochmal gleichzeitig, also zusätzlich nochmal im Prinzip *bewiesen*, dass die erste Zahl gerade ist, beziehungsweise die zweite Zahl ungerade.“ (Turn 496, D, Herv. d. Verf.)

D formuliert hier explizit, dass durch diese ikonische Darstellung die Voraussetzung entsprechend der Aussage verdeutlicht wird. Die Organisation zwischen interner und externer Kohärenzebene ist jedoch *umgekehrt* zur Beweislogik: Laut D beweist diese Darstellung die in der Aussage geforderte Voraussetzung.

In der Beweislogik müsste die ikonische Darstellung der Voraussetzung aus den in der Aussage geforderten Eigenschaften hergeleitet werden.

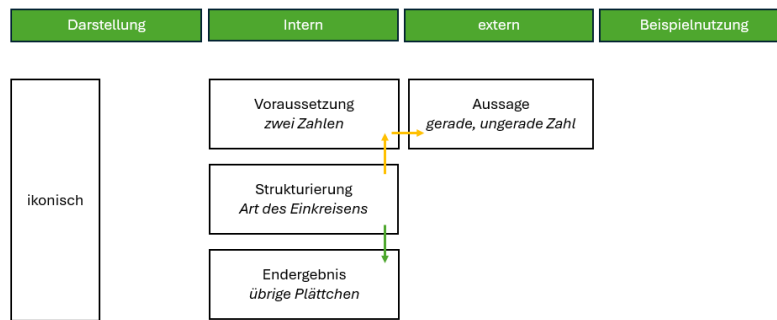


Abbildung 99 Inselgruppe, Blockbeweis, Turns 495f, Umgekehrte Organisation zwischen interner und externer Ebene

Entitäten der externen Kohärenzebene und deren Organisation

In dieser Gruppe wird von Anfang an direkt über die **ikonische Definition** einer geraden Zahl argumentiert. Es findet diesbezüglich ein expliziter Wechsel statt von der Spezifität der Größe der Blöcke hin zur Spezifität der Anzahl der Blöcke. Diese Spezifitäten werden explizit voneinander unterschieden.

Dabei wird das gleiche **Lemma** wie in der Interaktionsgruppe formuliert. Dieses wird schließlich über die **symbolische Definition** der Parität begründet. Die Organisation der externen Kohärenzebene *entspricht* damit der Beweislogik. Die **Darstellungsebenen** ikonisch und symbolisch werden dabei jedoch implizit **vermischt**. Das Lemma wird hier vor allem auf der **externen Kohärenzebene** motiviert und begründet sowie über die **Kohärenz der Darstellungsebenen**. In diesem Verständnis gibt die sprachliche Darstellung vor, was ikonisch dargestellt werden soll. Die Problematik, dass dabei nicht immer die **Kohärenz zwischen den Beispielen** gewährleistet werden kann, steht in dieser Diskussion eher im Hintergrund.

Dass sich aus dem Lemma die Aussage herleiten lässt und damit die Kohärenz von interner und externer Ebene gewährleistet wird, wird nicht explizit thematisiert.

In der weiteren Diskussion wird von der korrekten *linearen* Organisation abgewichen. Dabei zeigen sich auf verschiedenen Ebenen *kreisförmige* Organisationsformen. Einmal, wie schon in der Interaktionsgruppe, innerhalb des Beweisschrittes des Endergebnisses, wenn die Anzahl Blöcke aus der konkreten Ge-

samtanzahl der Plättchen heraus begründet wird. Und einmal in der externen Kohärenzebene auf der *logischen Metaebene*, wenn die (falsch formulierte) **Kontraposition** des Lemmas aus dem Lemma heraus begründet wird und das **Lemma** wiederum aus dessen Kontraposition heraus.

Die Voraussetzung wird erst in der zweiten Arbeitsphase einbezogen und erst auf den Impuls der Übungsleiterin hin, die Ausgangszahlen direkt in Doppelreihen zu strukturieren. Die Organisation von interner und externer Ebene ist hier jedoch *umgekehrt* zur Beweislogik .

Intra- und interpersonelle Prozesse

A spielt auch hier wieder eher eine Nebenrolle, indem A lediglich zu Beginn die Kohärenz zur externen Ebene als Problem aufwirft. Dieses Problem versucht C im Folgenden aufzulösen. Dafür formuliert C das gleiche Lemma, das schon in der Interaktionsgruppe formuliert wurde, und begründet dieses ebenfalls aus der symbolischen Definition der Parität heraus. Im weiteren Diskussionsverlauf entwickelt C verschiedene weitere Begründungen für dieses Lemma, die sich über die **Kohärenz der Darstellungsebenen** und eine kreisförmige Organisation auf der logischen Metaebene in der **externen Kohärenzebene** ergeben. C nimmt auch in diesem Abschnitt eine **dominante** Rolle ein, indem C das oben beschriebene Verständnis weitgehend alleine entwickelt.

B stellt dagegen die **Kohärenz zwischen den Beispielen** in Frage. Für B bleibt diese Problematik bis zum Ende bestehen, vor allem deshalb, weil die Argumentationsstränge von B über die Kohärenz der Beispiele und von C über die externe Kohärenz und das entsprechende Lemma parallel nebeneinander laufen und nicht zueinander in Bezug gesetzt werden. Es wird nicht auf der Metaebene erkannt, dass hier auf unterschiedlichen Ebenen argumentiert wird. Die beiden Verständnisse stehen sich bis zum Ende unvereinbar gegenüber. A und D äußern sich im Diskussionsverlauf nicht weiter zu diesem Punkt, weshalb unklar ist, welches Verständnis von ihnen entwickelt wird. C steht (wie auch B) mit dem eigenen Verständnis damit **isoliert** in diesem Diskussionsverlauf.

D bezieht auf, den Impuls der Übungsleiterin hin, die Voraussetzung mit in die Betrachtung ein, bleibt damit jedoch ebenfalls **isoliert** in diesem Abschnitt. Die anderen Diskussionsteilnehmenden äußern sich nicht zu diesem Punkt.

Präinteraktionsgruppe

Turn-by-Turn-Analyse

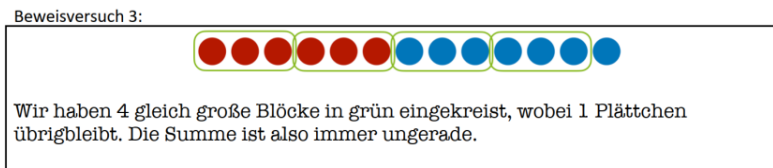


Abbildung 100 Blockbeweis (entspricht Abbildung 31)

In der Präinteraktionsgruppe wird als zu übertragende Spezifität von B zunächst die Größe der Blöcke gewählt:

„Weil die haben das ja in Dreierdinger“ (Turn 470, B)

Hinsichtlich dieser Spezifität soll zwischen den **Beispielen Kohärenz** hergestellt werden. B stellt dabei jedoch weiterhin fest, dass die **externe Kohärenz** zur Aussage dann nicht mehr gegeben ist:

„Das wäre da ja sogar eine gerade Zahl. Das würde ja gar keinen Sinn machen.“ (Turn 475, B)

Es wird hier nicht weiter begründet, warum dies keine gerade Zahl darstellt. Ob dies an der ungeraden Gruppengröße oder an dem dann fehlenden Plättchen liegt, bleibt unklar.

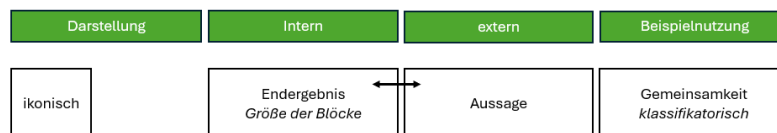


Abbildung 101 Präinteraktionsgruppe, Blockbeweis, Turns 470 und 475, Kohärenz zwischen den Beispielen prioritär gegenüber externer Kohärenz

D versucht daraufhin die **externe Kohärenz** zur Aussage wiederherzustellen, indem die Größe der Blöcke verändert wird:

„Okay, wenn man dann drei Blöcke von drei nimmt. Wenn man jetzt das mit vier machen würde, würde das wieder gehen.“ (Turn 478, D)

Auch hier wird nicht begründet, warum dies nun tatsächlich die Kohärenz herstellt. Die nun gerade Gruppengröße, die gerade Gruppenanzahl oder das übrige Plättchen kommen alle als mögliche Begründung infrage. Auch ist nicht klar, ob mit den „vier“ die Größe oder die Anzahl der Blöcke gemeint ist. Nun ist jedoch die **Kohärenz zwischen den Beispielen** auf Grundlage der oben gewählten Spezifität nicht mehr gegeben. Dies wird von D indirekt in Turn 482 adressiert:

„[...] die Sache ist, das wird nicht klar, ob das immer in Dreierpärchen sein muss. Es wird einfach nur gesagt „drei gleich große oder vier gleich große Blöcke“. [...]“ (Turn 482, D)

Um die zu übertragende Spezifität zu klären, bedient sich D hier der **Kohärenz der Darstellungsebenen**. Danach sollte die sprachliche Darstellung die zu übertragende ikonische Spezifität vorgeben. Dies ist laut D jedoch in diesem Beweisversuch nicht gegeben. An dieser Stelle findet implizit ein Wechsel von der Größe der Blöcke zur Anzahl der Blöcke statt. Laut D ist zwar nicht sprachlich benannt, dass es sich um Dreierblöcke handeln muss, jedoch unterscheidet sich die benannte Anzahl an gleich großen Blöcken zwischen den Beispielen. Tatsächlich ist im ursprünglichen Beweisversuch von vier gleich großen Blöcken die Rede. Hier scheint bereits implizit eine sprachliche Formulierung für das neue Beispiel festgelegt worden zu sein, die nun im Widerspruch steht zu der ursprünglichen. D wechselt an späterer Stelle wieder von der Anzahl der Blöcke zur Größe der Blöcke und schlägt vor, eine Gruppengröße von vier zu wählen:

„Ja, oder du machst vier in eins.“ (Turn 495, D)

D selbst scheint hier die Unterscheidung zwischen Gruppengröße und Gruppenanzahl nicht klar zu sein. Diese Spezifitäten werden stark vermischt und daher kommt D auch nicht zu einheitlichen Folgerungen hinsichtlich der Kohärenzen auf den verschiedenen Ebenen. Dass nun ein Unterschied zwischen den beiden Beispielen hinsichtlich der Größe der Blöcke vorliegt, wird von D nicht weiter thematisiert. Ein entsprechendes **Lemma**, wie in den anderen Gruppen, wird hier nicht etabliert.

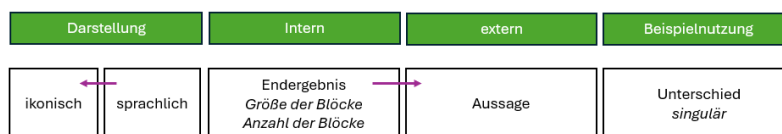


Abbildung 102 Präinteraktionsgruppe, Blockbeweis, 478, 482 und 495, Externe Kohärenz prioritär gegenüber Kohärenz zwischen den Beispielen

Entitäten der externen Kohärenzebene und deren Organisation

Auch in dieser Gruppe wird versucht, die Diskrepanz zwischen der **Kohärenz zwischen den Beispielen** und der Kohärenz zur **externen Ebene** der Aussage aufzulösen. In diesem Zusammenhang wird auch die **Kohärenz der Darstellungsebenen** einbezogen, wonach die sprachliche Darstellung vorgeben soll, was ikonisch dargestellt wird. Es wird im Endergebnis von der Spezifität der Größe der Blöcke zur Spezifität der Anzahl der Blöcke gewechselt. Dies passiert jedoch sehr implizit und die beiden Spezifitäten werden nicht klar voneinander unterschieden.

Die Diskrepanz zwischen den Kohärenzebenen wird auch nicht aufgelöst, sondern jeweils einer der beiden Ebenen der Vorzug gegeben. Dabei wird nicht festgestellt, dass vier Blöcke eine gerade Anzahl an Blöcken wären, und kein diesbezügliches **Lemma** formuliert. Auch die **Definition** der Parität wird nicht explizit in die Betrachtung mit einbezogen.

Intra- und interpersonelle Prozesse

B hat hier eine **Nebenrolle**. Durch B wird die Problematik der Kohärenz zur externen Ebene in die Diskussion eingebracht. B legt dabei den Fokus auf die **Kohärenz zwischen den Beispielen**, löst die sich daraus ergebende Diskrepanz zur **externen Kohärenzebene** jedoch nicht für sich auf.

In diesem Abschnitt hat D eine **dominante** Rolle. D versucht die **Kohärenz zur externen Ebene** herzustellen, indem zur Spezifität der Größe der Blöcke gewechselt wird, verliert dabei jedoch die **Kohärenz zwischen den Beispielen** aus den Augen. Dies wird von D nicht weiter problematisiert. Die Verständnisse von B und D stehen sich damit bis zum Ende unvereinbar gegenüber.

D kommt auch nicht so weit, wie die dominanten Rollen in den anderen Gruppen, und formuliert kein entsprechendes *Lemma*. Die anderen Diskussionsteilnehmenden äußern sich nicht weiter zu dieser Problematik.

Vergleich der Gruppen

Entitäten der externen Kohärenzebenen und deren Organisation

In allen Gruppen wird bei der Diskussion des Blockbeweises eine Diskrepanz zwischen dem Herstellen der **Kohärenz zwischen den Beispielen** und der Sicherung der **externen Kohärenz** zur Aussage festgestellt. Auch die **Kohärenz der Darstellungsebenen** wird in der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe insofern in die Betrachtungen einbezogen, dass die zu übertragende Spezifität durch die sprachliche Ebene vorgegeben sein soll.

In der Interaktionsgruppe und in der Inselgruppe wird ein **Lemma** als zusätzliche Entität auf der externen Ebene eingeführt⁶⁹. In der Interaktionsgruppe wird die **Diskrepanz zwischen den Kohärenzebenen** dadurch gelöst.

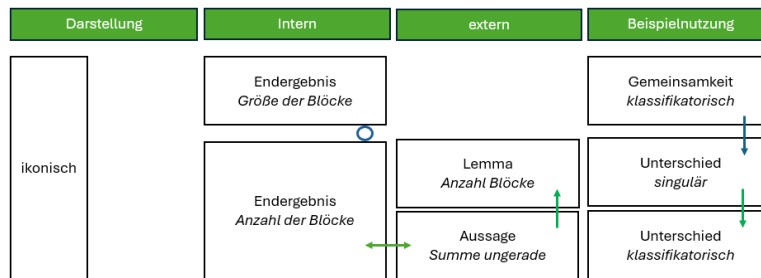


Abbildung 103 Interaktionsgruppe, Zusammenspiel der einzelnen Kohärenzebenen bei der Etablierung des Lemmas (entspricht **Abbildung 93**)

In der Inselgruppe wird diese nur teilweise gelöst, es bleiben jedoch bis zum Ende hin diesbezüglich unvereinbare Verständnisse bestehen. In der Präinteraktionsgruppe bleibt die Diskrepanz zwischen den Kohärenzebenen bis zum Ende bestehen, wobei jeweils einer der Kohärenzebenen der Vorzug gegenüber der anderen gegeben wird. In dieser Gruppe wird auch kein **Lemma** etabliert.

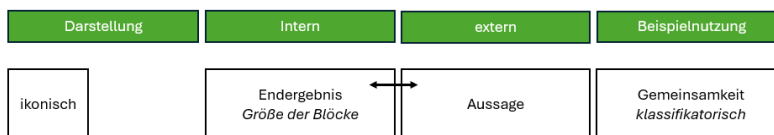


Abbildung 104 Präinteraktionsgruppe, Kohärenz zwischen den Beispielen prioritär gegenüber externer Kohärenz (entspricht **Abbildung 101**)

⁶⁹ In der Interaktionsgruppe wurde bereits zuvor in der Diskussion des Paarbeweises ein Lemma eingeführt.

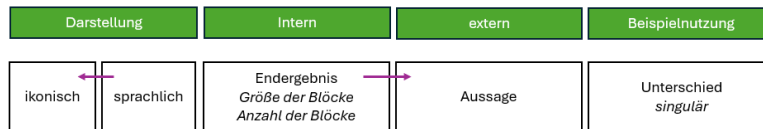


Abbildung 105 Präinteraktionsgruppe, Externe Kohärenz prioritär gegenüber Kohärenz zwischen den Beispielen (entspricht **Abbildung 102**)

Wesentliche Faktoren für die **Etablierung des Lemmas** sind neben dem Auflösen der Diskrepanz zwischen den verschiedenen Kohärenzebenen, ein Wechsel in der Spezifität, die übertragen werden soll, ein Wechsel von einer eher singulären zu einer klassifikatorischen Betrachtung und die Betrachtung der Kohärenzen innerhalb der externen Ebene (siehe unten). Die entsprechenden Wechsel laufen dabei jedoch meist nur implizit ab. Der Einbezug der Kohärenz der Darstellungsebenen führt in diesem Zusammenhang eher zu Verwirrungen. Nur in der Interaktionsgruppe, wo diese Kohärenzebene nicht explizit einbezogen wird, kann die Diskrepanz interaktional durch das Lemma aufgelöst werden.

Auf der externen Ebene zeigt sich in der Interaktionsgruppe eine zur Beweislogik *umgekehrte* Organisation von Aussage und Lemma. Darüber hinaus zeigt sich in dieser Gruppe auch eine *kreisförmige* Organisation, bei der das Lemma zunächst implizit aus der Aussage heraus motiviert und daran anschließend die Aussage aus eben diesem Lemma begründet wird.

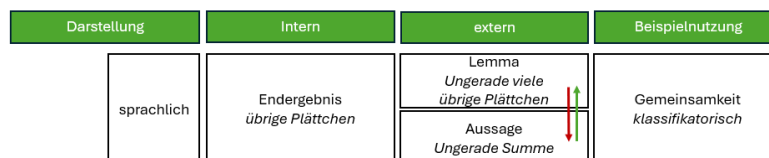


Abbildung 106 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Kreisförmige Organisation auf der externen Ebene (entspricht **Abbildung 90**)

In der Inselgruppe wird auf der *logischen Metaebene kreisförmig* argumentiert, indem das Lemma und dessen (falsch formulierte) **Kontraposition** gegenseitig auseinander begründet werden.

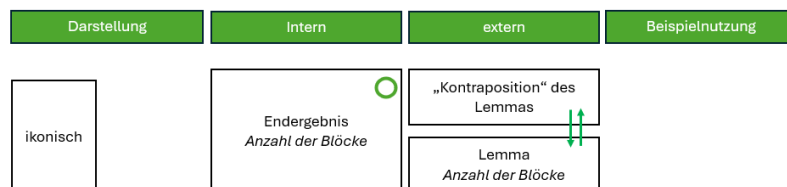


Abbildung 107 Inselgruppe, Blockbeweis, Kreisförmige Organisation auf logischer Metaebene (entspricht **Abbildung 98**)

Durch den Einbezug der **Definition** gelingt es in beiden Gruppen, die Kohärenzen auf der externen Ebene der Beweislogik *entsprechend* zu organisieren: Aus der Definition wird das Lemma begründet und aus dem Lemma die Aussage. Über das Herstellen dieser Zusammenhänge wird zudem die Kohärenz von interner und externer Ebene gewährleistet.

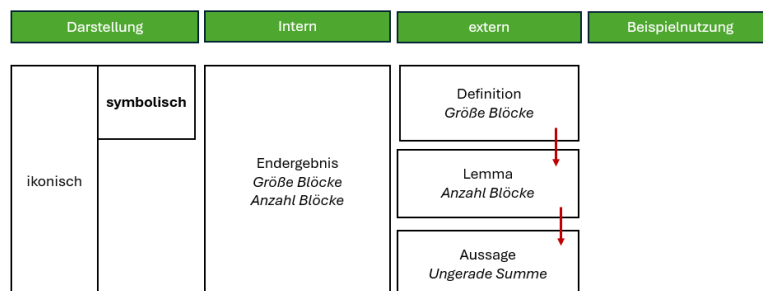


Abbildung 108 Interaktionsgruppe, Blockbeweis, Turn 128, Korrekte Organisation auf externer Ebene durch Einbezug der Definition (entspricht **Abbildung 94**)

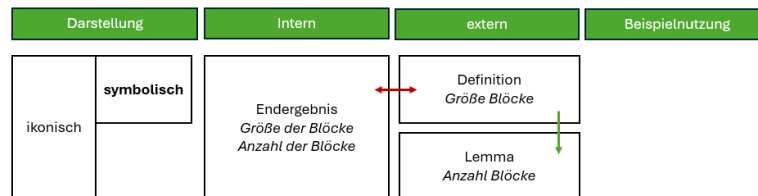


Abbildung 109 Inselgruppe, Blockbeweis, Korrekte Organisation von Definition und Lemma (entspricht **Abbildung 96**)

In der dritten Gruppe wird die **Definition** nicht explizit einbezogen, was ein weiterer Grund sein kann, warum hier kein entsprechendes Lemma etabliert wird.

Die Voraussetzung wird in den Diskussionen zum Blockbeweis nur in der Inselgruppe und erst auf einen Impuls der Übungsleiterin hin einbezogen. Dabei wird die Kohärenz zwischen interner und externer Ebene jedoch *umgekehrt* zur Beweislogik organisiert: Die in der Aussage geforderten Eigenschaften der Voraussetzung werden aus der ikonischen Darstellung der Voraussetzung heraus begründet.

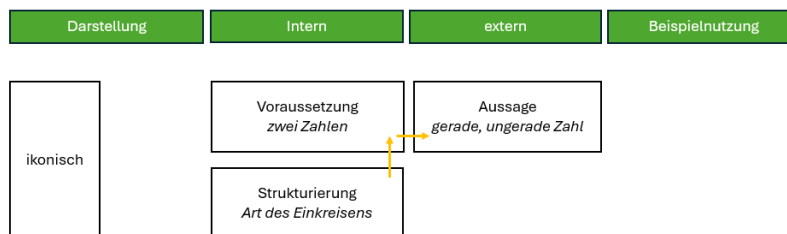


Abbildung 110 Inselgruppe, Blockbeweis, Umgekehrte Organisation zwischen interner und externer Ebene (Ausschnitt aus **Abbildung 99**)

Intra- und interpersonelle Prozesse

In jeder Gruppe gibt es eine Person, die die Diskrepanz zwischen der **Kohärenz der Beispiele** und der **externen Kohärenz** zur Aussage versucht aufzulösen. In der Interaktionsgruppe und der Inselgruppe ist dies die **dominante** Person. In

der Präinteraktionsgruppe ist dies eine der **unterstützenden** Personen, der es nicht gelingt, wie in den anderen Gruppen, die Diskrepanz durch die Formulierung eines Lemmas aufzulösen.

In der Interaktionsgruppe werden die Lemmata (zum Paarbeweis und zum Blockbeweis) gemeinsam in der **Interaktion** etabliert, jedoch stark gelenkt durch die dominante Person. Von jeder/m Diskussionsteilnehmenden/m in dieser Gruppe wird am Ende zumindest eines der Lemmata in die eigene Argumentation übernommen. Hinsichtlich der Rolle des Lemmas zur Auflösung der Diskrepanzen zwischen den Kohärenzebenen scheint hier somit ein geteiltes Verständnis vorzuliegen. In Bezug auf die Organisation der Entitäten innerhalb der externen Ebene jedoch nicht. Die der Beweislogik entsprechende Organisation wird nur von der Nebenrolle in dieser Gruppe formuliert.

In der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe liegen bis zum Ende hin **gegensätzliche Verständnisse** vor, wonach einerseits der Fokus eher auf die Kohärenz zwischen den Beispielen gelegt wird und andererseits auf die externe Kohärenz zur Aussage.

6.4.4 Kohärenz der Darstellungsebenen

Je nach diskutiertem Beweisversuch zeigten sich in den Diskussionen unterschiedliche Fokussierungen, eher auf die ikonische oder eher auf die sprachliche Darstellungsebene. Dabei wurden die Beziehung dieser Ebenen zueinander und die sich daraus ergebende Rolle der sprachlichen Darstellung in einem ikonischen Beweis unterschiedlich aufgefasst. Dies soll im Folgenden differenziert beleuchtet werden.

Interaktionsgruppe

In der Interaktionsgruppe findet durch B bei der Diskussion des Paarbeweises ein expliziter Wechsel von der **ikonischen zur sprachlichen** Darstellungsebene statt. Dies geschieht in Reaktion auf einen Strukturierungsvorschlag von C (vgl. Abschnitt 6.4.2):

„Achso, ich glaube, [...] deswegen sollte man es ja machen, dass man nicht weiter einkreist, weil damit zeigt man dieses Problem, dass halt nicht genau eins übrig bleibt. Man kann auch *sagen*, dass fünf übrig bleiben und das ist ja auch eine ungerade Zahl. Das ist halt so ein *Formulierungsaspekt*.“ (Turn 180, B, Herv. d. Verf.)⁷⁰

Während in diesem Turn zunächst ikonische Zusammenhänge erläutert werden, wird durch das Wort „sagen“ explizit darauf verwiesen, dass zur Explikation der Gemeinsamkeit, dass in beiden Beispielen im Endergebnis ungerade viele Plätt-

⁷⁰ Dieser Turn ist ebenfalls Teil der Analyse in Gayer (2023).

chen übrig bleiben, eine Versprachlichung nötig ist. Die sprachliche Darstellung hat damit laut B die Aufgabe die Kohärenz zwischen den Beispielen zu gewährleisten. Die sprachliche Darstellung ergibt sich damit aus der ikonischen.

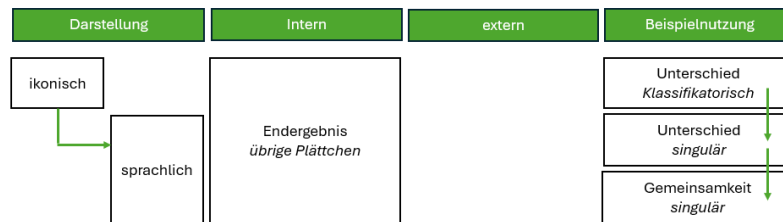


Abbildung 111 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 180, Sprachliche Darstellung expliziert Kohärenzen zwischen den Beispielen (Ausschnitt aus **Abbildung 84**)

Außerdem kommt der sprachlichen Ebene damit die Aufgabe zu, das entsprechende Lemma zu formulieren und damit die Entitäten auf der **externen Kohärenzebene** zu explizieren:

„[...] Ist halt die Frage, ob man dann bei dem *Text* hätte einfach *schreiben können*, dass dann nicht genau ein Plättchen übrig bleibt, sondern genau ungerade Plättchen immer übrig bleiben.“ (Turn 207, B, Herv. d. Verf.)

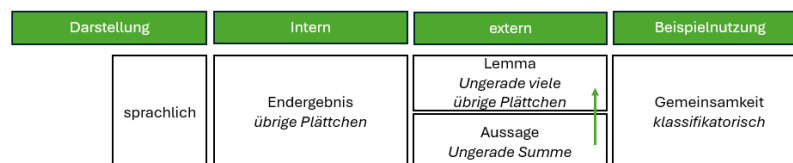


Abbildung 112 Interaktionsgruppe, Paarbeweis, Turn 207, Sprachliche Explikation des Lemmas (Ausschnitt aus **Abbildung 90**)

An späterer Stelle, bei der Diskussion des Pfeilbeweises, wird diese Organisation von der **ikonischen zur sprachlichen** Darstellungsebene wieder aufgegriffen:

„Genau. Müssen die *Erklärungen* dazu auch *allgemeingültig* formuliert sein. Weil dann müsste man ja schreiben von wegen, „Man zieht so viele Plättchen nach oben, bis eine Doppelreihe mit einem Extraplättchen entsteht.“. Das verstehe ich jetzt nicht, ob man das *allgemeingültig* oder *auf die Zahlen beziehen* soll. Das ergibt irgendwie beides keinen Sinn.“ (Turn 392, B, Herv. d. Verf.)

Die sprachliche Darstellung hat hier laut B die Aufgabe, die klassifikatorisch verstandenen und ikonisch abgebildeten Zusammenhänge aufeinanderfolgender Beweisschritte zu explizieren. Die Richtung geht damit wieder von der ikonischen Ebene zur sprachlichen. Die sprachliche Darstellung muss dabei auch die **internen Kohärenzen** mit einbeziehen. Sie geht aber insofern über diese hinaus, als auch die **Ebene der Beispielnutzung** mit einbezogen werden soll. Die sprachliche Darstellung hat damit die Aufgabe, die Allgemeingültigkeit des ikonisch Dargestellten zu formulieren.

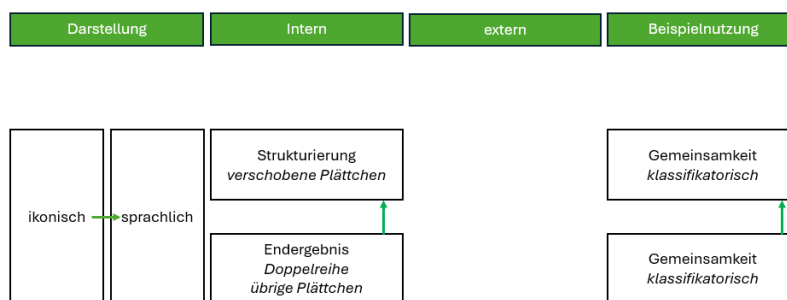


Abbildung 113 Interaktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 392, Sprachliche Darstellungsebene expliziert klassifikatorische Zusammenhänge der Beweisschritte auf der ikonischen Darstellungsebene (Erweiterung von **Abbildung 60**)

Inselgruppe

In der Inselgruppe verweist C, in der Diskussion des Blockbeweises, zunächst auf eine Organisation der Darstellungsebenen, wonach die Richtung von der **sprachlichen** Darstellung **zur ikonischen** geht. Auf die Frage, wie die ikonische Darstellung auf das Zahlenbeispiel mit zwei und sieben übertragen werden soll, reagiert C dabei wie folgt:

„Naja, da steht ja, man muss vier gleich große Blöcke machen, ne?“ (Turn 224, C)

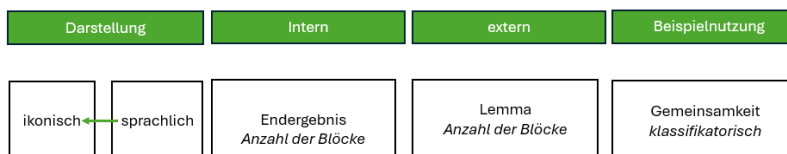


Abbildung 114 Inselgruppe, Blockbeweis, Turn 224, Sprachliche Darstellung gibt vor, was ikonisch zu übertragende klassifikatorische Gemeinsamkeit sein soll (Ausschnitt aus **Abbildung 97**)

Laut C soll also sprachliche Darstellung festlegen, was ikonisch dargestellt wird. Die ikonische Darstellung ergibt sich also aus der sprachlichen. Auch in der Diskussion des Pfeilbeweises zur Anzahl der zu verschiebenden Plättchen äußert sich C zunächst in ähnlicher Weise:

„Aber die Sache ist, das wird halt aus der Erklärung nicht so ganz klar, ob im Prinzip immer plus eins und minus eins [...]“. (Turn 243, C, Herv. d. Verf.)

Danach soll sich also auch hier an der sprachlichen Darstellung orientiert werden, um zu entscheiden, welche Spezifität übertragen wird. Im weiteren Diskussionsverlauf erläutert C dann die ikonisch dargestellte, interne Kohärenz der Strukturierung zum Endergebnis in klassifikatorischer Weise (vgl. dazu Abschnitt 6.4.1). Schließlich wechselt C in Turn 474 wieder auf die sprachliche Darstellungsebene:

„Aber bei der Strukturierung muss man halt wirklich darauf achten, dass man daran denkt, nicht einfach zu schreiben, dass plus eins und minus eins gerechnet wird, sondern dass die Zahlen so aneinander angepasst werden, dass eine Doppelreihe mit einem Extraplättchen entsteht. [...]“ (Turn 474, C)

Die sprachliche Darstellung wird hier nun in der Weise verstanden, dass diese die **Kohärenz zwischen den Beispielen** gewährleisten soll, indem **interne Zusammenhänge** in klassifikatorischer Weise formuliert werden. Die Richtung geht nun also von der **ikonischen zur sprachlichen** Darstellungsebene.

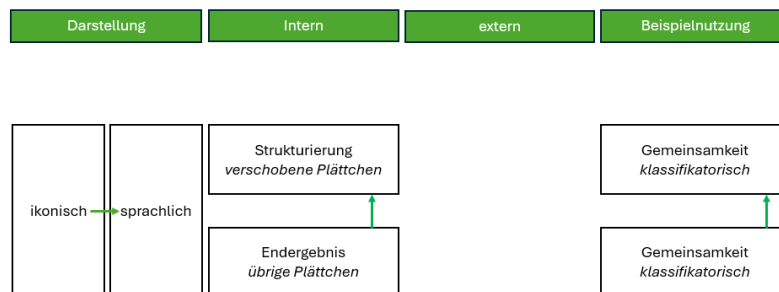


Abbildung 115 Inselgruppe, Pfeilbeweis, Turn 474, Sprachliche Darstellungsebene expliziert klassifikatorische Zusammenhänge der Beweisschritte auf der ikonischen Darstellungsebene (Erweiterung von **Abbildung 67**)

Präinteraktionsgruppe

In der Präinteraktionsgruppe zeigt sich hinsichtlich der Organisation der Darstellungsebenen eine ähnliche Entwicklung wie in der Inselgruppe. In Bezug auf den Blockbeweis wird zunächst von D davon ausgegangen, dass die **sprachliche** Darstellung vorgeben soll, was **ikonisch** übertragen werden soll:

„[...] die Sache ist, das wird nicht klar, ob das immer in Dreierpärchen sein muss. Es wird einfach nur gesagt „drei gleich große oder vier gleich große Blöcke“. [...]“ (Turn 482, D)

An späterer Stelle wird bei der Diskussion des Pfeilbeweises der ikonisch dargestellte, interne Zusammenhang von Strukturierung und Endergebnis durch A in klassifikatorischer Weise beschrieben (vgl. Abschnitt 6.4.1). E und F wechseln in Turn 715 und 716 dann zur sprachlichen Darstellungsebene und antworten damit auf die Frage von B, wie diese internen Zusammenhänge in allgemeingültiger Weise versprachlicht werden können:

- 715 E Es werden so viele Plättchen nach oben verschoben, damit ...
 716 F ... immer Zweierpaare gebildet werden können.

An dieser Stelle zeigt sich wieder ein Verständnis, wonach die sprachliche Darstellung die **Kohärenz zwischen den Beispielen** explizieren soll, indem die entsprechenden **internen Zusammenhänge** klassifikatorisch beschrieben werden. Hier geht die Richtung also von der **ikonischen** Darstellung, in Verbindung mit der Kohärenzebene der Beispiele, **zur sprachlichen** Darstellung, welche dadurch vorgegeben ist.

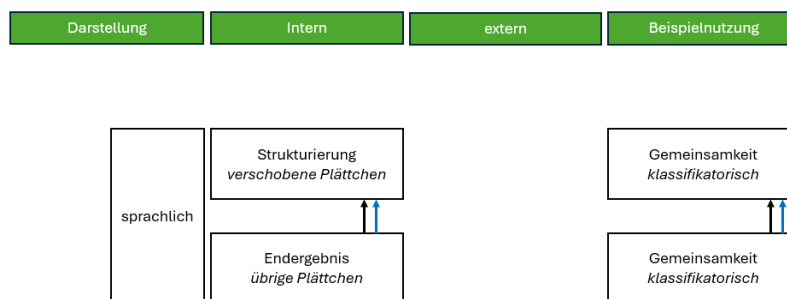


Abbildung 116 Präinteraktionsgruppe, Pfeilbeweis, Turn 715f, Sprachliche Darstellungsebene expliziert klassifikatorische Zusammenhänge der Beweisschritte auf der ikonischen Darstellungsebene (entspricht **Abbildung 72**)

Vergleich der Gruppen

Kohärenzebene der Darstellungsebenen und deren Organisation

In der Inselgruppe und der Präinteraktionsgruppe werden die Darstellungsebenen zunächst von der **sprachlichen Darstellungsebene zur ikonischen** hin organisiert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die sprachliche Darstellung vorgibt, was ikonisch auf ein anderes Beispiel übertragen werden soll.

An späterer Stelle werden die Darstellungsebenen jedoch in beiden Gruppen in der **umgekehrten Richtung** organisiert, wobei nicht auf der Metaebene festgestellt wird, dass es sich hierbei um eine andere Richtung handelt. In diesem Verständnis der Organisation der Darstellungsebenen hat die sprachliche Darstellungsebene die Aufgabe, die **Kohärenz zwischen den Beispielen** zu gewährleisten, indem die entsprechenden **internen Kohärenzen** in klassifikatorischer Weise beschrieben werden. Erst durch diese sprachliche Explikation kann damit die Übertragbarkeit, also die Allgemeingültigkeit, des beispielhaft ikonisch Dargestellten gewährleistet werden.

In der Interaktionsgruppe wird ausschließlich die letztgenannte Organisationsrichtung der Darstellungsebenen betrachtet. Der sprachlichen Ebene wird dabei in dieser Gruppe zudem die Rolle beigemessen, Lemmata auf der **externen Kohärenzebene** zu explizieren.

Intra- und interpersonelle Prozesse

Die Organisation der Darstellungsebenen und die Rolle der sprachlichen Darstellung werden in der Interaktionsgruppe und der Inselgruppe durch die **dominante** Person formuliert. In der Interaktionsgruppe passiert dies **interaktional** in Auseinandersetzung mit Äußerungen der anderen Diskussionsteilnehmenden. In der Inselgruppe formuliert die dominante Person alleine **beide Richtungen** in der Organisation der Darstellungsebenen, ohne darin eine Diskrepanz zu erkennen.

In der Präinteraktionsgruppe liegen zwischen den Diskussionsteilnehmenden **unterschiedliche Verständnisse** vor. Die Nebenrolle D, die auch zuvor schon viele wichtige Verständnisaspekte zu den Normen eingebracht hat, formuliert alleine die Richtung von der sprachlichen zur ikonischen Ebene. Die andere Richtung wird von der dominanten Rolle gemeinsam mit der unterstützenden und einer weiteren Rolle formuliert.

6.4.5 Untersuchungsfokus für die quantitative Auswertung

Die verschiedenen Kohärenzebenen sowie deren Zusammenspiel zeigten sich in der Analyse in diesem Abschnitt als zentral für die Entwicklung der Verständnisse der Allgemeingültigkeit. Im Rahmen der quantitativen Analyse soll daher insbesondere der Einfluss der **Kohärenz**, das heißt jeder der einzelnen **Kohärenzebenen**, auf die Förderung des intendierten Verständnisses der Allgemeingültigkeit untersucht werden im Rahmen der folgenden Hypothese:

4. Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit.

Weiterhin soll differenziert werden zwischen einer Betrachtung der Allgemeingültigkeit auf der ikonischen Darstellungsebene, also der Generizität der ikonischen Darstellung, und der Allgemeingültigkeit auf sprachlicher Ebene. Außerdem wird in der quantitativen Analyse nach den Beweisschritten differenziert. Dabei soll insbesondere der Einfluss einer klassifikatorischen Sichtweise auf deren Kohärenzen untersucht werden.

7 Quantitative Analyse

Auch die quantitative Analyse ist nach den Normen Kohärenz, Vollständigkeit, logische Struktur und Allgemeingültigkeit strukturiert. Die Reihenfolge richtet sich dabei nach der Reihenfolge im qualitativen Teil. Für jede Norm ist die Analyse wie folgt gegliedert:

Forschungsfrage 1.2: Das Erkennen welcher der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite gefördert?

wird im Unterabschnitt zum **beobachteten Normenverständnis** beantwortet. Dafür wird in der Untersuchung differenziert nach den Beweisschritten und der Darstellungsebene, die jeweils im Fokus stand und, wo möglich, nach Unteraspekten der jeweiligen Norm⁷¹ (vgl. Abschnitt 5.1.2). Der Einfluss der Intervention wurde dabei entsprechend des in Abschnitt 4.4.7 beschriebenen Vorgehens untersucht. Die sich daraus ergebende Sequenzierung ist in Tabelle 13 dargestellt.

Tabelle 13 Sequenzielles Vorgehen bei der quantitativen Analyse der Intervention (entspricht Tabelle 8)

Abfolge	Untersuchung	Folgerung
1.	Signifikanz Interaktion Zeit und Gruppe	Intervention fördert intendiertes Normenverständnis
2.	Signifikanz Zeit	In beiden Gruppen wurde in der Interventionszeit das intendierte Normenverständnis gefördert
3.	post hoc Analysen	Intervention hat das Potenzial das intendierte Normenverständnis zu fördern (ggf. längere Interventionszeit nötig)

Für die Beantwortung von

Forschungsfrage 2.2: Welcher Grad an Interpersonalität im Erkennen der intendierten Normbrüche wurde durch die Intervention auf Lernendenseite erreicht?

wurde der Analyse des beobachteten Normenverständnisses eine Analyse des **intendierten Normenverständnisses** vorangestellt und das beobachtete Ver-

⁷¹ Meist war die Datenlage für die Unterasspekte zu gering, um schätzbare Modelle zu erhalten.

ständnis daraufhin mit dem intendierten abgeglichen. Der Grad an Interpersonalität wurde dabei über die entsprechenden Chancen bestimmt, dass auf Lernenseite der jeweilige Normbruch erkannt wird, demgegenüber dass dieser nicht erkannt wird.

In einem weiteren Unterabschnitt wurden die in der qualitativen Analyse herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren auf das Erkennen eines intendierten Normbruchs untersucht im Sinne von

Forschungsfrage 3.2: Wie groß und signifikant ist der Einfluss auf das Erkennen der intendierten Normbrüche durch die in der qualitativen Analyse herausgearbeiteten potenziellen Einflussfaktoren?

Das Vorgehen folgt dabei für jede Hypothese wiederum der in Abschnitt 4.4.7 beschriebenen Sequenzierung. Die entsprechende Übersichtstabelle ist hier nochmals aufgeführt:

Tabelle 14 Sequenzielles Vorgehen bei der Analyse der Hypothesen (entspricht **Tabelle 10**)

Abfolge	Untersuchung	Folgerung
0.	Qualitative Hypothese generiert	postulierte Einflussfaktoren auf das Etablieren der intendierten Normbrüche
1.	Signifikanz Interaktion des Einflussfaktors mit Zeit und Gruppe	Intervention fördert Einfluss der postulierten Einflussfaktor
2.	post hoc Analysen	Intervention hat das Potenzial diesen Einfluss zu fördern (ggf. längere Interventionszeit nötig)
3.	Signifikanz Einflussfaktor	Einflussfaktor hat Einfluss auf Erkennen des intendierten Normbruchs (unabhängig von aktueller Intervention)

An einer Stelle musste eine Neuordnung der Hypothesen zur entsprechenden Norm vorgenommen werden. Im Rahmen der qualitativen Analyse ergab sich bei der Untersuchung der Kohärenz eine Hypothese zu deren Einfluss auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit. Die entsprechende Hypothese wurde daher für die quantitative Untersuchung der Norm der Vollständigkeit zugeordnet. Die Gliederung der Analyse und die damit einhergehende Zuordnung der postulierten Einflussfaktoren zu den Normen sind in Tabelle 15 dargestellt:

Tabelle 15 Zuordnung der Hypothesen zu den Normen

Kohärenz	Vollständigkeit	Logische Struktur	Allgemeingültigkeit
Intendiertes Normenverständnis (für FF 2.2)			
Beobachtetes Normenverständnis (FF 1.2)			
Hypothesen zu weiteren potenziellen Einflussfaktoren (FF 3.2)			
1.1 Nachvollziehbarkeit	2.1 Beweisschritte	3.1 Beweisschritte	
1.2 Ebenenwechsel	2.2 Kohärenz (aus qualitativem Kapitel zur Kohärenz)	3.2 Kohärenz	4 Kohärenz(ebenen)

7.1 Kohärenz

7.1.1 Analyse des intendierten Normenverständnisses

Im Folgenden werden jeweils die interne Kohärenz und die externe Kohärenz der drei Beweisversuche der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung analysiert entlang der Beweisschritte. Dabei wird bei der internen Kohärenz gemäß der Beweislogik für die Strukturierung und das Endergebnis verglichen, inwieweit der jeweilige Beweisschritt aus dem zuvor genannten begründet wird. Bei der Voraussetzung wird entsprechend der Beweislogik untersucht, inwieweit der darauffolgend beschriebene Beweisschritt daraus begründet wird. Bei der externen Kohärenz wird für die Voraussetzung und das Endergebnis verglichen, inwieweit dort explizit Bezug genommen wird auf die geforderten Eigenschaften gemäß der zu beweisenden Aussage:

„Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade.“

Zunächst ist festzustellen, dass in keinem der drei Beweisversuche, selbst wenn die **Voraussetzung** sprachlich dargestellt ist, diese in der Weise genutzt wird, dass daraus der folgende Beweisschritt hergeleitet wird: Der Abstand zwei wird nicht genutzt, um zu begründen, warum sich in der jeweiligen Weise strukturieren lässt. Interne Kohärenz in Bezug auf diesen Beweisschritt liegt somit in keinem der drei Beweisversuche vor.

Bei der externen Kohärenz, also in diesem Fall dem expliziten Benennen, dass es sich um zwei Zahlen im Abstand zwei handelt, unterscheiden sich die drei Beweisversuche. Im ersten Beweisversuch ist dies gegeben. Im zweiten Beweisversuch ist durch die zwei Zeilen zumindest noch implizit von zwei verschiedenen Zahlen die Rede und der Abstand zwei ist implizit im Bild erkennbar

durch die zwei markierten überstehenden Plättchen in der zweiten Zeile. Im dritten Beweisversuch fehlt die Voraussetzung in der Erläuterung ganz.

Beweisversuch 1:

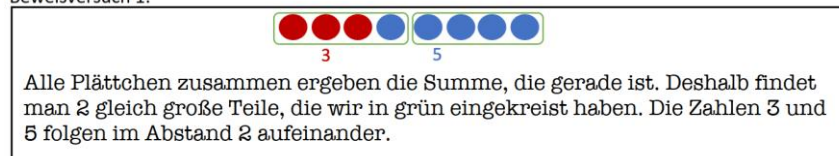


Abbildung 117 Beweisversuch 1 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung

Beweisversuch 2:

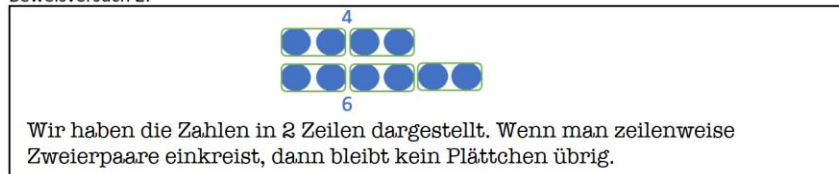


Abbildung 118 Beweisversuch 2 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung

Beweisversuch 3:

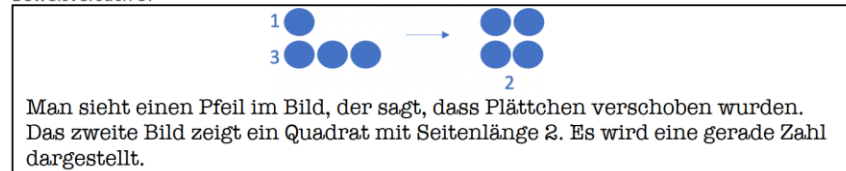


Abbildung 119 Beweisversuch 3 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung

In Beweisversuch 1 wird die **Strukturierung** explizit aus dem vorangehend beschriebenen Beweisschritt, in diesem Fall dem Endergebnis, begründet⁷². In Beweisversuch 2 wird die Strukturierung, zumindest in dem dargestellten singulären Fall, mit der vorangehend geschilderten Voraussetzung insofern in Beziehung gesetzt, dass sich durch das „zeilenweise“ in der Strukturierung auf die „2

⁷² Die Probleme hinsichtlich der logischen Struktur werden im entsprechenden Abschnitt zu dieser Norm betrachtet.

Zeilen“ in der Voraussetzung bezogen wird⁷³. In Beweisversuch 3 ist die Strukturierung der zuerst genannte Beweisschritt und steht damit nicht in Kohärenz zur Voraussetzung.

Auch beim **Endergebnis** zeigen sich in den einzelnen Beweisversuchen unterschiedliche Kohärenzbeziehungen. Das Endergebnis ist im ersten Beweisversuch an erster Stelle genannt und kann somit nicht aus zuvor geschilderten Beweisschritten hergeleitet werden. Dagegen wird das Endergebnis im zweiten Beweisversuch direkt aus der Strukturierung heraus begründet und dies auch sprachlich durch eine „wenn-dann“-Struktur verdeutlicht. Im dritten Beweisversuch ist der Zusammenhang zwar implizit ikonisch angelegt, jedoch so unvollständig dargestellt, dass dieser nicht deutlich wird. Sprachlich gibt es keinerlei Verknüpfungsstrukturen zwischen der Strukturierung und dem Endergebnis. Auch inhaltlich wird der Zusammenhang nicht erklärt, wie durch das Verschieben ein Quadrat mit Seitenlänge zwei entsteht.

Die externe Kohärenz zur Aussage, dass explizit formuliert wird, dass es sich um eine gerade Zahl handelt, ist in Beweisversuch 1 gegeben, in Beweisversuch 2 fehlt dies ganz. Auch in Beweisversuch 3 ist dies explizit formuliert, jedoch nicht erklärt, wie sich dies aus einem Quadrat mit Seitenlänge zwei erkennen lässt, welches keiner der in der Vorlesung behandelten ikonischen Definitionen einer geraden Zahl entspricht. Das Endergebnis im Sinne der Aussage (das Quadrat mit Seitenlänge 2) und die Aussage (eine gerade Zahl) stehen hier in zwei getrennten, sprachlich nicht verknüpften, Sätzen unverbunden aneinander gereiht.

Der Vergleich der drei Beweisversuche hinsichtlich der internen und externen Kohärenz ist in Tabelle 16 und in Tabelle 17 differenziert nach den einzelnen Beweisschritten dargestellt. Dort wird der oben beschriebene Grad an Kohärenz farblich abgestuft dargestellt: Grün für den bezüglich des jeweiligen Beweisschrittes kohärentesten Beweisversuch und Rot für den am wenigsten kohärenten Beweisversuch.

Insgesamt wäre damit Beweisversuch 1 der kohärenteste und Beweisversuch 3 der am wenigsten kohärente Beweisversuch.

⁷³ Dass dies keine Kohärenz im klassifikatorischen Sinne darstellt, wird im Abschnitt zur Allgemeingültigkeit betrachtet.

Tabelle 16 Vergleich der drei Beweisversuche hinsichtlich der internen Kohärenz entlang der Beweisschritte

Interne Kohärenz		
Beweisversuch 1	Beweisversuch 2	Beweisversuch 3
Voraussetzung	Voraussetzung	Voraussetzung
Strukturierung	Strukturierung	Strukturierung
Endergebnis	Endergebnis	Endergebnis

Tabelle 17 Vergleich der drei Beweisversuche hinsichtlich der externen Kohärenz entlang der Beweisschritte

Externe Kohärenz		
Beweisversuch 1	Beweisversuch 2	Beweisversuch 3
Voraussetzung	Voraussetzung	Voraussetzung
Endergebnis	Endergebnis	Endergebnis

7.1.2 Analyse des beobachteten Normenverständnisses

Für die Kohärenz wurde zunächst der Einfluss der Intervention auf das Erkennen eines diesbezüglichen Normbruchs untersucht. Die Interaktion der Interventionsvariablen zeigt dabei nur für Beweisversuch 1 eine schwache Signifikanz (in Gelb hinterlegt). Nur für diesen Beweisversuch kann also ein (schwacher) Einfluss der Intervention auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz nachgewiesen werden. In Tabelle 18 sind die zeitlichen Entwicklungen ($z1/z0$) in den einzelnen Gruppen ($g0$ und $g1$) und die Vergleiche zwischen den Gruppen ($g1/g0$) nach gegenüber vor der Intervention ($z1$ und $z0$) detailliert für alle drei Beweisversuche dargestellt.

Hier zeigt sich, dass die (schwache) Signifikanz für Beweisversuch 1 vor allem durch die Entwicklung in der Kontrollgruppe bedingt ist. Dies könnte sich darauf zurückführen lassen, dass dieser Beweisversuch durch die falsche Reihenfolge der Beweisschritte nicht die zu erwartenden internen Kohärenzen aufweist (vgl. Abschnitt 7.1.1). Weiterhin könnte dieser aus dem gleichen Grund nicht als Beweis der Aussage angesehen und ihm damit eine geringe externe Kohärenz beigemessen werden. Die Normen der logischen Struktur und der Kohärenz wären in der Kontrollgruppe in diesem Fall nicht klar abgegrenzt worden.

Beweisversuche 2 und 3 weisen in der Interventionsgruppe hohe und hoch signifikante Odds Ratios auf. Bei Beweisversuch 2 ist dies auch in der Kontrollgruppe zu beobachten, fällt jedoch niedriger als in der Interventionsgruppe aus. Signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen sind nicht zu beobachten.

Tabelle 18 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz

Beweisversuch 1		
g0	z1/z0	3.82**
g1	z1/z0	1.71
z1	g1/g0	0.67
z0	g1/g0	1.50
Beweisversuch 2		
g0	z1/z0	3.18*
g1	z1/z0	5.62***
z1	g1/g0	1.90
z0	g1/g0	1.08
Beweisversuch 3		
g0	z1/z0	1.77
g1	z1/z0	3.13***
z1	g1/g0	1.90
z0	g1/g0	1.08

Die Odds Ratios für die Kohärenz sind im Allgemeinen auch deutlich niedriger als für die Vollständigkeit, was darauf schließen lässt, dass die Vollständigkeit, insbesondere im Sinne des Vorhandenseins aller Beweisschritte (vgl. Abschnitt 7.2), eine leichter zugängliche Norm darstellt als die Kohärenz und diese auch allgemein in den Betrachtungen mehr im Fokus steht.

Weiterhin fällt auf, dass die Werte in beiden Gruppen für Beweisversuch 2 deutlich höher sind als für Beweisversuch 3, was entgegen dem intendierten Verständnis (vgl. Tabelle 18) ist. Um das Normenverständnis genauer zu analysieren, wurde daher einmal zwischen interner und externer Kohärenz⁷⁴ unterschieden und im Weiteren der Einfluss der einzelnen Beweisschritte untersucht⁷⁵.

⁷⁴ Kohärenz wurde immer dann kodiert, wenn von Zusammenhängen die Rede war, auch wenn diese nicht explizit als interne oder externe Zusammenhänge beschrieben waren. Daher wurde Kohärenz deutlich häufiger kodiert als interne und externe Kohärenz zusammengefasst. Zur Kohärenz der Darstellungsebenen lagen zu wenige Werte vor, sodass das entsprechende Modell nicht schätzbar war. Ebenso für die Unterasspekte der externen Kohärenz. Diese betraf in den meisten Fällen die Kohärenz zur zu beweisenden Aussage, die anderen Unterasspekte der Definition und der Lemmata wurden kaum benannt.

⁷⁵ Die weitere Analyse betrifft stets die Kohärenz im Allgemeinen (ohne Trennung in interne oder externe Kohärenz), da die Modelle für die interne beziehungsweise ex-

Für Beweisversuch 1 zeigt sich dabei eine signifikante Interaktion beider Interventionsvariablen mit der externen Kohärenz (in Grün hinterlegt) und für Beweisversuch 3 eine schwache Signifikanz mit der internen Kohärenz (in Gelb hinterlegt). Für Beweisversuch 2 liegt für die externe Kohärenz lediglich eine signifikante Interaktion mit der Zeit vor (in Rot hinterlegt). Die detaillierte Analyse der Entwicklungen in den Gruppen und die Gruppenvergleiche sind in Tabelle 19 dargestellt:

Tabelle 19 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der internen und externen Kohärenz

		intern	extern
Beweisversuch 1			
g0	z1/z0	2.89	2.60
g1	z1/z0	1.36	0.35*
z1	g1/g0	0.77	0.45
z0	g1/g0	1.62	3.31
Beweisversuch 2			
g0	z1/z0	na ⁷⁶	3.38
g1	z1/z0	na	5.57**
z1	g1/g0	na	1.52
z0	g1/g0	na	0.92
Beweisversuch 3			
g0	z1/z0	1.50	1.88
g1	z1/z0	4.34***	1.14
z1	g1/g0	2.70*	0.52
z0	g1/g0	0.93	0.86

Bei Beweisversuch 1 zeigen sich in der Kontrollgruppe für die interne und die externe Kohärenz vergleichbare Werte, was die oben formulierte Hypothese unterstützt, dass sowohl die interne als auch die externe Kohärenz aufgrund der falschen Reihenfolge als problematisch angesehen werden. Die entsprechenden Werte sind jedoch relativ niedrig und nicht signifikant. Der einzig signifikante Wert für Beweisversuch 1 zeigt sich in der Interventionsgruppe, wo die Odds Ratio für die externe Kohärenz mit 0.35* deutlich kleiner ist als 1. Vor dem Hintergrund, dass die Intervention signifikant auf die externe Kohärenz wirkt (siehe oben) und die externe Kohärenz für die Voraussetzung und das Endergebnis in diesem Beweisversuch gegeben ist (sofern man diesen Aspekt von der

terne Kohärenz mit mehr Einflussfaktoren als den Interventionsvariablen nicht schätzbar gewesen wären.

Norm der logischen Struktur abgrenzt), kann dies als positive und signifikante Wirkung der Intervention betrachtet werden.

Im Vergleich von Beweisversuch 2 und 3 hinsichtlich der externen Kohärenz zeigt sich nur bei Beweisversuch 2 in der Interventionsgruppe ein hoher und (sehr) signifikanter Wert. In Beweisversuch 2 fehlt die explizite Formulierung des Endergebnisses im Sinne der Aussage. Vor dem Hintergrund, dass hier nur eine signifikante Interaktion mit der Zeit vorliegt (siehe oben), scheint dieses Verständnis von externer Kohärenz in beiden Gruppen gefördert worden zu sein. In Beweisversuch 3 zeigen sich keine Signifikanzen für die externe Kohärenz. Hier ist die externe Kohärenz zwar formuliert, aber nicht direkt in Beziehung gesetzt zum ikonisch dargestellten Endergebnis. Die Voraussetzung fehlt sprachlich ganz. Es hat sich im Interventionszeitraum damit zwar ein Verständnis für die externe Kohärenz in der Weise entwickelt, dass das Endergebnis im Sinne der Aussage explizit formuliert sein muss. Für die Voraussetzung hat sich dies jedoch nicht in gleicher Weise entwickelt.

Hinsichtlich der internen Kohärenz liegen für Beweisversuch 2 zu wenig Werte vor, es zeigen sich jedoch qualitativ ein Anstieg nach der Intervention gegenüber vor der Intervention in beiden Gruppen, welcher in der Interventionsgruppe größer ausfiel. Bei Beweisversuch 3, welcher intendiert der intern am wenigsten kohärente Beweisversuch ist, zeigt sich in der Interventionsgruppe ein deutlicher und hoch signifikanter Zuwachs hinsichtlich des Erkennens des intendierten Normbruchs. Ebenso zeigt sich ein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen nach der Intervention. Dies kann als Einfluss der Intervention auf das Verständnis der internen Kohärenz im intendierten Sinne des Herstellens von Zusammenhängen zwischen aufeinanderfolgenden Beweisschritten verstanden werden.

Bezüglich einer Differenzierung der Interventionseffekte entlang der einzelnen Beweisschritte⁷⁶ ergibt sich nur für Beweisversuch 2 ein schwach signifikanter Interaktionseffekt mit dem Endergebnis (in Gelb hinterlegt). Der Einfluss der Intervention, unter Einschränkung auf das Benennen jeweils eines der Beweisschritte, ist in Tabelle 20 dargestellt:

⁷⁶ Für jeden Beweisschritt wurde eine neue Regression gerechnet. Es wurde allgemein untersucht, inwiefern die Betrachtung eines bestimmten Beweisschrittes einen Einfluss hat auf die Höhe des Interventionseffektes auf das Verständnis der Vollständigkeit. Der entsprechende Beweisschritt muss dabei nicht zwingend im Zusammenhang mit der Kohärenz benannt worden sein. Für die direkte Untersuchung des Einflusses der Benennung des Beweisschrittes im Zusammenhang mit der Vollständigkeit war die Datenlage leider nicht ausreichend.

Tabelle 20 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz (differenziert nach der Benennung der einzelnen Beweisschritte)

		Voraussetzung	Strukturierung	Endergebnis
Beweisversuch 1				
g0	z1/z0	2.23	7.00	1.61
g1	z1/z0	0.87	0.49	1.35
z1	g1/g0	0.73	0.27	0.98
z0	g1/g0	1.86	3.86	1.17
Beweisversuch 2				
g0	z1/z0	3.11	2.41	2.81
g1	z1/z0	3.79*	9.50*	5.36**
z1	g1/g0	2.22	1.22	1.44
z0	g1/g0	1.82	0.38	0.75
Beweisversuch 3				
g0	z1/z0	2.15	1.34	1.61
g1	z1/z0	2.89*	2.51	3.17*
z1	g1/g0	2.17	1.59	1.77
z0	g1/g0	1.61	0.85	0.90

Die betreffende Odds Ratio in der Interventionsgruppe (vgl. Tabelle 20) ist sehr signifikant. Dies bekräftigt wiederum die These, dass hier der Fokus auf der fehlenden externen Kohärenz bezüglich des Endergebnisses lag. Dieses Ergebnis gibt hier sogar einen Hinweis darauf, dass dieses Verständnis in der Interventionsgruppe in signifikant höherem Maße als in der Kontrollgruppe gefördert wurde.

Auffallend ist der vergleichsweise hohe Wert für die Strukturierung in Beweisversuch 2 in der Interventionsgruppe. Im Vergleich zu dem relativ niedrigen Wert in Beweisversuch 3, bei welchem die Strukturierung im Hinblick auf die Kohärenz als problematischer intendiert war, ist dies dem intendierten Verständnis gegenläufig. Es kann daraus erklärt werden, dass in Beweisversuch 3 die Strukturierung in der dargestellten Weise zwar nicht die Gesamtkohärenz im Beweis verdeutlicht, dies aber durchaus potenziell aus der ikonischen Darstellung derselben erkennbar ist. In Beweisversuch 2 dagegen ist es nicht möglich, durch diese Strukturierung eine allgemeingültige Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis herzustellen (vgl. dazu den Abschnitt 7.4.1). Vor dem Hintergrund dieser Interpretation kann das Ergebnis dahingehend verstanden werden, dass sich in der Interventionsgruppe vermehrt ein Verständnis der Strukturierung im Sinne des Herstellens des globalen ikonischen Zusammenhangs zwischen Voraussetzung und Endergebnis entwickelt hat und die starke

Beziehung zwischen Kohärenz und Allgemeingültigkeit stärker in den Blick geraten ist.

Das Benennen der Voraussetzung stellt im Vergleich der Beweisschritte einen geringen Effekt dar, der auch unterhalb des Interventionseffektes ohne Betrachtung der Beweisschritte liegt. Zwar zeigen sich zumindest für Beweisversuch 2 und 3 signifikante Entwicklungen in der Interventionsgruppe, jedoch keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen. Dies ist erstaunlich, da die Voraussetzung der einzige Beweisschritt ist, welcher in allen drei Beweisversuchen nicht in die internen Kohärenzen einbezogen wurde. Die Relevanz der Voraussetzung für die interne Kohärenz konnte somit nicht gefördert werden durch die Intervention.

7.1.3 Untersuchung der Hypothesen

Um die erste Hypothese

- 1.1 Die Betrachtung der Nachvollziehbarkeit fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz.

zu untersuchen, wurde eine neue dichotome Variable Beweisschritte (BS) aus dem gegebenen Datenmaterial bestimmt, welche mit 1 kodiert ist, wenn mindestens ein Beweisschritt von der entsprechenden Person benannt wurde. Um die erste Hypothese zu prüfen, wurde ein Regressionsmodell mit den Interventionsvariablen Zeit (z) und Gruppe (g), den Beweisschritten und den entsprechenden Interaktionstermen geschätzt.

Nur für Beweisversuch 1 ergibt sich dabei eine schwache Signifikanz der Interaktion zwischen der Nachvollziehbarkeit und der Zeit. Hier lässt sich also lediglich ein schwacher Effekt der Interventionszeit feststellen, jedoch keine signifikante Wirkung der Intervention auf den Einfluss der Nachvollziehbarkeit auf die Kohärenz. In den einzelnen Gruppen und zu den einzelnen Zeitpunkten ergeben sich die in Tabelle 21 abgebildeten Odds Ratios für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz je nachdem, ob ein Normbruch hinsichtlich der Nachvollziehbarkeit benannt wurde oder nicht.

Tabelle 21 Chancenverhältnisse der Nachvollziehbarkeit für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz (differenziert nach Gruppe und Zeit)

	NV1/NV0
Beweisversuch 1	
z0g0	6.90*
z1g0	0.80
z0g1	2.94
z1g1	2.05
Beweisversuch 2	
z0g0	6.46*
z1g0	0.94
z0g1	2.78
z1g1	0.59
Beweisversuch 3	
z0g0	1.30
z1g0	1.50
z0g1	1.25
z1g1	0.75

Der größte Effekt zeigt sich hier vor der Intervention (in der Kontrollgruppe). Betrachtet man die Entwicklung in der Interventionsgruppe, stellt man für alle drei Beweisversuche einen Rückgang des Einflusses der Nachvollziehbarkeit fest von vor der Intervention zu nach der Intervention. Dies ist vor dem Hintergrund zu sehen, dass die Nachvollziehbarkeit der Beweisversuche durch die Intervention gefördert werden konnte⁷⁷.

Das Ergebnis legt darüber hinaus eine andere Interpretation der qualitativ beobachteten Zusammenhänge nahe. Durch die Intervention scheint die Nachvollziehbarkeit als Evaluationskriterium vermehrt ersetzt worden zu sein durch die Kohärenz als die der Nachvollziehbarkeit eigentlich zugrunde liegende Norm (vgl. dazu Abschnitt 6.1). Die Intervention hat diese Entwicklung von der Nachvollziehbarkeit hin zur Kohärenz ermöglicht, scheint nach der Interventionszeit aber abgeschlossen worden zu sein, sodass diese Entwicklung nach der Intervention nicht erneut nachvollzogen werden muss.

⁷⁷ Die Odds Ratio für das Benennen eines Normbruch hinsichtlich der Nachvollziehbarkeit nach der Intervention gegenüber vor der Intervention lag für alle drei Beweisversuche deutlich unter 1 (0.44* für Beweisversuch 1, 0.47 für Beweisversuch 2 und 0.71 für Beweisversuch 3).

Zur Untersuchung der zweiten Hypothese

1.2 Wechselprozesse fördern das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz.

wurden zwei neue dichotome Variablen aus dem bestehenden Datenmaterial berechnet. Der Wechsel der Darstellungsebene (wDS), welcher mit 1 kodiert wurde, wenn sowohl die ikonische als auch die sprachliche Darstellungsebene betrachtet wurde. Und der Wechsel auf die Metaebene (wM), welcher mit 1 kodiert wurde, wenn Beweisversuche sowohl auf der konkreten als auch auf der Metaebene betrachtet wurden. Dabei waren die Modelle nicht für alle Beweisversuche schätzbar. Für die schätzbaren Modelle zeigen sich für keinen der beiden Wechselprozesse signifikante Interaktionen mit den Interventionsvariablen. In Tabelle 22 sind daher nur die Ergebnisse der Wirkung der Wechselprozesse unabhängig von der Intervention aufgeführt, also die Chancenverhältnisse für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz je nachdem, ob ein Wechsel der Darstellungsebene (wDS) beziehungsweise der Metaebene (wM) stattgefunden hat oder nicht:

Tabelle 22 Chancenverhältnisse der Wechselprozesse für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz

	wDS1/wDS0	wM1/wM0
Beweisversuch 1	3.14***	1.2
Beweisversuch 2	4.36***	2.05
Beweisversuch 3	5.23***	3.22**

Der Wechsel der Darstellungsebene hat in allen drei Beweisversuchen einen hoch signifikanten Einfluss auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz. Der Wechsel zwischen konkreter Betrachtungsweise des Beweisversuchs und einer Betrachtung auf der Metaebene hat dagegen nur in Beweisversuch 3 einen (sehr) signifikanten Einfluss, der geringer ist als derjenige des Wechsels der Darstellungsebenen. Weiterhin fällt auf, dass sich die Höhe des Einflusses des Wechsels der Darstellungsebene zwischen den Beweisversuchen unterscheidet. Um diese Unterschiede besser zu verstehen, wurde auch der Interaktionsterm zwischen den beiden Wechsel-Variablen mit in die Regression aufgenommen. Dadurch werden gegenseitige Moderationseffekte untersuchbar. Entsprechend der qualitativen Ergebnisse soll hier untersucht werden, ob ein Wechsel auf die Metaebene Einfluss hat auf den Effekt des Wechsels der Darstellungsebene auf das Erkennen des Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz. In

Tabelle 23 sind die Odds Ratios bezüglich des Wechsels der Darstellungsebene (wDS1/wDS0) dargestellt, differenziert nach dem Stattfinden eines Wechsels der Metaebene (wM1) oder dem Nicht-Stattfinden eines solchen Wechsels (wM0):

Tabelle 23 Chancenverhältnisse des Wechsels der Darstellungsebene für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz (differenziert nach Wechsel Metaebene)

	wDS1/wDS0
Beweisversuch 1	
wM0	3.46**
wM1	3.54
Beweisversuch 2	
wM0	4.19**
wM1	7.84*
Beweisversuch 3	
wM0	5.22***
wM1	4.87

Bei Beweisversuch 1 zeigt sich kaum ein Unterschied zwischen dem Effekt eines Wechsels der Metaebene und dem keines entsprechenden Wechsels. Bei Beweisversuch 2 ist dagegen ein deutlicher Moderationseffekt zu erkennen.

Beweisversuch 2:

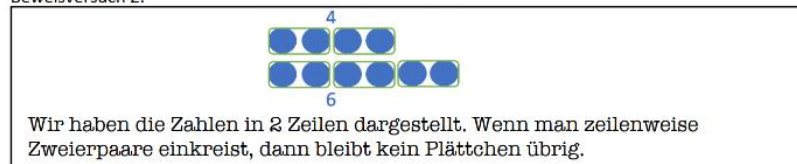


Abbildung 120 Beweisversuch 2 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 118**)

Bei diesem Beweisversuch sind die beiden Hauptprobleme einmal, hinsichtlich der internen Kohärenz, die fehlende Einbeziehung der Voraussetzung. Hinsichtlich der externen Kohärenz liegt das Problem darin, dass nicht erklärt wird, wie aus dem Bild die zu beweisende Aussage abzulesen ist, dass es sich um eine gerade Zahl handelt. Ersteres ist unwahrscheinlich als Erklärungsgrundlage für die Effekte, da, wie oben analysiert, die Voraussetzung meist nicht in die Betrachtung der Kohärenz einbezogen wurde. Die externe Kohärenz steht dagegen

im Fokus der Betrachtung von Beweisversuch 2 (siehe oben). Um dieses Problem adäquat beschreiben zu können, muss die Beziehung von der ikonischen Darstellung zur sprachlichen Erläuterung des externen Bezugs hergestellt werden. Dafür muss von der konkreten Betrachtung der ikonischen Darstellung auf die Metaebene gewechselt werden, auf welcher erst der fehlende Bezug zur Aussage festgestellt werden kann. Dies würde den oben beschriebenen Moderationseffekt erklären.

In Beweisversuch 3 ist dagegen kein Moderationseffekt zu erkennen, das Nicht-Wechseln auf die Metaebene hat sogar einen leicht höheren Einfluss als das Wechseln. Dafür liegt in diesem Beweisversuch der größte Einfluss durch einen Wechsel der Darstellungsebenen vor. Nur in diesem Beweisversuch ist auch der Wechsel auf die Metaebene signifikant.

Beweisversuch 3:

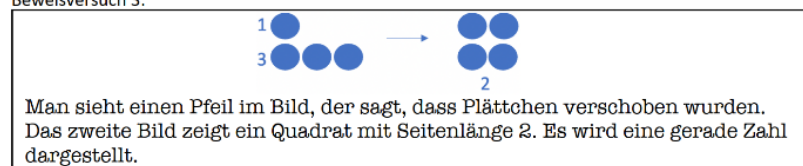


Abbildung 121 Beweisversuch 3 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 119**)

Betrachtet man die Kohärenzstruktur von Beweisversuch 3, liegen dem möglicherweise zwei verschiedenen Betrachtungsweisen des Beweisversuchs zugrunde. In der einen Betrachtungsweise wird der Fokus auf die internen sprachlichen Verknüpfungsstrukturen gelegt, die in diesem Beweisversuch fehlen – die Sätze sind unverbunden aneinandergereiht. Was Beweisversuch 3 in dieser Hinsicht häufig auf der Metaebene attestiert wurde, war sein rein beschreibender Charakter, also dass es sich lediglich um eine Beschreibung des Bildes handelt. In dieser Betrachtungsweise hat der Wechsel auf die Metaebene einen großen Einfluss, der Wechsel der Darstellungsebenen aber nicht. Eine enge Kohärenz der Darstellungsebenen ist dabei sogar eher ein Problem. In einer anderen Betrachtungsweise wird die Kohärenz der Darstellungsebenen explizit in den Blick genommen und durch eine Betrachtung des konkreten Beweisversuchs festgestellt, dass das erste Bild in keiner Weise sprachlich erläutert wurde. Ein Wechsel auf die Metaebene ist hier nicht unbedingt nötig, ein Wechsel der Darstellungsebene hat hier jedoch einen großen Einfluss. Vor dem Hintergrund, dass der Wechsel der Darstellungsebene insgesamt einen deutlich höheren Einfluss

hatte als der Wechsel auf die Metaebene, legt diese Interpretation nahe, dass die zuletzt beschriebene Betrachtungsweise die häufigere war.

7.2 Vollständigkeit

7.2.1 Analyse des intendierten Normenverständnisses

Die einzelnen Beweisversuche unterscheiden sich hinsichtlich ihres Grades an Vollständigkeit bezüglich der Beweisschritte Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis, was im Folgenden erläutert wird. Bei der Voraussetzung wurde dabei unterschieden zwischen der Darstellung zweier unterschiedlicher Zahlen und der Darstellung, dass diese einen Abstand von zwei haben, was beides zu einer vollständigen Darstellung dieses Beweisschrittes gehört. Bei der Strukturierung sollte der Prozess des Strukturierens dargestellt werden und beim Endergebnis das Ergebnis dieses Strukturierungsprozesses. Vom Endergebnis ausgehend die externe Kohärenz zur Aussage sprachlich zu benennen, gehört eigentlich zur Norm der Kohärenz, wurde auf Studierendenseite jedoch meist dem Endergebnis zugerechnet, weshalb dies an dieser Stelle mit aufgeführt wurde. Der Grad der Abgrenzung beziehungsweise Vermischung der Beweisschritte wurde hier mit betrachtet, obwohl dies eigentlich der Kohärenz zuzurechnen ist, da sich daraus gegebenenfalls die Einschätzung bezüglich des Fehlens bestimmter Beweisschritte erklären lässt.

Beweisversuch 1:

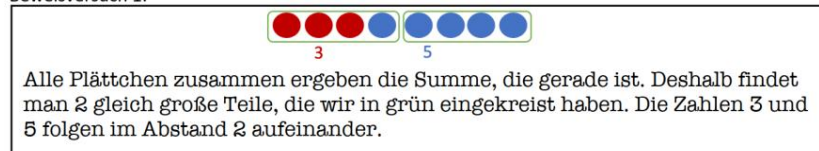


Abbildung 122 Beweisversuch 1 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 117**)

In Beweisversuch 1 sind alle Beweisschritte vorhanden, jedoch in umgekehrter Reihenfolge. Der Beweisschritt der **Voraussetzung** wird somit nicht, wie gewohnt, zu Beginn genannt. Dies kann auf Lernendenseite zu der Einschätzung führen, dass dieser nicht vorhanden ist. Der Abstand zwei wird zwar sprachlich benannt am Ende des Beweises, ikonisch jedoch nicht verdeutlicht. Dass es sich um zwei verschiedene Zahlen handelt, wird nur ikonisch durch die verschiedenen Farben verdeutlicht, sprachlich jedoch nicht benannt.

Die **Strukturierung** wird als Prozess des Einkreisens zweier gleich großer Blöcke vollständig beschrieben. Dem ist, entsprechend der der Beweislogik umgekehrten Organisation der Beweisschritte, im gleichen Satz das produkthaft beschriebene **Endergebnis** der zwei gleich großen Blöcke vorangestellt. Es wird jedoch nicht explizit darauf eingegangen, dass kein Plättchen übrig bleibt. Auf ikonischer Ebene ist dies jedoch vollständig dargestellt. Auch der Bezug des Endergebnisses zur Aussage ist im ersten Satz explizit formuliert.

Beweisversuch 2:

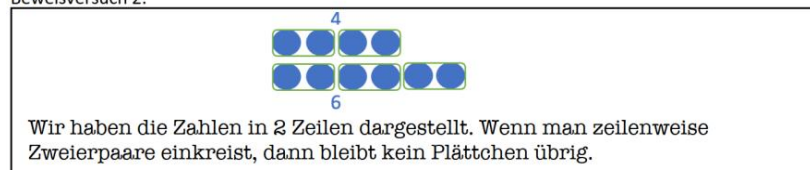


Abbildung 123 Beweisversuch 2 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 118**)

Auch in Beweisversuch 2 sind alle Beweisschritte sprachlich benannt, insbesondere die **Voraussetzung** ist jedoch sehr unvollständig dargestellt. Dass es sich um zwei verschiedene Zahlen im Abstand zwei handelt, ist nur implizit dadurch verdeutlicht, dass es sich um zwei Zeilen handelt und in der zweiten Zeile zwei Plättchen mehr liegen als in der ersten. Sprachlich ist dies nicht benannt. **Strukturierung** und **Endergebnis** sind vollständig dargestellt, jedoch in einem Satz miteinander vermischt. Der Prozess der Strukturierung, das zeilenweise Einkreisen, wird dabei nicht klar abgegrenzt vom Produkt, also dem Endergebnis der Zweierpaare ohne übriges Plättchen. Der Bezug zur Aussage wird nicht explizit formuliert, also dass sich an den Zweierpaaren ohne übriges Plättchen (dem Endergebnis) erkennen lässt, dass es sich insgesamt um eine gerade Zahl handelt (der externen Kohärenz zur Aussage).

Beweisversuch 3:

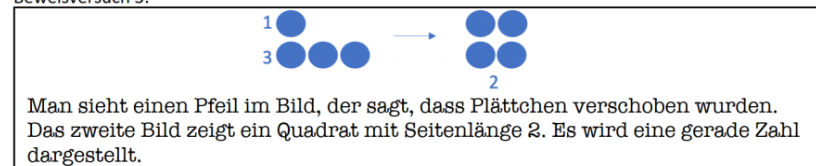


Abbildung 124 Beweisversuch 3 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 119**)

In Beweisversuch 3 wird die **Voraussetzung** sprachlich gar nicht benannt. Die Beweisschritte der Voraussetzung und des Endergebnisses sind in diesem Beweisschritt durch die Darstellung in zwei separaten Bildern ikonisch klar voneinander abgegrenzt. Dass im ersten Bild zwei unterschiedliche Zahlen im Abstand zwei dargestellt werden, ist auf ikonischer Ebene nur implizit dargestellt durch die Anordnung in zwei Zeilen und die unterschiedliche Länge der Zeilen. Der Beweisschritt der **Strukturierung**, das Verschieben von Plättchen, ist durch den Pfeil ikonisch und sprachlich verdeutlicht. Wie viele Plättchen genau von wo nach wo verschoben werden, ist jedoch weder ikonisch noch sprachlich dargestellt.

Das **Endergebnis** wird sprachlich vollständig beschrieben, im Bild fehlt jedoch die Beschriftung der Seitenlänge an der Seite, die für die Argumentation relevant ist. Das Endergebnis wird hier in einem neuen Satz klar von der Strukturierung abgegrenzt. Der Bezug zur Aussage, der sich aus dem Endergebnis ergibt, wird ebenfalls explizit formuliert und in einem weiteren Satz abgegrenzt von der Beschreibung der ikonischen Darstellung des Endergebnisses.

In Tabelle 24 wurden die Unterschiede in Bezug auf die Vollständigkeit hinsichtlich der einzelnen Beweisschritte zusammengefasst. Die farbliche Abstufung entspricht dabei wieder dem Grad an Vollständigkeit in Bezug auf den jeweiligen Beweisversuch.

Tabelle 24 Vergleich der drei Beweisversuche hinsichtlich der Vollständigkeit entlang der Beweisschritte

Beweisversuch 1	Beweisversuch 2	Beweisversuch 3
Voraussetzung am Ende	Voraussetzung	Voraussetzung
Strukturierung	Strukturierung	Strukturierung
Endergebnis	Endergebnis	Endergebnis
Externe Kohärenz	Externe Kohärenz	Externe Kohärenz

7.2.2 Analyse des beobachteten Normenverständnisses

Zunächst wurde der Einfluss der Intervention auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit untersucht. Der Interaktionsterm war dabei nur in Beweisversuch 2 signifikant (in Tabelle 25 in Grün hinterlegt), für die Beweisversuche 1 und 3 war lediglich der Einfluss der Zeit (in Tabelle 25 in Rot hinterlegt) signifikant. Nur für Beweisversuch 2 lässt sich hier also ein signifikanter Einfluss der Intervention auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit feststellen. In Tabelle 25 sind die zeitlichen

Entwicklungen ($z1/z0$) in den einzelnen Gruppen ($g0$ und $g1$) und die Vergleiche zwischen den Gruppen ($g1/g0$) nach gegenüber vor der Intervention ($z1$ und $z0$) detailliert für alle drei Beweisversuche dargestellt.

In allen drei Beweisversuchen zeigen sich dabei in beiden Gruppen deutliche und signifikante Veränderungen von vor der Intervention zu nach der Intervention. Dabei sind die entsprechenden Odds Ratios in der Interventionsgruppe in Beweisversuch 2 und 3 deutlich höher und stärker signifikant als in Beweisversuch 1. Vor dem Hintergrund, dass Beweisversuch 2 und 3 auch unvollständiger intendiert waren als Beweisversuch 1 (vgl. Tabelle 24), lässt sich hier also eine Entwicklung im Sinne des intendierten Verständnisses der Vollständigkeit in der Interventionsgruppe erkennen. Vor diesem Hintergrund ist ebenfalls auffällig, dass, in Bezug auf Beweisversuch 1, die Odds Ratio vor und nach der Intervention in der Kontrollgruppe (leicht) höher ist als in der Interventionsgruppe. Dies könnte sich darauf zurückführen lassen, dass diese Einschätzung auf Grundlage der erst am Ende genannten Voraussetzung getroffen wurde und diese Fehleinschätzung durch die Intervention etwas abgemildert wurde. Diese Hypothese wird unten weiter untersucht, wenn auch die Beweisschritte mit in die Analyse einbezogen werden. Weiterhin zeigen sich in Beweisversuch 2 und 3 nach der Intervention deutliche und hoch signifikante Unterschiede zwischen der Kontroll- und der Interventionsgruppe. Vor der Intervention waren die Odds Ratios zwischen den Gruppen nahe 1 und nicht signifikant, was darauf schließen lässt, dass diese Unterschiede sich in der Intervention entwickelt haben.

Tabelle 25 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit

Beweisversuch 1		
g0	z1/z0	4.54**
g1	z1/z0	3.85**
z1	g1/g0	0.50
z0	g1/g0	0.59
Beweisversuch 2		
g0	z1/z0	2.43*
g1	z1/z0	13.0***
z1	g1/g0	6.18***
z0	g1/g0	1.15
Beweisversuch 3		
g0	z1/z0	4.85***
g1	z1/z0	10.29***
z1	g1/g0	3.43***
z0	g1/g0	1.62

Auffallend ist bei dem Vergleich der einzelnen Beweisversuche, dass die Odds Ratio in der Interventionsgruppe (nach gegenüber vor der Intervention) bei Beweisversuch 2 höher ist als bei Beweisversuch 3. Intendiert war dahingegen, dass Beweisversuch 2 vollständiger ist als Beweisversuch 3, in welchem die Voraussetzung gar nicht genannt ist und die Strukturierung unvollständig ist (vgl. Tabelle 24). Um das Verständnis auf Studierendenseite genauer zu erheben, wurden daher die Beweisschritte⁷⁸ Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis sowie deren jeweilige Interaktionsterme mit den Interventionsvariablen Gruppe und Zeit mit in die Regression einbezogen⁷⁹. Es zeigt sich wiederum nur für Beweisversuch 2 eine signifikante Interaktion der Voraussetzung mit den beiden Interventionsvariablen Zeit und Gruppe (in Grün hinterlegt). Für Beweisversuch 3 zeigt sich dagegen nur eine signifikante Interaktion der Voraussetzung mit der Zeit (in Rot hinterlegt). Bei den anderen Beweisschritten konnten keine signifikanten Interaktionen festgestellt werden. Der Einfluss der Inter-

⁷⁸ Es wurde allgemein untersucht, inwiefern die Betrachtung eines bestimmten Beweisschrittes einen Einfluss hat auf die Höhe des Interventionseffektes auf das Verständnis der Vollständigkeit. Der entsprechende Beweisschritt muss dabei nicht zwingend im Zusammenhang mit der Vollständigkeit benannt worden sein. Für die direkte Untersuchung des Einflusses der Benennung des Beweisschrittes im Zusammenhang mit der Vollständigkeit war die Datenlage leider nicht ausreichend.

⁷⁹ Dies wurde in drei getrennten Regressionen durchgeführt, da das Modell ansonsten nicht für alle Beweisversuche schätzbar gewesen wäre.

vention unter dem Benennen jeweils eines der Beweisschritte ist in Tabelle 26 dargestellt.

Tabelle 26 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit (differenziert nach der Benennung der einzelnen Beweisschritte)

		Voraussetzung	Strukturierung	Endergebnis
Beweisversuch 1				
g0	z1/z0	3.44	na	6.79*
g1	z1/z0	5.26*	na	1.93*
z1	g1/g0	0.44	na	0.38
z0	g1/g0	0.29	na	1.33
Beweisversuch 2				
g0	z1/z0	3.43*	17.3*	6.60**
g1	z1/z0	64.67***	18.14**	35.94***
z1	g1/g0	9.76***	7.70*	5.68**
z0	g1/g0	0.52	7.35	1.04
Beweisversuch 3				
g0	z1/z0	61.08**	6.55**	11.04**
g1	z1/z0	54.82***	9.11***	14.52***
z1	g1/g0	3.42	2.15	3.15
z0	g1/g0	3.82	1.55	2.40

In Bezug auf Beweisversuch 1 wird deutlich, dass sich in der Interventionsgruppe ein deutlich größerer Interventionseffekt auf das Benennen eines Normbruchs in Bezug auf die Vollständigkeit zeigt, wenn die Voraussetzung (5.26*) betrachtet wird, als wenn das Endergebnis (1.93*) betrachtet wird. Dies bekräftigt die oben formulierte These, dass die Einschätzung der Vollständigkeit auf Grundlage der in diesem Beweisversuch erst am Ende genannten Voraussetzung getroffen wurde. Die Voraussetzung wurde hier vermutlich am Anfang erwartet und da sie dort nicht genannt wurde, wurde sie als fehlend benannt.

Dagegen stellt sich die Situation in der Kontrollgruppe umgekehrt dar, was der oben formulierten These wiederum widerspricht. Es zeigt sich jedoch, dass in der Kontrollgruppe ein starker Fokus auf das Endergebnis vorliegt und die Voraussetzung nicht in gleichem Maße in die Betrachtungen einbezogen wird, wie in der Interventionsgruppe. Hier wurde vermutlich das Endergebnis am Ende erwartet und da dieses dort nicht formuliert ist, eine unzureichende Vollständigkeit attestiert. In beiden Gruppen zeigt sich somit ein großer Einfluss der Organisation eines Beweisversuchs auf die Einschätzung hinsichtlich der Vollständigkeit.

In Bezug auf Beweisversuch 2 zeigt sich durch das Benennen der Voraussetzung in der Interventionsgruppe ein sehr hoher Effekt auf die Interventionswirkung, wohingegen der Effekt in der Kontrollgruppe nur sehr gering ausfällt. Weiterhin zeigt sich ein starker Effekt auf den Unterschied zwischen den Gruppen nach der Intervention. Vor dem Hintergrund des intendierten Normbruchs bezüglich der Vollständigkeit in diesem Beweisversuch zeigt sich darin ein positives Ergebnis der Intervention. Die Voraussetzung ist in diesem Beweisversuch zwar benannt worden, jedoch in sehr unvollständiger Weise. Durch die Intervention scheint hier also ein sehr differenziertes Verständnis der Vollständigkeit gefördert worden zu sein.

Der Effekt durch das Benennen der Voraussetzung in der Interventionsgruppe ist auch größer als derjenige durch das Benennen des Endergebnisses. Dahingegen ist in der Kontrollgruppe der Effekt durch das Endergebnis größer als derjenige durch die Voraussetzung und auch die Unterschiede zwischen den Gruppen nach der Intervention fallen hier geringer aus. Dies zeigt wiederum den positiven Effekt der Intervention auf das Einbeziehen der Voraussetzung in die Betrachtungen. Weiterhin zeigt sich jedoch auch, dass die Formulierung des Endergebnisses in beiden Gruppen nicht klar vom Herstellen der externen Kohärenz zur Aussage getrennt wird. Ersteres liegt in diesem Beweisversuch vor, Letzteres nicht. Das Fehlen des Endergebnisses wurde demnach vermutlich an dieser Stelle mit dem Fehlen der externen Kohärenz gleichgesetzt. Im Vergleich der beiden Gruppen nach der Intervention zeigt sich durch das Benennen des Endergebnisses jedoch kein höherer Effekt als ohne Einbezug der Beweisschritte. Hier scheinen die Aktivitäten in den beiden Gruppen keinen großen Unterschied aufzuweisen hinsichtlich des Einflusses auf eine Unterscheidung dieser beiden Normen.

Die Benennung der Strukturierung zeigt mit 18.14** (gegenüber 13.0***) in der Interventionsgruppe, verglichen mit den anderen Beweisschritten, den geringsten Effekt. In der Kontrollgruppe zeigt sich hier jedoch der größte Effekt der Beweisschritte mit 17.3*. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass in diesem Beweisversuch die Beweisschritte der Strukturierung und des Endergebnisses in einem Satz zusammengefasst und nicht klar voneinander getrennt sind. Wird der ganze Satz dem Endergebnis zugerechnet, wird die Strukturierung in diesem Fall als fehlend benannt. Um diese inhaltlich voneinander zu trennen, braucht es eine Unterscheidung zwischen dem Prozess des Einkreisens und dem Produkt des Einkreisens.

Es zeigen sich hier in beiden Gruppen ähnlich hohe Effekte durch das Benennen der Strukturierung⁸⁰. Der oben beschriebene Vergleich mit den Effekten der

⁸⁰Es liegt zwar nach der Intervention ein Unterschied zwischen den Gruppen vor. Dieser ist jedoch nicht wesentlich höher als der Unterschied, der schon vor der Intervention vorgelegen hat.

anderen Beweisschritte in den Gruppen zeigt jedoch, dass die Strukturierung in der Kontrollgruppe zentral ist in der Betrachtung der Vollständigkeit, in der Interventionsgruppe jedoch die geringste Rolle hat. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Unterscheidung nach prozesshafter Strukturierung und produkthaftem Endergebnis in der Interventionsgruppe stärker gefördert wurde als in der Kontrollgruppe.

Auch bei Beweisversuch 3 zeigt sich ein sehr starker Effekt durch einen Fokus auf die Voraussetzung. Dieser ist in der Interventionsgruppe etwas geringer als bei Beweisversuch 2, in der Kontrollgruppe dagegen deutlich höher. In der Kontrollgruppe liegt dieser bei Beweisversuch 3 sogar über dem der Interventionsgruppe. In Beweisversuch 3 wird die Voraussetzung in der Erläuterung gar nicht benannt, wohingegen in Beweisversuch 2 diese nur unvollständig benannt wurde. Das Erkennen eines vollständig fehlenden Beweisschrittes wurde also in beiden Gruppen in starkem Maße gefördert. In der Interventionsgruppe wurde, wie die Betrachtung von Beweisversuch 2 gezeigt hat, darüber hinaus auch das Erkennen eines unvollständig dargestellten Beweisschrittes gefördert.

Erstaunlich sind die im Vergleich mit den anderen Beweisschritten geringen Effekte durch einen Fokus auf die Strukturierung. Hier wurde zwar korrekt erkannt, dass dieser Beweisschritt dargestellt ist, nicht jedoch, dass dieser in Beweisversuch 3 nicht vollständig dargestellt ist. Die Strukturierung ist in diesem Beweisversuch zwar benannt, jedoch nicht in der Weise vollständig dargestellt, dass verdeutlicht wird, wie genau das Endergebnis aus der Voraussetzung entsteht. Lokale Unvollständigkeiten hinsichtlich der Strukturierung wurden hier also, anders als bei der Voraussetzung, in beiden Gruppen nur in geringem Maße erkannt.

Das Benennen des Endergebnisses wiederum zeigt in beiden Gruppen einen deutlich höheren Effekt. Dies entspricht nicht dem intendierten Normbruch: In diesem Beweisversuch sind sowohl das Endergebnis ikonisch und sprachlich dargestellt als auch die externe Kohärenz zur Aussage explizit formuliert. In der Interventionsgruppe ist der Effekt geringer als bei Beweisversuch 2, wo die externe Kohärenz nicht explizit formuliert war. In der Kontrollgruppe dagegen höher. Möglich ist, dass hier, wegen der ungewohnten dynamischen Darstellung, Probleme bei der Abgrenzung der Beweisschritte vorlagen. Weiterhin liegen bei der Beschreibung des Endergebnisses als Quadrat der Seitenlänge zwei mehrere Probleme hinsichtlich anderer Normen vor, wie der Kohärenz zur ikonischen Definition einer geraden Zahl und der Allgemeingültigkeit, sodass auch von einer Vermischung auf der Ebene der Normen ausgegangen werden kann.

7.2.3 Untersuchung der Hypothesen

In Bezug auf die erste Hypothese

2.1 Die Betrachtung der Beweisschritte fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit.

zeigt sich nur für Beweisversuch 2 eine schwach signifikante Interaktion eines Fokus‘ auf die Beweisschritte mit den Interventionsvariablen (in Gelb hinterlegt). Nur für diesen Beweisversuch kann damit ein (schwach) signifikanter Einfluss der Intervention im Sinne der ersten Hypothese nachgewiesen werden. Die nach Zeit und Gruppe differenzierten Chancenverhältnisse für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit, je nachdem, ob ein Fokus auf die Beweisschritte vorliegt oder nicht, sind in Tabelle 27 dargestellt:

Tabelle 27 Chancenverhältnisse der Beweisschritte für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit (differenziert nach Gruppe und Zeit)

	BS1/BS0
Beweisversuch 1	
z0g0	na
z1g0	na
z0g1	na
z1g1	na
Beweisversuch 2	
z0g0	6.38*
z1g0	29.40***
z0g1	2.59
z1g1	193.09***
Beweisversuch 3	
z0g0	7.44
z1g0	38.37**
z0g1	23.61**
z1g1	37.41**

In Beweisversuch 1 wurde die Vollständigkeit zu selten als Normbruch genannt, als dass ein Modell mit mehr Einflussfaktoren noch schätzbar gewesen wäre. In Beweisversuch 2 zeigt sich in der Interventionsgruppe nach der Intervention ein sehr hoher Einfluss der Beweisschritte auf das Erkennen des Normbruchs von 193.09*** (gegenüber 2.59 vor der Intervention), was sich auch vor dem Hintergrund erklärt, dass die Beweisschritte erst in der Intervention eingeführt wurden und zuvor noch unbekannt waren. Auch in der Kontrollgruppe zeigt sich ein

hoher Einfluss von 29.40*** nach der Intervention (gegenüber 6.38* vor der Intervention), dieser fällt jedoch deutlich geringer aus als in der Interventionsgruppe. In Bezug auf Beweisversuch 2 lässt sich hier also ein Einfluss der Intervention auf den Einfluss eines Fokus auf die Beweisschritte erkennen. In Bezug auf Beweisversuch 3 ergibt sich ein leicht anderes Bild. Hier liegt auch in beiden Gruppen eine Erhöhung des Einflusses der Beweisschritte nach der Intervention gegenüber vor der Intervention vor. Der Wert nach der Intervention ist in der Kontrollgruppe jedoch etwas höher als in der Interventionsgruppe und der Zuwachs gegenüber dem Zeitpunkt vor der Intervention ist in der Kontrollgruppe deutlich höher als in der Interventionsgruppe. Hier scheint also die Intervention selbst nicht der ausschlaggebende Faktor für den Einfluss des Fokus auf die Beweisschritte zu sein. Dies ist vor dem Hintergrund zu verstehen, dass in beiden Gruppen Beweisschritte markiert wurden (vgl. Abschnitt 5.3.1) und in Beweisversuch 3 der Beweisschritt der Voraussetzung in der sprachlichen Erläuterung ganz fehlt. Wie bereits weiter oben festgestellt, scheint das Verständnis von (Un-)Vollständigkeit im Sinne des gänzlichen Fehlens eines Beweisschrittes in beiden Gruppen gefördert worden zu sein. Lokale Unvollständigkeiten in Bezug auf einen Beweisschritt, wie in Beweisversuch 2, wurden jedoch vor allem in der Interventionsgruppe gefördert.

In diesem Zusammenhang ist die Untersuchung der zweiten Hypothese zum Einfluss der Kohärenz auf das Erkennen lokaler Unvollständigkeiten interessant:

2.2 Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit.

Dafür wurden die Kohärenz in das ursprüngliche Regressionsmodell zum Einfluss der Intervention mit aufgenommen. Es zeigen sich jedoch keine signifikante Interaktionen. Ein signifikanter Einfluss der Intervention auf den in 3.2 formulierten Zusammenhang kann somit ausgeschlossen werden. Die nach Zeit und Gruppe differenzierten Chancenverhältnisse für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit, je nachdem, ob ein Normbruch hinsichtlich der Kohärenz benannt wurde oder nicht, sind in Tabelle 28 dargestellt.

Tabelle 28 Chancenverhältnisse der Kohärenz für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit (differenziert nach Gruppe und Zeit)

KO1/KO0	
Beweisversuch 1	
z0g0	na
z1g0	na
z0g1	na
z1g1	na
Beweisversuch 2	
z0g0	2.76
z1g0	3.37*
z0g1	9.14**
z1g1	2.13
Beweisversuch 3	
z0g0	2.47
z1g0	1.79
z0g1	3.19*
z1g1	1.84

Für Beweisversuch 1 war das Modell aufgrund zu weniger Werte wieder nicht schätzbar. In Beweisversuch 2 und 3 zeigen sich zwar signifikante Einflüsse der Kohärenz auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit, jedoch gänzlich unabhängig von einem möglichen Einfluss der Intervention. In Beweisversuch 2, wo die Voraussetzung zwar benannt wurde, jedoch unvollständig, sind die Einflüsse größer als bei Beweisversuch 3, wo die Voraussetzung in der Erläuterung ganz fehlt. Dies stützt die Hypothese, dass durch einen Fokus auf die Kohärenz eher lokale Unvollständigkeiten in den Blick genommen werden, nicht jedoch, dass dieser Zusammenhang durch die Intervention gefördert wurde. Darüber hinaus sind die Einflüsse fast durchgehend deutlich geringer als die entsprechenden Einflüsse durch einen Fokus auf die Beweisschritte (siehe oben).

7.3 Logische Struktur

7.3.1 Analyse des intendierten Normenverständnisses

Beweisversuch 1:



Alle Plättchen zusammen ergeben die Summe, die gerade ist. Deshalb findet man 2 gleich große Teile, die wir in grün eingekreist haben. Die Zahlen 3 und 5 folgen im Abstand 2 aufeinander.

In Bezug auf die Norm der logischen Struktur wurde nur in Beweisversuch 1 ein Normbruch intendiert. Hier wurde die Reihenfolge der Beweisschritte auf der sprachlichen Ebene vertauscht, sodass zunächst das Endergebnis, dann die Strukturierung und dann die Voraussetzung genannt wurde. Die Strukturierung wurde hierbei aus dem Endergebnis heraus begründet und nicht, der Beweislogik folgend, das Endergebnis aus der Strukturierung heraus.

7.3.2 Analyse des beobachteten Normenverständnisses

Für die Beweisversuche 2 und 3, welche keinen intendierten Normbruch hinsichtlich der logischen Struktur enthielten, lagen so wenige Werte vor, dass die entsprechenden Modelle nicht schätzbar waren. Für Beweisversuch 1 wies lediglich die Zeit einen signifikanten Einfluss auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur auf. Hier konnte somit lediglich ein signifikanter Einfluss der Interventionszeit auf das Erkennen des intendierten Normbruchs (in Rot hinterlegt) festgestellt werden, jedoch keine signifikante Wirkung der Intervention selbst. Die Entwicklungen in den Gruppen und die Gruppenvergleiche sind in Tabelle 29 dargestellt.

Für Beweisversuch 1 zeigen sich im Vergleich der Zeitpunkte vor und nach der Intervention in beiden Gruppen hohe und signifikante Werte. In der Interventionsgruppe ist dieser mit 89.2*** sehr hoch und hoch signifikant. Auch der Vergleich der Gruppen zum Zeitpunkt nach der Intervention zeigt einen hohen und hoch signifikanten Wert. Vor der Intervention liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen vor. Dies zeigt, dass zwar in beiden Gruppen das Verständnis der logischen Struktur eines Beweisversuchs gefördert werden konnte, jedoch durch die Intervention in deutlich höherem Maße.

Tabelle 29 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur

Beweisversuch 1		
g0	z1/z0	13.5*
g1	z1/z0	89.2***
z1	g1/g0	9.24***
z0	g1/g0	1.40
Beweisversuch 2		
g0	z1/z0	na
g1	z1/z0	na
z1	g1/g0	na
z0	g1/g0	na
Beweisversuch 3		
g0	z1/z0	na
g1	z1/z0	na
z1	g1/g0	na
z0	g1/g0	na

7.3.3 Untersuchung der Hypothesen

Für die Untersuchung der ersten Hypothese

3.1 Die Betrachtung der Beweisschritte fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur.

wurde, wie schon bei der Vollständigkeit, die Beziehung der dichotomen Variable Beweisschritte (BS) zur Variable der logischen Struktur untersucht. Dabei zeigt sich eine hohe und hoch signifikante Korrelation der Variablen von 0.60***. Das entsprechende Regressionsmodell war nicht schätzbar aufgrund zu geringer oder fehlender Werte für die Benennung des Normbruchs ohne gleichzeitigen Fokus auf die Beweisschritte. Insofern zeigt sich zwar ein sehr hoher Zusammenhang der Variablen, die Rolle der Intervention auf diesen Zusammenhang war jedoch nicht untersuchbar. Rein deskriptiv gibt es für einen Fokus auf die Beweisschritte einen deutlich höheren Zuwachs von vor der Intervention zu nach der Intervention und von der Interventionsgruppe (von 2 zu 57) gegenüber der Kontrollgruppe (von 1 zu 10). Dies legt den Schluss nahe, dass die Intervention hier durchaus einen sehr hohen Einfluss hatte.

Die zweite Hypothese hinsichtlich eines Einflusses der Kohärenz

3.2 Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur.

konnte quantitativ nicht bestätigt werden. Es liegt keine signifikante Interaktion mit den Interventionsvariablen vor. Auch in den nach Zeit und Gruppe differenzierten Odd Ratios ergeben sich keine signifikanten Werte. Die entsprechende Odds Ratio unabhängig von der Intervention liegt mit 0.55 deutlich unterhalb von 1, was auch einen grundsätzlichen, von der Intervention unabhängigen, Einfluss der Kohärenz ausschließt. Der entsprechende Wert ist nicht signifikant. Für die externe Kohärenz ergibt sich dabei zumindest noch ein eher neutraler Wert von 1.18, für die interne Kohärenz ein noch geringerer Wert von 0.37. Beide Werte sind jedoch ebenfalls nicht signifikant. Die Vermutung liegt nahe, dass die Kohärenz zwar in der Intervention relevant war, um die Rolle der Beweisschritte im Beweis zu klären und darüber zu begründen, in welcher Reihenfolge diese sprachlich expliziert werden sollten. Dadurch wurde das Verständnis der logischen Struktur dahingehend etabliert, dass diese Reihenfolge eingehalten werden soll. Das zugrunde liegende, auf der Kohärenz beruhende Verständnis, warum dies nötig ist, muss nach der Intervention dann nicht mehr nachvollzogen werden. Hier genügt lediglich die, auf einem Fokus auf die Beweisschritte beruhende, Feststellung einer falschen Reihenfolge, um einen Normbruch hinsichtlich der logischen Struktur festzustellen. Dies würde auch erklären, warum der Einfluss eines Fokus auf die Beweisschritte sehr hoch ist.

7.4 Allgemeingültigkeit

7.4.1 Analyse des intendierten Normenverständnisses

Beweisversuch 1:

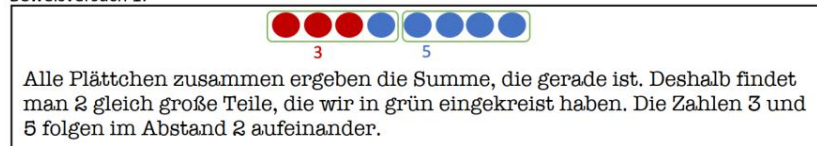


Abbildung 125 Beweisversuch 1 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 117**)

Auf ikonischer Ebene stellt Beweisversuch 1 den allgemeingültigsten Beweisversuch dar. Die entsprechende Darstellung ist generisch, lässt sich also auf alle Zahlen im Abstand zwei in dieser Weise anwenden: Es wird immer genau eines der beiden blauen Plättchen, die gegenüber den roten mehr vorhanden sind, mit den roten eingekreist werden. Lediglich der Abstand zwei als klassifikatorisches

Merkmal könnte in der ikonischen Darstellung der **Voraussetzung** expliziter verdeutlicht werden.

Auf sprachlicher Ebene ist allerdings die **Strukturierung** nicht in der Weise expliziert, dass die Allgemeingültigkeit des Gesamtzusammenhangs von Voraussetzung und Endergebnis deutlich wird. Das Hauptproblem liegt hier somit auf der Ebene der *internen Kohärenz*. Ein weiteres Problem stellt die singuläre Formulierung der **Voraussetzung** dar, in welcher die konkret genutzten Zahlen benannt werden.

Beweisversuch 2:

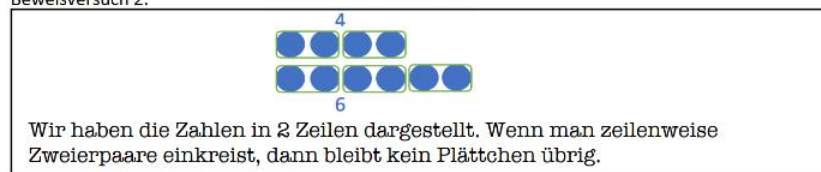


Abbildung 126 Beweisversuch 2 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 118**)

Beweisversuch 2 weist keine generische Darstellung auf. Das Hauptproblem liegt hier bei der Darstellung der **Voraussetzung**. Der Abstand zwischen den beiden Zahlen wird hier zwar deutlicher als in Beweisversuch 1 und wird auch explizit genutzt für den Gesamtzusammenhang, indem diese beiden überstehenden Plättchen zu einem Zweierpaar zusammengefasst werden. Die beiden Ausgangszahlen werden hier jedoch als gerade Zahlen dargestellt, indem diese restlos in Zweierpaare zerlegt werden. Für ungerade Zahlen würde sich eine andere Darstellung ergeben, in welcher mit den einzelnen übrigen Plättchen der beiden Zahlen anders umgegangen werden müsste. Es wäre somit eine Fallunterscheidung zwischen geraden und ungeraden Zahlen nötig. Die Voraussetzung wird hier also durchaus in *klassifikatorischer Weise* für alle geraden Zahlen genutzt, jedoch nicht für alle Fälle, die in der Aussage gefordert sind. Das Hauptproblem liegt hier also eher bei der *externen Kohärenz*. In der eleganteren Variante, ohne Fallunterscheidung, würden die Plättchen spaltenweise eingekreist werden und dafür nur genutzt, dass es sich um zwei Zahlen in zwei Zeilen handelt. Nur die zwei überstehenden Plättchen würden wie oben abgebildet eingekreist.

Auf sprachlicher Ebene ist das Hauptproblem, dass nicht aus der **Voraussetzung** heraus erklärt wird, wie sich die Strukturierung ergibt, das heißt, *interne Kohärenzen* nicht expliziert werden. Anders als bei Beweisversuch 1 gibt es hier jedoch *keine singulären Formulierungen*.

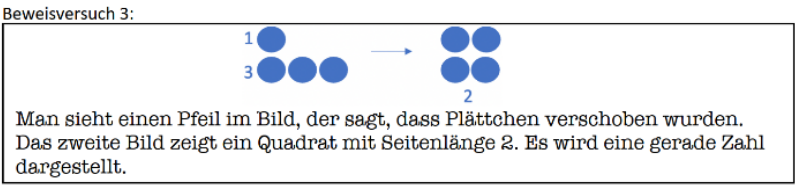


Abbildung 127 Beweisversuch 3 aus der Eingangs- beziehungsweise Ausgangserhebung (entspricht **Abbildung 119**)

In Beweisversuch 3 ist die ikonische Darstellung potenziell generisch. Lediglich im **Endergebnis** sollte die Beschriftung eigentlich an der Stelle stehen, wo sie die Anzahl der Zeilen verdeutlicht. Problematisch hinsichtlich der Allgemeingültigkeit wird die ikonische Darstellung erst in Verbindung mit der sprachlichen Darstellungsebene. Dort ist im Endergebnis von einem Quadrat der Seitenlänge zwei die Rede. Ein Quadrat ergibt sich durch die implizit abgebildete Verschiebung eines der überstehenden Plättchen jedoch ausschließlich in dem abgebildeten Fall. Das Endergebnis ist hier also in rein *singulärer Weise* beschrieben. (Interne) Kohärenzen stehen hier weniger im Fokus.

Tabelle 30 Vergleich der drei Beweisversuche hinsichtlich der Allgemeingültigkeit entlang der Beweisschritte

	Beweisversuch 1	Beweisversuch 2	Beweisversuch 3
ikonisch	Voraussetzung	Voraussetzung: klassifikatorisch, externe Kohärenz	Endergebnis
sprachlich	Voraussetzung: singulär Strukturierung: interne Kohärenz	Voraussetzung: nichts Singuläres, interne Kohärenz	Endergebnis: singulär

7.4.2 Analyse des beobachteten Normenverständnisses

Es liegen keine signifikanten Interaktionen zwischen den Interventionsvariablen und dem Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit vor. Eine Förderung des intendierten Verständnisses der Allgemeingültigkeit durch die Intervention kann somit nicht nachgewiesen werden. Es liegen jedoch durchaus signifikante Entwicklungen in den einzelnen Gruppen und zu den einzelnen Zeitpunkten vor, die in Tabelle 31 dargestellt sind.

Bei dem insgesamt, und insbesondere auf der ikonischen Darstellungsebene, intendiert allgemeingültigsten Beweisversuch 1 zeigt sich kein Einfluss der Intervention auf das Benennen eines entsprechenden Normbruchs. Weder der Gruppenvergleich nach der Intervention noch die zeitliche Entwicklung in der Interventionsgruppe zeigen Odds Ratios, die wesentlich größer als 1 sind. Keiner der Werte ist signifikant.

Bei Beweisversuch 2 und 3 zeigt sich dagegen eine deutliche und (sehr) signifikante Entwicklung in der Interventionsgruppe, nicht jedoch in der Kontrollgruppe. Zwar liegen schon zum Zeitpunkt vor der Intervention signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen vor, diese sind nach der Intervention jedoch deutlich höher und stärker signifikant. Dies weist insgesamt darauf hin, dass diese Entwicklung durch die Intervention aufgetreten ist.

Tabelle 31 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit

Beweisversuch 1		
g0	z1/z0	1.17
g1	z1/z0	1.40
z1	g1/g0	2.08
z0	g1/g0	1.74
Beweisversuch 2		
g0	z1/z0	1.72
g1	z1/z0	2.30*
z1	g1/g0	6.25***
z0	g1/g0	4.68**
Beweisversuch 3		
g0	z1/z0	1.91
g1	z1/z0	3.69**
z1	g1/g0	5.50**
z0	g1/g0	3.39*

Da der intendierte Grad an Allgemeingültigkeit für die einzelnen Beweisversuche auf sprachlicher und ikonischer Darstellungsebene differierte, wurden die Darstellungsebenen mit in das Regressionsmodell aufgenommen. Deren Interaktionen mit den beiden Interventionsvariablen waren nicht signifikant. Die nach den Darstellungsebenen differenzierten Entwicklungen in den Gruppen und zu den einzelnen Zeitpunkten sind in Tabelle 32 dargestellt.

Bei Beweisversuch 2 treten sowohl für die ikonische als auch die sprachliche Darstellungsebene signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen nach der Intervention auf, wobei der Effekt der sprachlichen Darstellungsebene höher ist. Bei der ikonischen Darstellungsebene ist der Unterschied vor der Intervention sogar höher als nach der Intervention. Bei Beweisversuch 3 liegt der Wert für die ikonische Darstellungsebene nach der Intervention wiederum etwas oberhalb des Wertes von Beweisversuch 2, was entgegen dem intendierten Normenverständnis ist, wonach die ikonische Darstellung in Beweisversuch 2 die am wenigsten generische ist. Die Werte vor und nach der Intervention unterscheiden sich hier allerdings nicht wesentlich. Insgesamt zeigt sich hier, dass durch die Intervention ein Verständnis der Generizität der ikonischen Darstellung eines Beweisversuchs nicht gefördert werden konnte und der Fokus im Allgemeinen stärker auf der sprachlichen Ebene liegt.

Tabelle 32 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit (differenziert nach den Darstellungsebenen)

	ikonisch	sprachlich
Beweisversuch 1		
g0 z1/z0	1.66	4.37
g1 z1/z0	1.23	1.33
z1 g1/g0	1.80	1.12
z0 g1/g0	2.44	3.68
Beweisversuch 2		
g0 z1/z0	2.56	0.50
g1 z1/z0	1.79	3.16
z1 g1/g0	4.14**	6.25**
z0 g1/g0	5.95**	1.00
Beweisversuch 3		
g0 z1/z0	2.62	na
g1 z1/z0	2.42*	na
z1 g1/g0	4.90*	na
z0 g1/g0	4.52*	na

Hinsichtlich der Beweisschritte ergeben sich keine signifikanten Interaktionen mit den beiden Interventionsvariablen. Die Differenzierung des Erkennens eines Normbruchs in Bezug auf die Allgemeingültigkeit entlang der Beweisschritte ist in Tabelle 33 dargestellt.

In den Beweisversuchen 1 und 2, bei welchen intendiert war, dass die Voraussetzung den hinsichtlich der Allgemeingültigkeit problematischsten Beweisschritt darstellt, zeigt sich auch ein deutlicher und signifikanter Effekt der Voraussetzung auf den Vergleich der Gruppen nach der Intervention. Dabei ist der Effekt durch die Intervention in Beweisversuch 1 insofern als höher einzuschätzen als in Beweisversuch 2, als für Beweisversuch 2 bereits vor der Intervention hohe und signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen vorlagen. In Beweisversuch 1 war die Voraussetzung auf sprachlicher Ebene als problematischer intendiert, in Beweisversuch 2 dagegen auf ikonischer Ebene (vgl. Tabelle 30). Dies bekräftigt die oben formulierte These, dass der Fokus bei der Auseinandersetzung mit der Allgemeingültigkeit stärker auf der sprachlichen als auf der ikonischen Ebene liegt. Weiterhin liegt in Beweisversuch 1 für die Voraussetzung eine klar singuläre Formulierung vor, die sich nur auf das konkret abgebildete Beispiel bezieht. In Beweisversuch 2 dagegen ist nichts rein Singuläres formuliert.

Tabelle 33 Chancenverhältnisse der Interventionsvariablen für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit (differenziert nach der Benennung der einzelnen Beweisschritte)

	Voraussetzung	Strukturierung	Endergebnis
Beweisversuch 1			
g0 z1/z0	0.49	1.25	1.70
g1 z1/z0	2.04	0.46	1.61
z1 g1/g0	7.77**	3.49	2.49
z0 g1/g0	1.86	9.46	2.63
Beweisversuch 2			
g0 z1/z0	1.05	na	0.74
g1 z1/z0	1.51	na	1.61
z1 g1/g0	11.95**	na	8.44**
z0 g1/g0	8.31*	na	3.87
Beweisversuch 3			
g0 z1/z0	na	3.03	7.08
g1 z1/z0	na	1.69	3.13
z1 g1/g0	na	4.75	5.51*
z0 g1/g0	na	8.51	12.46*

Dies kann in der Weise interpretiert werden, dass sich in der Intervention ein Verständnis der Allgemeingültigkeit entwickelt hat, in welchem rein singuläre Formulierungen als nicht allgemeingültig erkannt werden.

Dass in Beweisversuch 2 auch das Endergebnis einen signifikanten Effekt für den Vergleich der Gruppen nach der Intervention darstellt, war nicht intendiert. Dies ist insbesondere im Vergleich mit Beweisversuch 3 erstaunlich. Auch dort zeigt sich zwar ein entsprechender Effekt, dieser ist jedoch deutlich kleiner als für Beweisversuch 2 und insbesondere deutlich kleiner als der Unterschied der Gruppen vor der Intervention. Ein Einfluss der Intervention in dem intendierten Sinne, dass bei Beweisversuch 3 das Endergebnis als der hinsichtlich der Allgemeingültigkeit problematischste Beweisschritt erkannt wird, kann hier nicht beobachtet werden. Dies könnte damit zusammenhängen, dass nur in Beweisversuch 2 die externe Kohärenz nicht explizit formuliert ist und damit auch nicht allgemein der Zusammenhang zur Aussage expliziert wurde. Die Normen der Allgemeingültigkeit und (externen) Kohärenz wären hier nicht klar voneinander abgegrenzt worden.

Weiterhin wurden der Einfluss eines klassifikatorischen Verständnisses⁸¹ auf die Effekte derjenigen Beweisschritte untersucht, die sich in der obigen Analyse als signifikant herausgestellt haben. Dabei waren nur die Modelle für die Voraussetzung und das Endergebnis in Beweisversuch 2 schätzbar. Beide ergeben sehr hohe und hoch signifikante Werte von 15.2*** für den Einfluss einer klassifikatorischen Sichtweise auf den Effekt der Voraussetzung und entsprechend 37.4*** für das Endergebnis. Der Einfluss auf die Voraussetzung, wo der intendierte Normbruch liegt, fällt jedoch deutlich geringer als auf das Endergebnis, wo kein intendierter Normbruch hinsichtlich der Allgemeingültigkeit vorliegt. Dies stützt die oben formulierte These, dass hier möglicherweise aufgrund der fehlenden externen Kohärenz der Beweisversuch in der Weise bewertet wurde, dass aus dem Endergebnis nicht allgemein die Aussage ablesbar ist. Für diese Bewertung bedarf es einer klassifikatorischen Sichtweise auf das Endergebnis.

7.4.3 Untersuchung der Hypothesen

Zur Untersuchung der Hypothese

4. Die Betrachtung der Kohärenz fördert das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit

wurde die Kohärenz und deren Interaktionsterme mit in das Regressionsmodell aufgenommen. Dabei waren nur die reduzierten Modelle mit einfachen Interaktionen mit jeweils einer der beiden Interventionsvariablen Zeit oder Gruppe

⁸¹ „Klassifikatorisch“ stellt eine Unterkategorie der Kategorie Allgemeingültigkeit dar, welche, im Gegensatz zu einer rein „singulären“ Betrachtung des jeweiligen Beispielbeweises, auf ein vertieftes Verständnis von Allgemeingültigkeit hinweist (vgl. Abschnitt 2.3.5).

schätzbar. Hierbei zeigen sich keine signifikanten Interaktionen. Die nach Zeitpunkt und Gruppenzugehörigkeit differenzierten Chancenverhältnisse für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit, je nachdem, ob ein Normbruch hinsichtlich der Kohärenz benannt wurde oder nicht, sind in Tabelle 34 dargestellt.

Tabelle 34 Chancenverhältnisse der Kohärenz für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit (differenziert nach Gruppe und Zeit)

KO1/KO0	
Beweisversuch 1	
z0	1.20
z1	3.61**
g0	1.93
g1	2.82*
Beweisversuch 2	
z0	1.20
z1	3.61**
g0	1.93
g1	2.82*
Beweisversuch 3	
z0	1.20
z1	3.61**
g0	1.93
g1	2.82*

Für Beweisversuch 1 zeigen sich nur zum Zeitpunkt nach der Intervention und in der Interventionsgruppe (sehr) signifikante Odds Ratios größer 2. Das legt die Vermutung nahe, dass sich dies in der Interventionszeit in der Interventionsgruppe entwickelt hat. Mit Sicherheit kann das an dieser Stelle nicht gesagt werden, da zum Zeitpunkt nach der Intervention nicht zwischen den Gruppen differenziert werden konnte und für die Interventionsgruppe nicht zwischen den Zeitpunkten. Für Beweisversuch 2 wiederum zeigt sich in der Kontrollgruppe ein höherer Wert als in der Interventionsgruppe, weshalb hier eher davon ausgegangen werden kann, dass die Intervention keinen Einfluss hatte. Für Beweisversuch 3 zeigen sich, anders als für Beweisversuch 1 und 2, keine signifikanten Werte. Dies entspricht dem intendierten Allgemeingültigkeitsverständnis, wonach die internen Kohärenzen insbesondere in Beweisversuch 1 und 2 in nicht allgemeingültiger Weise formuliert sind (vgl. Tabelle 30).

Um diese Unterschiede gezielter untersuchen zu können, sollten die Einflüsse der unterschiedlichen Kohärenzebenen der internen Kohärenz, der externen Kohärenz, der Kohärenz zwischen den Beispielen und der Kohärenz der Darstellungsebenen untersucht werden. Dabei wurde die Kohärenz der Darstellungsebenen so selten explizit benannt, dass deren Einfluss nicht quantitativ messbar war. Alternativ wurde der Einfluss des Wechsels der Darstellungsebenen untersucht, welcher einer Kohärenzbetrachtung derselben zugrunde liegt. Dies ergab jedoch keine signifikanten Werte. Die Kohärenz zwischen den Beispielen wurde über die Variable der Übertragbarkeit⁸² untersucht, welche kodiert wurde, wenn mehrere Beispiele miteinander verglichen wurden (vgl. Abschnitt 5.1.2). Der Einfluss dieser Variable auf die Allgemeingültigkeit ergab, wie zu erwarten war, durchgehend sehr hohe und hoch signifikante Werte, da bei Kodierung der Übertragbarkeit in den meisten Fällen auch die Norm der Allgemeingültigkeit mitkodiert wurde. Daher wurden nur die Einflüsse der internen (iKO) und der externen Kohärenz⁸³ (eKO) verglichen, wobei hier ebenfalls nur die reduzierten Modelle mit einfachen Interaktionen zwischen der Kohärenz und jeweils einer der Interventionsvariablen schätzbar waren. Es zeigt sich nur für Beweisversuch 1 eine schwache Signifikanz der Interaktion der internen Kohärenz mit der Zeit. Die nach Zeit und Gruppe differenzierten Odds Ratios bezüglich der internen beziehungsweise externen Kohärenz für das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit sind in Tabelle 35 dargestellt.

Für Beweisversuch 1 zeigt sich hier nur für die interne Kohärenz ein signifikanter Wert zum Zeitpunkt nach der Intervention, was dem intendierten Verständnis (vgl. Tabelle 30) entspricht, wonach für diesen Beweisversuch die interne Kohärenz ausschlaggebend ist. Die Kohärenz von Strukturierung und Voraussetzung ist hier gar nicht formuliert. Es ist demnach davon auszugehen, dass sich dieses Verständnis im Interventionszeitraum entwickelt hat, wobei hier nicht klar differenziert werden kann, in welcher Gruppe dies in welchem Ausmaß gefördert wurde. Ein Einfluss der Intervention selbst kann hier also nicht mit Sicherheit festgestellt werden.

Für Beweisversuch 2 zeigt sich zum Zeitpunkt nach der Intervention nur für die externe Kohärenz ein signifikanter Wert, welcher auch höher ist als der Wert für die interne Kohärenz. Erstaunlich ist dabei jedoch, dass für die Kontrollgruppe

82 Empirische und allgemeine Übertragbarkeit wurden hier zusammengefasst, da ansonsten zu wenig Werte für schätzbare Modelle vorgelegen hätten.

83 Eine Differenzierung in die Unteraspekte Aussage, Definition und Lemma ergab keine schätzbaren Modelle. In den meisten Fällen wurde bei der externen Kohärenz die Kohärenz zur Aussage angesprochen, die anderen Unteraspekte wurden kaum benannt.

sowohl die interne als auch die externe Kohärenz sehr hohe und sehr signifikante Werte aufweisen und der Wert für die interne Kohärenz hier sogar höher ist als für die externe. Dies könnte darauf hinweisen, dass in der Kontrollgruppe die externe Kohärenz bezüglich der Voraussetzung weniger im Fokus stand.

Tabelle 35 Chancenverhältnisse der internen und externen Kohärenz für die Benennung eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit (differenziert nach Gruppe und Zeit)

	iKO1/iKO0	eKO1/eKO0
Beweisversuch 1		
z0	0.60	1.08
z1	3.37*	1.22
g0	1.94	1.03
g1	2.01	1.12
Beweisversuch 2		
z0	7.65	2.18
z1	2.43	3.01*
g0	8.11**	6.09**
g1	2.16	2.13
Beweisversuch 3		
z0	0.48	0.29
z1	2.88	0.25
g0	0.31	na
g1	2.92*	na

Dies würde sich auch mit den qualitativen Ergebnissen decken, wonach die externe Kohärenz hinsichtlich der Voraussetzung erst in der Interaktion und durch gezielte Impulse durch die Übungsleitenden in den Blick der Studierenden geraten ist. Der sehr hohe Wert für die interne Kohärenz, der so nur in der Kontrollgruppe zu verzeichnen ist, und gleichzeitig der sehr hohe Wert zum Zeitpunkt vor der Intervention, stehen im Widerspruch zur Hypothese. Hier scheint der Einfluss der internen Kohärenz in der Intervention eher verringert worden zu sein. In diesem Beweisversuch werden auch allgemeine interne Kohärenzen formuliert, die jedoch so nur für den Fall gerader Ausgangszahlen funktionieren. Außerdem entspricht die zeilenweise Strukturierung einer Strukturierungsweise aus der Intervention, die dort allgemeingültigen Charakter hatte.

Für Beweisversuch 3 dagegen zeigt sich ein signifikanter Wert für den Einfluss der internen Kohärenz in der Interventionsgruppe, wobei nicht differenziert werden kann zu welchem Zeitpunkt der Einfluss sich in welchem Ausmaß dar-

stellt. Dies ist in jedem Fall gegenläufig zu den intendierten Verständnissen, wonach in Beweisversuch 3 die interne Kohärenz weniger relevant sein sollte als in Beweisversuch 2. Es könnte darauf zurückzuführen sein, dass in Beweisversuch 3 sprachliche Verknüpfungsstrukturen vollständig fehlen, die interne Kohärenz somit im Allgemeinen geringer eingeschätzt und dabei nicht klar abgegrenzt wird von der Allgemeingültigkeit.

8 Diskussion

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden für jede Norm die qualitativen und quantitativen Ergebnisse verglichen und zusammengefasst. Dafür werden zunächst, für jede Norm, die Ergebnisse hinsichtlich des in der Intervention entwickelten situierten Verständnisses zusammengefasst im Sinne von

Forschungsfrage 1: Welches situierte Normenverständnis entwickelt sich auf Lernendenseite in der Intervention?

Diese werden eingeordnet in die Ergebnisse aus früheren Studien zum situierten Beweisverständnis (vgl. Abschnitt 3.5). Weiterhin werden die Verständnisse abgeglichen mit dem Verständnis der jeweiligen Norm, das sich aus der Vorerhebung auf Lehrendenseite ergeben hatte. Zu diesem Zweck werden die dort herausgearbeiteten Unterasspekte der Normenverständnisse einzeln adressiert. Dadurch soll dargelegt werden, bei welchen normativen (Unter-)Aspekten das Ziel der Intervention erreicht wurde, zu einem interpersonell geteilten Verständnis zwischen Lehrenden- und Lernendenseite zu gelangen. Zur Beantwortung von

Forschungsfrage 2: Wie entwickelt sich die Interpersonalität im situierten Normenverständnis in der Intervention?

wird zudem erörtert, in welchem Umfang sich die Ergebnisse aus der qualitativen Analyse auch quantitativ bestätigen lassen, das heißt, welcher Grad an Interpersonalität innerhalb der Lernendenseite nach der Intervention erreicht wurde. Die quantitativen Ergebnisse werden dabei vor dem Hintergrund der qualitativen Analysen beleuchtet und dabei mögliche Gründe herausgearbeitet für Übereinstimmungen und Widersprüche zwischen quantitativen und qualitativen Beobachtungen.

Schließlich werden für jede Norm die Ergebnisse zu den in der qualitativen Analyse gebildeten Hypothesen erörtert im Sinne von

Forschungsfrage 3: Welche potenziellen Einflussfaktoren gibt es auf die Entwicklung des situierten Normenverständnisses in der Intervention?

Aus diesem Vergleich der qualitativen und quantitativen Ergebnisse werden konkrete didaktische Implikationen für die geplante Weiterentwicklung der Intervention abgeleitet, die in Abschnitt 8.2 zusammengefasst werden.

8.1.1 Kohärenz

Aus der quantitativen Analyse ergab sich, dass durch die Intervention ein Verständnis für die interne Kohärenz gefördert werden konnte, wonach der Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Beweisschritten hergestellt werden soll. Dieses Verständnis ist kompatibel mit dem auf Lehrendenseite intendierten Verständnis. Es zeigte sich in dieser Weise bereits in der qualitativen Analyse bei der Diskussion des offenen Impulses zur Beweisbewertung, in welchem explizit nach einer Einigung auf den am besten gelungenen Beweisversuch in der Kleingruppe gefragt wurde.

Auch die **Etablierung der Kohärenz als Norm für die Beweisbewertung** entwickelte sich bei der Diskussion dieses Impulses. Dies passierte in allen untersuchten Gruppen eigenständig in der Interaktion, ohne weitere Impulse von außen, die explizit die Kohärenz adressiert hätten. Dies wirft ein neues Licht auf den Stellenwert dieser Norm auf Lernendenseite und eine mögliche Förderung deren Verständnisses. In früheren Studien von Alcock und Weber (2005) und Sommerhoff und Ufer (2019) wurde festgestellt, dass Normbrüche hinsichtlich der Kohärenz selten von den Studienteilnehmenden selbst adressiert und erkannt wurden und meist andere Normen im Vordergrund standen (vgl. Abschnitt 3.5). In künftigen Interventionen kann daher an diesem offenen Impuls als Einstieg in die Diskussion der Beweisversuche sowie der sozialen Situierung dieser Diskussion in einer Kleingruppe festgehalten werden. Auch die entsprechenden Beweisversuche in der aktuellen Intervention scheinen in dieser Hinsicht ergiebig gewesen zu sein.

In der Interventionsgruppe zeigte sich zudem eine Entwicklung, wonach der **Beweisschritt der Strukturierung** als vermehrt **prozesshaft** verstanden wurde und die Aufgabe hat, die globale interne Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis herzustellen. Hier zeigten sich jedoch keine signifikanten, also auf die Grundgesamtheit hin, verallgemeinerbaren Entwicklungen. Auch in der qualitativen Analyse tauchten diese Aspekte nur am Rande und eher implizit formuliert auf. Prozesshafte und produkthafte Verständnisse der Strukturierung lagen teilweise bis zum Ende der jeweiligen Diskussion unaufgelöst nebeneinander vor. Ein produkthaftes Verständnis führte dabei meist zu Problemen bei der Differenzierung der Beweisschritte im intendierten Sinne. In folgenden Interventionen empfiehlt es sich daher, wieder auf den prozesshafteren Begriff der Operation für diesen Beweisschritt zurückzugreifen. Dem Problem, dass statische Markierungen dann nicht als adäquate Beweisführung betrachtet werden könnten (vgl. Abschnitt 5.3.2), kann weiterhin von Anfang an dadurch ent-

gegengewirkt werden, dass beim Einstieg ins Thema auch statische Beweisvarianten präsentiert werden.

Das Verständnis für die externe Kohärenz wurde durch die Intervention in der Weise gefördert, dass das Endergebnis im Sinne der Aussage sprachlich formuliert sein soll. Dies entspricht dem auf Lehrendenseite intendierten Verständnis in Bezug auf die Entität der Aussage. In der qualitativen Analyse zeigte sich hier ein implizit allen Diskussionen zugrunde liegender Konsens, wonach das Endergebnis aus der Formulierung in der Aussage heraus bestimmt wurde. Hier schien bereits präinteraktional ein entsprechendes Verständnis vorgelegen zu haben, welches sich vermutlich aus der Einführungsvorlesung ergeben hat. Die Hauptwirkung der Intervention wäre damit an dieser Stelle durch die Vorlesung und weniger durch die anschließenden Kleingruppendiskussionen entstanden. In der Einführungsvorlesung zum Thema wird daher künftig weiterhin an der Bestimmung von Voraussetzung und Endergebnis mit Hilfe der Formulierung in der zu beweisenden Aussage festgehalten.

Dieses Verständnis der externen Kohärenz konnte nur für das Endergebnis gefördert werden, nicht jedoch in gleicher Weise für die Voraussetzung. Auch in der Betrachtung der internen Kohärenzen zeigte sich in der quantitativen Analyse kein vermehrter **Einbezug der Voraussetzung** nach der Intervention⁸⁴. In der qualitativen Analyse tauchte dieser Aspekt nur am Rande auf. Die Voraussetzung wurde hier meist nur von einer einzelnen Personen in der jeweiligen Gruppe in die Diskussion eingebracht, teilweise erst auf einen expliziten Impuls des/r Übungsleiter/in in diese Richtung. Von einem geteilten Verständnis kann diesbezüglich in den Gruppen damit nicht ausgegangen werden.

In künftigen Interventionen ist daher geplant, die Rolle der Voraussetzung für die internen und externen Kohärenzen stärker in den Blick zu nehmen. Dies kann zum Beispiel geschehen durch Beweisversuche, deren Normbrüche zur Kohärenz stärker differenziert sind hinsichtlich der Beweisschritte. In der aktuellen Intervention waren die Beweisversuche in dieser Hinsicht noch zu wenig differenziert – die Voraussetzung war in allen zu diskutierenden Beweisversuchen nicht in die Kohärenzen mit einbezogen. Auch die Diskussion in der Plenumsphase könnte darauf aufbauend gezielt entlang der Beweisschritte strukturiert werden. Außerdem könnte der Fokus durch einen entsprechenden Impuls explizit auf den Beweisschritt der Voraussetzung gelenkt werden.

Zur Kohärenz der Darstellungsebenen zeigten sich in der quantitativen Analyse, unabhängig von der Intervention, unterschiedliche Verständnisse. In der einen

⁸⁴ Hinsichtlich der Vollständigkeit konnte dagegen auch quantitativ ein vermehrter Einbezug der Voraussetzung festgestellt werden.

Sichtweise wird eine enge Beziehung von sprachlicher und ikonischer Ebene angestrebt. Diese Sichtweise war die nach der Intervention häufigere. In einer anderen Sichtweise wurde diese enge Beziehung eher als Problem gesehen und dem entsprechenden Beweisversuch attestiert, dass es sich um eine reine Bildbeschreibung handelt. Auch in der qualitativen Analyse lagen diese beiden Sichtweisen bis zum Ende unverteilt nebeneinander vor. In der Vorerhebung auf Lehrendenseite zeigten sich in dieser Hinsicht ebenfalls unterschiedliche Verständnisse. Die Frage nach der **Kongruenz der Darstellungsebenen** und der sich daraus ergebenden **Rolle der sprachlichen Erläuterung** in einem ikonischen Beweis müsste daher auch nicht abschließend festgelegt werden. Für künftige Interventionen kann diese Frage ein sehr ergiebiges und spannendes Diskussionsfeld liefern.

Die Hypothese, dass durch eine Betrachtung der Nachvollziehbarkeit vermehrt Normbrüche hinsichtlich der Kohärenz in den Blick genommen werden, konnte quantitativ nicht bestätigt werden. Vielmehr zeigten sich die entsprechenden Werte eher rückläufig. In der qualitativen Analyse der Diskussion des offenen Impulses zur Beweisbewertung (vgl. Abschnitt 6.1) zeigte sich dagegen die Betrachtung der Nachvollziehbarkeit in allen Gruppen als zentraler Einflussfaktor bei der Etablierung der Norm der Kohärenz. Ein Grund dafür, warum sich dies nicht quantitativ abbilden ließ, könnte darin liegen, dass diese Entwicklung in der Intervention bereits abgeschlossen wurde. Die Kohärenz wurde dort über die Abgrenzung von der Nachvollziehbarkeit als eigenständige Norm etabliert. Damit war die Kohärenz als Norm für die Beweisbewertung etabliert, was sich auch quantitativ an den signifikanten Interaktionen der Kohärenz mit den Interventionsvariablen zeigte. Die Entwicklung über die Nachvollziehbarkeit musste in der Ausgangserhebung damit nicht mehr erneut vollzogen werden.

Dies gibt einen wichtigen Hinweis bezüglich des Zeitpunktes für den entsprechenden (offenen) Impuls, der zu dieser Entwicklung in der Intervention geführt hat. Dieser sollte möglichst am Anfang der Diskussion liegen, damit die Norm der Kohärenz etabliert und im Weiteren auf diese zurückgegriffen werden kann. Für künftige Interventionen kann es sich zudem lohnen, die Beziehung der Normen der Nachvollziehbarkeit und der Kohärenz in der Plenumsphase zu diskutieren, um die Abgrenzung dieser Normen weiter zu unterstützen.

Die Hypothese, dass Wechselprozesse das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Kohärenz fördern, konnte für den Wechsel der Darstellungsebenen quantitativ nachgewiesen werden. Der Einfluss der Wechselprozesse zeigte sich jedoch nur unabhängig von der Intervention als signifikant. Der Wechsel zwischen einer Betrachtung des konkreten Beweisversuchs und einer Auseinandersetzung auf der Metaebene zeigte deutlich geringere Werte als der Wechsel der Darstellungsebenen. Für einen der Beweisversuche zeigte sich jedoch ein signi-

fikanter Moderationseffekt des Wechsels auf die Metaebene auf den Einfluss des Wechsels der Darstellungsebenen. In der qualitativen Analyse zeigten sich in den Diskussionen die gleichen Zusammenhänge. Diese wurden in jeder der untersuchten Gruppen jedoch stets alleine von einer Person, meist von der dominanten Rolle, vollzogen. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass es sich hierbei nicht um allgemein für alle Diskussionsteilnehmenden etablierte Zusammenhänge handelt und sich daher auch quantitativ kein Einfluss der Intervention auf diese erkennen lässt. Es zeigte sich jedoch quantitativ und qualitativ, dass es sich hierbei um wichtige Zusammenhänge handelt, die es sich lohnen kann in künftigen Interventionen zu fördern. Dabei könnte insbesondere der Wechsel zwischen den Darstellungsebenen durch gezielte Impulse adressiert werden. Ebenso könnte ein Wechsel auf die Metaebene kontinuierlicher eingefordert werden und nicht, wie in der aktuellen Intervention, erst ganz am Ende der Diskussionen.

8.1.2 Vollständigkeit

Zum Verständnis der Vollständigkeit liegen kaum Ergebnisse aus früheren Studien vor. Lediglich bei Knuth (2002) ist in diesem Zusammenhang von zu geringer Detailgenauigkeit die Rede (vgl. Abschnitt 3.4). Im Rahmen dieser Arbeit konnte das Verständnis der Vollständigkeit zunächst auf Lehrendenseite herausgearbeitet werden hinsichtlich des Vorhandenseins der Beweisschritte der Voraussetzung, Strukturierung/Operation und des Endergebnisses (vgl. Abschnitt 5.1.2). Es basiert damit auf einem operativen Beweisverständnis (vgl. Abschnitt 2.3.4) und nicht, wie viele der früheren Studien, auf einem eher formal-deduktiv geprägten Beweisverständnis, in welchem Vollständigkeit in konkreten Beweisversuchen schwer zu realisieren ist (vgl. Abschnitt 2.3.2).

Dieses Verständnis der Vollständigkeit, das auf einer **Differenzierung dieser Beweisschritte** beruht, sollte auch in der Intervention auf Lernendenseite vermittelt werden. Das gänzliche Fehlen der Voraussetzung als Normbruch hinsichtlich der Vollständigkeit zu erkennen, wurde dabei sowohl in der Interventionsgruppe als auch in der Kontrollgruppe im Interventionszeitraum gefördert. In der qualitativen Analyse etablierte sich dieses Verständnis von Vollständigkeit in der Auseinandersetzung mit dem Impuls, die Beweisschritte zu markieren (vgl. Abschnitt 6.2). Denselben Impuls erhielten auch die Studierenden in der Kontrollgruppe. Hier sollten die Beweisschritte im selbst erstellten Beweisversuch markiert werden (vgl. Abschnitt 5.3.1). Insofern kann davon ausgegangen werden, dass durch diesen Impuls ein Verständnis von Vollständigkeit gefördert werden kann, wonach jeder Beweisschritt – Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis – sprachlich erläutert werden muss. Das Lenken des Fokus‘ auf diese drei Beweisschritte scheint dabei schon ausreichend zu sein, um das oben beschriebene Verständnis von Vollständigkeit zu etablieren, einer weiteren Dis-

kussion in Kleingruppen, die es in der Kontrollgruppe nicht gab, bedarf es dabei nicht zwingend.

Durch die Intervention wurde darüber hinaus ein Verständnis von Vollständigkeit gefördert, das auch **lokale Unvollständigkeiten** auf der sprachlichen Darstellungsebene einschließt. Das Verständnis von Vollständigkeit, dass die Beweisschritte nicht nur benannt sein müssen, sondern auch selbst einen bestimmten Grad an Vollständigkeit erreichen sollten, der die Kohärenzen zu den anderen Beweisschritten deutlich werden lässt, entwickelte sich in der qualitativen Analyse in der Interaktion zwischen dominanter und unterstützender Rolle. Diese Entwicklung vollzog sich, unabhängig vom Impuls zum Markieren der Beweisschritte, bereits zu Beginn der Kleingruppendiskussionen in der Auseinandersetzung mit dem offenen Impuls zur Beweisbewertung. Dies erklärt, dass sich die Intervention auch in der quantitativen Analyse als ausschlaggebender Faktor zeigt für die Etablierung eines Verständnisses der Vollständigkeit, das auch lokale Unvollständigkeiten einschließt. Eine Fokuslenkung auf die Beweisschritte ist für die Etablierung eines derart differenzierten Verständnisses von Vollständigkeit also nicht ausreichend. Es bedarf auch der offenen Diskussion über die Beweisversuche in Kleingruppen.

Für künftige Interventionen ist daher geplant, an der Diskussion in Kleingruppen festzuhalten. Die zu diskutierenden Beweisversuche können dafür jedoch noch differenzierter entlang der einzelnen Beweisschritte gestaltet werden und auch die Diskussion im Plenum kann in diesem Sinne strukturiert werden (vgl. auch Abschnitt 8.1.1 zur Kohärenz). Dies würde darüber hinaus eine explizite Unterscheidung von globaler Vollständigkeit, also dem Vorhandensein aller Beweisschritte, und lokaler Vollständigkeit, das heißt der vollständigen Darstellung jedes einzelnen Beweisschrittes, ermöglichen.

Eine explizite **Differenzierung von interner und externer Ebene** konnte auf Lernendenseite nicht gefördert werden. In beiden Gruppen wurde die sprachlich vollständige Darstellung des Endergebnisses damit gleichgesetzt, dass das Endergebnis im Sinne der Formulierung in der zu beweisenden Aussage formuliert ist. Die sprachliche Vollständigkeit bezüglich des Endergebnisses wurde damit nicht in der Weise verstanden, dass die ikonische Enddarstellung erläutert wird und wie sich aus dieser die Aussage ablesen lässt. Vollständigkeit wurde an dieser Stelle also als externe Kohärenz verstanden. Eine klare Abgrenzung zwischen den Normen der Vollständigkeit und der externen Kohärenz in Bezug auf das Endergebnis konnte durch die Intervention somit nicht gefördert werden. Auch in der qualitativen Analyse wurden diese Normen, außer in einer Gruppe durch eine Person, nicht klar voneinander unterschieden. Voraussetzung und Endergebnis wurden in der sprachlichen Erläuterung stets über die Formulierung in der zu beweisenden Aussage bestimmt (vgl. auch Abschnitt 8.1.1 zur externen Kohärenz). Dies scheint sich hier sehr stark an der Einführungsvorle-

sung zum Thema zu orientieren, wo die Unterscheidung dieser beiden Beweisschritte anhand der wenn-dann-Struktur der jeweiligen Aussage erläutert wurde. In künftigen Interventionen kann dies beibehalten werden, es sollte dann jedoch die Differenzierung der Normen, wie oben beschrieben, stärker thematisiert werden. In den Plenumsphasen bietet es sich an, den Fokus mehr auf die Begründung des in der Aussage geforderten Endergebnisses aus der ikonischen (End-)Darstellung heraus zu legen.

In der quantitativen Analyse zeigte sich keine signifikante Interaktion zwischen der Betrachtung der **Kohärenz** und dem Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich (**lokaler**) **Unvollständigkeiten**. Die entsprechende Hypothese hinsichtlich eines Einflusses der Kohärenz, die sich aus der qualitativen Analyse ergab, konnte hier nicht quantitativ bestätigt werden. Hier bedarf es weiterer Analysen über einen längeren Zeitraum und einer gezielten Fokuslenkung auf die Norm der Kohärenz durch entsprechende Impulse, um diesen Einflussfaktor weiter zu untersuchen.

Die Hypothese, dass ein Fokus auf die **Beweisschritte** das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Vollständigkeit fördert, konnte dagegen quantitativ bestätigt werden. Dass dieser Zusammenhang durch die Intervention gefördert wurde, lässt sich jedoch nur für lokale Unvollständigkeiten in Bezug auf einen Beweisschritt bestätigen. Allerdings wurde auch in der Kontrollgruppe der Fokus auf die Beweisschritte gelenkt, was erklärt, warum sich keine signifikanten Gruppenunterschiede bezüglich des gänzlichen Fehlens von Beweisschritten ergeben haben (siehe oben). An dem Impuls zur Lenkung der Aufmerksamkeit auf die Beweisschritte kann daher für künftige Interventionen festgehalten werden. Dieser ist jedoch, wie oben beschrieben, noch nicht alleine ausreichend, für die Etablierung eines differenzierten Verständnisses der Vollständigkeit. Darüber hinaus ist eine gemeinsame Diskussion in Kleingruppen wichtig, ausgehend von zunächst eher offen gestalteten Impulsen zur Beweisbewertung.

8.1.3 Logische Struktur

Auch zum Verständnis der logischen Struktur gibt es kaum Ergebnisse aus früheren Studien. Heinze und Reiss (2003) stellten fest, dass in Bezug auf das Methodenwissen hier die größten Verständnisschwierigkeiten vorliegen. Dies machen sie daran fest, dass zirkuläre Beweisversuche nicht als invalide Beweise erkannt wurden. In der Vorerhebung auf Lehrendenseite im Rahmen dieser Arbeit konnte ein Verständnis der logischen Struktur herausgearbeitet werden, das auf einer festgelegten linearen **Organisation der Beweisschritte** basiert – erst die Voraussetzung, dann die Strukturierung/Operation und dann das Endergebnis. Dabei wird auf Lehrendenseite wieder von einem operativen Beweisver-

ständnis ausgegangen und das entsprechende Verständnis ist in diesem Sinne breiter gefasst als die Fokussierung auf Zirkularitäten bei Heinze und Reiss (2003), die von einem formal-deduktiven Beweisverständnis ausgehen.

Dieses Verständnis konnte sowohl in der Interventionsgruppe als auch in der Kontrollgruppe im Interventionszeitraum gefördert werden. In der qualitativen Analyse entwickelte sich dieses Verständnis in der Auseinandersetzung mit dem Impuls zur Markierung der Beweisschritte. Implizit lag allen Diskussionen dieses Verständnis bereits zu Beginn der Auseinandersetzung mit dem Impuls zugrunde. Auch in der Einführungsvorlesung wurde die Struktur eines Beweises explizit anhand dieser Abfolge der Beweisschritte erläutert. Dies liefert eine mögliche Erklärung dafür, dass sich dieses Verständnis auch in der Kontrollgruppe gezeigt hat. Die Einführungsvorlesung und einen Impuls zur Markierung der Beweisschritte gab es auch in dieser Gruppe. Daher ist es sinnvoll, dies auch in künftigen Interventionen beizubehalten.

Der Einfluss eines Fokus‘ auf die Beweisschritte auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur konnte quantitativ nachgewiesen werden. Dass dieser Einfluss durch die Intervention gefördert wurde, konnte aufgrund teilweise nicht schätzbarer Modelle nicht explizit nachgewiesen werden.

Einen Einfluss der Betrachtung der **Kohärenz** auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der logischen Struktur konnte quantitativ dagegen nicht nachgewiesen werden. In der qualitativen Untersuchung zeigte sich die Kohärenz jedoch als relevanter Einflussfaktor, um ein vertieftes Verständnis der Norm der logischen Struktur zu erhalten. Erst über die Kohärenz konnte die Reihenfolge der **Beweisschritte** durch eine Klärung deren **Rolle im Beweis** begründet werden. Dies geschah jeweils nur durch eine Person, meist die dominante Rolle. Von einem Konsens zwischen den Diskussionsteilnehmenden kann hier also nicht ausgegangen werden. Dies würde erklären, warum sich dieser Einflussfaktor nicht quantitativ bemerkbar gemacht hat. Um die Reihenfolge der Beweisschritte als normativ verbindlich für die logische Struktur anzuerkennen, ist es darüber hinaus nicht notwendig, auf die Kohärenz einzugehen. Dies kann auch als extrapersonell durch die Lehrveranstaltung gegeben hingenommen werden. Für die meisten Diskussionsteilnehmenden zeigte sich Letzteres eher als Grundlage der Beweisbewertung in der qualitativen Analyse. Auch dies würde den quantitativ nicht messbaren Einfluss erklären. In der qualitativen Analyse zeigte sich jedoch, wie wichtig dieser für ein vertieftes Verständnis der logischen Struktur ist. Von daher ist geplant, in künftigen Interventionen in den Diskussionen der Beweisversuche noch stärker der Fokus auf ein Begründen dieser Reihenfolge durch gezielte Impulse zu legen.

Weitere Hinweise auf das Verständnis der logischen Struktur ergaben sich aus der qualitativen Analyse zur Allgemeingültigkeit bei der Untersuchung der Organisation der Kohärenzebenen. Hier zeigten sich beim Übertragen der Beweisversuche und deren Verbesserung in der Argumentation der Studierenden **vielfältige Organisationsformen**. Insbesondere wurde deutlich, dass die logische Struktur ein komplexeres Konstrukt ist, als dass sich dieses allein durch das Erkennen von Zirkularitäten (wie z. B. bei Heinze und Reiss, 2003) in einem Beweis abbilden ließe. Eine Zirkularität beschreibt eine kreisförmige Organisationsform, die das Endergebnis mit einbezieht. In der Analyse zeigten sich jedoch vielfältigere Möglichkeiten, die Entitäten innerhalb einer Kohärenzebene oder zwischen den Kohärenzebenen zu organisieren. Dies ließ sich quantitativ nicht adäquat abbilden, da hier nur die Beweisbewertungen der Studierenden analysiert wurden. In künftigen Untersuchungen kann der Einbezug der Beweiskonstruktionen der Studierenden in die Analyse vertieften Aufschluss darüber geben, wie die Studierenden selbst ihre Überlegungen organisieren.

In der qualitativen Analyse zeigten sich auf der externen Kohärenzebene meist kreisförmige Organisationsstrukturen, wo das Lemma aus der Aussage und die Aussage aus dem Lemma begründet wurde. Durch den Einbezug der Definition entwickelte sich hier interaktional schließlich eine korrekte Organisationsstruktur auf der externen Ebene. Die Thematisierung dieser Entitäten auf der externen Ebene und deren Beziehung zueinander könnte in künftigen Interventionen noch gezielter adressiert werden. Auch die logische Metaebene könnte dabei vermehrt in den Blick genommen werden: Die korrekte Formulierung einer Kontraposition und deren Beziehung zur ursprünglichen Aussage zeigten sich in der qualitativen Analyse als problematisch.

Auch die Organisation zwischen interner und externer Ebene führte, insbesondere beim Beweisschritt der Voraussetzung, zu Schwierigkeiten. Dass die interne ikonische Darstellung der Voraussetzung aus den entsprechend in der Aussage geforderten Eigenschaften begründet werden soll, könnte expliziter thematisiert werden in künftigen Interventionen.

Insbesondere bei der internen Organisation zeigten sich darüber hinaus deutliche Widersprüche zwischen dem, was auf Studierendenseite als normativ verbindlich für die logische Struktur formuliert wurde und der tatsächlichen Argumentationsweise bei der eigenen Beweisformulierung. Während die feste Reihenfolge der Beweisschritte als allgemeiner Konsens formuliert wurde, also insbesondere, dass das Endergebnis auf die Strukturierung folgt, wurde bei eigenen Argumentationen meist die Strukturierungsweise aus dem gewünschten Endergebnis heraus begründet. Auch hier zeigt sich wieder, dass ein Verständnis der logischen Struktur, das nur die Abfolge der Beweisschritte im Blick hat, nicht ausreichend ist. Es müssten zudem die Kohärenzen betrachtet werden, also wie sich die Beweisschritte logisch auseinander ergeben. Dies könnte, wie bereits oben

beschrieben, in künftigen Interventionen stärker in den Blick genommen werden. Die Beweisschritte können im intendierten Sinne angeordnet sein und dennoch kann implizit eine umgekehrte Organisation vorliegen. Als heuristische Strategie zur Beweisfindung ist dies durchaus sinnvoll, für die Beweisformulierung müsste hier jedoch das Endergebnis aus der Strukturierung hergeleitet werden und nicht umgekehrt. Eine explizite Unterscheidung zwischen dem Beweisfindungsprozess und dabei verwendeten heuristischen Strategien und der endgültigen Formulierung eines Beweises könnte daher in künftigen Interventionen stärker in den Blick genommen werden, um impliziten Vermischungen und damit einem inkonsistenten Verständnis der logischen Struktur entgegenzuwirken.

8.1.4 Allgemeingültigkeit

Das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit zeigte keine signifikante Interaktion mit den Interventionsvariablen. Insofern können keine auf die Grundgesamtheit hin verallgemeinerbaren Aussagen über die Förderung des Verständnisses der Allgemeingültigkeit getroffen werden. Vor dem Hintergrund, dass es sich bei der Allgemeingültigkeit um ein intern sehr komplex strukturiertes Konstrukt handelt, das sich aus dem Zusammenspiel unterschiedlicher Kohärenzebenen ergibt, war auch innerhalb eines so kurzen Interventionszeitraumes nicht von signifikanten Entwicklungen auszugehen. Es zeigten sich jedoch durchaus Entwicklungen in der Interventionsgruppe, welche hoffen lassen, dass sich diese signifikant entwickeln bei entsprechend wiederholt stattfindenden, ähnlich strukturierten Interventionen über einen längeren Zeitraum.

Ein zentraler Unteraspekt im Verständnis der Allgemeingültigkeit auf Lehrendenseite ist ein **klassifikatorisches Verständnis** der Beweisschritte und der entsprechenden internen Kohärenzen. Dieser Aspekt zeigte sich auch in der quantitativen Analyse auf Lernendenseite, unabhängig von der Intervention, als relevanter Einflussfaktor, wenn auch nicht immer bezüglich des diesbezüglich intendierten Beweisschrittes. Insbesondere wurden singuläre Formulierungen in der sprachlichen Erläuterung als Normbruch hinsichtlich der Allgemeingültigkeit erkannt. Dieses Ergebnis deckt sich mit Ergebnissen früherer Studien zur Allgemeingültigkeit, in welchen diese Norm vor allem in Abgrenzung zu rein empirischen, und damit singulär betrachteten, Darstellungen verstanden wurde (vgl. Abschnitt 3.5).

In der qualitativen Auswertung konnten in dieser Hinsicht bereits deutlich differenziertere Entwicklungen herausgearbeitet werden, die über bisherige Studienergebnisse hinausgehen. Während zu Beginn nur das Endergebnis klassifikatorisch betrachtet wurde, wurden im weiteren Verlauf auch die anderen Beweisschritte und die entsprechenden internen Kohärenzen klassifikatorisch verstan-

den. Dies wurde jedoch in allen Gruppen stark gelenkt von der dominanten Person, wobei bis zum Ende meist unklar blieb, inwieweit die anderen Diskussionsteilnehmenden dies übernommen haben. Hier sind künftig gezielte Impulse zum Aufbau eines klassifikatorischen Verständnisses geplant. Darüber hinaus könnte die klassifikatorische Struktur eines Beweisversuchs in den Plenumsphasen und der Vorlesung erörtert werden.

Zentral für den Aufbau eines klassifikatorischen Verständnisses ist die Organisation der Kohärenzebene der Beispielnutzung. In der qualitativen Auswertung zeigte sich hier beim Übertragen der ikonischen Darstellung auf ein weiteres Zahlenbeispiel bereits eine sehr differenzierte Auseinandersetzung. Dabei wurde versucht, von **Unterschieden** zwischen den Beispielen zu **Gemeinsamkeiten** zu gelangen. Dies geschah jedoch meist allein durch die dominante Person beziehungsweise lagen diesbezüglich bis zum Ende gegensätzliche Verständnisse zwischen den Diskussionsteilnehmenden vor. Die einen versuchten dabei sprachliche Singularitäten zu eliminieren, während die anderen die ikonische Darstellung hinsichtlich ihrer Generizität zu verbessern versuchten.

Die komplexe Binnenstruktur der Allgemeingültigkeit hinsichtlich der unterschiedlichen **Kohärenzebenen**, die sich in der qualitativen Analyse gezeigt hatte und in dieser Form ein bislang unerforschtes Forschungsfeld darstellt, war quantitativ nicht reproduzierbar. Der sich daraus ergebende Einfluss der Kohärenz auf die Allgemeingültigkeit ließ sich daher quantitativ nicht nachweisen. Lediglich die interne Kohärenz zeigte bezüglich eines der Beweisversuche einen schwachen Einfluss auf das Erkennen eines Normbruchs hinsichtlich der Allgemeingültigkeit. Die externe Kohärenz zeigte keinen signifikanten Einfluss. Die innere Struktur der **externen Kohärenz** wurde in der quantitativen Erhebung nur äußerst selten von Einzelpersonen thematisiert. In der qualitativen Analyse zeigte sich in zwei der drei Gruppen jedoch bereits ein sehr viel tiefer gehendes Verständnis. Es wurden, wenn nötig, weitere Lemmata formuliert und mit deren Hilfe, sowie der Definition der Parität, die Aussage begründet. Dabei spielte jedoch jedes Mal die dominante Person eine zentrale Rolle. Auch lagen bis zum Ende teilweise widersprüchliche Verständnisse zwischen den Diskussionsteilnehmenden vor, in der Hinsicht, wie die externe Kohärenzebene mit der Kohärenzebene der Beispielnutzung in Verbindung gebracht werden sollte. Insofern erklärt sich, warum sich dies nicht quantitativ abbilden ließ. Da sich die Diskussion der Koordination dieser Kohärenzebenen in der qualitativen Analyse jedoch als sehr fruchtbar erwiesen hat, bräuchte es in künftigen Interventionen hier mehr Begleitung und entsprechend gestaltete Beweisversuche, durch welche das Hinterfragen der Begründungsgrundlagen und ein Etablieren zusätzlicher Lemmata noch stärker angeregt werden. Auch ein explizites Thematisieren

der Kohärenzebenen in der Vorlesung oder entsprechenden Plenumsphasen wäre für den Aufbau eines vertieften Verständnisses der Allgemeingültigkeit wichtig und würde sich für eine weiterführende, vertiefte Auseinandersetzung mit der Beweisthematik eignen. Im Sinne der Komplexitätsreduktion wurden diese in der aktuellen Intervention noch ausgespart.

Der Fokus bei der Auseinandersetzung mit der Allgemeingültigkeit lag in der Ausgangserhebung auf Lernendenseite im Allgemeinen stark auf der **sprachlichen Darstellungsebene**. In der qualitativen Analyse zeigte sich hier, dass dieser vor allem die Rolle beigemessen wird, die Allgemeingültigkeit des beispielgebundenen Beweisversuchs zu gewährleisten. Dies entspricht dem Verständnis auf Lehrendenseite. Auf Lernendenseite wurde dies daran festgemacht, dass erst durch die sprachliche Darstellungsebene **interne Kohärenzen in klassifikatorischer Weise** expliziert werden können. Weiterhin können die Entitäten auf der **externen Kohärenzebene**, wie zusätzlich nötige Lemmata, nur sprachlich dargestellt werden. Die Rolle der sprachlichen Erläuterung geht daher in diesem Kontext über eine rein kongruente Beschreibung der ikonischen Darstellung hinaus⁸⁵. In künftigen Interventionen könnte diese Rolle explizit diskutiert werden.

Eine Förderung durch die Intervention hinsichtlich des Erkennens der fehlenden **Generizität der ikonischen Darstellung** konnte quantitativ nicht nachgewiesen werden. Dies deckt sich mit den Ergebnissen früherer Studien, wonach dieser Aspekt im Verständnis auf Lernendenseite schwer zu fördern ist (vgl. z.B. Chazan, 1993). In der qualitativen Analyse zeigten sich hier erste Entwicklungen bei der Auseinandersetzung mit dem Impuls zur Übertragung auf weitere Beispiele. Für künftige Interventionen wäre es daher wichtig, noch mehr Beweisversuche hinsichtlich der Generizität ihrer ikonischen Darstellung über einen längeren Zeitraum in Übungen und Vorlesungen zu analysieren und diese in dieser Hinsicht noch differenzierter zu gestalten.

⁸⁵ Dies deckt sich mit dem von Wittmann formulierten Verständnis der Rolle der sprachlichen Darstellungsebene, wonach diese interne und externe Kohärenzen in allgemeingültiger Form explizieren soll (vgl. Abschnitt 2.4.3).

8.2 Didaktische Implikationen

In Tabelle 36 sind die herausgearbeiteten Implikationen für die geplante Weiterentwicklung der Interventionen dargestellt. Diese sind entlang der Normen gegliedert. Bei jeder Norm wird weiterhin nach den qualitativ herausgearbeiteten potenziellen Einflussgrößen unterschieden, sowie nach den Darstellungsebenen⁸⁶. Der Hauptfokus liegt damit auf einem Vergleich der Rolle der Beweisschritte und der Rolle der Kohärenz im Verständnis der jeweiligen Norm. Außerdem werden zu den in Abschnitt 8.1 herausgearbeiteten Teilaspekten konkrete Vorschläge für deren weitere Förderung dargelegt.

Hinsichtlich der **Kohärenz** stand die Rolle der Beweisschritte eher im Hintergrund. Es stellte sich dabei insbesondere der explizite Einbezug der Voraussetzung in die Betrachtung interner und externer Kohärenzen als relevant für ein vertieftes Verständnis der Kohärenz heraus. In künftigen Interventionen könnte der Fokus durch einen gezielten Impuls auf diesen Beweisschritt gelenkt werden. Außerdem könnten die Normbrüche in den Beweisversuchen differenzierter in Bezug auf die Voraussetzung gestaltet werden. Weiterhin bietet es sich an, die Diskussion in den Plenumsphasen entlang der Beweisschritte zu strukturieren. Außerdem könnte ein prozesshaftes Verständnis des Beweisschrittes der Strukturierung gefördert werden durch eine Umbenennung dieses Beweisschrittes in „Operation“⁸⁷. Dadurch könnte die zentrale Rolle dieses Beweisschrittes für das Herstellen der globalen internen Kohärenz zwischen Voraussetzung und Endergebnis in den Fokus gerückt werden.

Um die Kohärenz als Norm zur Beweisbewertung zu etablieren, zeigten sich in der Analyse verschiedene Einflussfaktoren als hilfreich. Für künftige Interventionen ist daher geplant, an dem offenen Impuls zur Beweisbewertung zum Einstieg in die Diskussion der Beweisversuche festzuhalten. Zur Sicherung könnte in künftigen Interventionen noch mitgedacht werden, die Abgrenzung der Kohärenz von der Norm der Nachvollziehbarkeit, die in den Kleingruppendiskussionen selbstständig in der Auseinandersetzung mit diesem Impuls stattgefunden hat, in der Plenumsphase explizit aufzugreifen. Zudem könnten Wechsel in der Ebene der Betrachtung durch entsprechende Impulse angeregt werden.

86 Die Darstellungsebenen wurden nur bei denjenigen Normen in die Betrachtung einbezogen, bei welchen sie sich in der vergleichenden Zusammenfassung der qualitativen und quantitativen Ergebnisse als zentral herausgestellt haben.

87 Dies entspricht der Benennung, wie sie für operative Beweise üblich ist (vgl. dazu Abschnitt 2.3.4).

Tabelle 36 Didaktische Implikationen für die Weiterentwicklung der Intervention

Norm	Einflussfaktor	Teilaspekt	Förderung
Kohärenz	Beweisschritte	-Einbezug der Voraussetzung -prozesshaftes Verständnis der Strukturierung	-Impulse zur Fokuslenkung -Normbrüche differenziert nach Beweisschritten -Diskussion entlang der Beweisschritte strukturieren -Benennung als „Operation“ statt „Strukturierung“
	Weitere Einflussfaktoren	Etablierung als Norm zur Beweisbewertung	-offener Impuls zur Beweisbewertung am Anfang -Ebenenwechsel einfordern -Kohärenz von Nachvollziehbarkeit abgrenzen
	Rolle der sprachlichen Darstellungsebene	Kongruenz der Darstellungsebenen	Rolle der sprachlichen Erläuterung im Beweis diskutieren
Vollständigkeit	Beweisschritte	Differenzierung der Beweisschritte	Impuls zur Explikation der Beweisschritte
	Kohärenz	-Lokale Unvollständigkeiten -Differenzierung interne und externe Ebene	-Diskussion in Kleingruppen entlang der Beweisschritte, Impulse zur Fokuslenkung -Explikation in der Vorlesung und in den Plenumsphasen
Logische Struktur	Beweisschritte	Festgelegte, lineare Organisation der Beweisschritte	Beweisstruktur entlang der Beweisschritte erklären
	Kohärenz	-Rolle der Beweisschritte im Beweis -vielfältige Organisationsformen der Kohärenzebenen	-Begründung für die Reihenfolge der Beweisschritte einfordern -eigene Beweiskonstruktionen analysieren lassen
Allgemeingültigkeit	Kohärenzebenen	-klassifikatorisches Verständnis der internen Kohärenzen -Unterschiede in Gemeinsamkeiten auflösen -Binnenstruktur der externen Kohärenzebene	- klassifikatorische Struktur analysieren -Impuls zur Übertragung auf weitere Beispiele -Begründungsgrundlagen hinterfragen
	Rolle der ikonischen Darstellungsebene	Generizität	-Impuls zur Übertragung auf weitere Beispiele -gezielte Thematisierung über längeren Zeitraum
	Rolle der sprachlichen Darstellungsebene	-interne Kohärenzen klassifikatorisch explizieren -Binnenstruktur der externen Kohärenzebene explizieren	Rolle sprachliche Erläuterung im Beweis diskutieren

Bezüglich der **Vollständigkeit** zeigte sich eine Fokuslenkung auf die Differenzierung der Beweisschritte durch den Impuls zur Explikation der Beweisschritte in den jeweiligen Beweisversuchen als förderlich für den Aufbau eines ersten Verständnisses der Vollständigkeit, das kompatibel ist mit dem Verständnis auf Lehrendenseite. Es zeigten sich in der Analyse jedoch teilweise Verständnisse, die für einen Beweisschritt etabliert wurden, für einen anderen jedoch noch nicht. Für künftige Interventionen würde es sich auch vor diesem Hintergrund anbieten, die Diskussion im Plenum entlang der Beweisschritte auszudifferenzieren. Dies würde zudem eine Differenzierung ermöglichen nach globalen Aspekten des gänzlichen Fehlens eines Beweisschrittes im Gesamtkontext und lokalen Aspekten der unvollständigen Darstellung eines Beweisschrittes. Letzteres Verständnis wurde in der aktuellen Intervention vor allem in der Auseinandersetzung mit der internen **Kohärenz** zwischen aufeinanderfolgenden Beweisschritten erreicht. Entsprechende Impulse, die den Fokus explizit auf die Betrachtung lokaler Unvollständigkeiten und die entsprechenden lokalen internen Kohärenzen lenken, könnten daher in künftigen Interventionen einbezogen werden.

In künftigen Interventionen könnte zudem die Differenzierung **der internen und der externen Ebene** in einem Beweisversuch stärker in den Fokus gerückt werden. Dabei kann unterschieden werden zwischen der sprachlichen Erläuterung des ikonisch dargestellten Endergebnisses und der externen Kohärenz in dem Sinne, dass das Endergebnis gemäß der zu beweisenden Aussage formuliert ist. In der Vorlesung kann dabei an der Bestimmung von Voraussetzung und Endergebnis aus der wenn-dann-Struktur der Aussage heraus festgehalten werden. Es sollte in diesem Fall jedoch gleichzeitig klarer kommuniziert werden, dass dies der externen Kohärenz zuzurechnen ist und es zudem einer Begründung der Aussage aus der ikonischen Darstellung des Endergebnisses heraus bedarf. Dies könnte, für eine Vertiefung des Verständnisses der Vollständigkeit, in weiterführenden Übungssitzungen auch in entsprechenden Plenumsphasen explizit thematisiert werden.

Das Erläutern der Beweisstruktur entlang der Beweisschritte in der Vorlesung zeigte sich förderlich für den Aufbau eines ersten Verständnisses der **logischen Struktur**, welches wiederum kompatibel ist mit dem Verständnis auf Lehrendenseite. Dieses Verständnis basiert auf einer festgelegten, linearen Organisation der Beweisschritte. Dabei wurde die feste Reihenfolge von Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis als normativ verbindlich anerkannt. Warum es sich hierbei um die einzig sinnvolle Reihenfolge handelt, stand dabei auf Lernendenseite weniger im Fokus. Um dies zu erörtern, wäre eine Auseinandersetzung mit den Beweisschritten und deren Rolle in einem Beweis wichtig. Dabei könnten die internen und externen **Kohärenzen** in Bezug auf diese Beweis-

schritte geklärt werden. Für den Aufbau eines vertieften Verständnisses dieser Norm bieten sich in einer weiterführenden Intervention daher gezielte Impulse an, die diese Reihenfolge hinterfragen und den Fokus damit auf die Kohärenz in Bezug auf die Beweisschritte lenken.

Eine weitere Vertiefung des Verständnisses der logischen Struktur könnte dadurch adressiert werden, dass die vielfältigen möglichen Organisationsformen der Kohärenzebenen in den Blick genommen werden. Diese zeigten sich in der qualitativen Analyse insbesondere beim Verbessern der Beweisversuche und damit einhergehender eigener Beweisformulierungen. In künftigen Interventionen könnten daher vermehrt auch eigene Beweiskonstruktionen der Studierenden eingefordert werden.

Für eine Förderung des Verständnisses der **Allgemeingültigkeit** zeigte sich in der qualitativen Analyse die Betrachtung der **Kohärenzebenen** als zentral. Was bereits gut gefördert werden konnte durch den Impuls zur Übertragung auf ein weiteres Zahlenbeispiel, ist die Betrachtung der Kohärenzebene der Beispiele. Unterschiede, die zwischen den Beispielen festgestellt wurden, konnten in den Kleingruppendiskussionen in Gemeinsamkeiten aufgelöst werden.

Weiterhin wurde diese Kohärenzebene in Verbindung gesetzt mit der internen Kohärenzebene. Interne Kohärenzen zwischen einzelnen Beweisschritten wurden dabei vermehrt klassifikatorisch verstanden. Für den Aufbau eines vertieften klassifikatorischen Verständnisses bietet es sich darauf aufbauend an, bei der Analyse der Beweisstruktur entlang der Beweisschritte auch die klassifikatorische Struktur mit zu analysieren. Analog zu dem Analyseraster bei der qualitativen Analyse des Verständnisses der Allgemeingültigkeit könnte hier für jeden Beweisschritt und die Kohärenzen dazwischen mit notiert werden, ob diese singulär oder klassifikatorisch dargestellt sind.

Auch die komplexe Binnenstruktur der externen Kohärenzebene könnte in künftigen Interventionen explizit adressiert werden. Diese bietet sich an, sowohl in einer weiterführenden Vorlesung zum Thema explizit anhand von konkreten Beweisversuchen zu analysieren als auch in darauf aufbauenden Übungssitzungen. Dafür bedarf es Beweisversuchen, die in dieser Hinsicht eine differenzierte Diskussion zu den im jeweiligen Beweisversuch genutzten Begründungsgrundlagen anregen, also Beweisversuche, die die Nutzung von Lemmata einfordern.

Bei dem Aufbau eines vertieften Verständnisses der Allgemeingültigkeit besteht für künftige Interventionen noch großer Handlungsbedarf hinsichtlich des Verständnisses der **Generizität** einer ikonischen Darstellung in einem Beweisversuch. Durch den Impuls zum Übertragen auf ein weiteres Beispiel zeigten sich in der qualitativen Analyse bereits erste Entwicklungen, die sich quantitativ jedoch noch nicht nachweisen ließen. Für einen langfristigen Verständnisaufbau in dieser Hinsicht bietet sich eine Intervention über einen längeren Zeitraum an, mit entsprechend differenziert gestalteten Beweisversuchen.

Die Rolle der **sprachlichen Darstellung** in einem beispielgebunden ikonischen Beweis(versuch) könnte in künftigen Interventionen expliziter diskutiert werden. Neben der Forderung einer Kongruenz beider Darstellungsebenen, wurde die sprachliche Darstellung auch in der Weise verstanden, dass diese über eine reine Bildbeschreibung hinausgehen sollte. Letzteres Verständnis zeigte sich insbesondere in der Auseinandersetzung mit der Allgemeingültigkeit eines Beweisversuchs. Danach hat die sprachliche Erläuterung die Aufgabe, in klassifikatorischer Weise interne Kohärenzen, die Kohärenz zwischen den Beispielen sowie die Binnenstruktur der externen Kohärenzebene zu explizieren. Erst dadurch kann die Allgemeingültigkeit des entsprechenden Beweisversuchs gewährleistet werden.

In der Analyse intra- und interpersoneller Prozesse in den Kleingruppendiskussionen zeigte sich in jeder Gruppe eine Person in der dominanten Rolle, welche das am Ende etablierte Verständnis maßgeblich prägte (vgl. Abschnitt 6). Bei der Gestaltung künftiger Interventionen könnte dies gezielt in den Blick genommen werden und es könnten didaktische Rahmungen erprobt werden, in welchen die Entstehung einer dominanten Rolle stärker eingeschränkt wird. Außerdem lagen bis zum Ende der Diskussion teilweise widersprüchliche Verständnisse unaufgelöst nebeneinander vor, ohne dass dies von den Diskussionsbeteiligten auf der Metaebene festgestellt wurde. Die entsprechenden Aspekte im Verständnis der Normen waren entsprechend auch diejenigen, welche in der quantitativen Analyse keinen hohen Grad an Interpersonalität zeigten (vgl. Abschnitt 7). Hier bietet sich in künftigen Interventionen die Einforderung einer Metaebene an, auf welcher die in der gemeinsamen Diskussion etablierten Verständnisse festgehalten werden.

Insgesamt hat sich die Vorbereitung in der Vorlesung und die daran anschließende Diskussion in Kleingruppen entlang der Impulse als sinnvoll erwiesen für den Aufbau eines ersten Verständnisses der Normen, welches kompatibel ist mit dem intendierten Verständnis auf Lehrendenseite. An manchen Stellen könnte eine Vertiefung der Verständnisse bereits durch geringe Modifikationen der aktuellen Intervention erreicht werden. Die weiteren in Tabelle 36 aufgeführten Ideen zur Förderung der Normenverständnisse eignen sich für darauf aufbauende, weiterführende Interventionen. Im Sinne der Reduktion der Komplexität für einen Einstieg ins Thema Beweisen empfiehlt es sich, diese zu Beginn noch auszusparen beziehungsweise nicht explizit in den Fokus zu rücken. Die Gestaltung einer entsprechenden Lernsukzession und deren Beforschung in ihrem Verlauf ist für die Zukunft angestrebt. Insbesondere bei der Allgemeingültigkeit wäre eine Wirkung erst bei längerer Interventionsdauer zu erwarten.

8.3 Forschungsrelevante Implikationen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein **Aushandlungsprozess auf Hochschulebene** (vgl. Abschnitt 1.5) gestaltet zum situierten Normenverständnis in Bezug auf beispielgebunden ikonische Beweise. Dabei lag eine besondere Schwierigkeit für die Gestaltung auf Hochschulebene darin, dass auch die Lehrendenseite eine heterogen zusammengesetzte Gruppe darstellt. Dem wurde durch eine separate Vorerhebung zum Normenverständnis auf Lehrendenseite begegnet. Die Auswertungen der Intervention (vgl. Abschnitt 8.1) ergaben, dass die vor diesem Hintergrund konzipierte Intervention das Ziel eines interpersonell geteilten Normenverständnisses zwischen Lehrenden- und Lernendenseite in den grundlegenden Aspekten der jeweiligen Verständnisse erfüllen konnte. Die Konzeption des Aushandlungsprozesses, die in dieser Arbeit detailliert dargelegt ist, kann damit auch als Vorschlag verstanden werden für die Gestaltung künftiger Aushandlungsprozesse sowie deren Beforschung (siehe dazu auch Abschnitt 8.4).

Zudem konnten bestimmte **potenzielle Einflussfaktoren** bei der Etablierung der gewünschten Normenverständnisse herausgearbeitet werden (vgl. Abschnitte 6 und 7). Zentral dabei war ein flexibler Wechsel in den Ebenen der Betrachtung, das heißt ein Wechsel zwischen den Darstellungsebenen sowie ein Wechsel zwischen der Betrachtung des konkret dargestellten Beispiels und einer Betrachtung auf der Metaebene. Weiterhin konnte die zentrale Rolle der Kohärenz in allen Normenverständnissen herausgearbeitet werden. Ein Fokus auf die Syntax des Beweises, welche im auf Lehrendenseite etablierten Verständnis einem Fokus auf die Beweisschritte Voraussetzung, Operation und Endergebnis entspricht, zeigte sich für die Etablierung eines grundlegenden Verständnisses der Normen ebenfalls als hilfreich. Eine weitere, gezielte Beforschung dieser Einflussfaktoren könnte in künftigen Interventionen einen vertieften Aufschluss über die dabei ablaufenden Prozesse liefern.

Zentral für die theoretische und empirische Analyse in dieser Arbeit war die Unterscheidung zwischen Normen und Normenverständnis (vgl. Abschnitt 1.4). Auf theoretischer Ebene konnte in der Analyse bestehender Arbeiten zum Beweisverständnis (vgl. Abschnitt 3.1) herausgearbeitet werden, dass diesen immer, meist eher implizit, ein normativer Rahmen zugrunde liegt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein spezifischer normativer Rahmen (vgl. Abschnitt 2.2) vorgeschlagen, welcher die **Normen** der Vollständigkeit, der logischen Struktur, der Kohärenz und der Allgemeingültigkeit umfasst. Dieser ist gezielt so offen formuliert, dass dieser unabhängig von der zugrunde liegenden Beweiskonzeption anwendbar ist. Denkbar ist eine noch breitere Anwendbarkeit für jegliche Art von Forschungsprozessen, also Prozessen, die die in Abschnitt 2.3.1 dargestellten Funktionen erfüllen. Er liefert eine sinnvolle Gliederung in die relevanten Entitäten, deren Organisation und Verbindung sowie die Reich-

weite der Ergebnisse, ohne das genaue Verständnis vorab festlegen zu müssen. Auch andere normative Rahmungen sind denkbar, wobei deren Explikation hilfreich wäre für die normative Verortung der jeweiligen Studien.

Darüber hinaus lag den analysierten Arbeiten zum Beweisverständnis meist, ausgehend von einer bestimmten Beweiskonzeption, implizit ein bestimmtes Verständnis der Normen zugrunde (vgl. Abschnitt 3.4). Dadurch konnte in den entsprechenden Studien auch nur dieses untersucht werden. Daher wird auch hier dafür plädiert, das der jeweiligen Studie zugrunde liegende **Normenverständnis** explizit zu machen. Im Idealfall wird dies nicht von Forschendenseite aus vorgegeben, sondern ausgehandelt.

Zur Analyse der Normenverständnisse wurden **grafische Analyseraster** entwickelt, welche auch für künftige Studien genutzt werden können (vgl. Abschnitt 6).

Ein weiteres zentrales Ergebnis der Arbeit auf theoretischer Ebene ist die systematische **Klassifikation von Beweistypen** entlang der Darstellungsebene und dem Formalisierungsgrad⁸⁸ (vgl. Abschnitt 2.4). Die Bezeichnungen der Beweistypen wurden dabei so gewählt, dass dadurch kein bestimmtes Normenverständnis impliziert wird. Die besondere Bedeutung beispielgebunden ikonischer Beweise für den Schulunterricht und damit auch die Lehramtsausbildung (vgl. Abschnitt 2.4.1) sowie die grundsätzliche Validität von Beweisen dieses Typs (vgl. Abschnitt 2.3.4) wurde herausgearbeitet.

Darüber hinaus wurde im Rahmen dieser Arbeit explizit dargelegt, wie die **Beweisversuche** vor dem Hintergrund des in dieser Arbeit etablierten normativen Rahmens für die Intervention und Erhebungsdokumente **konstruiert** wurden (vgl. Abschnitte 3.2 und 5.2.2). Dies kann als Grundlage für künftige Untersuchungen zum Thema genutzt werden. In jedem Fall wird vorgeschlagen, dies so explizit wie möglich darzulegen, um die Operationalisierung dessen darzulegen, was genau untersuchbar gemacht werden soll: Steht eine einzelne Norm im Fokus, das Zusammenspiel von Normen oder soll explorativ ohne vorab festgelegten normativen Rahmen vorgegangen werden? Sollen erfahrene Validierende oder eher unerfahrene befragt werden?

Die **Situiertheit** des Verständnisses entlang der **Dimensionen** inhaltlich, räumlich, didaktisch, zeitlich und sozial diene als Grundlage bei der Konzeption der Intervention (vgl. Abschnitt 1.3). Aus diesen ergibt sich, welche Reichweite die Intervention hat. Ist diese geklärt, kann diese durch weitere Erhebungen gezielt

⁸⁸ Dies entspricht der Klassifikation bei Kempen (2019), jedoch mit anderen Bezeichnungen.

erhöht werden, wo gewünscht. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dies durch eine, auf der qualitativen Untersuchung aufbauende, quantitative Untersuchung erreicht. Auch für künftige Studien wird daher vorgeschlagen, die Situiertheit der Erhebung entlang der Dimensionen explizit zu machen.

Im Kontext der sozialen Situiertheit konnte herausgearbeitet werden, ob und wie, in relativ offen gestalteten didaktischen Settings, Interpersonalität entsteht und wie sich intrapersonelle und präinteraktionale Verständnisse der Normen im Diskussionsverlauf ändern. Die Differenzierung in **intra- und interpersonelle Prozesse** (vgl. Abschnitt 1.2.1) sowie präinteraktionale und interaktionale Verständnisse zeigte sich hier als hilfreich, weshalb diese auch für darauf aufbauende künftige Untersuchungen zu diesem Thema beibehalten werden könnten.

8.4 Limitationen und Ausblick

Die Limitationen dieser Arbeit ergeben sich zunächst aus der **Situierung der Intervention** entlang der inhaltlichen, räumlichen, didaktischen, zeitlichen und sozialen Dimension (vgl. Abschnitt 1.3). Danach wurde sich bei den Beweisversuchen auf einschrittige⁸⁹ beispielgebunden ikonische Beweise aus der elementaren Zahlentheorie beschränkt. Dadurch sollte die Komplexität der Beweisversuche so weit wie möglich reduziert werden, um den Faktor des Beweisverstehens (vgl. Abschnitt 2.3.1) möglichst gering zu halten. Die Normbrüche sollten dabei möglichst klar zu Tage treten und nicht durch mangelnde Nachvollziehbarkeit überlagert werden. Dies sollte die Basis bilden, um die Normen und deren intendiertes Verständnis einzuführen. Die Übertragbarkeit der Ergebnisse zum Normenverständnis auf komplexere Beweise aus anderen mathematischen Inhaltsbereichen ist an dieser Stelle noch unklar und wäre ein interessantes Forschungsfeld für künftige, weiterführende Interventionen zum Thema. Auch andere, weniger offen gestaltete didaktische Settings und andere Impulse könnten in diesem Rahmen beforscht werden. Zudem wäre es wünschenswert, die Intervention über einen längeren Zeitraum laufen zu lassen, um ein vertieftes und nachhaltiges Verständnis der Normen zu etablieren. Durch die quantitative Analyse im Rahmen dieser Arbeit konnte zwar die direkte Wirkung der Intervention untersucht werden, was dem Forschungsziel entspricht, Hinweise zur Weiterentwicklung der Intervention zu erhalten. Es konnte jedoch nicht untersucht werden, inwieweit sich durch die Intervention eine Langzeitwirkung ergibt. Hier wäre eine follow-up Untersuchung wünschenswert.

⁸⁹ Einschrittige Beweise umfassen nur einen Argumentationsschritt im Sinne des Toulmin-Modells. Einschrittige, beispielgebunden ikonische Beweise bestehen damit nur aus Voraussetzung, Operation und Endergebnis. Es werden nicht ausgehend vom Ergebnis einer Operation weitere Operationen ausgeführt, was einem mehrschrittigen Beweis entsprechen würde.

Hinsichtlich der sozialen Situierung des **Aushandlungsprozesses** bleibt diese zunächst auf die Lehr-Lern-Gemeinschaft im Eingangssemester der Lehramtsausbildung an der Technischen Universität Dortmund beschränkt. Das Normenverständnis, das in der Intervention gefördert werden sollte, ergab sich im Sinne dieses Aushandlungsprozesses aus dem Normenverständnis auf Lehrendenseite in dieser Gemeinschaft. In anderen Gemeinschaften können sich diesbezüglich andere Verständnisse ergeben. Die **Normen für Beweise** selbst, die diesem Prozess zugrunde liegen, und die Konzeption des Aushandlungsprozesses sind dabei jedoch durchaus auf andere soziale Settings übertragbar. Dabei wäre es in künftigen Studien interessant, diesen Prozess auch für andere, durch Normen geprägte, mathematische Inhalte zu untersuchen. Weiterhin wäre die Entwicklung und Beforschung von Settings interessant, durch welche sich Prozesse dieser Art mit geringem Aufwand in den Lehralltag integrieren lassen. Der Aushandlungsprozess an sich stellt von seiner Konzeption im Rahmen dieser Arbeit (vgl. Abschnitt 1.5) einen fortlaufenden zyklischen Prozess dar. Daher wäre auch eine weitere Beforschung des Prozesses im Rahmen eines Entwicklungsforschungsansatzes sinnvoll. Auch die gezielte Untersuchung von Lerntrajektorien und sich daraus ergebenden sukzessiv aufgebauten Interventionen zum Thema wären interessante weitere Forschungsfelder.

Weitere Limitationen ergeben sich aus der **Fokussierung des Forschungsinteresses** im Rahmen dieser Arbeit. Bestimmte Differenzierungen wurden dabei, aus Gründen der Reduktion der Komplexität, in der Konzeption und Analyse der Intervention noch nicht mit beachtet, wären jedoch für künftige Interventionen wünschenswert. Der Fokus der qualitativen Analyse lag auf intra- und interpersonellen Entwicklungen in den Kleingruppendiskussionen in den Übungen. Die im größeren Rahmen und stärker durch die/den jeweilige/n Übungsleitende/n gelenkte Diskussion im Plenum wurde nicht mit in die Analyse aufgenommen. Im Plenum sollte dabei zwar lediglich das in den Kleingruppen etablierte Verständnis gebündelt und gemeinsam festgehalten werden, es ist jedoch zu erwarten, dass auch hier weitere Entwicklungen stattfanden, die Einfluss gehabt haben können auf das in der Ausgangserhebung gezeigte Verständnis. Daher empfiehlt es sich, die Plenumsdiskussion künftig mit einzubeziehen bei einer Mixed-Methods-Analyse.

Auch die Vorbereitungsaufgaben, die vor den Übungssitzung in Einzelarbeit als Hausaufgaben bearbeitet wurden, könnten in künftigen Analysen mit einbezogen werden. Da der Fokus im Rahmen dieser Arbeit auf den Interaktionsprozessen in den Übungen lag und auf die Überlegungen aus den Vorbereitungen in diesen explizit zurückgegriffen werden sollte (vgl. Abschnitt 5.3.3), wurden diese bei der Auswertung in dieser Arbeit aus Zeitgründen noch ausgespart.

Durch die Eingangs- und Ausgangserhebung konnte lediglich der Einfluss der Übung und nicht der Einführungsvorlesung zum Thema direkt untersucht werden, da sowohl die Interventions- als auch die Kontrollgruppe die Einführungsvorlesung besucht hatten. Zudem wurde in beiden Gruppen in den Übungen durch einen entsprechenden Impuls explizit der Fokus auf die Beweisschritte gelenkt, weshalb nicht untersuchbar war, welche Entwicklungen sich im Vergleich zu einem gänzlichen Fehlen dieses Impulses ergeben.

In die Analyse der Eingangs- und Ausgangserhebung wurden schließlich aus Zeitgründen auch nur die Antworten auf die jeweils erste Frage zu den einzelnen Beweisversuchen aufgenommen, in welcher explizit nach Normbrüchen, das heißt nach nicht gut umgesetzten Aspekten der Beweisversuche gefragt wurde. Für eine tiefergehende Analyse zum situierten Normenverständnis wäre darüber hinaus auch die Analyse der jeweils zweiten Frage zu bereits gut umgesetzten Aspekten sinnvoll (vgl. Abschnitt 5.2.3).

In der Eingangs- und Ausgangserhebung wurde neben dem Bewerten vorgegebener Beweisversuche auch das Erstellen eines **eigenen Beweises** zu der gleichen Aussage eingefordert. Dadurch sollte ursprünglich auch erhoben werden, ob die Studierenden in der Lage sind, ihr situiertes **Normenverständnis** direkt **umzusetzen** in der Produktion eigener Beweise. Vor dem Hintergrund der Fokussierung auf das situierte Normenverständnis wurde dies im Rahmen dieser Arbeit zunächst ausgespart, soll jedoch in einer darauf aufbauenden zukünftigen Studie in den Blick genommen werden. Insbesondere kann dies vertieften Aufschluss über mögliche Organisationsformen eines Beweises und damit über das Verständnis der logischen Struktur auf Lernendenseite geben (vgl. Abschnitt 6.4).

Anhang

Literaturverzeichnis

- Aberdein, A. (2013). The parallel structure of mathematical reasoning. In A. Aberdein & I. J. Dove (Hrsg.), *The Argument of Mathematics* (S. 361–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6534-4_18
- Agresti, A. (2007). *An introduction to categorical data analysis* (2. Aufl.). John Wiley & Sons, Inc.
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003>
- Auslander, J. (2008). On the roles of proof in mathematics. In B. Gold & R. Simons (Hrsg.), *Proofs and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (S. 61-77). The Mathematical Association of America, Inc.
- Azzouni, J. (2004). Proof And Ontology In Euclidean Mathematics. In T. Kjeldsen, S. Pedersen & L. Sonne-Hansen (Hrsg.), *New Trends in the History and Philosophy of Mathematics* (S. 117-133). University Press of Southern Denmark.
- Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W. & Weiber, R. (2018). *Multivariate Analysemethoden* (16. Aufl.). Springer.
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup, & R. Streit (Hrsg.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (S. 284–297). NCTM. <https://hal.science/hal-01652045v2>
- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. Glasersfeld (Hrsg.), *Radical constructivism in mathematics education* (S. 89-110). Springer. <https://hal.science/hal-01695305>
- Bardelle, C. (2010). Visual proofs: an experiment. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 251-260). Institut National de Recherche Pédagogique und ERME. <https://hal.science/hal-02182374>

- Barsalou, L. W. (1999). Perceptual symbol systems. *Behavioral and brain sciences*, 22(4), 577-660. <https://doi.org/10.1017/S0140525X99002149>
- Barwell, R., Abtahi, Y., Hauge, K. H. (2024). Collectivist and Individualist Values in Mathematics Education. In Y. Dede, G. Marschall, & P. Clarkson, (Hrsg.), *Values and Valuing in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-9454-0_4
- Bauersfeld, H. (1983) Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1-56). Aulis-Verlag Deubner.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In A. Douglas & J. Cooney, *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (S. 27-46). Routledge.
- Bauersfeld, H. (1995). "Language Games" in the Mathematics Classroom: Their Function and Their Effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning* (S. 277-297). Routledge.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, 7, 23-40. <http://www.jstor.org/stable/3481809>
- Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 141-179. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1>
- Blum, W., & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, 25(3), 6-24.
- Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203. <https://doi.org/10.1007/BF00555722>
- Blumer, H. (1954). What is wrong with social theory? *American Sociological Review*, 3-10. <https://doi.org/10.2307/2088165>
- Blumer, H. (1980). Der Methodologische Standort des Symbolischen Interaktionismus. In Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.), *Alltagswissen, Interaktion und Gesellschaftliche Wirklichkeit* (5. Aufl., S. 80-146). Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-663-14511-0_4

- Bohnsack, R. (2003). Dokumentarische Methode und sozialwissenschaftliche Hermeneutik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 6, 550-570. <https://doi.org/10.1007/s11618-003-0057-7>
- Brousseau, G., & Warfield, V. (2020). Didactic situations in mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (2. Aufl., S. 206-213). Springer.
- Bruner, J. S. (1967). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Buchholtz, N. (2021). Voraussetzungen und Qualitätskriterien von Mixed-Methods-Studien in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal der Mathematik Didaktik*, 42, 219–242. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00173-0>
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 24(4), 359-387. <https://doi.org/10.1007/BF01273371>
- Cicourel, A. (1980). Basisregeln und normative Regeln im Prozeß des Aushandelns von Status und Rolle. In Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.), *Alltagswissen, Interaktion und Gesellschaftliche Wirklichkeit* (5. Aufl., S. 80-146). Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-663-14511-0_5
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995) The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning* (S. 277-297). Routledge.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31(3-4), 175-190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>
- Cuoco, A. A., & Goldenberg, E. P. (1992). Mathematical induction in a visual context. *Interactive Learning Environments*, 2(3), 181-204. <https://doi.org/10.1080/1049482920020304>
- Dawkins, P. C., & Weber, K. (2016). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 123-142. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- Fahrmeir, L., Heumann, C., Künstler, R., Pigeot, I., Tutz, G. (2016). *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse* (8. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-50372-0>

- Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(8), 1-9. <https://www.ams.org/notices/200008/comm-ferrini.pdf>
- Gayer, L. (2023). Understanding of genericity of preservice primary school teachers in the discussion of example-based visual proof attempts. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi, & E. Kónya (Hrsg.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 128-135). Alfréd Rényi Institute of Mathematics und ERME. <https://hal.science/hal-04410905v1>
- Glaserfeld, E. (1987). Einführung in den radikalen Konstruktivismus. In E. Glaserfeld (Hrsg.), *Wissen, Sprache und Wirklichkeit: Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus* (1. Aufl., S. 198-212). Vieweg und Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-322-91089-9_17
- Glenberg, A. M. (1997). What memory is for. *Behavioral and brain sciences*, 20(1), 1-19. <https://doi.org/10.1017/S0140525X97000010>
- Griesel, H., Hofe v., R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123-133. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4>
- Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education* (S. 45-51).
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, 44, 5-23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (1. Aufl., S. 877-908). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24
- Hardy, G.H. (1929). Mathematical proof. *Mind*, 28(149), 1-25. <https://www.jstor.org/stable/2249221>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 31(4), 396-428. <https://doi.org/10.2307/749651>

- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. University of Pisa und ERME. <http://erme.site/cerme-conferences/cerme3>
- Hemmi, K. (2011). A study on proof in a community of mathematical practice. In L. Burman, O. Björkqvist, A. Røj-Lindberg (Hrsg.), *Long-term Research in the Didactics of Mathematics and Science* (S. 85-95). Faculty of Education, Åbo Akademi University.
- Hense, A., & Schork, F. (2017). Doing Mixed Methods: Methodenintegrative Ansätze in der Organisationsforschung. In S. Liebig, W. Matiaske, S. Rosenbohm (Hrsg.), *Handbuch Empirische Organisationsforschung* (S. 1-30). Springer Gabler.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 405-462. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1225>
- Herbst, P., Nachlieli, T., & Chazan, D. (2011). Studying the practical rationality of mathematics teaching: What goes into “installing” a theorem in geometry?. *Cognition and Instruction*, 29(2), 218-255. <https://doi.org/10.1080/07370008.2011.556833>
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Jonathan Cape.
- Hersh, R. (2013). *Experiencing mathematics: What do we do, when we do mathematics?* (83. Aufl.). American Mathematical Society.
- Hilbert, D. (1931). Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre. *Mathematische Annalen*, 104(1), 485-494. https://doi.org/10.1007/978-3-662-38452-7_13
- Hofe., R. v.(1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademie.
- Hoffmann, M. H. (2007). Learning from people, things, and signs. *Studies in Philosophy and Education*, 26, 185-204. <https://doi.org/10.1007/s11217-007-9027-5>
- Holtmann, D. (2010). *Grundlegende multivariate Modelle der sozialwissenschaftlichen Datenanalyse* (3. Aufl.). Universitätsverlag Potsdam.

- Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2009). On the persuasiveness of visual arguments in mathematics. *Foundations of Science*, 14, 97-110. <https://doi.org/10.1007/s10699-008-9149-4>
- Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (1. Aufl., S. 331-355). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_12
- Kalisch, M., & Meier, L. (2021). *Logistische Regression: eine anwendungsorientierte Einführung mit R*. Springer Nature.
- Kempen, L. (2018). How do pre-service teachers rate the conviction, verification and explanatory power of different kinds of proofs? In A. Stylianides & G. Harel (Hrsg.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (S. 225-237). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_16
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24415-6>
- Kempen, L., & Biehler, R. (2015). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 135-141). Charles University in Prague und ERME. <https://shs.hal.science/hal-01281024>
- Kempen, L., & Biehler, R. (2019). Fostering first-year pre-service teachers' proof competencies. *ZDM Mathematics Education*, 51, 731-746. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01035-x>
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405. <https://doi.org/10.2307/4149959>
- Krauthausen, G. (1994). *Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern: Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule*. Reihe "DUV Mathematik", Deutscher Universitätsverlag.
- Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtsmethodischen Dimension von Rahmungsprozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 5, 285-306. <https://doi.org/10.1007/BF03339250>
- Krummheuer, G., & Voigt, J. (1991). Interaktionsanalyse von Mathematikunterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Interpretative*

- Unterrichtsforschung: Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag* (S. 13-32). Aulis Verlag Deubner.
- Krumsdorf, J. (2015). *Beispielgebundenes Beweisen*. Elektronische Publikationen Universitätsbibliothek Münster. <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6-09209761924>
- Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz Juventa.
- Kuckartz, U., Rädiker, S., Ebert, T., & Schehl, J. (2013). *Statistik: eine verständliche Einführung*. Springer.
- Lave, J., & Wenger, E. (1999). Learning and pedagogy in communities of practice. In J. Leach & B. Moon, *Learners and pedagogy* (S. 21-33). Sage.
- Leuders, T. (2007). Fachdidaktik und Unterrichtsqualität im Bereich Mathematik. In K.-H. Arnold (Hrsg.), *Unterrichtsqualität und Fachdidaktik* (S. 205-234). Verlag Julius Klinkhardt.
- Luhmann, N. (1984). *Soziale Systeme: Grundriß einer allgemeinen Theorie* (1. Aufl.). Suhrkamp.
- Maier, H., & Voigt, J. (1991). *Interpretative Unterrichtsforschung. Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag*. Aulis Verlag Deubner.
- Manin, Y. (1992). Contribution in panel discussion on "The theory and practice of proof". In C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler and J. Egsgard (Hrsg.), *Proceedings of the seventh International Congress on Mathematical Education*. Les Presses de l'Université Laval.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 20(1), 41-51. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.1.0041>
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics*, 15, 277-289. <https://doi.org/10.1007/BF00312078>
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12. Aufl.). Beltz.
- Mertens, D., Bazeley, P., Bowleg, L., Fielding, N., Maxwell, J., Molina-Azorin, J.F., & Niglas, K. (2016). The future of mixed methods: a five year projection to 2020. *MMIRA task force report*. <https://didier-jourdan.com/wp-content/uploads/2017/04/MMIRA-task-force-report-Jan2016-final.pdf>

- Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2007). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (3. Aufl.). Springer.
- Padberg, F. *Einführung in die Mathematik. Band 1: Arithmetik* (1. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
- Pardoe, I. (2020). *Applied regression modeling*. John Wiley & Sons.
- Pavlou, M., Ambler, G., Seaman, S. R., Guttman, O., Elliott, P., King, M., & Omar, R. Z. (2015). How to develop a more accurate risk prediction model when there are few events. *BMJ*, 351. <https://doi.org/10.1136/bmj.h3868>
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, 17(3), 297-311. <https://doi.org/10.1007/BF00305075>
- Przyborski, A. (2004). *Gesprächsanalyse und dokumentarische Methode: qualitative Auswertung von Gesprächen, Gruppendiskussionen und anderen Diskursen*. Springer.
- Radatz, H. (1986). Anschauung und Sachverstehen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1986*, 239-242.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia mathematica*, 7(1), 5-41. <https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5>
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 48(1), 83-99. <https://doi.org/10.1023/A:1015553100103>
- Reid, D., & Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? In A. Stylianides & G. Harel (Hrsg.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (S. 239-251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17
- Reiss, K., & Hammer, C. (2021). Das Spiralprinzip. In K. Reiss & C. Hammer (Hrsg.), *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe* (S. 101-103). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-65429-0_20
- Riel, R. v., Vosgerau, G. (2018). Der Kalkül des natürlichen Schließens. In Aussagen- und Prädikatenlogik. In R. Riel & G. Vosgerau, *Aussagen- und Prädikatenlogik* (S. 89-102). J.B. Metzler. https://doi.org/10.1007/978-3-476-04565-2_8
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context*. Oxford university press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780195059731.001.0001>

- Saussure, F. d. (1989). *Cours de linguistique générale* (1. Aufl.). Otto Harrassowitz Verlag.
- Schipper, W. (1982). Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 3(2), 91-120. <https://doi.org/10.1007/BF03338661>
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Sage.
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna, M. d. Villier (Hrsg.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study* (S. 391-420). https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 34(1), 4-36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics*, 4(1), 32-34. <https://www.jstor.org/stable/40247842>
- Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 157-189. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0203_1
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.
- Söbbeke, E., & Welsing, F. (2017). Allgemein denken mit konkretem Material? Erforschen und Verallgemeinern mithilfe von Anschauungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift*, 306, 36-41.
- Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM Mathematics Education*, 51, 717-730. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7>
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2021). Beginning university mathematics students' proof understanding. In M. Inprasitha, N. Changsri, N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 105-112). <http://hdl.handle.net/10045/126686>

- Steinbring, H. (2000). *Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). Abschlußbericht zum DFG-Projekt – Band I*. Universität Dortmund.
- Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 34(2), 135-151. <https://www.jstor.org/stable/4319237>
- Steinke, I. (1999). *Kriterien qualitativer Forschung. Ansätze zur Bewertung qualitativempirischer Sozialforschung*. Juventa-Verlag.
- Steinke, I. (2007). Die Güte qualitativer Marktforschung. In R. Buber & H. Holzmüller (Hrsg.), *Qualitative Marktforschung* (S. 261-283). Gabler. https://doi.org/10.1007/978-3-8349-9258-1_17
- Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0>
- Stylianides, A. L. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9191-3>
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198723066.001.0001>
- Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2019). *Using multivariate statistics*. Pearson Education, Inc.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge university press.
- Turner, R. (1962) Role-Taking: Process versus Conformity. In A. Rose (Hrsg.), *Human Behaviour and Social Processes* (1. Aufl., S.20-40). Routledge.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht: die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30, 30-54. <https://doi.org/10.1007/BF03339072>
- Villiers d., M. (1990). The role and function of proof on mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

- Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning* (S. 163-201). Routledge.
- Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56, 209-234. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>
- Weber, K., & Czocher, J. (2019). On mathematicians' disagreements on what constitutes a proof. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 251-270. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1585936>
- Welsing, F. (2020). *Kinder argumentieren mit Anschauungsmitteln—Eine epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften*. Elektronische Publikationen Universitätsbibliothek Wuppertal. <https://d-nb.info/1214390439/34>
- Wertheimer, M. (1938). *Gestalt psychology. Source Book of Gestalt Psychology*. Harcourt.
- Wilson, T. P. (1980). Theorien der Interaktion und Modelle soziologischer Erklärung. In Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.), *Alltagswissen, Interaktion und Gesellschaftliche Wirklichkeit* (5. Aufl., S. 54-79). Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-663-14511-0_3
- Wittmann, E. (1998). Standard Number Representations. Teaching of Arithmetic. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, 149-178. <https://doi.org/10.1007/BF03338866>
- Wittmann, E. (2021a). When is a proof a proof? In E. Wittmann (Hrsg.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education* (S. 61-76). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_5
- Wittmann, E. (2021b). Designing Teaching: The Pythagorean Theorem. In E. Wittmann (Hrsg.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education* (S. 95-160). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_7
- Wittmann, E. (2021c). Operative Proofs in School Mathematics and Elementary Mathematics. In E. Wittmann (Hrsg.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education* (S. 223-238). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_11

- Wittmann, E. & Ziegenbalg, J. (2007). Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In G. Müller, H. Steinbring & E. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess*, (2. Aufl., S. 35–53). Friedrich Verlag.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.27.4.0458>
- Yeh, W., & Barsalou, L. W. (2006). The situated nature of concepts. *The American journal of psychology*, 119(3), 349-384. <https://doi.org/10.2307/20445349>
- Yopp, D. A., & Ely, R. (2016). When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics*, 91, 37-53. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9633-z>

Abbildungsverzeichnis

ABBILDUNG 1 MODELL DES AUSHANDLUNGSPROZESSES ZWISCHEN LEHRENDEN- UND LERNENDENSEITE.....	22
ABBILDUNG 2 TOULMIN-MODELL (NACH TOULMIN, 2003)	36
ABBILDUNG 3 OPERATIVER BEWEIS ZUR AUSSAGE „DIE SUMME ZWEIER NATÜRLICHER ZAHLEN IM ABSTAND 2 IST IMMER GERADE“ (DER BEWEIS WURDE VON DER AUTORIN SELBST ERSTELT)	41
ABBILDUNG 4 OPERATIVES BEWEISMODELL IN ANLEHNUNG AN DAS TOULMIN-MODELL	41
ABBILDUNG 5 UNTERSCHIEDUNG VON FORMALISIERUNGSGRAD UND GRAD DER GENERIZITÄT (ABBILDUNG AUS MASON & PIMM, 1984, S. 281)	44
ABBILDUNG 6 SYSTEMATIK DER BEWEISTYPEN AM BEISPIEL DER DARSTELLUNG EINER GERADEN ZAHL	50
ABBILDUNG 7 OPERATIVER BEWEIS ZUR AUSSAGE „DIE SUMME ZWEIER NATÜRLICHER ZAHLEN IM ABSTAND 2 IST IMMER GERADE“ (ENTSPRICHT ABBILDUNG 3)	56
ABBILDUNG 8 BEWEISVERSUCHE AUS DER STUDIE VON HEALY UND HOYLES (2000, S. 400).....	68
ABBILDUNG 9 FORMAL SYMBOLISCHER UND BEISPIELGEBUNDEN SYMBOLISCHER BEWEIS AUS DER STUDIE VON MARTIN UND HAREL (1989, S. 45)	70
ABBILDUNG 10 BEWEISVERSUCHE AUS DER GEOMETRIE MIT UNTERSCHIEDLICHEM GRAD AN GENERIZITÄT AUS DER STUDIE VON KNUTH (2002, S. 392)	71
ABBILDUNG 11 BEWEISVERSUCH MIT NORMBRUCH BEI DER LOGISCHEN STRUKTUR AUS DER STUDIE VON KNUTH (2002, S. 393)	72
ABBILDUNG 12 BEWEISVERSUCH AUS DER STUDIE VON SELDEN UND SELDEN (2003, S. 17).....	73
ABBILDUNG 13 BEWEISVERSUCH MIT NORMBRUCH BEI DER KOHÄRENZ AUS DER STUDIE VON ALCOCK UND WEBER (2005, S. 8)	74
ABBILDUNG 14 EMPIRISCHER BEWEISVERSUCH MIT VIELFÄLTIGEN NORMBRÜCHEN AUS DER STUDIE VON UFER ET AL. (2009, S. 50)	75
ABBILDUNG 15 BEWEISVERSUCH MIT NORMBRUCH BEI DER LOGISCHEN STRUKTUR AUS DER STUDIE VON UFER ET AL. (2009, S. 51)	76
ABBILDUNG 16 BEISPIELHAFTES GRAFISCHES VERANSCHAULICHUNG DER ANALYSE VON INTERAKTIONSMUSTERN (ENTSPRICHT ABBILDUNG 34)	99
ABBILDUNG 17 LOGISTISCHE FUNKTION (AUS KALISCH & MEIER, 2021, S. 18)	109
ABBILDUNG 18 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN P-WERT UND SIGNIFIKANZNIVEAU (AUS FAHRMEIR ET AL., 2016, S. 388)	115
ABBILDUNG 19 ZEITACHSE ZUM FORSCHUNGSPROZESS.....	123
ABBILDUNG 20 BEWEISVERSUCH EINER/S STUDIERENDEN ZU AUSSAGE 1: „DIE SUMME ZWEIER NATÜRLICHER ZAHLEN IM ABSTAND 2 IST IMMER GERADE.“	126

ABBILDUNG 21 BEWEISVERSUCH EINER/S STUDIERENDEN ZU AUSSAGE 2: „DAS QUADRAT EINER UNGERADEN NATÜRLICHEN ZAHL IST IMMER UNGERADE.“	126
ABBILDUNG 22 ZEITLICHE SITUIERUNG DER INTERVENTION	143
ABBILDUNG 23 SYSTEMATIK DER BEWEISTYPEN IN DER VORLESUNG	145
ABBILDUNG 24 DEFINITION EINES BEWEISES IN DER VORLESUNG	145
ABBILDUNG 25 IKONISCHE DEFINITIONEN DER PARITÄT IN DER VORLESUNG	146
ABBILDUNG 26 BEISPIELHAFTE DISKUSSION EINES BEWEISVERSUCHS IN DER VORLESUNG	147
ABBILDUNG 27 DISKUSSION DER GENERIZITÄT IN DER VORLESUNG	149
ABBILDUNG 28 IMPULSE ENTSPRECHEND DER AUFGABENSTELLUNG IN DER ÜBUNG	151
ABBILDUNG 29 PAARBeweis (BEWEISVERSUCH 1) AUS DER INTERVENTION	152
ABBILDUNG 30 Pfeilbeweis (BEWEISVERSUCH 2) AUS DER INTERVENTION	154
ABBILDUNG 31 BLOCKBEWEIS (BEWEISVERSUCH 3) AUS DER INTERVENTION	155
ABBILDUNG 32 IMPULSE A) UND B) ENTSPRECHEND DER AUFGABENSTELLUNG IN DER ÜBUNG	159
ABBILDUNG 33 Pfeilbeweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	160
ABBILDUNG 34 INTERAKTIONSGRUPPE ZUR KOHÄRENZ	163
ABBILDUNG 35 Pfeilbeweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	165
ABBILDUNG 36 INSELGRUPPE ZUR KOHÄRENZ	167
ABBILDUNG 37 Pfeilbeweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	169
ABBILDUNG 38 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE ZUR KOHÄRENZ	172
ABBILDUNG 39 INTERAKTIONSGRUPPE ZUR KOHÄRENZ (ENTSPRICHT ABBILDUNG 34)	174
ABBILDUNG 40 INSELGRUPPE ZUR KOHÄRENZ (ENTSPRICHT ABBILDUNG 36)	174
ABBILDUNG 41 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE ZUR KOHÄRENZ (ENTSPRICHT ABBILDUNG 38)	174
ABBILDUNG 42 IMPULS C) ENTSPRECHEND DER AUFGABENSTELLUNG IN DER ÜBUNG	180
ABBILDUNG 43 BLOCKBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31)	182
ABBILDUNG 44 Pfeilbeweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	184
ABBILDUNG 45 INTERAKTIONSGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT	185
ABBILDUNG 46 Pfeilweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	188
ABBILDUNG 47 INSELGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT	190
ABBILDUNG 48 PAARBeweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 29)	192
ABBILDUNG 49 BLOCKBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31)	192
ABBILDUNG 50 Pfeilweis (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	193
ABBILDUNG 51 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT	194
ABBILDUNG 52 INTERAKTIONSGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT (ENTSPRICHT ABBILDUNG 45)	196
ABBILDUNG 53 INSELGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT (ENTSPRICHT ABBILDUNG 47)	196

ABBILDUNG 54 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE ZUR VOLLSTÄNDIGKEIT (ENTSPRICHT ABBILDUNG 51)	196
ABBILDUNG 55 IMPULS C) ENTSPRECHEND DER AUFGABENSTELLUNG IN DER ÜBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 42)	199
ABBILDUNG 56 PAARBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 29)	200
ABBILDUNG 57 IMPULS D) ENTSPRECHEND DER AUFGABENSTELLUNG IN DER ÜBUNG	206
ABBILDUNG 58 PfeILBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	208
ABBILDUNG 59 INTERAKTIONSGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 391, KREISFÖRMIGE ORGANISATION DER INTERNEN KOHÄRENZEbene	209
ABBILDUNG 60 INTERAKTIONSGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 392, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG, KLASSIFIKATORISCHE BETRACHTUNG	210
ABBILDUNG 61 PAARBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 29)	210
ABBILDUNG 62 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBeweIS, TURNS 206 UND 207, KORREKTE ORGANISATION VON VORAUSSETZUNG UND ENDERGEbNIS	211
ABBILDUNG 63 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBeweIS, TURN 356, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON STRUKTURIERUNG UND VORAUSSETZUNG, KLASSIFIKATORISCHE BETRACHTUNG	212
ABBILDUNG 64 PfeILBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	213
ABBILDUNG 65 INSELGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 19, RICHTUNGSauFLÖSENDE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG	214
ABBILDUNG 66 INSELGRUPPE, PfeILBeweIS, TURNS 243, 280 UND 292, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG	216
ABBILDUNG 67 INSELGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 474, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG, KLASSIFIKATORISCHE BETRACHTUNG	216
ABBILDUNG 68 INSELGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 511, KEINE KOHÄRENZ VON VORAUSSETZUNG UND ENDERGEbNIS	217
ABBILDUNG 69 PfeILBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 30)	218
ABBILDUNG 70 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 704, SINGULÄRE BETRACHTUNG DER STRUKTURIERUNG	219
ABBILDUNG 71 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 709, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG, KLASSIFIKATORISCHE BETRACHTUNG (IKONISCH)	220
ABBILDUNG 72 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, PfeILBeweIS, TURN 715F, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON ENDERGEbNIS UND STRUKTURIERUNG, KLASSIFIKATORISCHE BETRACHTUNG (SPRACHLICH)	220
ABBILDUNG 73 BLOCKBeweIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31)	221

ABBILDUNG 74 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURNS 321 UND 333, KLASSIFIKATORISCHER ZUSAMMENHANG ALLER BEWEISSCHRITTE IN KORREKTER ORGANISATION.....	222
ABBILDUNG 75 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 496, KLASSIFIKATORISCHER ZUSAMMENHANG VON STRUKTURIERUNG UND ENDERGEBNIS IN KORREKTER ORGANISATION	223
ABBILDUNG 76 ALLE GRUPPEN, PFEILBEWEIS, SCHLUSSENDLICH KLASSIFIKATORISCH VERSTANDENE INTERNE KOHÄRENZEN ZWISCHEN ENDERGEBNIS UND STRUKTURIERUNG IN UMGEKEHRTER ORGANISATION	224
ABBILDUNG 77 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, KORREKTE ORGANISATION VON VORAUSSETZUNG UND ENDERGEBNIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 62)	225
ABBILDUNG 78 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, KORREKTE ORGANISATION ALLER BEWEISSCHRITTE (ENTSPRICHT ABBILDUNG 74)	225
ABBILDUNG 79 INSELGRUPPE, PFEILBEWEIS, KEINE KOHÄRENZ VON VORAUSSETZUNG UND ENDERGEBNIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 68)	225
ABBILDUNG 80 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, UMGEKEHRTE ORGANISATION VON STRUKTURIERUNG UND VORAUSSETZUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 63)..	226
ABBILDUNG 81 PAARBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 29).....	227
ABBILDUNG 82 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 4, UNTERSCHIED SPRACHLICH ELIMINIEREN	229
ABBILDUNG 83 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 179, SINGULÄRER UNTERSCHIED	230
ABBILDUNG 84 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 180, UNTERSCHIED AUFGELOST IN GEMEINSAMKEIT	231
ABBILDUNG 85 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 351, UNTERSCHIED SPRACHLICH ELIMINIEREN	231
ABBILDUNG 86 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURNS 353 UND 357	232
ABBILDUNG 87 INTERAKTIONSGRUPPE ZUR ALLGEMEINGÜLTIGKEIT, PAARBEWEIS, TURN 356, UNTERSCHIED IN GEMEINSAMKEIT AUFGELOST	233
ABBILDUNG 88 PAARBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 29).....	235
ABBILDUNG 89 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 180, LEMMA IMPLIZIT AUS AUSSAGE HERAUS MOTIVIERT.....	236
ABBILDUNG 90 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURNS 207 UND 208, KREISFÖRMIGE ORGANISATION AUF DER EXTERNEN EBENE	237
ABBILDUNG 91 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBEWEIS, TURN 298, FALSCHES LOGISCHES SCHLUSSRICHTUNG.....	238
ABBILDUNG 92 BLOCKBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31).....	238
ABBILDUNG 93 INTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURNS 187-190, LEMMA IMPLIZIT AUS AUSSAGE HERAUS MOTIVIERT	239
ABBILDUNG 94 INTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 197, KORREKTE ORGANISATION AUF EXTERNER EBENE DURCH EINBEZUG DER DEFINITION.....	241
ABBILDUNG 95 BLOCKBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31).....	242

ABBILDUNG 96 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 78-81, MOTIVATION LEMMA AUS DEFINITION	244
ABBILDUNG 97 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURNS 224, 226 UND 327	245
ABBILDUNG 98 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 328, KREISFÖRMIGE ORGANISATION AUF LOGISCHER METAEBENE.....	246
ABBILDUNG 99 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURNS 495F, UMGEKEHRTE ORGANISATION ZWISCHEN INTERNER UND EXTERNER EBENE	247
ABBILDUNG 100 BLOCKBEWEIS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 31).....	249
ABBILDUNG 101 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURNS 470 UND 475, KOHÄRENZ ZWISCHEN DEN BEISPIELEN PRIORITÄR GEGENÜBER EXTERNER KOHÄRENZ.....	249
ABBILDUNG 102 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, 478, 482 UND 495, EXTERNE KOHÄRENZ PRIORITÄR GEGENÜBER KOHÄRENZ ZWISCHEN DEN BEISPIELEN.....	250
ABBILDUNG 103 INTERAKTIONSGRUPPE, ZUSAMMENSPIEL DER EINZELNEN KOHÄRENZEbenen BEI DER ETABLIERUNG DES LEMMAS (ENTSPRICHT ABBILDUNG 93).....	252
ABBILDUNG 104 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, KOHÄRENZ ZWISCHEN DEN BEISPIELEN PRIORITÄR GEGENÜBER EXTERNER KOHÄRENZ (ENTSPRICHT ABBILDUNG 101)	252
ABBILDUNG 105 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, EXTERNE KOHÄRENZ PRIORITÄR GEGENÜBER KOHÄRENZ ZWISCHEN DEN BEISPIELEN (ENTSPRICHT ABBILDUNG 102).....	253
ABBILDUNG 106 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBWEIS, KREISFÖRMIGE ORGANISATION AUF DER EXTERNEN EBENE (ENTSPRICHT ABBILDUNG 90)	253
ABBILDUNG 107 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, KREISFÖRMIGE ORGANISATION AUF LOGISCHER METAEBENE (ENTSPRICHT ABBILDUNG 98)	254
ABBILDUNG 108 INTERAKTIONSGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 128, KORREKTE ORGANISATION AUF EXTERNER EBENE DURCH EINBEZUG DER DEFINITION (ENTSPRICHT ABBILDUNG 94)	254
ABBILDUNG 109 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, KORREKTE ORGANISATION VON DEFINITION UND LEMMA (ENTSPRICHT ABBILDUNG 96).....	255
ABBILDUNG 110 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, UMGEKEHRTE ORGANISATION ZWISCHEN INTERNER UND EXTERNER EBENE (AUSSCHNITT AUS ABBILDUNG 99)	255
ABBILDUNG 111 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBWEIS, TURN 180, SPRACHLICHE DARSTELLUNG EXPLIZIERT KOHÄRENZEN ZWISCHEN DEN BEISPIELEN (AUSSCHNITT AUS ABBILDUNG 84)	257
ABBILDUNG 112 INTERAKTIONSGRUPPE, PAARBWEIS, TURN 207, SPRACHLICHE EXPLIKATION DES LEMMAS (AUSSCHNITT AUS ABBILDUNG 90).....	257

ABBILDUNG 113 INTERAKTIONSGRUPPE, PFEILBEWEIS, TURN 392, SPRACHLICHE DARSTELLUNGSEBENE EXPLIZIERT KLASSIFIKATORISCHE ZUSAMMENHÄNGE DER BEWEISSCHRITTE AUF DER IKONISCHEN DARSTELLUNGSEBENE (ERWEITERUNG VON ABBILDUNG 60)	258
ABBILDUNG 114 INSELGRUPPE, BLOCKBEWEIS, TURN 224, SPRACHLICHE DARSTELLUNG GIBT VOR, WAS IKONISCH ZU ÜBERTRAGENDE KLASSIFIKATORISCHE GEMEINSAMKEIT SEIN SOLL (AUSSCHNITT AUS ABBILDUNG 97)	258
ABBILDUNG 115 INSELGRUPPE, PFEILBEWEIS, TURN 474, SPRACHLICHE DARSTELLUNGSEBENE EXPLIZIERT KLASSIFIKATORISCHE ZUSAMMENHÄNGE DER BEWEISSCHRITTE AUF DER IKONISCHEN DARSTELLUNGSEBENE (ERWEITERUNG VON ABBILDUNG 67)	259
ABBILDUNG 116 PRÄINTERAKTIONSGRUPPE, PFEILBEWEIS, TURN 715F, SPRACHLICHE DARSTELLUNGSEBENE EXPLIZIERT KLASSIFIKATORISCHE ZUSAMMENHÄNGE DER BEWEISSCHRITTE AUF DER IKONISCHEN DARSTELLUNGSEBENE (ENTSPRICHT ABBILDUNG 72)	260
ABBILDUNG 117 BEWEISVERSUCH 1 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG	266
ABBILDUNG 118 BEWEISVERSUCH 2 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG	266
ABBILDUNG 119 BEWEISVERSUCH 3 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG	266
ABBILDUNG 120 BEWEISVERSUCH 2 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 118)	276
ABBILDUNG 121 BEWEISVERSUCH 3 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 119)	277
ABBILDUNG 122 BEWEISVERSUCH 1 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 117)	278
ABBILDUNG 123 BEWEISVERSUCH 2 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 118)	279
ABBILDUNG 124 BEWEISVERSUCH 3 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 119)	279
ABBILDUNG 125 BEWEISVERSUCH 1 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 117)	291
ABBILDUNG 126 BEWEISVERSUCH 2 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 118)	292
ABBILDUNG 127 BEWEISVERSUCH 3 AUS DER EINGANGS- BEZIEHUNGSWEISE AUSGANGSERHEBUNG (ENTSPRICHT ABBILDUNG 119)	293

Tabellenverzeichnis

TABELLE 1 HERLEITUNG DER NORMEN FÜR BEWEISE	30
TABELLE 2 QUALITATIVE AUSDIFFERENZIERUNG DER FORSCHUNGSFRAGEN	90
TABELLE 3 INTERAKTIONSMUSTER IN ANLEHNUNG AN DIE INKLUDIERENDEN MODI NACH PRZYBORSKI 2004, (S.62 FF.)	93
TABELLE 4 QUALITATIVE UND QUANTITATIVE AUSDIFFERENZIERUNG DER FORSCHUNGSFRAGEN.....	103
TABELLE 5 KONTINGENZTABELLE MIT ABSOLUTEN HÄUFIGKEITEN FÜR DICHOTOME VARIABLEN.....	106
TABELLE 6 KONTINGENZTABELLE MIT RELATIVEN HÄUFIGKEITEN FÜR DICHOTOME VARIABLEN.....	106
TABELLE 7 KONTINGENZTABELLE MIT RELATIVEN HÄUFIGKEITEN FÜR NOMINALSKALIERTE VARIABLEN.....	107
TABELLE 8 SEQUENZIELLES VORGEHEN BEI DER QUANTITATIVEN ANALYSE DER INTERVENTION.....	118
TABELLE 9 CHANCENVERHÄLTNISSE FÜR DIE QUANTITATIVE ANALYSE DER INTERVENTION.....	119
TABELLE 10 SEQUENZIELLES VORGEHEN BEI DER ANALYSE POTENZIELLER EINFLUSSFAKTOREN.....	120
TABELLE 11 DEDUKTIV GEBILDETES KATEGORIENSYSTEM DER NORMEN UND DER EBENEN DER BETRACHTUNG.....	124
TABELLE 12 INDUKTIV VERVOLLSTÄNDIGTES KATEGORIENSYSTEM DER NORMEN UND IHRER UNTERASPEKTE SOWIE DER EBENEN DER BETRACHTUNG.....	137
TABELLE 13 SEQUENZIELLES VORGEHEN BEI DER QUANTITATIVEN ANALYSE DER INTERVENTION (ENTSPRICHT TABELLE 8).....	263
TABELLE 14 SEQUENZIELLES VORGEHEN BEI DER ANALYSE DER HYPOTHESEN (ENTSPRICHT TABELLE 10)	264
TABELLE 15 ZUORDNUNG DER HYPOTHESEN ZU DEN NORMEN	265
TABELLE 16 VERGLEICH DER DREI BEWEISVERSUCHE HINSICHTLICH DER INTERNEN KOHÄRENZ ENTLANG DER BEWEISSCHRITTE	268
TABELLE 17 VERGLEICH DER DREI BEWEISVERSUCHE HINSICHTLICH DER EXTERNEN KOHÄRENZ ENTLANG DER BEWEISSCHRITTE	268
TABELLE 18 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONS VARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER KOHÄRENZ.....	269
TABELLE 19 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONS VARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER INTERNEN UND EXTERNEN KOHÄRENZ.....	270

TABELLE 20 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER KOHÄRENZ (DIFFERENZIERT NACH DER BENENNUNG DER EINZELNEN BEWEISSCHRITTE)	272
TABELLE 21 CHANCENVERHÄLTNISSE DER NACHVOLLZIEHBARKEIT FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER KOHÄRENZ (DIFFERENZIERT NACH GRUPPE UND ZEIT)	274
TABELLE 22 CHANCENVERHÄLTNISSE DER WECHSELPROZESSE FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER KOHÄRENZ	275
TABELLE 23 CHANCENVERHÄLTNISSE DES WECHSELS DER DARSTELLUNGSEBENE FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER KOHÄRENZ (DIFFERENZIERT NACH WECHSEL METAEBENE)	276
TABELLE 24 VERGLEICH DER DREI BEWEISVERSUCHE HINSICHTLICH DER VOLLSTÄNDIGKEIT ENTLANG DER BEWEISSCHRITTE	280
TABELLE 25 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER VOLLSTÄNDIGKEIT	282
TABELLE 26 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER VOLLSTÄNDIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH DER BENENNUNG DER EINZELNEN BEWEISSCHRITTE) ..	283
TABELLE 27 CHANCENVERHÄLTNISSE DER BEWEISSCHRITTE FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER VOLLSTÄNDIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH GRUPPE UND ZEIT)	286
TABELLE 28 CHANCENVERHÄLTNISSE DER KOHÄRENZ FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER VOLLSTÄNDIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH GRUPPE UND ZEIT)	288
TABELLE 29 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER LOGISCHEN STRUKTUR ..	290
TABELLE 30 VERGLEICH DER DREI BEWEISVERSUCHE HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT ENTLANG DER BEWEISSCHRITTE	293
TABELLE 31 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT ..	294
TABELLE 32 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH DEN DARSTELLUNGSEBENEN)	295
TABELLE 33 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERVENTIONSVARIABLEN FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH DER BENENNUNG DER EINZELNEN BEWEISSCHRITTE) ..	296
TABELLE 34 CHANCENVERHÄLTNISSE DER KOHÄRENZ FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH GRUPPE UND ZEIT)	298
TABELLE 35 CHANCENVERHÄLTNISSE DER INTERNEN UND EXTERNEN KOHÄRENZ FÜR DIE BENENNUNG EINES NORMBRUCHS HINSICHTLICH DER ALLGEMEINGÜLTIGKEIT (DIFFERENZIERT NACH GRUPPE UND ZEIT)	300

TABELLE 36 DIDAKTISCHE IMPLIKATIONEN FÜR DIE WEITERENTWICKLUNG DER INTERVENTION.....	316
---	-----

Erhebungsdokumente

Intervention: Vorbereitungsaufgaben



Prof. Dr. C. Selter / Dr. L. Eichholz / L. Gayer / Dr. R. Herold-Blasius / K. Knaudt

Arithmetik und ihre Didaktik I (WiSe 2022/23)

Übung 7

Kapitel 5: Beweisen

Aufgaben zur schriftlichen Vorbereitung (mit Einzel-Abgabe bis zum Mo, 5.12. 7:59)

Diese Aufgabe muss in **Einzelarbeit** abgegeben werden. Bitte notieren Sie **nirgends Ihren Namen** oder sonstige personenbezogenen Daten in Ihrem Dokument oder im Dateinamen. Speichern Sie das Dokument bitte nach Ihrer Bearbeitung unter folgendem Dateinamen ab:

AriDid_Uebung07_Ihr Code

Ihr Code setzt sich wie folgt zusammen:

erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens der Mutter
+ erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens des Vaters
+ Tag des eigenen Geburtstages

Beispiel: Mutter: Veronika, Vater: Horst, eigener Geburtstag: 10.02.1990

Code: VEHO10

Laden Sie Ihr Dokument bitte bis Montag, **5.12. 7:59** über **Limesurvey** hoch. Sie erhalten dafür einen **Link per Mail**. (Bei technischen Problemen wenden Sie sich gerne an lara.gayer@tu-dortmund.de).

Vielen Dank! ☺

Aufgabe: Parität von Summen

Kompetenzbereich: Beweise bewerten

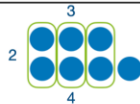
Im Folgenden sehen Sie drei Beweisversuche zu der Behauptung

„Wenn man eine ungerade und eine gerade Zahl addiert, dann ist die Summe immer ungerade.“?

Geben Sie zunächst für jeden der Beweisversuche eine Einschätzung ab, inwieweit Sie das Gefühl haben, diesen verstanden zu haben. Geben Sie dann die Nummer des Ihrer Meinung nach besten Beweisversuches an. Notieren Sie dann für jeden der beiden anderen Beweisversuche, was diese weniger gut umgesetzt haben als der Ihrer Meinung nach beste Beweisversuch.



Beweisversuch 1:



Die Summe ist ungerade. Wir können also spaltenweise Zweierpaare einkreisen, wobei genau ein Plättchen übrigbleibt. In der oberen Zeile sind ungerade viele Plättchen dargestellt, in der unteren gerade viele.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐

Beweisversuch 2:



Im ersten Bild sieht man in der ersten Zeile die ungerade Zahl, in der zweiten die gerade Zahl. Im zweiten Bild sieht man eine Doppelreihe mit einem extra Plättchen.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐

Beweisversuch 3:



Wir haben 4 gleich große Blöcke in grün eingekreist, wobei 1 Plättchen übrigbleibt. Die Summe ist also immer ungerade.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐



Bester Beweisversuch: ☐

In Beweisversuch ☐ wurde Folgendes weniger gut umgesetzt:

In Beweisversuch ☐ wurde Folgendes weniger gut umgesetzt:

Intervention: Präsenzaufgaben



Prof. Dr. C. Selter / Dr. L. Eichholz / L. Gayer / Dr. R. Herold-Blasius / K. Knaudt

Arithmetik und ihre Didaktik I (WiSe 2022/23)

Präsenzaufgaben

Fortsetzung von Aufgabe 7.2: Parität von Summen

Kompetenzbereich: Analyse von Beweisen

- a) Inwiefern liefern die Beweisversuche einen Nachweis der Gültigkeit der Behauptung? Welchen Beweisversuch finden Sie in dieser Hinsicht am besten gelungen? Versuchen Sie sich in Ihrer Gruppe auf einen Beweis zu einigen.
- b) Begründen Sie, warum Sie die beiden anderen Beweisversuche für weniger gut gelungen halten.
- c) Markieren Sie in jedem Beweisversuch, an welchen Stellen es in der Erläuterung um Voraussetzung, Strukturierung und Endergebnis geht. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Erläuterungen vergleichen?
- d) Stellen Sie jeden Beweisversuch für die Zahlen 2 und 7 dar. Versuchen Sie dabei, die Strukturierungsweise des Beweisversuches unverändert zu lassen. Bei welchen Beweisversuchen ist das gut möglich? Wo treten Schwierigkeiten auf? Was bedeutet das für die Qualität der Beweisversuche?
- e) Formulieren Sie gemeinsam Qualitätskriterien für einen guten (ikonischen) Beweis.

Aufgabe 7.3 (Weiterführung von Aufgabe 7.2): Parität von Summen

Kompetenzbereich: Verbessern von Beweisen

- a) Verbessern Sie jeden der drei Beweisversuche aus Aufgabe 7.2 so, dass sie jeweils die besprochenen Qualitätskriterien erfüllen. Achten Sie insbesondere auch auf die Qualität der Erläuterung.
- b) Inwiefern stellen Ihre verbesserten Beweise tatsächlich Verbesserungen gegenüber den ursprünglichen Beweisen dar? Begründen Sie dafür, warum diese die besprochenen Qualitätskriterien erfüllen (und ggf. besser erfüllen als der ursprüngliche Beweisversuch).

Eingangserhebung: Deckblatt

Code:

Lara Gayer & Christoph Selter

Eingangserhebung Beweisen

Bitte notieren Sie auf JEDEM Blatt Ihren Code. Dieser setzt sich wie folgt zusammen:

erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens der Mutter
 + erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens des Vaters
 + Tag des **eigenen** Geburtstages
Beispiel: Mutter: Veronika, Vater: Horst, **eigener** Geburtstag: 10.02.1990
 Code: VEHO10

Allgemeine Informationen

Ihre Bearbeitungen werden **anonym** ausgewertet und dienen dazu, die Vorlesungen und Übungen zum Themenkomplex ‚Beweisen‘ weiter zu verbessern. Mit der Abgabe Ihrer Bearbeitungen erklären Sie sich dazu bereit, dass diese in anonymen Form für Forschungszwecke genutzt werden dürfen.

Allgemeine Angaben

Bitte wahrheitsgemäß ausfüllen bzw. Zutreffendes ankreuzen:

Alter:

Mathematiknote im Abiturzeugnis:

Geschlecht:

☐ männlich ☐ weiblich ☐ divers

Besuch der Übungsgruppe:

☐ montags ☐ dienstags ☐ ich besuche aktuell keine Übung

Studienfach:

☐ mathematische Grundbildung (G, SPG) ☐ Mathematik (HR, SPHR) ☐ Sonstiges

Vorkenntnisse:

- ☐ Ich habe in der Schule den Leistungskurs Mathematik besucht
- ☐ Ich bin in meinem ersten Fachsemester im Lehramt Mathematik
- ☐ Ich habe die Veranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik im letzten Wintersemester 2021/2022 besucht
- ☐ Ich habe die Veranstaltung Arithmetik, Funktionen und ihre Didaktik im letzten Sommersemester 2022 besucht

Die weiteren Seiten der Eingangserhebung entsprechen denen der Ausgangserhebung.

Ausgangserhebung

Code:

Lara Gayer & Christoph Selter

Ausgangserhebung Beweisen

Bitte notieren Sie auf JEDEM Blatt Ihren Code. Dieser setzt sich wie folgt zusammen:

erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens der Mutter
 + erste beide Anfangsbuchstaben des Vornamens des Vaters
 + Tag des **eigenen** Geburtstages
Beispiel: Mutter: Veronika, Vater: Horst, **eigener** Geburtstag: 10.02.1990
Code: VEHO10

Allgemeine Informationen

Ihre Bearbeitungen werden **anonym** ausgewertet und dienen dazu, die Vorlesungen und Übungen zum Themenkomplex ‚Beweisen‘ weiter zu verbessern. Mit der Abgabe Ihrer Bearbeitungen erklären Sie sich dazu bereit, dass diese in anonymer Form für Forschungszwecke genutzt werden dürfen.

Allgemeine Angaben

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Geschlecht

- ☐ männlich
☐ weiblich
☐ divers

Ich habe diese Woche die Übung zur „Arithmetik und ihre Didaktik“ besucht am

- ☐ Montag, 05.12.22
☐ Dienstag, 06.12.22
☐ ich habe diese Woche keine Übung in der „Arithmetik und ihre Didaktik“ besucht

Ich habe letzte Woche die Vorlesung zur „Arithmetik und ihre Didaktik“ besucht am

- ☐ Do, 01.12.22, 10:15-11:45 (Audimax)
☐ Fr, 02.12.22, 10:15-11:45 (EF 50)
☐ keine der angegebenen Vorlesungen

Code:

--	--	--	--	--	--

Behauptung: „Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade.“

Beweisversuch 1:



Alle Plättchen zusammen ergeben die Summe, die gerade ist. Deshalb findet man 2 gleich große Teile, die wir in grün eingekreist haben. Die Zahlen 3 und 5 folgen im Abstand 2 aufeinander.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐

Inwieweit handelt es sich bei obigem Beweisversuch um einen guten Beweis?

Beantworten Sie dafür die folgenden Fragen:

Was ist bei diesem Beweisversuch NICHT gut umgesetzt?

Was ist bei diesem Beweisversuch gut umgesetzt?

Code:

Behauptung: „Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade.“

Beweisversuch 2:

Wir haben die Zahlen in 2 Zeilen dargestellt. Wenn man zeilenweise Zweierpaare einkreist, dann bleibt kein Plättchen übrig.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐

Inwieweit handelt es sich bei obigem Beweisversuch um einen guten Beweis?

Beantworten Sie dafür die folgenden Fragen:

Was ist bei diesem Beweisversuch **NICHT** gut umgesetzt?

Was ist bei diesem Beweisversuch gut umgesetzt?

Code:

Behauptung: „Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade.“

Beweisversuch 3:



Man sieht einen Pfeil im Bild, der sagt, dass Plättchen verschoben wurden. Das zweite Bild zeigt ein Quadrat mit Seitenlänge 2. Es wird eine gerade Zahl dargestellt.

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Ich habe das Gefühl, diesen
Beweisversuch verstanden zu haben.

Stimme gar nicht zu	Stimme eher nicht zu	Stimme eher zu	Stimme voll zu
☐	☐	☐	☐

Inwieweit handelt es sich bei obigem Beweisversuch um einen guten Beweis?

Beantworten Sie dafür die folgenden Fragen:

Was ist bei diesem Beweisversuch **NICHT** gut umgesetzt?

Was ist bei diesem Beweisversuch gut umgesetzt?

Code:

--	--	--	--	--	--

Eigener Beweis

Formulieren Sie nun selbst einen **beispielgebunden ikonischen** Beweis zu der Behauptung „Wenn man zwei Zahlen im Abstand 2 addiert, dann ist die Summe immer gerade.“